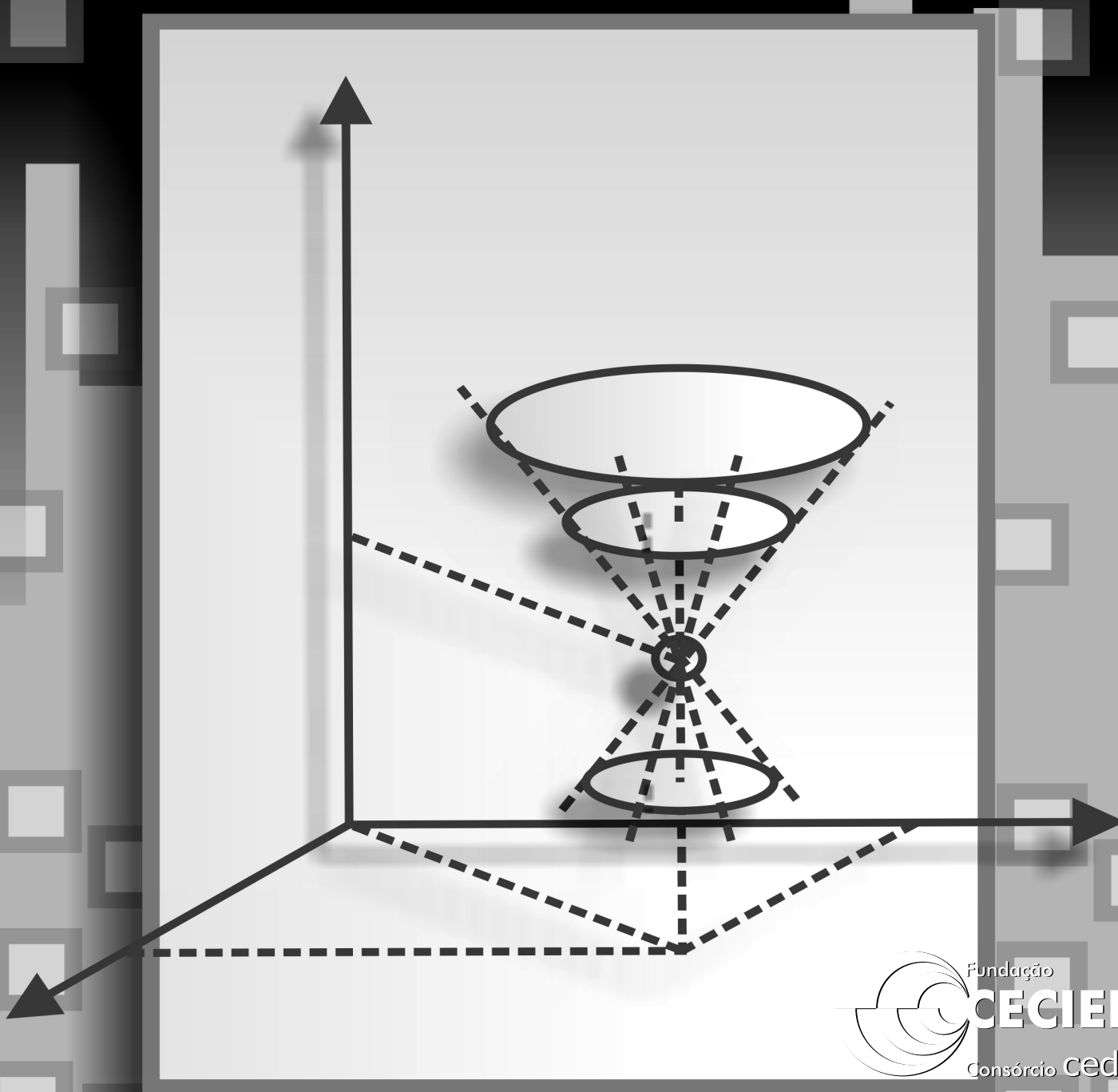


## Física 4B







Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

## Física 4B

Volume único - Módulos 1 e 2  
2ª edição

Paulo A. Maia Neto

Paulo H. Souto Ribeiro

Ruynet L. de Matos Filho



GOVERNO DO  
**Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério  
da Educação



Apoio:



**FAPERJ**

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo  
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001

Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

## Presidente

Masako Oya Masuda

## Vice-presidente

Mirian Crapez

## Coordenação do Curso de Física

Luiz Felipe Canto

## Material Didático

### ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Paulo A. Maia Neto

Paulo H. Souto Ribeiro

Ruynet L. de Matos Filho

### COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

### DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Luciana Messeder

Marcelo Bastos Matos

### COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM

Maria Angélica Alves

### COORDENAÇÃO DE AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Débora Barreiros

### AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Ana Paula Abreu-Fialho

Aroaldo Veneu

## Departamento de Produção

### EDITORA

Tereza Queiroz

### REVISÃO TIPOGRÁFICA

Elaine Bayma

Marcus Knupp

### COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

### PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

### ILUSTRAÇÃO

Fabiana Rocha

### CAPA

Fabiana Rocha

### PRODUÇÃO GRÁFICA

Patricia Seabra

Copyright © 2006, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

M217f

Maia Neto, Paulo A.

Física 4B. v. único 2ª ed. / Paulo A. Maia Neto;  
Paulo H. Souto Ribeiro; Ruynet Lima de Mota Filho.  
– Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.  
200p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-530-8

1. Dinâmica relativística. 2. O efeito fotoelétrico  
e os quanta de luz. 3. O modelo atômico de Bohr. 4.  
Espectroscopia I. Ribeiro, Paulo H. Souto. II. Matos  
Filho, Ruynet L. de. III. Título.

CDD: 530.1

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**  
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia**  
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO  
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**  
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Vieiralves

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**  
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitora: Malvina Tania Tuttman



**SUMÁRIO****Módulo 1****Aula 1 – Eletromagnetismo e Relatividade \_\_\_\_\_ 7***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 2 – Tempo, simultaneidade e intervalo relativístico \_\_\_\_\_ 21***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 3 – Dilatação temporal \_\_\_\_\_ 37***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 4 – A transformação de Lorentz \_\_\_\_\_ 57***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 5 – Causalidade relativística \_\_\_\_\_ 77***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 6 – Composição de velocidades e quadrivelocidade \_\_\_\_\_ 97***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 7 – Dinâmica relativística \_\_\_\_\_ 117***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Módulo 2: Apresentação do módulo \_\_\_\_\_ 139****Aula 8 – O efeito fotoelétrico e os quanta de luz \_\_\_\_\_ 143***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 9 – O modelo atômico de Bohr \_\_\_\_\_ 161***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 10 – Espectroscopia com Rede de Difração \_\_\_\_\_ 189***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 11 – Dispersão da luz em um prisma \_\_\_\_\_ 197***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho*



# Aula 1 – Eletromagnetismo e Relatividade

## Meta da Aula

Apresentar o dilema conceitual da Física que motivou a formulação da Teoria da Relatividade Restrita.

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Explicar o princípio da Relatividade, ou de equivalência entre referenciais inerciais.
- Mostrar a incompatibilidade entre o Eletromagnetismo, a Mecânica Newtoniana e o princípio da Relatividade, quando considerados de forma conjunta.

## Pré-requisitos

Para compreender com mais facilidade esta aula, recomendamos que você reveja os conceitos de:

- Referenciais inerciais e a lei de composição de velocidades de Galileu: Física 1, Módulo 2, Aula 3.
- Ondas eletromagnéticas: Física 4A, Módulo 1, Aula 2.
- Interferômetro de Michelson: Física 4A, Módulo 2, Aula 7.

## Introdução

Neste momento do curso, você já possui os pré-requisitos necessários para ser introduzido a um dos maiores momentos da ciência no século XX: a Teoria da Relatividade, de Albert Einstein. Ao final deste módulo, você será capaz de entender a Teoria da Relatividade na sua versão restrita ou especial. Ao longo da presente aula, você começará a entender as dificuldades conceituais que deflagraram o trabalho de Einstein, revolucionando a Física no início do século passado. Ainda nos dias atuais, a Teoria da Relatividade desperta perplexidade, pelo questionamento das noções do senso comum ligadas à definição de tempo e simultaneidade.

A Teoria do Eletromagnetismo de Maxwell, estudada no Módulo 1, foi um dos grandes trunfos da ciência no século XIX. Fenômenos físicos aparentemente desconcorrelacionados, envolvendo a eletricidade, o magnetismo e a ótica, passaram a ser compreendidos em termos de um único conjunto de leis e princípios físicos fundamentais.

Como vimos na Aula 2 de Física 4A, uma consequência fundamental da teoria de Maxwell é a propagação de ondas eletromagnéticas. O exemplo mais importante de onda eletromagnética é a luz. Ao observarmos o céu à noite, detectamos a luz emitida por estrelas muito distantes. Para chegar até nós, a luz se propaga através do espaço vazio, ou **vácuo**, com a velocidade

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s.} \quad (1.1)$$

De acordo com essa equação, constantes fundamentais associadas à eletricidade (a permissividade elétrica do vácuo  $\epsilon_0$ ) e ao magnetismo (a permeabilidade magnética do vácuo  $\mu_0$ ) determinam a velocidade de propagação da luz no vácuo  $c$ . Portanto, essa equação resume a unificação da eletricidade, do magnetismo e da ótica sob uma mesma teoria fundamental, descrita pelas Equações de Maxwell.

Todas as ondas eletromagnéticas, e não apenas a luz, se propagam no vácuo com a velocidade  $c$ , não importando o valor do comprimento de onda, nem os detalhes do processo de geração da onda — por exemplo, se o emissor da onda está ou não em movimento. Essa é uma previsão fundamental das equações de Maxwell:  $c$  é uma constante universal da Física, que representa a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo.

Entretanto, a noção de uma velocidade absoluta, representada por uma constante universal, parece estar em conflito direto com algumas das noções básicas da Mecânica, estudadas no curso de Física 1. Vamos relembrar rapidamente alguns desses conceitos e introduzir o **Princípio da Relatividade**:

- O movimento de partículas e a propagação de ondas são descritos do ponto de vista de um **referencial**, associado a um sistema de eixos coordenados. Como exemplo, considere um avião em movimento em relação ao aeroporto. Temos dois referenciais naturais nesse problema: o referencial do avião, que corresponde à perspectiva de observação de um passageiro sentado em seu interior, e o referencial terrestre, que corresponde, por exemplo, à perspectiva de um observador em repouso no aeroporto.

- As leis de Newton valem numa classe especial de referenciais: **os referenciais inerciais**. Qualquer referencial em movimento com velocidade constante em relação a um referencial inercial também é inercial. Como essa velocidade é arbitrária, há uma infinidade de referenciais inerciais, cada um dos quais em movimento relativo com velocidade constante em relação a qualquer outro. Em muitas situações, o referencial terrestre pode ser considerado inercial como boa aproximação. Nesse caso, o referencial do avião é inercial se ele se move em relação ao aeroporto com velocidade constante.
- **Princípio da Relatividade: a equivalência entre os referenciais inerciais**. Como as leis da Mecânica são as mesmas em todos os referenciais inerciais, é impossível, por uma questão de primeiros princípios, distinguir entre dois referenciais inerciais por meio de uma experiência mecânica. Vamos tomar, como Galileu, o exemplo de um navio em movimento. Se a velocidade é constante (movimento uniforme), então o referencial em que o navio está em repouso é inercial. Nesse caso, qualquer experimento mecânico feito no interior do navio fornece os mesmos resultados que seriam obtidos no referencial terrestre. Por exemplo, podemos pendurar uma bola de ferro no teto e verificar que sua posição de equilíbrio será vertical, mesmo que o navio esteja em alta velocidade. Mais geralmente, podemos supor que todas as leis da Física, e não só as da Mecânica, são as mesmas em todos os referenciais inerciais.

Em consequência desse princípio, não há como descobrir se o navio está ou não em movimento uniforme, se estivermos no porão do navio, sem janelas para olhar para fora e verificar se há movimento em relação a alguma referência externa ao navio. Não há como definir o estado de repouso absoluto ou de movimento uniforme absoluto: apenas o movimento *relativo* tem significado físico. Isso explica por que ficamos confusos quando estamos no interior de um trem inicialmente estacionado ao lado de um outro trem. Quando há movimento relativo entre os dois trens, pode ser difícil decidir qual dos dois está em repouso em relação à estação. Apenas quando o trem está acelerado podemos verificar o estado de movimento: basta pendurar uma bola no teto e verificar que a sua posição de equilíbrio não é vertical, ou que ela oscila mesmo estando inicialmente na vertical e em repouso em relação ao trem.

- Apesar da completa equivalência entre os referenciais inerciais, a descrição do movimento de uma dada partícula é diferente em dois referenciais distintos. Em particular, a velocidade  $\vec{v}$  de uma dada partícula em relação a um referencial  $\mathcal{R}$  difere da velocidade  $\vec{v}'$  da mesma partícula em relação a um outro referencial  $\mathcal{R}'$  pela relação:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \quad (1.2)$$

onde  $\vec{V}$  é a velocidade do referencial  $\mathcal{R}'$  em relação a  $\mathcal{R}$ . Essa relação é a lei de composição de velocidades de Galileu.

## Velocidades de propagação de ondas em diferentes referenciais

Vamos agora examinar a propagação da luz a partir das perspectivas de dois referenciais distintos. Se, no referencial  $\mathcal{R}$ , a velocidade de propagação é  $c$ , então, de acordo com a lei de composição de velocidades de Galileu, Equação (6.25), a velocidade no referencial  $\mathcal{R}'$ , em movimento com velocidade  $V$  ao longo da mesma direção e sentido da propagação da luz, seria  $c - V$ . De acordo com esse argumento, a velocidade da luz valeria  $c$  apenas num referencial específico. Como a velocidade  $c$  dada pela Equação (1.1) foi derivada das equações de Maxwell, seria preciso concluir também que estas só valeriam nesse referencial especial. Que referencial especial seria esse?

Para ondas numa corda vibrante, por exemplo, o referencial natural é aquele em que a corda está globalmente em repouso (por “natural”, deve-se entender a escolha que resulta na mais simples descrição possível para o problema). Nesse referencial, cada ponto da corda executa um movimento transversal à direção de extensão da corda, à medida que a onda se propaga ao longo dessa direção. Conforme estudado no curso de Física 2, a velocidade de propagação depende das propriedades físicas da corda: a sua densidade  $\mu$  e a tensão  $T$ . No referencial de repouso da corda,  $\mathcal{R}$ , a velocidade de propagação de ondas na corda vale  $\sqrt{T/\mu}$ .

Outro exemplo importante de onda mecânica é o som. Em muitos filmes de ficção científica, batalhas espaciais são acompanhadas de forte barulho de explosões. Entretanto, no espaço entre os planetas e as estrelas não há propagação de som! Todos os tipos de onda mecânica correspondem à propagação de perturbações de um meio material. Portanto, onde não há meio material, não há propagação de ondas mecânicas.

**Exercício 1.1**

Quando dizemos que a velocidade do som no ar vale cerca de 340m/s, de qual referencial estamos falando?

Resposta comentada: para ondas mecânicas, o referencial natural é sempre aquele em que o meio material está globalmente em repouso, conforme discutimos no exemplo da corda vibrante. Portanto, para o som, a velocidade vale 340m/s no referencial de repouso do ar. Quando não há vento, esse referencial coincide com o referencial terrestre.

Durante o século XIX, e mesmo nas primeiras décadas após a formulação do Eletromagnetismo por Maxwell, acreditava-se que a luz também só poderia se propagar através de um meio material. Então deveria existir um meio material ocupando todo o espaço entre as estrelas e os planetas, já que a luz se propaga das estrelas até o nosso planeta. Este meio material hipotético, conhecido pelo nome de *éter*, estaria em repouso em relação às estrelas. Para ser consistente com o caráter transversal das ondas eletromagnéticas, o éter deveria ser rígido, como no exemplo da corda vibrante tensionada. Ao mesmo tempo, o éter não poderia oferecer resistência ao movimento dos corpos celestes, o que parecia estar em contradição com a primeira condição!

Se acreditássemos na existência do éter, então o referencial especial onde valeriam as equações de Maxwell, e onde a velocidade da luz seria  $c$ , seria o referencial Copernicano das estrelas fixas, já mencionado na Aula 3 de Física 1A, pois nele o éter estaria em repouso. No referencial terrestre, a velocidade de propagação de um feixe de luz ao longo da direção de movimento do planeta Terra seria  $c - V$ , onde  $V$  é a velocidade da Terra.

**Exercício 1.2**

Calcule a razão entre a velocidade da Terra e a velocidade da luz no vácuo  $V/c$ . Qual seria a variação percentual da velocidade de propagação medida no referencial terrestre em razão do movimento da Terra em relação ao éter?

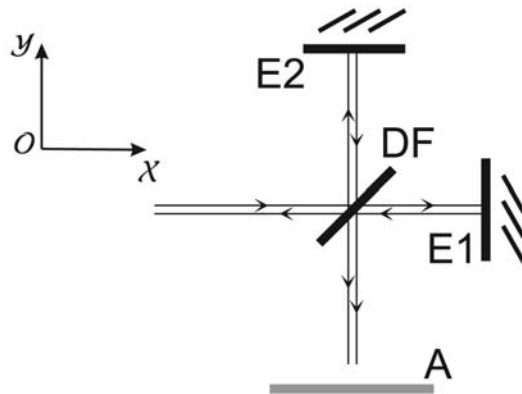
A hipótese do éter era importante para justificar a existência de um referencial privilegiado, em analogia ao caso de ondas sonoras e outras ondas mecânicas. Entretanto, ainda no final do século XIX, a hipótese de um éter material foi aos poucos sendo substituída pelo conceito de um éter “vazio”, que seria equivalente a um referencial privilegiado, onde valeriam as equações de Maxwell, sem a justificativa decorrente da presença de um meio material. Isso implicava abandonar o princípio de relatividade introduzido por Galileu. Assim, o éter vazio, como referencial privilegiado, introduziria o conceito de movimento absoluto, um preço alto a ser pago, mas aparentemente necessário para a interpretação da constante universal  $c$  como uma velocidade absoluta associada à propagação da luz no espaço vazio.

Ao longo do século XIX, foram realizadas várias tentativas de medir a modificação da velocidade da luz em experimentos terrestres. Experimentos terrestres são aqueles em que a fonte e o detector da luz estão na Terra. Isso exclui, por exemplo, experimentos de observação de estrelas. Os experimentos terrestres tinham duas interpretações diferentes, dependendo do modelo suposto para o éter. No caso de um éter material, esses experimentos mediriam o movimento da Terra em relação a um segundo corpo material, o éter. No problema do porão do navio, já discutido anteriormente, isso seria análogo a ter escotilhas abertas: o movimento do navio em relação ao ar seria detectado graças ao aparecimento de uma corrente de ar. Esse efeito poderia ser observado pela alteração da velocidade de propagação do som medida no porão. O éter material seria o análogo do ar para a propagação da luz, e a medida terrestre da velocidade da luz iria detectar o efeito do “vento” do éter.

No contexto de um éter vazio, a interpretação do experimento seria bem mais estranha. A modificação da velocidade da luz seria indicadora de movimento absoluto da Terra, isto é, não em relação a um outro corpo material, mas sim em relação a um suposto referencial particular abstrato. Seria o análogo de detectar o estado de movimento uniforme do navio, por uma experiência realizada no interior do seu porão, sem nenhum contato ou interação com o exterior.

Todos os experimentos terrestres obtiveram uma modificação nula para a velocidade da luz. O experimento mais preciso na época, e com maior repercussão, foi publicado por Albert Michelson, em colaboração com Edward Morley, em 1887. Tratava-se de um aprimoramento do interferômetro desenvolvido por Michelson alguns anos antes. Você já trabalhou com o inter-

ferômetro de Michelson na Aula 7 do Módulo 2 de Física 3A. Agora, você está descobrindo que, além das suas várias aplicações práticas, esse sistema teve uma enorme importância na história da Física! O esquema básico do interferômetro de Michelson é apresentado na **Figura 1.1**. Um feixe de luz se propaga ao longo da direção do eixo  $X$  até ser dividido pelo divisor de feixe DF em dois feixes que se propagam ao longo das direções  $X$  e  $Y$ . Esses dois caminhos ortogonais são os braços do interferômetro. O feixe que segue pelo braço ao longo da direção  $X$  é refletido pelo espelho E1, enquanto o outro feixe é refletido pelo espelho E2. Eles são recombinados por DF, e a intensidade resultante é observada sobre o anteparo A. Ela é o resultado da interferência entre os dois feixes, que depende da diferença entre as fases acumuladas por cada feixe no seu caminho de ida e volta entre DF e E1 ou E2.



**Figura 1.1:** Interferômetro de Michelson.

Essa diferença de fase é modificada se alteramos a velocidade de propagação da luz em um dos braços do interferômetro. Como você verificou na Aula 7, podemos observar esse efeito se, por exemplo, modificarmos o índice de refração do meio que preenche um dos braços.

Suponha agora que o eixo  $X$  coincide com a direção e o sentido da velocidade  $V$  de propagação do planeta em relação ao referencial, das estrelas fixas (nesse referencial, o éter estaria em repouso). Conforme já comentamos, de acordo com a lei de composição de velocidades de Galileu, a velocidade de propagação da luz em relação ao referencial terrestre seria  $c - V$  para o caminho de ida ao longo do braço alinhado com o eixo  $X$ . Para o caminho de volta ao longo desse mesmo braço, a velocidade seria  $c + V$ . Ao longo do outro braço, a velocidade de propagação no referencial terrestre teria um

terceiro valor, diferente dos anteriores e de  $c$ . Se todas essas previsões fossem verdadeiras, seria possível observar uma modificação da intensidade projetada sobre o anteparo A ao *girar* o interferômetro como um todo, pois, nesse caso, estaríamos modificando as velocidades de propagação em cada braço. Michelson e Morley montaram o interferômetro sobre uma plataforma girante, e obtiveram uma modificação nula (dentro da incerteza experimental) da intensidade ao girar o interferômetro.

Como conciliar esses resultados negativos com a física conhecida na época? Poderíamos imaginar que o éter material estivesse confinado à sala do laboratório e fosse arrastado pelo movimento terrestre, assim como o ar no porão é solidário ao movimento do navio se as escotilhas estão bem vedadas. Para descartar essa improvável possibilidade, Michelson e Dayton Miller montaram, em 1904, o aparato experimental ao ar livre, no topo de uma colina, e mais uma vez obtiveram resultado nulo. A possibilidade de o éter ser arrastado pelo movimento da Terra numa escala planetária (éter em repouso em relação à Terra) já havia sido descartada, em função de observações astronômicas das posições aparentes de estrelas.

A situação de crise foi sintetizada por Lord Kelvin, um dos mais renomados cientistas da época, ao comentar que os resultados de Michelson e Morley representavam uma “nuvem do século XIX sobre a teoria dinâmica da luz”, em palestra para a *Royal Institution*, em 1900. Lord Kelvin se referia à teoria eletromagnética da luz desenvolvida por Maxwell. Várias teorias alternativas à do eletromagnetismo de Maxwell foram propostas durante esse período de crise, mas nenhuma sobreviveu à passagem do tempo.

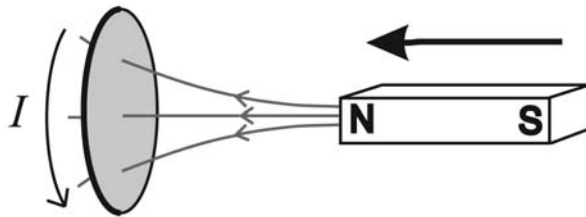
## Einstein: Relatividade e Eletromagnetismo sim, Física Newtoniana não

No início do século XX, a Física se encontrava num impasse. Parecia difícil conciliar o eletromagnetismo de Maxwell com o princípio de relatividade, no quadro da Mecânica de Galileu e Newton. A solução para o impasse foi obtida por Albert Einstein de uma forma extremamente audaciosa. Em vez de modificar o Eletromagnetismo de Maxwell, era necessário romper com a Mecânica Newtoniana. A Teoria da Relatividade foi uma das duas grandes revoluções científicas do século XX – a segunda revolução foi a Mecânica Quântica, que também contou com contribuições fundamentais de Einstein.

**Albert Einstein** nasceu em Ulm, Alemanha, em 1879. Foi um dos mais importantes cientistas de todos os tempos. Além da teoria da relatividade, Einstein contribuiu de forma decisiva no desenvolvimento da física quântica e da mecânica estatística.

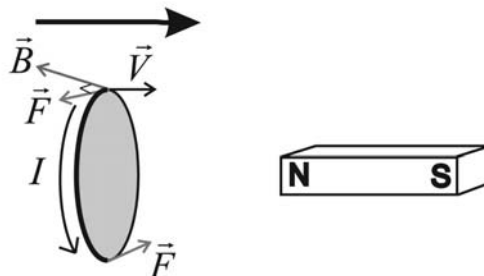
Einstein apresentou as bases da Teoria da Relatividade Restrita no artigo “Sobre a Eletrodinâmica de Corpos em Movimento”, publicado pela revista alemã *Annalen der Physik* em 1905. Na introdução do artigo, Einstein argumenta que o eletromagnetismo não parece ser intrinsecamente incompatível com a idéia, central ao princípio de relatividade, de que apenas o movimento relativo tem sentido físico.

Para ilustrar esse argumento, Einstein tomou o seguinte exemplo: considere uma espira de corrente e um magneto (ímã) alinhado na direção perpendicular ao plano da espira, conforme indicado na **Figura 1.2**. Suponha que a espira esteja em repouso e o magneto se aproxime. Em consequência dessa aproximação, o módulo do campo magnético cresce num ponto qualquer da superfície  $S$ , interna ao contorno da espira. Pela Lei de Faraday, um campo elétrico é, então, induzido no contorno da espira, fazendo aparecer uma força eletromotriz  $\mathcal{E}$  e uma corrente  $I = \mathcal{E}/R$ , onde  $R$  é a resistência da espira.



**Figura 1.2:** Espira em repouso, magneto em movimento.

Suponha, agora, que seja o magneto que está em repouso e a espira em movimento com velocidade  $\vec{V}$ , como mostra a **Figura 1.3**. Nesse caso, o campo magnético num dado ponto fixo do espaço é constante, e não há campo elétrico induzido. No entanto, a força de Lorentz,  $\vec{F} = q\vec{V} \times \vec{B}$ , também dará origem a uma força eletromotriz.



**Figura 1.3:** Espira em movimento, magneto em repouso.

Embora essas duas situações pareçam distintas, em ambas, a força eletromotriz é dada por:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

onde  $\Phi$  é o fluxo de campo magnético através da espira. Assim, de acordo com o eletromagnetismo, a corrente induzida na espira só depende do *movimento relativo* entre o magneto e a espira, não importando se é a espira ou o magneto que se movimenta. Se o movimento relativo é uniforme, então as descrições, nos dois referenciais inerciais de repouso da espira e do magneto, fornecem o mesmo resultado final para a corrente na espira, embora, em cada referencial, a explicação física para a corrente pareça bastante diferente. Einstein, então, conclui que “exemplos desse tipo, somados às tentativas fracassadas de detectar o efeito do movimento da Terra relativo ao ‘meio de propagação da luz’, sugerem que os fenômenos da Eletrodinâmica, assim como os da Mecânica, não possuem propriedades associadas à idéia de repouso absoluto.”

Einstein se referia ao éter ao mencionar o “meio de propagação da luz” (entre aspas no texto original). Embora o artigo de 1905 não mencione o experimento Michelson e Morley, Einstein seguramente conhecia outros experimentos desse tipo, dedicados à detecção de uma suposta variação da velocidade da luz em experimentos terrestres. Para Einstein, os resultados desses experimentos confirmavam a sua idéia intuitiva de que as leis do eletromagnetismo deveriam se aplicar em todos os referenciais inerciais. Assim como os fenômenos mecânicos, nenhum fenômeno eletromagnético seria capaz, por uma questão de primeiros princípios, de definir o estado de repouso

absoluto, ou de movimento uniforme absoluto. Em particular, experimentos terrestres de medida da velocidade da luz jamais poderiam medir uma modificação devido ao movimento da Terra. Essa modificação só poderia aparecer se existisse o éter material; nesse caso, seria possível, a princípio, detectar o efeito do movimento da Terra em relação a esse corpo hipotético.

Einstein descartou tanto o éter material como o éter vazio associado a um referencial privilegiado. Se as equações de Maxwell valem em todos os referenciais inerciais (princípio da relatividade), então, em todos eles, a luz se propaga no vácuo com a mesma velocidade  $c = 3,0 \times 10^8 \text{m/s}$ , porque a equação para as ondas eletromagnéticas é uma consequência matemática das equações de Maxwell. Essa hipótese audaciosa é claramente incompatível com a lei de composição de velocidades de Galileu, Equação (6.25). Por sua vez, essa lei está na base de construção da Mecânica de Newton. Assim, a teoria de Einstein representou uma ruptura com uma das teorias mais bem-sucedidas da história da Física, que, durante séculos, tinha representado o papel de exemplo (ou paradigma) para a ciência de uma forma geral.

O ponto de partida para a revisão da Mecânica Newtoniana é a reformulação do conceito de **tempo**, tendo como base a hipótese, elevada por Einstein ao status de postulado, de que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais. Na próxima aula, veremos como a teoria da relatividade é construída a partir desses dois postulados: o princípio de relatividade e a invariância da velocidade da luz.

## Conclusão

Nesta aula, você pôde entender o dilema conceitual que motivou a formulação da Teoria da Relatividade Restrita. A Teoria do Eletromagnetismo introduz uma constante física universal representando uma velocidade *absoluta*: a velocidade da luz no vácuo  $c$ . Isto é incompatível com a lei de composição de velocidades de Galileu, se acreditarmos no princípio da Relatividade. Einstein optou por manter o eletromagnetismo e o princípio da relatividade e descartar a lei de composição de velocidades. Para isso, teve de romper com o conceito de tempo absoluto e, como consequência, reformular completamente a Mecânica Newtoniana.

## Atividades finais

1. Explique o Princípio da Relatividade.
2. Enuncie a lei de composição de velocidades de Galileu e discuta alguns exemplos de aplicação tomando situações práticas da vida diária.
3. De que variáveis depende a velocidade de propagação de uma onda mecânica num meio material? A velocidade depende da energia transportada pela onda? Depende das propriedades do meio material? Forneça alguns exemplos.
4. As cordas de um violão podem ser afinadas pela variação da tensão  $T$  da corda. Explique o que muda na propagação de ondas na corda ao variar  $T$ .
5. Explique os diferentes modelos de éter luminoso, propostos ao longo do século XIX.
6. Em que sentido a hipótese de um éter vazio violaria o princípio de relatividade?
7. Explique o objetivo do experimento de Michelson e Morley. Qual foi o resultado obtido?
8. Mostre que o postulado de que a velocidade da luz vale  $c$  em todos os referenciais inerciais é incompatível com a lei de composição de velocidades de Galileu.

## Resumo

De acordo com o princípio da relatividade, as leis da Física valem em todos os referenciais inerciais, que fornecem, portanto, descrições equivalentes de um determinado fenômeno. Em particular, as Equações de Maxwell valem em todos os referenciais inerciais. Em consequência, em todos eles, a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas no vácuo possui o mesmo valor. Esse resultado está em contradição com a lei de composição de velocidades de Galileu! Para derivar essa lei, é preciso adotar o conceito Newtoniano de tempo absoluto, isto é, supor que o tempo é o mesmo para todos os referenciais inerciais. Einstein descartou essa hipótese (que parece tão natural) e reformulou o conceito de tempo, levando a uma completa revolução das leis da Mecânica.

## E ao longo das próximas aulas...

... veremos em detalhe como Einstein reformulou os conceitos de tempo e simultaneidade, rompendo com o conceito Newtoniano de tempo absoluto. Você descobrirá os estranhos efeitos previstos pela Teoria da Relatividade Restrita: a dilatação temporal, a contração de Lorentz e vários outros!



## Aula 2 – Tempo, simultaneidade e intervalo relativístico

### Metas da aula

Discutir as noções de tempo e simultaneidade na teoria da relatividade e definir o intervalo relativístico.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Mostrar que tempo e simultaneidade não são absolutos.
- Definir o intervalo relativístico no espaço-tempo e explicar a sua propriedade de invariância.

### Pré-requisito

A leitura da aula anterior é recomendável.

### Introdução: os postulados da Relatividade Restrita

Na aula anterior, discutimos o impasse conceitual que houve na Física, na virada do século XIX para o século XX. Para conciliar o eletromagnetismo de Maxwell com o princípio da relatividade, Einstein elaborou uma teoria que representava uma ruptura com a Mecânica de Newton, revolucionando a Física e as noções de tempo e simultaneidade. A teoria da relatividade restrita de Einstein é derivada a partir de dois postulados fundamentais:

- **Princípio da Relatividade.** As leis da Física, e em particular as leis do eletromagnetismo, são as mesmas em qualquer referencial inercial.
- **Invariância da velocidade da luz.** No espaço vazio, as ondas eletromagnéticas se propagam com a mesma velocidade  $c$  em todos os referenciais e independentemente do estado de movimento da fonte.

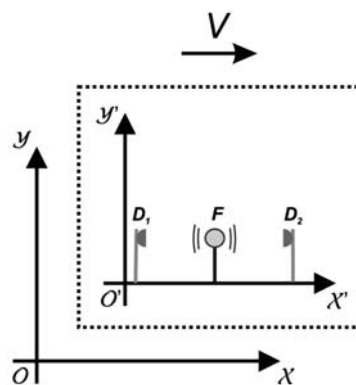
O primeiro postulado foi discutido em detalhe na aula anterior. Também já comentamos que o segundo postulado de Einstein é claramente incompatível com a lei de composição de velocidades de Galileu. O que há de

errado na derivação dessa lei? O problema está na hipótese implícita de tempo absoluto: supõe-se que o tempo  $t$  medido pelos diferentes referenciais é o mesmo. Ao analisar detalhadamente o problema da contagem de tempo, tomando como base os dois postulados anteriores, você verá, nesta aula, que os intervalos de tempo entre dois eventos não são, em geral, iguais para diferentes referenciais.

## Tempo e simultaneidade

O conceito de tempo está diretamente relacionado à noção de eventos simultâneos. No artigo publicado no *Annalen der Physik*, de 1905, Einstein escreve: “... todos os nossos julgamentos envolvendo o tempo são sempre julgamentos de *eventos simultâneos*. Se, por exemplo, eu digo, ‘aquele trem chega aqui às 7:00 horas’, quero dizer algo assim: ‘a posição do ponteiro de meu relógio no número 7 e a chegada do trem são eventos simultâneos’”.

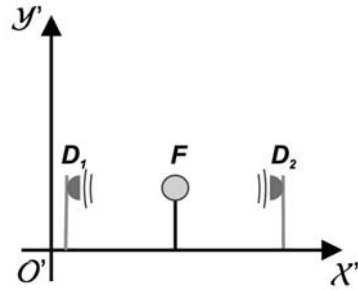
Vamos demonstrar, a partir dos dois postulados de Einstein, que a noção de simultaneidade não é absoluta: dois eventos que são simultâneos para um determinado referencial inercial ocorrem em instantes de tempo diferentes para outro referencial. Vamos tomar o seguinte exemplo: uma fonte de luz (por exemplo, uma lâmpada),  $F$ , e dois detectores de luz,  $D_1$  e  $D_2$ , são fixados sobre uma plataforma que se movimenta com velocidade  $V$  constante ao longo do eixo  $OX$  do referencial  $S$  (que supomos ser inercial). Como mostra a **Figura 2.1**,  $D_1$ ,  $F$  e  $D_2$  estão alinhados ao longo da direção paralela ao eixo  $OX$ , e as distâncias entre  $D_1$  e  $F$  e entre  $F$  e  $D_2$  são idênticas.



**Figura 2.1:** A fonte  $F$  e os detectores  $D_1$  e  $D_2$  estão em repouso em relação a  $S'$  (sistema de eixos coordenados  $O'X'Y'$ ), que se move em relação a  $S$  (sistema de eixos coordenados  $OXY$ ) com velocidade  $V$ .

O referencial  $S'$  (sistema de coordenadas  $O'X'Y'$ ) acompanha o movimento da plataforma e, portanto, está em movimento em relação a  $S$  com velocidade  $V$  ao longo do eixo  $OX$ . Por construção, a fonte e os detectores estão em repouso no referencial  $S'$ . Dizemos, então, que o referencial  $S'$  é o *referencial próprio* ou *referencial de repouso* do conjunto formado pela plataforma, fonte e detectores. Como  $S'$  se move com velocidade constante em relação ao referencial inercial  $S$ , então  $S'$  também é inercial.

Num dado instante, a fonte  $F$  é ligada. A luz emitida por  $F$  se propaga até chegar aos detectores  $D_1$  e  $D_2$ . Pelo princípio da relatividade, a propagação da luz em  $S'$  ocorre como em qualquer outro referencial inercial. Para ambos os sentidos de propagação ao longo do eixo  $O'X'$  a velocidade vale  $c$ . Como os detectores  $D_1$  e  $D_2$  estão à mesma distância da fonte  $F$ , eles irão começar a detectar luz *simultaneamente* (veja a **Figura 2.2**).



**Figura 2.2:** Emissão e detecção do ponto de vista de  $S'$ .

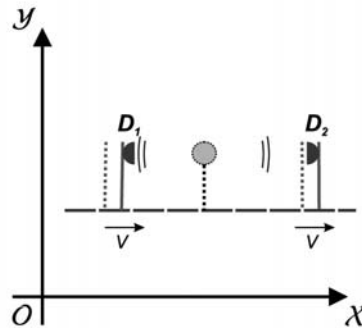
Assim, dizemos que os eventos

- início da detecção de luz por  $D_1$  e
- início da detecção de luz por  $D_2$

são simultâneos do ponto de vista do referencial  $S'$ .

Como é a descrição desses mesmos dois eventos do ponto de vista do referencial  $S$ ? Pelo postulado da invariância da velocidade da luz, o estado de movimento da fonte  $F$  (com velocidade  $V$ ) não modifica a velocidade de propagação da luz, que também vale  $c$  para os dois sentidos de propagação ao longo do eixo  $OX$ . Enquanto a luz se propaga a partir de  $F$ , o detector  $D_1$  se aproxima e o detector  $D_2$  se afasta de  $F$ . Na **Figura 2.3**, mostramos as posições de  $D_1$  e  $D_2$  no momento da detecção de luz por  $D_1$ , junto com a posição em que  $F$  estava no momento da emissão da luz. Como a velocidade

é a mesma nos dois sentidos de propagação, a detecção em  $D_1$  é anterior à detecção em  $D_2$  do ponto de vista do referencial  $S$ .



**Figura 2.3:** Emissão e detecção do ponto de vista de  $S$ . As linhas cheias indicam as posições dos detectores  $D_1$  e  $D_2$  no instante em que a luz é detectada por  $D_1$ . As linhas tracejadas indicam as posições dos detectores e da fonte no instante em que a luz foi emitida.

Em conclusão, os dois eventos são simultâneos do ponto de vista do referencial  $S'$ , mas não do ponto de vista do referencial  $S$ . Assim, dizemos que a simultaneidade é *relativa*, para indicar que ela não é uma propriedade absoluta ou intrínseca de dois eventos dados, devendo sempre ser definida em relação a um dado referencial.

Existem também referenciais em que a detecção por  $D_1$  ocorre *depois* da detecção por  $D_2$ ! Você vai analisar um exemplo desse tipo no exercício a seguir.

#### Exercício 2.1

Considere o referencial  $S''$ , que se desloca com velocidade  $V$  no referencial  $S'$  ao longo do eixo  $OX'$ . Mostre que, no referencial  $S''$ , a detecção de luz por  $D_1$  ocorre *depois* da detecção por  $D_2$ .

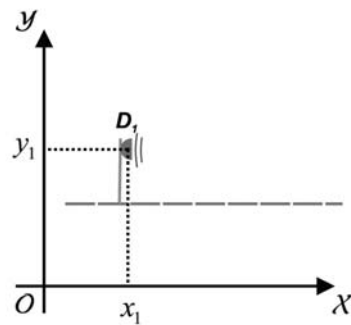
**Comentário:** Você deve descrever, por meio de um desenho análogo ao da **Figura 2.3**, o movimento da fonte e dos detectores do ponto de vista do referencial  $S''$ . Nesse desenho, os detectores se movimentam para a esquerda (sentido negativo do eixo  $OX''$  do referencial  $S''$ ) com uma velocidade de módulo  $V$ .

Talvez você esteja se perguntando: a detecção por  $D_1$  realmente ocorre antes, depois ou é simultânea à detecção por  $D_2$ ? Ou de outra forma: qual dos referenciais fornece a descrição “correta” dos eventos? Essa é a pergunta natural para todos nós, impregnados pela noção intuitiva de tempo absoluto. A resposta da teoria da relatividade é chocante: todos os referenciais inerciais são igualmente “bons”, e o ordenamento temporal de dois eventos dados é muitas vezes diferente para diferentes referenciais.

Voltaremos a discutir detalhadamente esse ponto mais adiante no curso, depois de termos em mãos algumas das ferramentas formais da teoria da relatividade.

## Espaço-tempo relativístico

Um evento é descrito por um determinado referencial  $S$  por meio do tempo  $t$  em que ele ocorreu e das três coordenadas cartesianas  $x, y, z$  que caracterizam a posição espacial do evento. Por exemplo, o evento “detecção de luz por  $D_1$ ” é caracterizado pelo tempo  $t_1$  em que ele ocorreu e pelas três coordenadas cartesianas  $x_1, y_1, z_1$  indicadas na **Figura 2.4** (nesse exemplo  $z_1 = 0$  porque o detector está no plano  $OXY$ ), que determinam a posição de  $D_1$  no instante da detecção.



**Figura 2.4:** Coordenadas espaciais do evento “detecção por  $D_1$ ”.

No referencial  $S'$ , as coordenadas  $x'_1, y'_1, z'_1$  desse mesmo evento, “detecção de luz por  $D_1$ ”, são diferentes das coordenadas  $x_1, y_1, z_1$ . Para a Mecânica Newtoniana, as coordenadas espaciais estão relacionadas pela transformação de Galileu, que você estudou na Aula 13 de Física 1A. Perceba, então, que as coordenadas *espaciais* de um evento são diferentes para referenciais diferentes, ao passo que o tempo, na Mecânica Newtoniana, é um parâmetro absoluto, independente de referencial. Em contrapartida, como

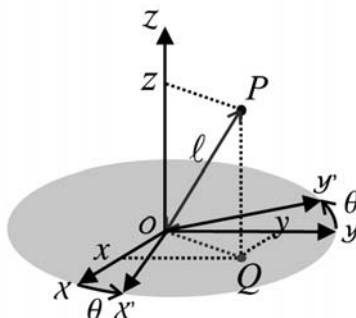
Hendryk A. **Lorentz** nasceu em Arnhem, Holanda, no ano de 1853. Contribuiu de forma significativa para a elaboração da teoria do eletromagnetismo, com ênfase nas aplicações em óptica e na teoria do elétron. Para fazer justiça às suas contribuições nessa área, muitos autores utilizam a expressão eletrodinâmica de Maxwell-Lorentz para designar a teoria do eletromagnetismo. Foi um dos precursores da teoria da relatividade restrita.

a nossa discussão sobre simultaneidade poderia sugerir, na teoria da relatividade o tempo também é um parâmetro relativo, isto é, diferente para diferentes referenciais. Por exemplo, o tempo  $t'_1$  em que ocorreu a detecção por  $D_1$  de acordo com a marcação de tempo no referencial  $S'$  é, em geral, diferente do tempo  $t_1$  em que esse mesmo evento ocorreu de acordo com o referencial  $S$ .

As coordenadas espaciais  $x'_1, y'_1, z'_1$  e o tempo  $t'_1$  estão relacionados às coordenadas  $x_1, y_1, z_1$  e ao tempo  $t_1$  por um conjunto de equações conhecido como transformação de **Lorentz**, que estudaremos em detalhe mais adiante no curso. A transformação de Lorentz mistura as coordenadas espaciais e o tempo. Como tempo e espaço não são entidades separadas na física relativística, usamos as expressões *coordenada temporal* para o tempo, e *coordenadas espaço-temporais* para o conjunto das quatro coordenadas  $(t, x, y, z)$ . Assim, o espaço-tempo da relatividade possui quatro dimensões: uma temporal e três espaciais.

## Rotações espaciais

Como parte da preparação para o estudo da transformação de Lorentz no espaço-tempo quadridimensional, vamos analisar agora um exemplo importante de transformação das coordenadas espaciais: o problema de rotação dos eixos coordenados. Suponha que o referencial  $S'$  esteja em repouso em relação ao referencial  $S$  e que as suas origens coincidam:  $O' = O$ . Os eixos coordenados de  $S'$  são obtidos a partir dos eixos de  $S$  por uma rotação de ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $OZ$ , como mostra a **Figura 2.5**.



**Figura 2.5:** Os eixos coordenados do referencial  $S'$  são obtidos a partir de uma rotação rígida (de ângulo  $\theta$ ) do conjunto de eixos  $OX$  e  $OY$  de  $S$  em torno do eixo  $OZ$ .

Pode-se mostrar que as coordenadas de um certo ponto  $P$  em  $S$  e  $S'$  estão relacionadas pela transformação

$$x' = \cos \theta x + \sin \theta y \quad (2.1)$$

$$y' = -\sin \theta x + \cos \theta y \quad (2.2)$$

$$z' = z. \quad (2.3)$$

Portanto, as coordenadas espaciais  $x$  e  $y$  são misturadas devido à rotação dos eixos em torno do eixo  $OZ$  – note que a coordenada  $z$  não é misturada e permanece inalterada devido à nossa escolha do eixo de rotação.

### Exercício 2.2

Analise a transformação de rotação para o caso particular em que  $\theta = \pi/2$ . Faça um desenho dos eixos de  $S'$  e  $S$ , nesse caso, e explique o resultado da transformação.

**Resposta:**  $x' = y$ ,  $y' = -x$  e  $z' = z$ . O eixo  $OX'$  coincide com o eixo  $OY$ , ao passo que o eixo  $OY'$  tem a mesma direção e sentido oposto ao do eixo  $OX$ .

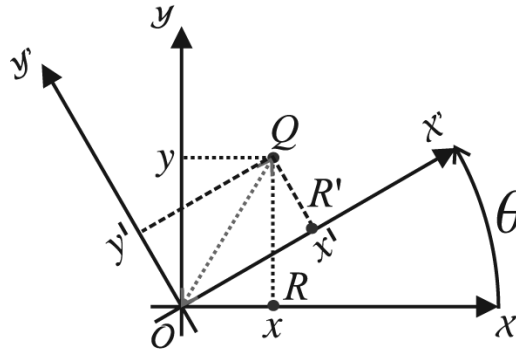
Na **Figura 2.5**, indicamos em destaque a distância  $\ell$  entre o ponto  $P$  e o ponto  $O$ , que aqui representa a origem dos dois sistemas de coordenadas. A distância entre dois pontos é uma propriedade intrínseca do par de pontos considerado, e não do sistema de coordenadas (ou referencial) usado para descrever as suas posições. Portanto, devemos obter o mesmo valor para  $\ell$  quando ela é calculada seja através das coordenadas em  $S$ , seja através de  $S'$ .

Para calcular  $\ell$ , primeiro tomamos a projeção de  $P$  sobre o plano  $OXY$ , que é representada pelo ponto  $Q$  na **Figura 2.5**. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo  $OPQ$ , obtemos  $\ell = \sqrt{\overline{OQ}^2 + z^2}$ . O comprimento  $\overline{OQ}$  pode ser calculado (novamente usando o teorema de Pitágoras) no referencial  $S$  a partir do triângulo  $OQR$  mostrado na **Figura 2.6**:  $\overline{OQ}^2 = x^2 + y^2$ . O resultado final é, então,

$$\ell = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.4)$$

Podemos expressar o comprimento  $\ell$  também em termos das coordenadas em  $S'$ , aplicando o teorema de Pitágoras para o triângulo  $OQR'$ . Usando que  $z = z'$ , obtemos

$$\ell = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \quad (2.5)$$



**Figura 2.6:** O comprimento  $\overline{OQ}$  pode ser calculado através do triângulo  $OQR$  ou através do triângulo  $OQR'$ .

As coordenadas  $x, y, z$  de um dado ponto  $P$  do espaço são modificadas quando rodamos os eixos cartesianos. Entretanto, esse exemplo mostra, pela comparação das Equações (2.4) e (2.5), que uma determinada combinação particular desses três números é invariante – isto é, não muda quando tomamos os valores modificados  $x', y', z'$ : a expressão matemática  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , que representa a distância  $\ell$  entre o ponto  $P$  e a origem. De forma mais genérica, a distância entre dois pontos espaciais quaisquer  $P_1$  e  $P_2$ , dada por

$$\overline{P_1 P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (2.6)$$

onde  $x_1, y_1, z_1$  e  $x_2, y_2, z_2$  são respectivamente as coordenadas de  $P_1$  e  $P_2$  é invariante por qualquer rotação dos eixos coordenados, porque ela representa uma distância (ou comprimento) que é uma propriedade intrínseca do par de pontos  $P_1$  e  $P_2$  e, portanto, independe da escolha dos eixos coordenados. No exercício a seguir, você irá verificar a validade deste resultado por um método mais direto do que a discussão geométrica apresentada anteriormente.

## Exercício 2.3

Mostre que

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \quad (2.7)$$

por substituição direta das Equações (2.1)–(2.3).

**Comentário:** Você vai precisar do resultado  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ .

## Intervalo relativístico

No espaço-tempo quadridimensional da relatividade, podemos definir uma medida para um dado par de eventos análoga à distância entre dois pontos no espaço tridimensional definida pela Equação (2.6). Essa medida, que chamaremos *intervalo relativístico*, é uma propriedade intrínseca do par de eventos considerado e, portanto, é invariante quando tomamos diferentes referenciais inerciais, assim como a distância  $\overline{P_1P_2}$  dada pela Equação (2.6) é invariante por rotações dos eixos coordenados.

Vamos definir e analisar as propriedades do intervalo relativístico tomando como base os dois postulados da teoria da relatividade. Para explorar o postulado de invariância da velocidade da luz, vamos considerar os seguintes dois eventos:

- a fonte  $F$  é ligada e começa a emitir luz;
- o detector  $D$  começa a detectar a luz emitida por  $F$ .

Num certo referencial inercial  $S$ , as coordenadas do evento “fonte é ligada” são  $(t_1, x_1, y_1, z_1)$ . As coordenadas do evento “detecção por  $D$ ” são  $(t_2, x_2, y_2, z_2)$ . A distância percorrida pela luz da fonte até o detector vale

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

de acordo com a Equação (2.6). O tempo transcorrido entre o instante da emissão da luz e o instante da sua detecção vale  $t_2 - t_1$ . Pelo postulado da invariância da velocidade da luz, a velocidade de propagação vale  $c$  no referencial  $S$ , mesmo que a fonte esteja em movimento em relação a  $S$ . Portanto, a distância percorrida satisfaz a relação  $d = c(t_2 - t_1)$  e as coordenadas espaço-temporais dos eventos satisfazem a equação

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = c(t_2 - t_1). \quad (2.8)$$

Se quisermos descrever esses mesmos dois eventos em um outro referencial inercial  $S'$ , as coordenadas espaço-temporais serão, em geral, diferentes:  $(t'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$  para o evento “fonte é ligada” e  $(t'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$  para o evento “detecção por  $D$ ”. Entretanto, a Equação (2.8) continuará sendo satisfeita, já que, pelo postulado da invariância da velocidade da luz, a velocidade de propagação também vale  $c$  em  $S'$ :

$$\sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = c(t'_2 - t'_1). \quad (2.9)$$

O que as coordenadas dos eventos nos referenciais  $S$  e  $S'$  têm em comum? Ambos os conjuntos de coordenadas satisfazem a mesma equação! Já que nosso objetivo é definir um intervalo relativístico que seja invariante quando mudamos de referencial, vamos nos basear nas Equações (2.8) e (2.9), definindo o intervalo relativístico  $\Delta s$  entre os dois eventos através da equação [para o intervalo ao quadrado  $(\Delta s)^2$ ]:

$$(\Delta s)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2. \quad (2.10)$$

Substituindo a Equação (2.8) na Equação (2.10), obtemos um valor nulo para o intervalo entre os dois eventos considerados aqui:  $\Delta s = 0$ . E em relação ao referencial  $S'$ ? Temos

$$(\Delta s')^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2, \quad (2.11)$$

que também se anula devido à Equação (2.9). Portanto, para esse par de eventos, o intervalo  $\Delta s$  é invariante, isto é,  $\Delta s = \Delta s'$ .

Vamos generalizar esse resultado, demonstrando, no quadro a seguir, que o intervalo relativístico entre dois eventos quaisquer, conforme definido pela Equação (2.10), tem sempre o mesmo valor em todos os referenciais inerciais. Nesse curso, vamos apresentar as demonstrações em quadros especiais, que poderiam ser omitidos numa primeira leitura da aula, caso você prefira ter uma visão geral do seu conteúdo antes de entrar nos detalhes mais técnicos. Entretanto, é muito importante que você leia o quadro em algum momento, porque a sua compreensão é fundamental para os objetivos da aula.

Demonstração da invariância do intervalo relativístico

Para referenciais em repouso em relação a  $S$ , a parcela temporal  $c(t_2 - t_1)$  e a parcela espacial  $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$  são separadamente invariantes, e portanto  $\Delta s$  tem o mesmo valor em todos esses referenciais.

Em contrapartida, para um referencial  $S'$  em movimento em relação a  $S$  com velocidade  $\vec{V}$ , o intervalo de tempo entre os dois eventos  $t'_2 - t'_1$  é diferente do intervalo de tempo  $t_2 - t_1$  marcado no referencial  $S$ , o que está diretamente relacionado à ambigüidade da noção de simultaneidade discutida no início da aula. Nesse caso, não é óbvio que o intervalo seja invariante, e é preciso analisar a possibilidade de o valor do intervalo mudar quando passamos de  $S$  para  $S'$ . O intervalo  $\Delta s'$  medido no referencial  $S'$  seria então uma função do intervalo  $\Delta s$  medido no referencial  $S$ :

$$\Delta s' = f(\Delta s). \quad (2.12)$$

A função  $f$  é determinada pela velocidade  $\vec{V}$  de  $S'$  em relação a  $S$ . Na verdade, apenas o *módulo* da velocidade,  $|\vec{V}|$ , é relevante, já que todas as direções espaciais são *equivalentes*, isto é, estão em pé de igualdade. Esta propriedade de equivalência entre as diferentes direções é o que chamamos de *isotropia* do espaço. Por exemplo, se tomarmos uma velocidade de 100m/s ao longo da direção do eixo  $OX$ , ou de 100m/s ao longo da direção do eixo  $OY$ , a transformação do intervalo será dada pela Equação (2.12) com a *mesma* função  $f$  nestes dois casos. De fato, as coordenadas  $x$  e  $y$  entram em pé de igualdade na definição do intervalo relativístico, dada pela Equação (2.10), e, portanto, a transformação não pode fazer distinção entre as direções dos eixos  $OX$  e  $OY$ .

A Equação (2.12) descreve a transformação do intervalo quando passamos do referencial  $S$  para o referencial  $S'$ . Pelo princípio da relatividade,  $S$  e  $S'$  são equivalentes e, portanto, a lei de transformação de  $S'$  para  $S$  deve ter a mesma forma funcional. Em relação a  $S'$ , o referencial  $S$  se move com velocidade  $-\vec{V}$ . Como  $|\vec{V}| = |-\vec{V}|$ , a transformação de  $S'$  para  $S$  é dada pela Equação (2.12) com a *mesma* função que implementa a transformação de  $S$  para  $S'$ :

$$\Delta s = f(\Delta s'). \quad (2.13)$$

Substituindo a Equação (2.12) na (2.13), obtemos

$$\Delta s = f(f(\Delta s)), \quad (2.14)$$

o que significa que a função  $f$  é idêntica à sua inversa  $f^{-1}$  [a função inversa é definida pela relação  $\Delta s = f^{-1}(f(\Delta s))$ ]. Só há então duas possibilidades:  $f(\Delta s) = \Delta s$  e  $f(\Delta s) = -\Delta s$ . Em ambos os casos,  $(\Delta s)^2$  é invariante. Adotando uma convenção uniforme para o sinal da raiz quadrada, obtemos

$$\Delta s = \Delta s'. \quad (2.15)$$

Podemos concluir, então, que o intervalo relativístico entre dois eventos dados é uma propriedade intrínseca ou absoluta do par de eventos considerado. As coordenadas espaço-temporais dos dois eventos são diferentes em diferentes referenciais, mas a combinação específica das coordenadas que aparece no lado direito da Equação (2.10) é invariante. Essa propriedade é análoga à invariância do comprimento espacial  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  por rotações dos eixos coordenados. Entretanto, ao contrário do comprimento espacial, o intervalo relativístico pode ser nulo para um par de eventos distintos, como no exemplo considerado anteriormente. Além disso, o intervalo ao quadrado  $(\Delta s)^2$  pode ser negativo, como você mostrará no exercício a seguir (quando isto ocorre,  $\Delta s$  é um número complexo).

#### Exercício 2.4

Suponha que a distância entre os detectores  $D_1$  e  $D_2$  na **Figura 2.2** (referencial  $S'$ ) seja  $d$ . Calcule o intervalo ao quadrado  $(\Delta s)^2$  entre os eventos “início da detecção por  $D_1$ ” e “início da detecção por  $D_2$ ” tomando as coordenadas relativas ao referencial  $S'$ .

**Resposta:**  $(\Delta s)^2 = -d^2$ .

## Conclusão

Nesta aula, iniciamos o estudo da Teoria da Relatividade Restrita, tomando como ponto de partida o Princípio da Relatividade e a invariância da velocidade da luz no vácuo. Para mostrar a necessidade de romper com o conceito newtoniano de tempo absoluto, apresentamos um exemplo de dois eventos simultâneos em um certo referencial, mas que não são simultâneos em outro referencial. Embora o transcurso do tempo seja diferente para diferentes referenciais, é possível definir uma grandeza invariante: o intervalo relativístico. Todos os referenciais inerciais medem o mesmo intervalo relativístico entre dois eventos dados.

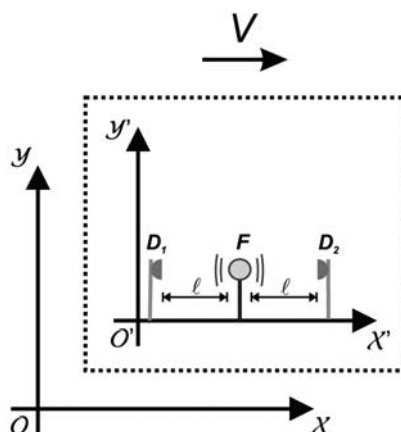
## Atividades Finais

1. Enuncie os dois postulados da teoria da relatividade restrita. Seriam eles independentes? Mostre que o segundo postulado é, na verdade, consequência do primeiro.

Resposta comentada: como lembrado na Aula 1 e discutido em detalhes no curso de Física 4A, a propagação da luz no vácuo com velocidade  $c$ , independentemente do estado de movimento da fonte, é uma consequência direta das Equações de Maxwell. De acordo com o princípio da relatividade (primeiro postulado), as leis da Física e, em particular, as Equações de Maxwell são as mesmas em todos os referenciais inerciais. Portanto, em todos eles a luz se propaga no vácuo com a mesma velocidade  $c$ . Assim, o segundo postulado (invariância da velocidade da luz) é uma consequência do princípio da relatividade, e não uma hipótese adicional independente.

2. Explique o significado da frase “a simultaneidade é relativa.” Forneça um exemplo de dois eventos que sejam simultâneos do ponto de vista de um referencial, mas não do ponto de vista de outro referencial.
3. Defina o intervalo relativístico ao quadrado  $(\Delta s)^2$ . Forneça um exemplo em que  $(\Delta s)^2$  seja negativo.
4. Para a Física Newtoniana, simultaneidade e tempo são absolutos. Nesse problema, você irá examinar o experimento descrito nas **Figuras 2.1 a 2.3**, do ponto de vista da Física Newtoniana, usando a lei de composição de velocidades de Galileu.

a) Analisando o problema do ponto de vista do referencial  $S$ , em relação ao qual fonte e detectores se movem com velocidade  $V$ , calcule, usando a lei de composição de velocidades de Galileu, o intervalo de tempo  $\Delta t_1$  transcorrido entre o momento da emissão da luz pela fonte  $F$  e o momento de detecção por  $D_1$ . Suponha que a distância entre  $F$  e  $D_1$  seja  $\ell$ , como mostra a **Figura 2.7**.



**Figura 2.7:** A fonte  $F$  e os detectores  $D_1$  e  $D_2$  se movem com velocidade  $V$  em relação ao referencial  $S$  (sistema de eixos coordenados  $OXY$ ). A distância entre  $F$  e cada detector vale  $\ell$ . O sistema de eixos coordenados  $O'X'Y'$  corresponde ao referencial de repouso  $S'$ .

b) Ainda analisando do ponto de vista do referencial  $S$ , calcule o intervalo de tempo  $\Delta t_2$  transcorrido entre o momento da emissão da luz pela fonte  $F$  e o momento de detecção por  $D_2$ . Suponha que a distância entre  $F$  e  $D_2$  também valha  $\ell$ . Conclua que os eventos “detecção por  $D_1$ ” e “detecção por  $D_2$ ” seriam simultâneos de acordo com a Física Newtoniana. Mostre ainda que os tempos decorridos entre a emissão e a detecção seriam os mesmos para todos os referenciais inerciais, em acordo com a noção de tempo absoluto da Física Newtoniana.

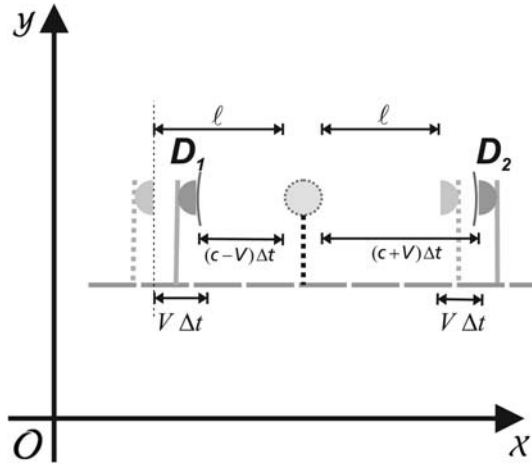
Solução:

a) A distância percorrida por  $D_1$  entre os instantes de emissão e detecção vale  $V\Delta t_1$ . Se usarmos a lei de composição de velocidades de Galileu, a velocidade de propagação da luz de  $F$  até  $D_1$  valeria  $c - V$  (como discutido ao longo dessa aula, na verdade, a velocidade da luz no vácuo vale  $c$  em todos os referenciais). Então, a distância percorrida pela luz entre os instantes de emissão e detecção valeria  $(c - V)\Delta t_1$ . Como a distância entre  $F$  e  $D_1$  vale  $\ell$ , temos (veja a **Figura 2.8**):

$$V\Delta t_1 + (c - V)\Delta t_1 = \ell. \quad (2.16)$$

Observe que o termo  $V\Delta t_1$  é cancelado! Resolvendo esta equação para  $\Delta t_1$ , obtemos

$$\Delta t_1 = \frac{\ell}{c}. \quad (2.17)$$



**Figura 2.8:** Distâncias percorridas pela luz e por  $D_1$  de acordo com a lei de composição de velocidades de Galileu. As linhas tracejadas indicam as posições em que  $D_1$  e  $F$  estavam no momento da emissão.

b) Ainda de acordo com a lei de composição de velocidades de Galileu, a velocidade de propagação da luz de  $F$  até  $D_2$  valeria  $c + V$ . Então, a distância percorrida pela luz entre os instantes de emissão e detecção valeria  $(c + V)\Delta t_2$ . Para alcançar o detector  $D_2$ , a luz precisa cobrir a distância inicial até  $D_2$  (que vale  $\ell$ ), além da distância percorrida por  $D_2$  durante o intervalo entre a emissão e a detecção (que vale  $V\Delta t_2$ ), como mostra a **Figura 2.8**:

$$(c + V)\Delta t_2 = \ell + V\Delta t_2. \quad (2.18)$$

Novamente, o termo  $V\Delta t_2$  é cancelado, fornecendo

$$\Delta t_2 = \frac{\ell}{c}. \quad (2.19)$$

Comparando com a Equação (2.17), concluímos que  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ . Portanto, as detecções por  $D_1$  e  $D_2$  seriam simultâneas no referencial  $S$ , de acordo com a Física Newtoniana. Note que a aproximação de  $D_1$  seria compensada exatamente pela diminuição da velocidade de propagação ao longo do sentido negativo do eixo  $OX$  prevista pela lei de composição de velocidades de Galileu. De forma análoga, o afastamento de  $D_2$  seria compensado pelo aumento da velocidade de propagação ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ .

Como  $\Delta t_1$  (ou  $\Delta t_2$ ) não dependeria de  $V$ , o intervalo de tempo seria o mesmo para todos os referenciais. Por exemplo, para o referencial de repouso  $S'$ , é muito fácil perceber que o intervalo de tempo entre emissão e detecção valeria  $\ell/c$ , se supusermos que a distância entre  $F$  e cada detector medida no referencial  $S'$  também valha  $\ell$ . Em conclusão, a lei de composição de velocidades de Galileu está intimamente relacionada à noção de tempo absoluto. De fato, a hipótese de que o tempo é o mesmo para todos os referenciais é crucial na derivação dessa lei!

## Resumo

A simultaneidade é relativa: referenciais inerciais diferentes podem não concordar sobre o ordenamento temporal de dois eventos dados. O espaço-tempo da Teoria da Relatividade é composto por três coordenadas espaciais e pela coordenada temporal. Esta última não é, em geral, invariante quando mudamos de referencial. O intervalo relativístico ao quadrado  $(\Delta s)^2$  entre dois eventos de coordenadas  $(t_1, x_1, y_1, z_1)$  e  $(t_2, x_2, y_2, z_2)$  é definido pela expressão:

$$(\Delta s)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2.$$

Embora as coordenadas espaço-temporais dos eventos sejam diferentes para diferentes referenciais inerciais, todos eles medem o mesmo valor para  $(\Delta s)^2$ .

## E na próxima aula...

...vamos discutir uma consequência muito importante da invariância do intervalo relativístico: o efeito de dilatação temporal.

## Aula 3 – Dilatação temporal

### Metas da aula

Apresentar o efeito de dilatação temporal e discutir o limite não-relativístico.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Explicar o efeito de dilatação temporal.
- Identificar as situações físicas que podem ser descritas pela Mecânica Newtoniana.

### Pré-requisito

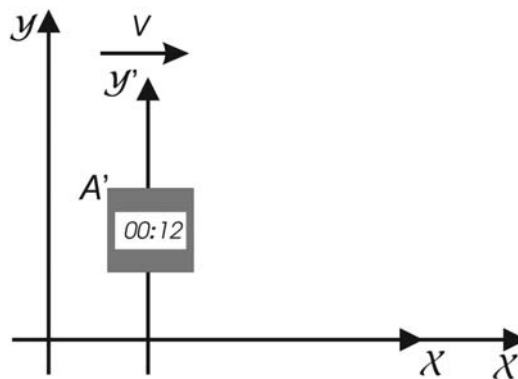
Para compreender esta aula, você precisa do conceito de intervalo relativístico, apresentado na aula anterior.

### Cronômetro em movimento

Na aula anterior, obtivemos um resultado fundamental da Teoria da Relatividade: a invariância do intervalo relativístico  $\Delta s$ . Vamos agora derivar uma consequência importante dessa propriedade: o efeito de dilatação temporal.

Consideremos um cronômetro em movimento ao longo da direção  $OX$  em relação ao referencial inercial  $S$ , como mostra a **Figura 3.1**. A velocidade  $V$  do cronômetro é constante. Como na aula anterior, vamos considerar também o ponto de vista do referencial próprio (inercial!)  $S'$ , que acompanha o cronômetro em seu movimento. Em relação a  $S'$ , o cronômetro está em repouso, e o tempo transcorrido entre dois cliques consecutivos vale  $\Delta t_0$  (por exemplo, poderíamos ter  $\Delta t_0 = 1$  seg). Esse é o intervalo de “tempo próprio” entre dois cliques. Quanto vale o intervalo relativístico entre dois cliques consecutivos? Calculando pelas coordenadas relativas a  $S'$ , temos  $\Delta x' = \Delta y' = \Delta z' = 0$ , porque as coordenadas espaciais dos dois eventos são idênticas – o cronômetro está parado do ponto de vista de  $S'$ ! Assim, obtemos:

$$(\Delta s')^2 = c^2(\Delta t_0)^2. \quad (3.1)$$



**Figura 3.1:** Cronômetro em movimento, com velocidade  $V$  em relação ao referencial  $S$ . O referencial  $S'$  acompanha o movimento do cronômetro.

Vamos agora calcular o intervalo usando as coordenadas relativas ao referencial  $S$ . Entre um clique e o seguinte, o cronômetro se deslocou de uma distância  $\Delta x = V\Delta t$ , onde  $\Delta t$  é o tempo entre dois cliques do ponto de vista de  $S$ . Assim, o intervalo ao quadrado vale

$$(\Delta s)^2 = c^2(\Delta t)^2 - V^2(\Delta t)^2. \quad (3.2)$$

Como o intervalo é invariante, temos  $(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2$ . Comparando as Equações (3.1) e (3.2), obtemos

$$(c^2 - V^2)(\Delta t)^2 = c^2(\Delta t_0)^2. \quad (3.3)$$

Podemos resolver esta equação para  $\Delta t$  e obter

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0, \quad (3.4)$$

onde o *fator de Lorentz*  $\gamma$  é definido pela equação

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.5)$$

Note que  $\gamma$  só está bem definido como número real se  $V < c$ . Para qualquer valor de  $V$ , satisfazendo essa condição, temos  $\gamma \geq 1$ , já que o denominador na Equação (3.5) é  $\leq 1$ . Portanto, de acordo com a Equação (3.4), o intervalo entre dois cliques consecutivos é *dilatado* pelo efeito do movimento do cronômetro.

### Exercício 3.1

Calcule o fator de Lorentz  $\gamma$  para  $V = 0$ . Nesse caso, o cronômetro está em repouso em relação ao referencial  $S$  e, portanto, o tempo marcado por  $S$  coincide com o tempo próprio.

O efeito de dilatação temporal contradiz a noção intuitiva de tempo “absoluto”, que é baseada no acúmulo de experiências do dia-a-dia. Em nossa vida diária, os valores típicos de velocidade são sempre muito menores do que  $c$ , correspondendo a valores de  $\gamma$  muito próximos da unidade. De fato, para  $V \ll c$ , podemos tomar a aproximação

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2}, \quad (3.6)$$

que é obtida truncando-se a expansão em série de potências de  $(V/c)$  (série de Taylor) até termos da ordem de  $(V/c)^2$ , como você mostrará a seguir.

## Exercício 3.2

Demonstre o resultado da Equação (3.6) usando a fórmula de expansão em série de Taylor (em torno da origem) para a função  $f(u)$ :

$$f(u) = f(0) + f'(0)u + \frac{f''(0)}{2!}u^2 + \frac{f'''(0)}{3!}u^3 + \dots \quad (3.7)$$

Solução:

Vamos analisar o fator de Lorentz  $\gamma$  como uma função de  $V/c$ :

$$\gamma = f(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}, \quad (3.8)$$

com  $u = V/c$ . Portanto, vamos substituir a variável  $u$  por  $V/c$  na Equação (3.9):

$$\gamma = f(0) + f'(0)(V/c) + \frac{f''(0)}{2!}(V/c)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(V/c)^3 + \dots \quad (3.9)$$

Se  $V/c \ll 1$ , podemos desprezar  $(V/c)^3$  nesta equação (e com maior razão ainda as potências de ordem mais alta). Resta, então, calcular os valores das derivadas para  $V/c = 0$ . O valor de  $\gamma$  para  $V/c = 0$ , que corresponde à parcela  $f(0)$  na Equação (3.9), foi calculado no exercício anterior:  $f(0) = 1$ . A derivada primeira é dada por

$$f'(u) = \frac{u}{(1-u^2)^{3/2}}, \quad (3.10)$$

forneendo  $f'(0) = 0$ . A derivada segunda é dada por

$$f''(u) = \frac{1+2u^2}{(1-u^2)^{5/2}}. \quad (3.11)$$

Tomando  $u = 0$  nesta equação, obtemos  $f''(0) = 1$ . Com esses valores para as derivadas, obtemos o resultado da Equação (3.6) a partir da (3.9).

No exercício a seguir, você mostrará, a partir da Equação (3.6), que o efeito de dilatação temporal é, em geral, desprezível nas situações típicas de nosso dia-a-dia.

**Exercício 3.3**

Em referência à nossa escala de velocidades típicas do dia-a-dia, poderíamos dizer que um jato comercial é “rápido”. Entretanto, quando comparada a  $c$ , sua velocidade é muito pequena! A velocidade típica de cruzeiro de um jato comercial é de 270m/s (ou 972km/h) em relação ao referencial terrestre. Usando a Equação (3.6), calcule o fator de Lorentz neste caso. Calcule a diferença acumulada entre o tempo medido no referencial terrestre e o tempo próprio após 20 horas de voo.

Resposta:  $\gamma - 1 = 4.05 \times 10^{-13}$ , e  $\Delta t - \Delta t_0 = 2.9 \times 10^{-8}$ seg.

A situação discutida anteriormente é um exemplo do *limite não-relativístico*: quase todos os efeitos relativísticos como, por exemplo, a dilatação temporal analisada aqui, são desprezíveis se  $V/c$  for suficientemente pequeno. Quando isto ocorre, podemos, com segurança, confiar nos resultados da Física newtoniana. Quase todas as situações de nossa vida diária correspondem a esse regime de “baixas” velocidades. Não é por acaso que o efeito de dilatação temporal nos parece tão estranho!

Entretanto, nesse exemplo, o efeito é curiosamente grande o bastante para ser relevante na comparação entre relógios atômicos transportados por aviões, devido à enorme precisão desses relógios. O efeito de dilatação é importante em várias outras situações físicas. Nos aceleradores de partículas, em muitas situações, são produzidos feixes de partículas com velocidades muito próximas a  $c$ , de forma que o fator de Lorentz é grande, e o efeito de dilatação temporal se torna facilmente detectável. No exercício a seguir, você vai analisar outro exemplo desse tipo.

## Exercício 3.4

O múon é uma partícula elementar de carga igual à do elétron, mas de massa muito maior. Múons são produzidos quando prótons de alta energia vindos do espaço penetram na atmosfera (raios cósmicos). O múon é uma partícula instável, que se desintegra após um intervalo de tempo de  $2.2 \times 10^{-6}$  seg. Tipicamente, eles são produzidos a uma altura de 9km na atmosfera, com uma velocidade  $v = 0,998c$ . Mostre que, se desconsiderássemos o efeito de dilatação temporal, o múon viajaria apenas 660m antes de se desintegrar e, portanto, não chegaria à superfície da Terra. Assim, é graças ao efeito de dilatação temporal que os múons de raios cósmicos chegam à superfície. O processo de desintegração desempenha aqui o papel do clique do cronômetro, e o tempo de  $2.2 \times 10^{-6}$  seg se refere ao referencial próprio da partícula (tempo próprio). Calcule o tempo de vida medido no referencial terrestre e determine o valor correto para a distância que o múon pode percorrer antes de se desintegrar. Cuidado: se usar a aproximação não-relativística dada pela Equação (3.6), você estará subestimando o efeito. Nesse exemplo, é preciso usar a expressão exata para o fator de Lorentz, dada pela Equação (3.5).

Resposta: O tempo de vida no referencial terrestre vale  $3.5 \times 10^{-5}$  seg, e a distância que o múon pode percorrer antes de se desintegrar é de 10km.

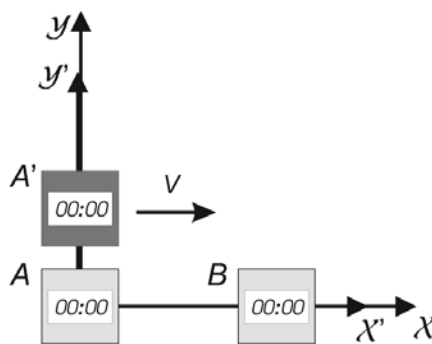
### Conexão com o problema da simultaneidade

Para entender melhor o efeito de dilatação temporal, precisamos discutir com mais detalhe o conceito de referencial. Além do sistema de eixos coordenados usado para a marcação da posição espacial de um determinado evento, necessitamos de um sistema para a medida do instante de tempo em que ele ocorre. Para isso, o uso de um único cronômetro ou relógio seria inconveniente, porque, ao medirmos o tempo de um evento numa posição distante da posição do cronômetro, teríamos de levar em conta o tempo de propagação da luz desse aparelho até a posição espacial do evento. Para contornar esse problema, o nosso referencial  $S$  dispõe de uma rede de cronômetros idênticos, de forma que há um cronômetro bem próximo a qualquer ponto do espaço. Para que a medida de tempo esteja bem definida, é preciso que todos esses cronômetros estejam *sincronizados*: todos eles são disparados (a partir da marcação *00:00*) *simultaneamente*, do ponto de vista do referencial  $S$ .

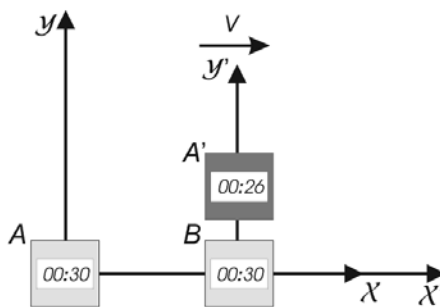
O efeito de dilatação temporal é ilustrado pelas **Figuras 3.2 e 3.3**.  $A$  e  $B$  fazem parte da rede de cronômetros do referencial  $S$ . Eles marcam o mesmo tempo nas duas figuras, porque estas representam o ponto de vista do referencial  $S$ .

Atenção! Quando apresentamos uma rede de cronômetros marcando o mesmo tempo numa figura, não estamos representando tempo e simultaneidade absolutos, independentes de referencial. Mesmo que um observador esteja em repouso em relação ao referencial  $S$ , ele não vai observar os cronômetros de  $S$  marcando o mesmo tempo, como você observa nas **Figuras 3.2 e 3.3**, devido à diferença entre os tempos para a propagação da luz de cada cronômetro até o observador. Portanto, as figuras têm apenas um significado simbólico: o de que os cronômetros  $A$  e  $B$  estão sincronizados *do ponto de vista do referencial  $S$* .

Também apresentamos, nas **Figuras 3.2 e 3.3**, o cronômetro  $A'$ , em tudo idêntico aos cronômetros do referencial  $S$ .  $A'$  se movimenta, em relação a  $S$ , com velocidade  $V$  ao longo da direção do eixo  $OX$ . No instante em que os cronômetros de  $S$  são disparados (tempo  $t = 0$  do referencial  $S$ ), a posição de  $A'$  coincide com a posição de  $A$ , e  $A'$  é disparado também nesse mesmo instante. Mais tarde,  $A'$  é comparado com um outro cronômetro do referencial  $S$ ,  $B$ , cuja posição coincide com a de  $A'$  nesse instante posterior. Do ponto de vista de  $S$ , o cronômetro em movimento está se atrasando: o tempo transcorrido de acordo com o referencial  $S$  é de 30 segundos, mas  $A'$  marca 26 segundos.

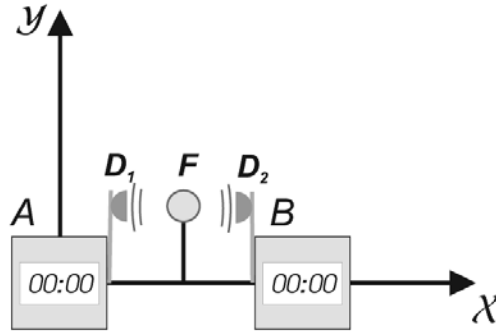


**Figura 3.2:** No instante em que os cronômetros  $A$  e  $B$  do referencial  $S$  são disparados, o cronômetro idêntico (em movimento)  $A'$  também é disparado, e sua posição coincide com a posição de  $A$ .



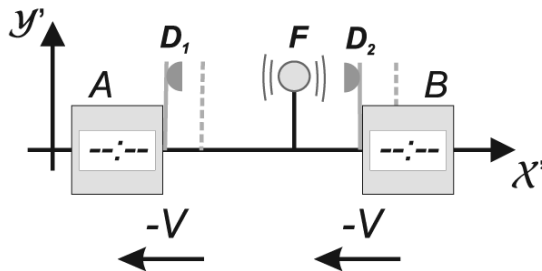
**Figura 3.3:** Efeito de dilatação temporal: do ponto de vista do referencial  $S$ , o cronômetro em movimento  $A'$  se atrasa.

Qual é a interpretação do efeito de dilatação temporal do ponto de vista do referencial próprio de  $A'$ ,  $S'$ ? Para  $S'$ , os cronômetros  $A$  e  $B$  não foram disparados simultaneamente e, portanto, não estão sincronizados. Mostramos, na aula anterior, que a noção de simultaneidade é relativa. Veremos agora que o efeito de dilatação temporal está diretamente relacionado a esse fato. A sincronização dos cronômetros do referencial  $S$  pode ser realizada através do método discutido na aula anterior: a fonte de luz  $F$  é ligada, e os cronômetros  $A$  e  $B$  são disparados no momento em que a luz é detectada pelos detectores  $D_1$  e  $D_2$ , como mostramos na **Figura 3.4**.



**Figura 3.4:** Sincronização dos cronômetros A e B do ponto de vista do referencial S.

Para o referencial S, os cronômetros são disparados simultaneamente, já que F é equidistante de  $D_1$  e  $D_2$ . Entretanto, do ponto de vista do referencial  $S'$ , os disparos *não são simultâneos*, como mostra a **Figura 3.5**. Note que, em relação a  $S'$ , fonte e detectores se deslocam com velocidade  $-V$  (isto é, com módulo  $V$  ao longo do sentido negativo do eixo  $OX'$ ). A situação aqui é muito semelhante à da **Figura 2.3**, na Aula 2: como a velocidade da luz no referencial  $S'$  também vale  $c$ , B é disparado *antes* de A, já que aquele se aproxima à fonte, enquanto este se afasta (as linhas tracejadas indicam as posições dos detectores no instante da emissão da luz). Portanto, para  $S'$ , o tempo marcado por B é maior do que o tempo marcado por A', simplesmente porque B foi disparado prematuramente.



**Figura 3.5:** Disparo dos cronômetros A e B do ponto de vista do referencial  $S'$ : B será disparado antes de A.

Essa discussão ilustra bem a natureza do efeito de dilatação temporal. O estado de movimento (uniforme) do cronômetro  $S$  em nada modifica o mecanismo físico reponsável pelos cliques do relógio. Dizemos então que o efeito é puramente cinemático, já que a dinâmica associada aos cliques não é afetada pelo movimento (para ilustrar este ponto, vamos considerar um exemplo concreto de cronômetro no final da aula). O intervalo de tempo entre os cliques consecutivos do cronômetro  $A'$  é simplesmente *descrito* de forma diferente pelos diferentes referenciais.

Pelo princípio da relatividade, os referenciais  $S$  e  $S'$  estarão em pé de igualdade, contanto que o referencial próprio  $S'$  seja inercial (caso de movimento uniforme de  $A'$ ). Assim, o efeito de dilatação temporal também ocorrerá ao examinarmos um dado cronômetro do referencial  $S$  (por exemplo, o cronômetro  $B$ ), com o auxílio de uma rede de cronômetros afixada ao referencial  $S'$  (não mostrada nas figuras anteriores). Em outras palavras,  $B$  parece atrasado do ponto de vista de  $S'$ . Esse fato não está em contradição com a **Figura 3.3**, que ilustra a marcação de tempo no referencial  $S$ . Note que nunca comparamos um único cronômetro de  $S$  com um único de  $S'$ . Para medir o efeito de dilatação do cronômetro  $A'$  do ponto de vista de  $S$ , precisamos comparar  $A'$  com dois cronômetros diferentes de  $S$ , conforme mostrado nas **Figuras 3.2 e 3.3**, devido ao seu movimento uniforme. De forma análoga, a verificação da dilatação temporal de  $B$  do ponto de vista de  $S'$  envolveria, pelo menos, dois cronômetros distintos de  $S'$ , não mostrados nas figuras anteriores, conforme você mostrará no exercício a seguir.

## Exercício 3.5

Explique, por meio de uma sequência de desenhos, o efeito de dilatação temporal do cronômetro  $B$  da **Figura 3.2** do ponto de vista do referencial  $S'$ . Os seus desenhos devem incluir dois cronômetros para a marcação de tempo em  $S'$ :  $A'$  e  $B'$ . O cronômetro  $B'$  de  $S'$  está na posição de  $B$  no momento em que este é disparado, e também é disparado nesse momento. O cronômetro  $A'$  de  $S'$  é usado para marcar um tempo a ser comparado com o tempo marcado por  $B$  num instante posterior. Os dois cronômetros de  $S'$  foram sincronizados do ponto de vista de  $S'$  pelo método ilustrado pela **Figura 3.4** (exceto que fonte e detectores agora estão em repouso em relação a  $S'$ ). Mas, de acordo com  $S$ ,  $A'$  foi disparado depois de  $B'$ . Explique o efeito de dilatação em termos desse fato.

Mas o que aconteceria se  $A'$  descrevesse uma trajetória fechada no referencial  $S$  e voltasse à sua posição inicial, bem próxima de  $A$ ? Apesar de a velocidade de  $A'$  não ser constante nesse caso, podemos ainda assim aplicar o resultado da Equação (3.4) durante um intervalo de tempo infinitesimal  $dt_0$ , pois a variação da velocidade durante esse intervalo é desprezível:

$$dt = \gamma(t_0)dt_0. \quad (3.12)$$

Integrando essa equação do tempo inicial  $t_0 = t = 0$  até o tempo  $\Delta t_0$ , obtemos

$$\Delta t = \int_0^{\Delta t_0} \gamma(t_0)dt_0. \quad (3.13)$$

O fator de Lorentz  $\gamma$  é uma função do tempo próprio  $t_0$  nesse caso de movimento não-uniforme, dada pela Equação (3.5), já que  $V = V(t_0)$  é uma função do tempo próprio. De acordo com a Equação (3.13), o intervalo total  $\Delta t$  transcorrido em  $S$  é dado pela soma dos efeitos de dilatação temporal em todos os subintervalos infinitesimais que contribuem na integral. Uma vez que  $\gamma(t_0) \geq 1$ , temos

$$\Delta t \geq \Delta t_0. \quad (3.14)$$

Portanto, o cronômetro  $A'$ , que estava inicialmente sincronizado com  $A$ , e que é em tudo idêntico a  $A$ , estará atrasado em relação a  $A$  ao voltar para a sua posição inicial após executar o movimento fechado.

Por que não podemos inverter esse argumento e chegar à conclusão oposta, tomando o ponto de vista do referencial próprio de  $A'$ ? Nesse referencial,  $A'$  está em repouso, e é  $A$  que executa um movimento fechado, o

que nos levaria a concluir (erroneamente) que  $A$  estaria atrasado (ao invés de adiantado, como concluímos acima) em relação a  $A'$ . Entretanto, como  $A'$  descreve um movimento acelerado ou não-uniforme (condição necessária para voltar à sua posição inicial), o referencial próprio *não é inercial* nesse caso.

Lembre a definição de referencial inercial:  $S'$  é inercial se ele se movimenta em relação a um referencial inercial  $S$  com velocidade constante (movimento uniforme). Você aprendeu, no curso de Física 1, que as leis da Mecânica de Newton só valem em referenciais inerciais. Por exemplo, o referencial de um ônibus que freia violentamente não é inercial, porque o ônibus está acelerado em relação ao referencial inercial terrestre; é por isso que somos jogados para a frente, apesar da ausência de qualquer força aplicada. Todas as regras que aprendemos aqui também só valem para referenciais inerciais (é exatamente devido a essa importante restrição que usamos a expressão relatividade restrita ou especial, em oposição à relatividade geral, em que essa restrição é relaxada). Portanto, não podemos aplicar o resultado obtido nesta aula para o referencial próprio de  $A'$  e concluir que  $A$  estaria atrasado em relação a esse referencial. Assim, quando comparamos  $A$  e  $A'$ , é  $A'$  que está atrasado em relação a  $A$ , e não o contrário.

No lugar de dois cronômetros, podemos tomar o exemplo de duas irmãs gêmeas idênticas, Clara e Júlia. Num dado momento, Clara parte num foguete para uma longa viagem espacial. Ao voltar, o seu “relógio biológico”, associado ao processo de envelhecimento, estará atrasado em relação ao de Júlia e, portanto, ela estará mais jovem que Júlia! Como o referencial do foguete não é inercial, seria incorreto inverter o argumento e concluir que Júlia estaria mais jovem do que Clara (esse falso argumento é conhecido como o “paradoxo dos gêmeos”). Em resumo, é a irmã que se acelerou que estará mais jovem do que a outra. No exercício a seguir, você descobrirá que esse não é um método muito eficiente para evitar o envelhecimento!

## Exercício 3.6

O cosmonauta russo Valery Polyakov passou 438 dias a bordo da estação espacial Mir. A velocidade orbital da estação era de 7.700 m/s. Após voltar para a companhia de seu irmão gêmeo (imaginário) na Terra, quanto tempo Valery estaria mais jovem?

Sugestão: use a Equação (3.13) tomando  $\gamma$  constante, pois, nesse exemplo, podemos supor que o módulo da velocidade da estação seja aproximadamente constante, embora o vetor velocidade varie no tempo de forma apreciável. Para calcular esse valor constante, use a aproximação não-relativística, Equação (3.6).

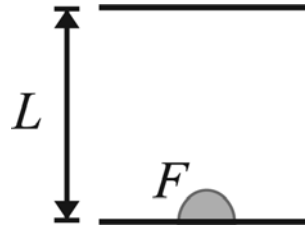
Resposta: 0,012seg (ou 12 milésimos de segundo).

## Cronômetro de luz

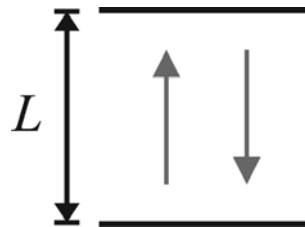
Até aqui, representamos os cronômetros por “caixinhas pretas” (confira as **Figuras 3.1 e 3.4**), sem discutir o mecanismo físico responsável pelo seu funcionamento. Tomando como ponto de partida a invariância do intervalo relativístico, deduzimos o efeito de dilatação temporal de uma forma muito geral e independente dos detalhes do mecanismo responsável pelos cliques. Por ser um efeito cinemático, sem envolver a dinâmica associada aos cliques, a dilatação ocorre com todos os tipos de cronômetros e relógios que se possam imaginar.

Vamos agora discutir um exemplo específico de cronômetro, com o propósito de compreender ainda melhor a natureza do efeito de dilatação temporal. Nosso cronômetro, descrito por meio das **Figuras 3.6 e 3.7**, consiste em uma fonte  $F$ , que emite um pulso de luz de duração muito curta, e de dois espelhos paralelos. O pulso é refletido pelo espelho de cima e volta para junto de  $F$ , onde há também um detector. Uma pequena fração da energia do pulso é absorvida no detector, disparando o primeiro clique. A maior parte da energia é refletida de volta para cima, reflete-se novamente no espelho de cima e volta para a região de detecção, provocando o segundo clique, e assim sucessivamente. Como a separação entre os espelhos vale  $L$ , o intervalo de tempo entre dois cliques consecutivos vale

$$\Delta t_0 = \frac{2L}{c}. \quad (3.15)$$

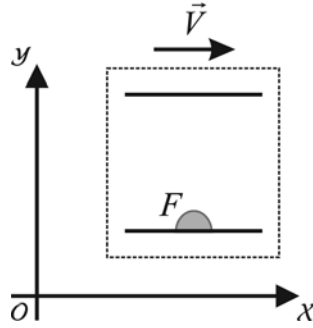


**Figura 3.6:** Cronômetro de luz: fonte  $F$  e espelhos paralelos separados por distância  $L$ .



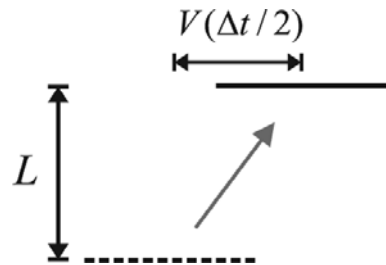
**Figura 3.7:** O clique do cronômetro ocorre quando o pulso de luz é detectado no espelho de baixo, após reflexão pelo espelho de cima.

Nessa análise, supusemos que o cronômetro estivesse em repouso. Portanto,  $\Delta t_0$  representa o intervalo de tempo próprio entre dois cliques. O que ocorre quando o cronômetro está em movimento? Na **Figura 3.8**, mostramos o cronômetro se deslocando, com velocidade  $\vec{V}$  constante e perpendicular à direção que liga os dois espelhos, em relação ao referencial inercial  $S$ . Vamos supor que a distância entre os espelhos também valha  $L$  para o referencial  $S$ . Se você acha essa hipótese óbvia, cuidado! Na próxima aula, veremos que a distância entre dois objetos dados pode não ser a mesma para diferentes referenciais. Entretanto, no caso de um comprimento *perpendicular* à direção do movimento, como no exemplo que nos interessa aqui, o seu valor é de fato o mesmo para todos os referenciais, conforme mostraremos logo no início da próxima aula.



**Figura 3.8:** Em relação ao referencial  $S$ , o cronômetro de luz se movimenta com velocidade  $\vec{V}$ .

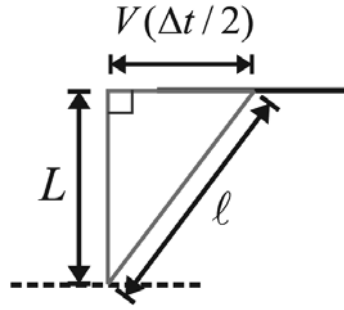
Para saber o tempo  $\Delta t$  entre dois cliques consecutivos do nosso cronômetro (conforme o ponto de vista de  $S$ ), basta determinar o tempo necessário para o pulso de luz realizar uma volta completa entre os dois espelhos. O intervalo de tempo para a propagação do espelho de baixo para o de cima é igual ao intervalo de tempo para o percurso inverso. Logo, ele vale  $\Delta t/2$ .



**Figura 3.9:** A linha tracejada indica a posição em que o espelho de baixo estava no momento da emissão do pulso de luz. A linha cheia indica a posição do espelho de cima no momento da reflexão do pulso.

Na **Figura 3.9**, mostramos que o espelho de cima se desloca de  $V\Delta t/2$ , enquanto o pulso viaja de baixo para cima. Em consequência, a distância  $\ell$  percorrida pela luz no seu trajeto entre os dois espelhos será maior do que  $L$ . Podemos calcular  $\ell$  usando o Teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo da **Figura 3.10**:

$$\ell = \sqrt{L^2 + \left(\frac{V\Delta t}{2}\right)^2}. \quad (3.16)$$



**Figura 3.10:** A distância  $\ell$  percorrida pelo pulso de luz no referencial  $S$  é calculada a partir do triângulo retângulo mostrado acima.

A distância percorrida pelo pulso de luz do espelho de cima até o de baixo também vale  $\ell$ . De acordo com o segundo postulando da Teoria da Relatividade, a luz se propaga no referencial  $S$  com a mesma velocidade  $c$  medida no referencial próprio. Em particular, o fato de que a fonte está em movimento em relação a  $S$  em nada modifica a velocidade. Portanto, o intervalo  $\Delta t$  entre dois cliques é dado por

$$\Delta t = \frac{2\ell}{c}. \quad (3.17)$$

Substituindo a Equação (3.16) na (3.17), obtemos

$$\frac{c \Delta t}{2} = \sqrt{L^2 + \left(\frac{V \Delta t}{2}\right)^2}. \quad (3.18)$$

Podemos obter  $\Delta t$  tomando o quadrado de ambos os lados nesta equação:

$$\Delta t = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (3.19)$$

Este é o tempo entre dois cliques do nosso cronômetro de luz de acordo com o referencial  $S$ . Como ele se compara com o tempo próprio  $\Delta t_0$  dado pela Equação (3.15)? Exatamente como previsto pelo nosso resultado geral, dado pela Equação (3.4), que reproduzimos aqui:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_0. \quad (3.20)$$

Esse exemplo simples de cronômetro ilustra, de forma muito clara, a natureza cinemática do efeito de dilatação temporal. A dinâmica do mecanismo do cronômetro em nada é modificada pelo movimento. Tendo em vista

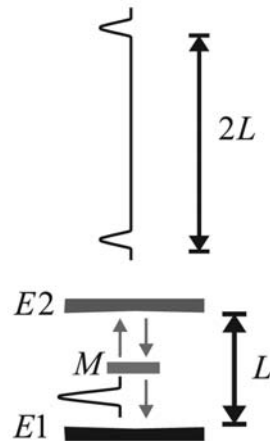
que a velocidade da luz *não* é alterada pelo movimento do cronômetro, a dilatação ocorre simplesmente porque a distância percorrida pelo pulso de luz (de acordo com o referencial  $S$ ) é maior quando o cronômetro se movimenta.

### Exercício 3.7

O nosso cronômetro de luz não é um dispositivo prático para a vida diária. Entretanto, em muitos laboratórios de pesquisa, utilizam-se *lasers* operando num regime especial, conhecido como travamento de modos, que é muito semelhante ao esquema apresentado aqui. O *laser* mostrado na **Figura 3.11** é constituído por dois espelhos ( $E1$  e  $E2$ ), formando uma cavidade óptica, e um material responsável pela emissão da luz ( $M$ ). No regime de travamento de modos, um pulso de luz de curtíssima duração é gerado no interior da cavidade do *laser*. O pulso circula entre os dois espelhos exatamente como no nosso cronômetro (mas não há nenhum detector no interior da cavidade). A cada momento em que o pulso atinge o espelho  $E2$  mostrado na **Figura 3.11**, uma pequena fração da sua energia é transmitida para fora da cavidade do *laser*, ficando disponível para várias aplicações. Portanto, quando o *laser* opera no regime de travamento de modos, ele produz uma seqüência de pulsos separados por uma distância  $2L$ , como indicamos na **Figura 3.11**.

Determine o intervalo de tempo  $\Delta t_0$  entre dois pulsos consecutivos, supondo que o comprimento da cavidade seja  $L = 5\text{cm}$ .

Resposta:  $\Delta t_0 = 2L/c = 3,3 \times 10^{-10}\text{seg}$ .



**Figura 3.11:** Esquema de um *laser* em regime de travamento de modos.

## Conclusão

Nesta aula, analisamos em detalhe o feito de dilatação temporal. Nosso ponto de partida foi a propriedade de invariância do intervalo relativístico. Para a maioria das situações práticas da nossa vida diária, as velocidades envolvidas são muito pequenas quando comparadas à velocidade da luz  $c$  (limite não-relativístico). Neste caso, o efeito de dilatação temporal é muito pequeno, o que explica a nossa concepção intuitiva de tempo absoluto.

Discutimos a conexão entre a dilatação temporal e a relatividade da noção de simultaneidade. Para ilustrar o efeito de forma mais concreta, apresentamos o exemplo do cronômetro de luz. Nesse modelo, a dilatação temporal foi diretamente derivada a partir do postulado de invariância da velocidade da luz.

## Atividades Finais

1. Explique o que é o efeito de dilatação temporal.
2. Um relógio é posto em órbita no interior de um satélite por vários anos. Ao voltar ao seu ponto de partida, é preciso adiantá-lo ou atrasá-lo para que ele volte a marcar a hora certa? Justifique sua resposta.
3. Por que o efeito de dilatação temporal é desprezível na grande maioria das situações físicas associadas à nossa vida diária?

4. Explique o “paradoxo dos gêmeos”. Por que os referenciais próprios de cada irmã gêmea não estão em pé de igualdade?
5. A partir da comparação entre os tempos marcados pelos cronômetros  $A'$  e  $B$  mostrados na **Figura 3.3**, determine a velocidade de  $A'$ .

Resposta:  $1,5 \times 10^8 \text{m/s}$ .

6. Por que o tempo biológico de uma pessoa embarcada numa viagem espacial deve sofrer o mesmo atraso que um relógio embarcado no mesmo foguete?

### Resposta comentada

Se não fosse assim, seria possível determinar o estado de movimento (uniforme) absoluto através da medida do tempo do processo de envelhecimento (de acordo com o relógio embarcado), violando o princípio da relatividade. No exemplo discutido por Galileu (veja a Aula 1), perceber o estado de movimento do foguete seria análogo a perceber o estado de movimento uniforme de um navio, mesmo com as escotilhas fechadas (de forma a impedir a observação de alguma referência externa ao navio). Note que esse mesmo argumento pode ser usado para mostrar que qualquer tipo de cronômetro sofreria o mesmo efeito de dilatação que o cronômetro de luz discutido no final desta aula.

## Resumo

Um cronômetro (ou relógio) em movimento em relação a um referencial inercial  $S$  estará sempre atrasado em relação aos cronômetros responsáveis pela marcação de tempo em  $S$ . Este efeito, a dilatação temporal, é muito pequeno para as velocidades típicas do dia-a-dia (limite não-relativístico).

## E na próxima aula...

...vamos novamente utilizar a propriedade de invariância do intervalo relativístico, desta vez para derivar a transformação de Lorentz, que relaciona as coordenadas espaço-temporais em diferentes referenciais inerciais. Vamos explorar uma consequência importante da transformação de Lorentz: o efeito de contração de Lorentz-Fitzgerald.



## Aula 4 – A transformação de Lorentz

### Meta da aula

Obter a transformação de Lorentz a partir da invariância do intervalo relativístico e aplicá-la ao problema da medida de comprimentos em diferentes referenciais.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Escrever e utilizar a transformação de Lorentz.
- Obter o efeito de contração de Lorentz-Fitzgerald a partir da transformação de Lorentz.

### Pré-requisitos

- A leitura das Aulas 2 e 3 é recomendável, pois os conceitos de intervalo relativístico e dilatação temporal são importantes para o acompanhamento desta aula.

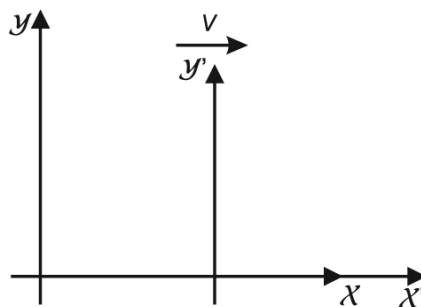
### Introdução

Na aula anterior, analisamos uma consequência importante da invariância do intervalo relativístico: a dilatação temporal. Nesta aula, vamos novamente usar a propriedade de invariância para obter um resultado mais geral: a transformação de Lorentz, que relaciona as coordenadas espaço-temporais em diferentes referenciais inerciais. A partir da transformação de Lorentz, podemos obter vários efeitos interessantes. Aqui vamos analisar em detalhe a contração de Lorentz-Fitzgerald.

## Coordenadas espaço-temporais em diferentes referenciais

Como discutimos nas duas aulas anteriores, um determinado evento é descrito no referencial  $S$  pelas coordenadas espaço-temporais  $(t, x, y, z)$ . Quando utilizamos um outro referencial  $S'$  para descrever esse *mesmo* evento, suas coordenadas passam a valer  $(t', x', y', z')$  – note que a coordenada temporal também é modificada quando passamos de  $S$  para  $S'$ . A transformação de Lorentz relaciona as coordenadas em  $S$  e  $S'$ , desde que ambos os referenciais sejam inerciais.

Vamos supor inicialmente que o referencial  $S'$  se mova com velocidade  $V$  em relação ao referencial  $S$  ao longo da direção do eixo  $OX$ , como mostra a **Figura 4.1**. O caso mais geral, com  $S'$  se movendo com velocidade  $\vec{V}$  ao longo de uma direção arbitrária, pode ser obtido combinando-se a transformação de Lorentz analisada aqui com uma transformação de rotação dos eixos coordenados (exemplos de transformações deste tipo foram discutidas na Aula 2).



**Figura 4.1:** O referencial  $S'$  se move em relação ao referencial  $S$  com velocidade  $V$  ao longo da direção do eixo  $OX$ .

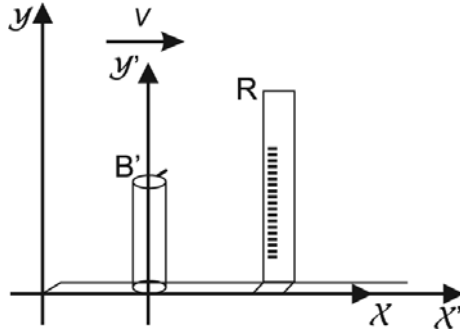
## Invariância dos comprimentos transversais

Nossa primeira etapa na construção da transformação de Lorentz é mostrar que as coordenadas espaciais transversais à direção de movimento de  $S'$  são invariantes:

$$y' = y \quad (4.1)$$

$$z' = z. \quad (4.2)$$

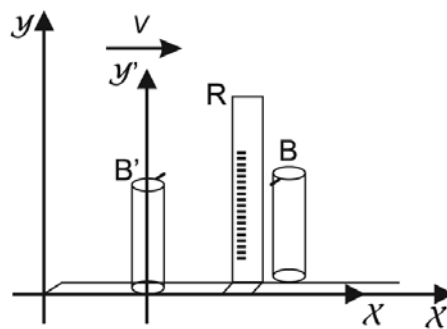
Na **Figura 4.2**, mostramos a barra  $B'$ , alinhada com o eixo  $OY'$  do referencial próprio  $S'$  e em movimento, com velocidade  $V$ , ao longo da direção  $OX$  em relação ao referencial  $S$ .



**Figura 4.2:** Medida do comprimento da barra  $B'$  no referencial  $S$ .

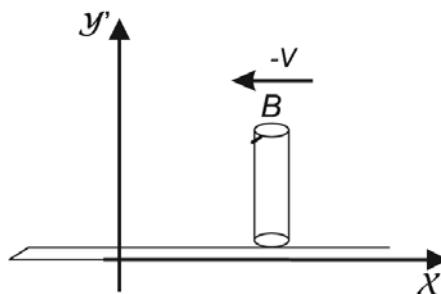
No referencial próprio  $S'$ , o comprimento da barra  $L_0$  é igual à coordenada  $y'$  da sua extremidade. Para medir o comprimento no referencial  $S$ , a extremidade da barra possui uma ponta perfurante, mostrada na **Figura 4.2**, que marca a régua  $R$  que, por sua vez, está em repouso em relação a  $S$  no momento em que a barra passa pela posição de  $R$ . A coordenada  $y$  marcada é igual ao comprimento da barra  $L$  medida no referencial  $S$ .

Imagine agora que uma segunda barra,  $B$ , em tudo idêntica a  $B'$ , esteja em repouso em relação a  $S$ . Quando não há movimento relativo entre as barras, elas têm exatamente o mesmo comprimento. Como  $S$  é o referencial próprio de  $B$ , o seu comprimento vale  $L_0$  nesse referencial. Na situação da **Figura 4.3**, há movimento relativo entre as barras e, assim, temos de analisar a possibilidade de que os comprimentos sejam diferentes. Você verá, a seguir, que essa possibilidade implicará uma contradição, o que nos permitirá concluir que os comprimentos são de fato iguais.



**Figura 4.3:** Em relação ao referencial  $S$ , a barra  $B'$  está em movimento, e a barra  $B$ , em repouso.

Se o comprimento  $L$  de  $B'$  for menor do que  $L_0$ , então a extremidade de  $B'$  vai riscar a barra  $B$  num ponto abaixo da sua extremidade. O que ocorreria do ponto de vista de  $S'$  nesse caso? Pelo princípio da relatividade, o mesmo efeito de contração do comprimento ocorreria para a barra  $B$ , pois ela está em movimento em relação a  $S'$ , com velocidade de módulo  $V$  ao longo do sentido negativo do eixo  $OX'$ , como ilustra a **Figura 4.4**. Assim,  $B$  riscaria  $B'$  num ponto abaixo de sua extremidade, em contradição com nossa hipótese inicial. Podemos então concluir que os comprimentos de  $B'$  e  $B$  são iguais em qualquer dos dois referenciais:  $L = L_0$ .



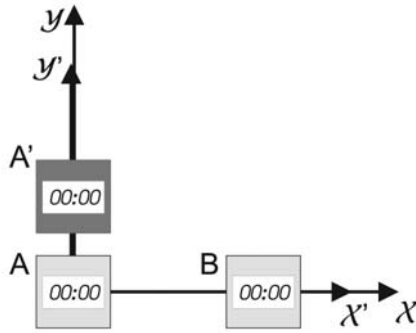
**Figura 4.4:** Em relação ao referencial  $S'$ , a barra  $B$  se desloca com velocidade de módulo  $V$  ao longo do sentido negativo do eixo  $OX'$ .

Naturalmente, o mesmo argumento poderia ser aplicado se a barra estivesse alinhada ao longo de qualquer direção perpendicular à direção do movimento (que, na figura anterior, coincide com o eixo  $OX$ ), demonstrando assim as Equações (4.1) e (4.2). Se você considera essa conclusão óbvia, cuidado! Para um referencial se movendo ao longo da direção da barra (direção

do eixo  $OY$ ), o comprimento é contraído! Esse é mais um efeito relativístico contra-intuitivo, conhecido como contração de **Lorentz-Fitzgerald**, que estudaremos mais adiante.

## Usando a invariância do intervalo relativístico

Vamos supor que, no instante  $t = 0$ , marcado pelo referencial  $S$ , as origens dos sistemas de coordenadas de  $S$  e  $S'$  coincidam e que o cronômetro de  $S'$ , na origem,  $A'$ , seja sincronizado com os cronômetros de  $S$  nesse instante, como mostra a **Figura 4.5**.



**Figura 4.5:** No tempo  $t = 0$ , as origens de  $S$  e  $S'$  coincidem.

Portanto, o evento de coordenadas espaciais  $x = y = z = 0$  (origem de  $S$ ) e tempo  $t = 0$ , de acordo com o referencial  $S$ , tem coordenadas  $x' = y' = z' = 0$  e tempo  $t' = 0$ , de acordo com o referencial  $S'$ . Considere agora um outro evento qualquer, de coordenadas  $(t, x, y, z)$  no referencial  $S$ , e o intervalo relativístico ao quadrado entre esse evento e o evento de coordenadas nulas. Calculando em termos das coordenadas em  $S$ , obtemos

$$\Delta s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (4.3)$$

Como  $\Delta s$  é invariante, devemos obter o mesmo valor para o intervalo quando utilizamos as coordenadas em  $S'$ :

$$\Delta s^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \quad (4.4)$$



**George Fitzgerald** nasceu em Monkstown, Irlanda, em 1851. Especialista em óptica e eletromagnetismo. Para explicar o resultado do experimento de Michelson e Morley, propôs, em 1889, que corpos em movimento em relação ao éter teriam o seu comprimento na direção paralela ao movimento contraído (contração de Lorentz-Fitzgerald).

Igualando as equações acima e usando a invariância das coordenadas transversais ao movimento, obtemos

$$c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2. \quad (4.5)$$

A transformação linear mais geral de  $(t, x)$  para  $(t', x')$  que satisfaz a condição de transformar  $(t = 0, x = 0)$  em  $(t' = 0, x' = 0)$  é da forma

$$x' = \mathcal{A}x + \mathcal{B}ct \quad (4.6)$$

$$ct' = \mathcal{C}x + \mathcal{D}ct, \quad (4.7)$$

onde os coeficientes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  são adimensionais - note que introduzimos o fator  $c$  (representando a velocidade da luz no vácuo) para obter a grandeza (produto)  $ct$ , que tem dimensão de comprimento:  $ct$  é medido em metros no Sistema Internacional de Unidades. Esses coeficientes dependem da velocidade  $V$  do referencial  $S'$  em relação a  $S$ . Existe um caso particular muito simples em que podemos obtê-los de forma imediata: quando  $V = 0$ , os referenciais  $S$  e  $S'$  coincidem, e então  $x = x'$  e  $t = t'$  (transformação identidade). Comparando com as Equações (4.6) e (4.7), obtemos  $\mathcal{A} = \mathcal{D} = 1$ , e  $\mathcal{B} = \mathcal{C} = 0$  nesse caso.

Para valores arbitrários de  $V$ , qual é a condição sobre  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  para que a Equação (7.35) seja satisfeita? Se usarmos essa equação e a condição de que, para  $V = 0$ , tenhamos a transformação identidade, podemos eliminar  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  em termos de  $\mathcal{A}$ , conforme se mostra no exercício resolvido a seguir.

## Exercício 4.1

Determine a condição satisfeita pelos coeficientes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  para que a transformação de coordenadas dada pelas Equações (4.6) e (4.7) seja compatível com a propriedade de invariância do intervalo relativístico, expressa pela Equação (7.35), e com a condição de ter, como caso particular, a transformação identidade.

Solução: das Equações (4.6) e (4.7), obtemos

$$c^2 t'^2 - x'^2 = (\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}^2) c^2 t^2 - (\mathcal{A}^2 - \mathcal{C}^2) x^2 - 2(\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{C}\mathcal{D}) x c t.$$

Para que a Equação (7.35) seja válida para *todos* os valores de  $x$  e  $t$ , que variam independentemente, devemos ter

$$\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}^2 = 1, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{A}^2 - \mathcal{C}^2 = 1, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{C}\mathcal{D} = 0. \quad (4.10)$$

A partir das Equações acima, podemos eliminar  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  em termos de  $\mathcal{A}$ . Da Equação (4.9), é imediato obter  $\mathcal{C}$  em termos de  $\mathcal{A}$ . Das equações (4.8) e (4.10), derivamos

$$\mathcal{D}^2 \left( 1 - \frac{\mathcal{B}^2}{\mathcal{D}^2} \right) = \mathcal{D}^2 \left( 1 - \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{A}^2} \right) = 1.$$

Substituindo a Equação (4.9) na equação acima, obtemos  $\mathcal{D}^2 = \mathcal{A}^2$ . A solução com  $\mathcal{D} = -\mathcal{A}$  não tem como caso particular a transformação identidade; portanto, tomamos a raiz  $\mathcal{D} = \mathcal{A}$ . Finalmente, combinando esse resultado com a equação (4.10), obtemos

$$\mathcal{B} = \mathcal{C} = \pm \sqrt{\mathcal{A}^2 - 1},$$

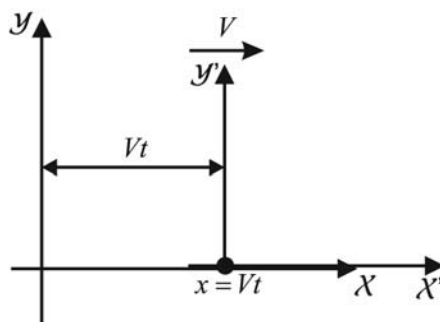
onde os dois sinais representam as duas raízes da Equação (4.9).

Substituindo os resultados do exercício anterior nas Equações (4.6) e (4.7), obtemos

$$x' = \mathcal{A}x \pm \sqrt{\mathcal{A}^2 - 1} c t \quad (4.11)$$

$$c t' = \pm \sqrt{\mathcal{A}^2 - 1} x + \mathcal{A} c t. \quad (4.12)$$

Para completar a derivação da transformação de Lorentz, resta apenas relacionar o coeficiente  $\mathcal{A}$  com a velocidade  $V$  do referencial  $S'$  em relação a  $S$  e determinar qual dos dois sinais nas equações acima fornece o resultado fisicamente correto. A origem de  $S'$ , que corresponde a  $x' = 0$ , se desloca com velocidade constante  $V$  ao longo do eixo  $OX$  do referencial  $S$  e, em  $t = 0$ , estava na posição  $x = 0$ . Portanto, a coordenada  $x' = 0$  corresponde a  $x = Vt$ , como mostra a **Figura 4.6**.



**Figura 4.6:** Posição da origem de  $S'$  em relação ao referencial  $S$  no tempo  $t$ .

Tomando  $x' = 0$  na Equação (4.16), obtemos

$$x = \mp \frac{\sqrt{\mathcal{A}^2 - 1}}{\mathcal{A}} ct. \quad (4.13)$$

Para termos  $x = Vt$ , é preciso, então, escolher um coeficiente  $\mathcal{A}$  que satisfaça

$$\frac{V}{c} = \frac{\sqrt{\mathcal{A}^2 - 1}}{\mathcal{A}}. \quad (4.14)$$

Além disso, é preciso escolher o sinal inferior na Equação (4.13) (sinal “mais”), que corresponde a tomar o sinal inferior nas Equações (4.16) e (4.17) (sinal ‘menos’).

Podemos inverter a Equação (4.14) para obter  $\mathcal{A}$  em função de  $V$ . Ao fazê-lo, obtemos que  $\mathcal{A}$  é igual ao fator de Lorentz  $\gamma$ , definido na Aula 3:

$$\mathcal{A} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.15)$$

Vamos colocar o coeficiente  $\mathcal{A}$  em evidência nas Equações (4.16) e (4.17) antes de substituir o resultado obtido para  $\mathcal{A}$ :

$$x' = \mathcal{A} \left( x - \frac{\sqrt{\mathcal{A}^2 - 1}}{\mathcal{A}} c t \right) \quad (4.16)$$

$$c t' = \mathcal{A} \left( c t - \frac{\sqrt{\mathcal{A}^2 - 1}}{\mathcal{A}} x \right). \quad (4.17)$$

Usando a Equação (4.14), podemos agora substituir a expressão envolvendo  $\mathcal{A}$  que aparece nestas equações por  $V/c$ , além de substituir  $\mathcal{A}$  pelo fator de Lorentz  $\gamma$ . Desta forma, obtemos finalmente a **transformação de Lorentz** das coordenadas espaço-temporais:

$$x' = \gamma (x - V t) \quad (4.18)$$

$$y' = y \quad (4.19)$$

$$z' = z \quad (4.20)$$

$$t' = \gamma \left( t - \frac{V}{c^2} x \right) \quad (4.21)$$

Este conjunto de quatro equações é o resultado mais importante da aula! Não é difícil verificar que essas equações satisfazem a propriedade de invariância do intervalo relativístico  $\Delta s$ , conforme você mostrará no exercício a seguir.

#### Exercício 4.2

Mostre que o intervalo ao quadrado  $\Delta s^2$  é invariante pela transformação de Lorentz.

Sugestão: substitua as Equações (6.29)-(6.28) na expressão para o intervalo em termos das coordenadas em  $S'$ :

$$\Delta s'^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

e mostre que a expressão resultante é igual a

$$\Delta s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Este cálculo é direto e não depende de nenhum truque especial... mãos à obra!

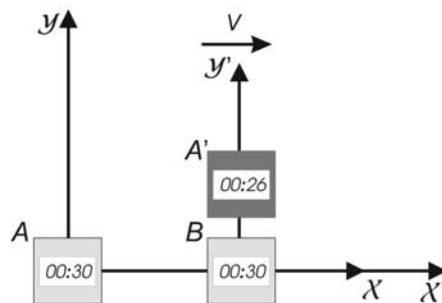
A **transformação de Lorentz** foi obtida pela primeira vez - exceto pela multiplicação por um fator global igual a  $1/\gamma$  - por Woldemar Voigt em 1887. O resultado correto, dado pelas Equações (6.29)-(6.28), foi publicado por H. A. Lorentz em 1904. Lorentz chamou  $t'$  "tempo local", para diferenciá-lo de  $t$ , que para ele seria o tempo físico (ou "verdadeiro"), dentro da concepção newtoniana de tempo absoluto. Assim,  $t'$  seria simplesmente uma variável matemática útil para determinados cálculos. A interpretação correta foi apresentada por Einstein em 1905, que reobteve o resultado de forma independente, no contexto da teoria da relatividade.

Também é muito simples verificar que as Equações (6.29)-(6.28) reproduzem a transformação identidade para o caso particular de  $V = 0$  (basta perceber que  $\gamma = 1$  neste caso), conforme esperado.

A transformação de Lorentz apresentada aqui permite obter as coordenadas de um evento no referencial  $S'$  a partir de suas coordenadas no referencial  $S$ . Vamos examinar o seguinte exemplo, ilustrado pela **Figura 4.7**: o cronômetro  $A'$ , posicionado na origem de  $S'$ , está na posição do cronômetro  $B$ . No referencial  $S$ , esse evento tem coordenadas  $x$  e  $t$  satisfazendo  $x = Vt$ , porque essa é a equação que descreve a posição da origem de  $S'$  de acordo com  $S$  num tempo  $t$  qualquer (confira a **Figura 4.6**). Quais são as coordenadas desse evento no referencial  $S'$ ? A Equação (6.29) fornece  $x' = 0$ , como esperado – de fato, essa foi uma das propriedades utilizadas na própria construção da transformação de Lorentz. Já a Equação (6.28) fornece

$$t' = \gamma(1 - \frac{V^2}{c^2})t = \frac{1}{\gamma}t. \quad (4.22)$$

Como  $\gamma \geq 1$ , o tempo próprio  $t'$ , marcado por  $A'$ , é menor do que o tempo  $t$  marcado pelo cronômetro  $B$  do referencial  $S$ , como mostramos na **Figura 4.7**. Esse é o efeito de dilatação temporal, que foi derivado na Aula 3 diretamente da propriedade de invariância do intervalo relativístico.



**Figura 4.7:** Efeito de dilatação temporal.

Em certas situações, estamos interessados no caminho inverso: obter as coordenadas no referencial  $S$  a partir das coordenadas em  $S'$ . No exercício resolvido a seguir, você obterá a transformação de Lorentz de  $S'$  para  $S$ , calculando a inversa da transformação dada pelas Equações (6.29)-(6.28).

## Exercício 4.3

Inverta as Equações (6.29)-(6.28) para obter as coordenadas  $x$  e  $t$  como funções de  $x'$  e  $t'$ .

Solução: Podemos escrever a transformação de Lorentz de  $S$  para  $S'$  na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\frac{V}{c} \\ -\frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

Para obter a transformação de Lorentz de  $S'$  para  $S$ , basta calcular a inversa da matriz  $2 \times 2$  que aparece na equação acima:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{V}{c} \\ \frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}.$$

O pré-fator que aparece nesta equação pode ser simplificado se usarmos a definição do fator de Lorentz  $\gamma$ , resultando em:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \frac{V}{c} \\ \frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}.$$

Podemos escrever a transformação de Lorentz inversa, obtida no exercício acima na forma explícita

$$x = \gamma(x' + Vt') \quad (4.23)$$

$$y = y' \quad (4.24)$$

$$z = z' \quad (4.25)$$

$$t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right). \quad (4.26)$$

Comparando com as Equações (6.29)-(6.28), você deve perceber que a transformação de  $S'$  para  $S$  tem a mesma forma que a transformação de  $S$  para  $S'$ , bastando trocar  $V$  por  $-V$ . Poderíamos ter “adivinhado” este resultado! Do ponto de vista do referencial  $S'$ , o referencial  $S$  se move com velocidade  $-V$  (isto é, ao longo do sentido negativo do eixo  $OX$ .) Pelo princípio da relatividade,  $S$  e  $S'$  são equivalentes e, portanto, a transformação de  $S'$  para  $S$  deve ter a mesma forma que a transformação de  $S$  para  $S'$ , mudando apenas

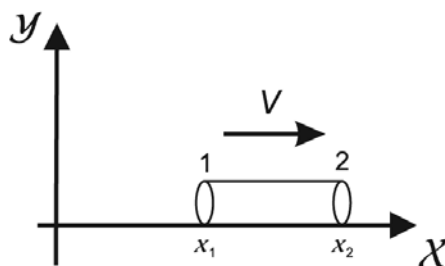
o parâmetro que caracteriza essa transformação: a velocidade relativa entre os referenciais.

Isto explica por que tomamos uma transformação linear bem no início da nossa derivação – confira as Equações (4.6) e (4.7). Quando a inversa de uma transformação linear existe (como ocorre aqui), ela também é uma transformação linear. Se tivéssemos uma transformação quadrática, por exemplo, sua inversa jamais teria a mesma forma, o que violaria o princípio da relatividade.

A seguir, derivaremos um segundo efeito cinemático importante da relatividade restrita (o primeiro foi a dilatação temporal, analisado na Aula 3 e rederivado acima): a contração de Lorentz-Fitzgerald. Nosso ponto de partida será a transformação de Lorentz.

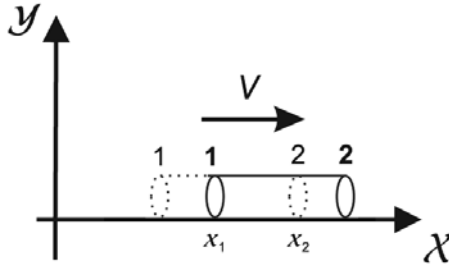
### Contração de Lorentz-Fitzgerald

No início desta aula, discutimos como medir o comprimento de uma barra: basta marcar as coordenadas espaciais das suas duas extremidades. Para um referencial em que a barra esteja em repouso, esse procedimento não apresenta nenhuma dificuldade. Também não há dificuldade se a barra se movimenta ao longo de uma direção perpendicular à sua extensão, como discutido anteriormente. Entretanto, para o referencial  $S$ , em que a barra se movimenta ao longo de sua extensão, como na **Figura 4.8**, é preciso um pouco mais de cuidado.



**Figura 4.8:** Comprimento de uma barra em movimento em relação ao referencial  $S$ .

Para que a medida esteja correta, é preciso marcar as posições das extremidades 1 e 2 *simultaneamente* no referencial  $S$ . Por exemplo, se medirmos a posição da extremidade 2,  $x_2$ , antes de medirmos  $x_1$ , como indicado na **Figura 4.9**, então a diferença  $x_2 - x_1$  será *menor* do que o comprimento da barra.



**Figura 4.9:** A linha pontilhada indica a posição em que a barra *estava* quando a posição  $x_2$  da extremidade 2 foi medida. O comprimento da barra é subestimado se a medida de  $x_1$  ocorre depois da medida de  $x_2$ .

Assim, é preciso tomar o cuidado de medir ambas as extremidades num mesmo tempo  $t$  do referencial  $S$ . Nesse caso, podemos identificar o comprimento da barra  $L$  no referencial  $S$  com a diferença

$$L = x_2 - x_1. \quad (4.27)$$

Quais são as coordenadas dos eventos “medida da extremidade 1” e “medida da extremidade 2” no referencial próprio  $S'$ ? Usando a transformação de Lorentz, Equações (6.29) e (6.28), obtemos

$$x'_1 = \gamma(x_1 - Vt) \quad (4.28)$$

$$t'_1 = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x_1\right) \quad (4.29)$$

para o primeiro evento; e

$$x'_2 = \gamma(x_2 - Vt) \quad (4.30)$$

$$t'_2 = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x_2\right) \quad (4.31)$$

para o segundo. Observe que  $t'_1 \neq t'_2$ , e, portanto, os eventos não são simultâneos do ponto de vista de  $S'$ . Apesar disso, a diferença

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) \quad (4.32)$$

representa o comprimento da barra no referencial  $S'$ . De fato, como a barra está em repouso em relação a  $S'$ , podemos medir as coordenadas das extremidades em tempos diferentes neste referencial!  $L_0$  é conhecido como o *comprimento próprio* da barra, já que representa o comprimento no referencial próprio. Ele é uma propriedade intrínseca da barra, assim como o tempo próprio entre os cliques de um cronômetro é uma propriedade intrínseca do cronômetro. Já o comprimento  $L$  medido em  $S$  depende da velocidade da barra em relação a  $S$ : comparando as Equações (4.27) e (4.32), obtemos

$$L = \frac{L_0}{\gamma}. \quad (4.33)$$

Como  $\gamma > 1$  se  $V \neq 0$ , esse resultado mostra que o comprimento medido em  $S$  é sempre *menor* que o comprimento próprio, se a barra se movimenta em relação a  $S$ . Esse é o efeito de contração de Lorentz-Fitzgerald: diferentes referenciais medem comprimentos diferentes de uma *mesma* barra. Para as situações da vida diária, ele é quase sempre desprezível, porque o fator de Lorentz  $\gamma$  é muito próximo da unidade, conforme discutido na Aula 3. Entretanto, há situações em que  $\gamma$  é bastante grande, como no exemplo dos múons de raios cósmicos, discutido na Aula 3.

**Exercício 4.4**

No Exercício 2.7, você mostrou que o efeito de dilatação temporal permite que os múons produzidos a uma altura de 9000m na atmosfera cheguem à superfície terrestre antes de se desintegrarem. Essa análise foi realizada do ponto de vista do referencial terrestre. Como analisar esse mesmo problema a partir do referencial próprio do múon? Nesse caso, temos de tomar o valor para o tempo próprio para a desintegração,  $2.2 \times 10^{-6}$ seg. Entretanto, nesse referencial, a espessura da atmosfera a ser percorrida é contraída! Calcule a espessura no referencial próprio do múon. Cuidado: não o confunda com o referencial próprio da atmosfera! A velocidade do múon em relação ao referencial terrestre vale  $v = 0,998c$ . O múon chega à superfície?

**Solução**

O fator de Lorentz vale  $\gamma = 15,8$  nesse exemplo. A espessura da camada de atmosfera vale  $L_0 = 9000\text{m}$  no referencial próprio da atmosfera, que é o referencial terrestre. No referencial próprio do múon, a atmosfera se desloca com velocidade de módulo igual a  $v = 0,998c$ . Devido ao efeito de contração de Lorentz-Fitzgerald, a espessura no referencial próprio do múon vale  $L = L_0/\gamma = 570\text{m}$ . Assim, o tempo necessário para percorrer a camada de atmosfera e chegar à superfície da Terra vale, de acordo com este referencial,  $\Delta t = L/c = 1,9 \times 10^{-6}\text{seg}$ , que é menor que o tempo próprio de desintegração. Portanto, o múon chega à superfície antes de se desintegrar. Obtivemos a mesma conclusão na Aula 3, adotando o ponto de vista do referencial terrestre. Nesse caso, não há contração, mas o tempo para desintegração é maior do que o tempo próprio, devido ao efeito de dilatação temporal. Note que a resposta à pergunta “o múon chega à superfície?” deve ser sempre a mesma, independentemente do referencial escolhido para a análise do problema.

A contração de Lorentz-Fitzgerald foi proposta pela primeira vez em 1889, por Fitzgerald, como uma forma de explicar o resultado negativo do experimento de Michelson e Morley. Em 1892, essa hipótese foi proposta novamente por Lorentz, de forma independente, mas com a mesma finalidade. Para Fitzgerald e Lorentz, as forças intermoleculares responsáveis pela estrutura material da barra seriam afetadas pelo seu movimento em relação ao ‘éter’, causando a contração.

Com a teoria da relatividade de Einstein, o efeito de contração foi novamente obtido, mas de forma completamente distinta. O efeito não é uma hipótese adicional – pelo contrário, ele é uma consequência da teoria da relatividade, sendo derivado a partir do seu formalismo, conforme discutimos anteriormente. Einstein também obteve a interpretação correta para a contração. As propriedades intrínsecas da barra não mudam quando ela se desloca em movimento uniforme – nem poderiam, pelo princípio da relatividade, uma vez que não existe o ‘éter’ como referência para o movimento. Portanto, não há nenhum mecanismo *dinâmico* (por exemplo, de modificação das forças intermoleculares responsáveis pela rigidez da barra) responsável pelo efeito. Diferentes referenciais inerciais em movimento relativo observam comprimentos diferentes para a nossa barra, simplesmente porque eles não estão em acordo sobre a simultaneidade dos eventos de marcação das posições das suas extremidades. Assim, a contração de Lorentz-Fitzgerald é um efeito *cinemático*, como a dilatação temporal estudada na Aula 3.

## Conclusão

Nesta aula, derivamos a transformação de Lorentz para as coordenadas espaço-temporais de um determinado evento, tomando como ponto de partida o princípio da relatividade e a invariância do intervalo relativístico. De posse deste resultado, poderemos obter as coordenadas em qualquer referencial inercial  $S'$ , se soubermos as coordenadas no referencial  $S$  e a velocidade de  $S'$  em relação a  $S$ . A transformação de Lorentz mistura a coordenada temporal e a coordenada espacial associada à direção da velocidade de  $S'$  relativa a  $S$ . Por outro lado, as coordenadas espaciais transversais à velocidade são invariantes.

Exploramos duas aplicações importantes da transformação de Lorentz: rederivamos o efeito de dilatação temporal, discutido na Aula 3, e obtivemos o efeito da contração de Lorentz-Fitzgerald.

## Atividades Finais

No final da aula, você encontrará as respostas das questões 3 e 4. Não olhe as respostas antes de tentar obtê-las sozinho!

1. Explique, com argumentos físicos, a razão de a transformação de Lorentz inversa ter a mesma forma que a transformação direta, bastando trocar  $V$  por  $-V$ .
2. Por que não observamos o efeito da contração de Lorentz nas situações de nossa vida diária?
3. Ao medir o comprimento da barra da **Figura 4.8** no referencial  $S$ , o que acontece se a extremidade 2 for medida depois da extremidade 1? Nesse caso,  $x_2 - x_1$  é menor, igual, ou maior do que o comprimento  $L$  da barra no referencial  $S$ ? Para justificar a sua resposta, faça um desenho análogo ao da **Figura 4.9**.
4. Suponha que o referencial  $S'$  se mova em relação ao referencial  $S$  com velocidade  $V$  ao longo da direção do eixo  $OY$ . Quais são as coordenadas espaciais invariantes nesse caso? Escreva, por analogia ao caso estudado nesta aula (e sem fazer cálculos), as quatro equações que implementam a transformação de Lorentz nesse caso.
5. O referencial  $S'$  se move em relação a  $S$  com velocidade  $V$  ao longo da direção do eixo  $OX$ . O referencial  $S''$  se move em relação a  $S'$  também com velocidade  $V$  ao longo da mesma direção. Obtenha a coordenada  $x''$  (relativa ao referencial  $S''$ ) em termos das coordenadas no referencial  $S$ . Mostre que o seu resultado tem a mesma forma que a Equação (6.29), exceto pela substituição de  $V$  por um parâmetro, com dimensão de velocidade. Qual deveria ser a interpretação física desse parâmetro? Na próxima aula, você verá por que ele *não* é igual a  $2V$ .

### Solução

Inicialmente, usamos a transformação de Lorentz, dada pelas Equações (6.29)-(6.28), para passar do referencial  $S$  para o referencial  $S'$ . Elas fornecem  $x'$  e  $t'$  em termos de  $x$  e  $t$ . As coordenadas transversais  $y$  e  $z$  são invariantes e, por isso, serão ignoradas. Em seguida, passamos de  $S'$  para  $S''$  tomando a transformação de Lorentz correspondente. Vamos escrever apenas a equação para  $x''$ :

$$x'' = \gamma (x' - Vt'). \quad (4.34)$$

Basta agora substituir as expressões para  $x'$  e  $t'$ , dadas respectivamente pelas Equações (6.29) e (6.28) na equação anterior:

$$x'' = \gamma \left[ \gamma (x - Vt) - V\gamma \left( t - \frac{Vx}{c^2} \right) \right]. \quad (4.35)$$

Podemos colocar o fator  $\gamma$  em evidência e agrupar os termos envolvendo  $x$  e  $t$ :

$$x'' = \gamma^2 \left[ \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right)x - 2Vt \right]. \quad (4.36)$$

Para que esta equação fique mais parecida com a (6.29), vamos colocar o fator multiplicando  $x$  em evidência e escrever a expressão explícita para  $\gamma^2$ :

$$x'' = \frac{1 + V^2/c^2}{1 - V^2/c^2} \left( x - \frac{2V}{1 + V^2/c^2} t \right). \quad (4.37)$$

Se definirmos a velocidade

$$V_c = \frac{2V}{1 + V^2/c^2}, \quad (4.38)$$

então, o pré-fator na Equação (4.40) corresponde ao fator de Lorentz  $\gamma_c$  associado à velocidade  $V_c$ :

$$\frac{1 + V^2/c^2}{1 - V^2/c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - V_c^2/c^2}} = \gamma_c. \quad (4.39)$$

Assim, a Equação (4.40) tem a mesma forma que a Equação (6.29), exceto pela troca de  $V$  por  $V_c$  (e, conseqüentemente, de  $\gamma$  por  $\gamma_c$ ):

$$x'' = \gamma_c (x - V_c t). \quad (4.40)$$

Este resultado tem a seguinte interpretação: podemos passar do referencial  $S$  diretamente para o referencial  $S''$  usando a transformação de Lorentz, desde que tomemos a velocidade de  $S''$  em relação a  $S$ . Pela lei de composição de velocidades de Galileu, esta velocidade seria  $V + V = 2V$ . Entretanto, o resultado obtido aqui sugere muito fortemente que esta velocidade vale  $V_c$ , dada pela Equação (4.38), que é menor do que  $2V$ . Vamos confirmar este resultado na próxima aula, quando derivaremos a lei de composição de velocidades relativística.

## Resumo

As coordenadas espaço-temporais de um determinado evento são definidas em relação a um determinado referencial inercial  $S$ . Podemos descrever este mesmo evento por meio de um segundo referencial inercial  $S'$  em movimento em relação a  $S$ . As suas coordenadas relativas a  $S'$  podem ser obtidas a partir das coordenadas relativas a  $S$  por meio da transformação de Lorentz. Os dois referenciais medem o mesmo valor para comprimentos transversais

à direção da velocidade de  $S'$  em relação a  $S$ . Por outro lado, comprimentos ao longo da direção do movimento são diferentes para  $S$  e  $S'$ . Por exemplo, se no referencial  $S$  uma barra se movimenta ao longo de sua extensão, o seu comprimento medido neste referencial será menor do que seu comprimento próprio (comprimento medido no referencial próprio). Este é o efeito de contração de Lorentz-Fitzgerald.

## E na próxima aula...

...vamos derivar a lei de composição de velocidades relativística e discutir as noções de passado e futuro na teoria da relatividade.

## Respostas das questões 3 e 4

**Questão 3.** Nesse caso,  $x_2 - x_1$  é maior do que o comprimento  $L$ .

**Questão 4.** As coordenadas invariantes são  $x$  e  $z$ . A transformação é dada pelas equações

$$x' = x \quad (4.41)$$

$$y' = \gamma(y - Vt) \quad (4.42)$$

$$z' = z \quad (4.43)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}y\right). \quad (4.44)$$



## Aula 5 – Causalidade relativística

### Meta da aula

Analisar os conceitos de passado e futuro e o princípio da causalidade na teoria da relatividade.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Identificar as situações em que o ordenamento temporal de dois determinados eventos é invariante.
- Apresentar a condição para a existência de conexão causa-efeito entre dois eventos quaisquer.

### Pré-requisitos

Para compreender esta aula, é recomendável ler e realizar as atividades propostas nas aulas anteriores desta disciplina. Em especial, os conteúdos das Aulas 2 (relatividade da simultaneidade) e 4 (transformação de Lorentz) serão muito importantes.

### Passado e futuro na teoria da relatividade

Como você aprendeu ao longo das quatro aulas anteriores, a relatividade do tempo e da simultaneidade é um dos aspectos mais fundamentais — e menos intuitivos — da teoria da relatividade. Eventos simultâneos para um determinado referencial podem ocorrer em tempos diferentes de acordo com a perspectiva de um segundo referencial.

Já mencionamos brevemente na Aula 2 que o *ordenamento temporal* de dois determinados eventos, digamos  $A$  e  $B$ , não é, em geral, igual para referenciais diferentes. Em outras palavras, dois referenciais diferentes podem não concordar sobre qual dos dois eventos ocorreu primeiro, ou se ocorreram simultaneamente. Vamos analisar esta questão a partir da transformação de Lorentz, que você estudou na Aula 4.

Sejam  $t_A$  e  $x_A$  as coordenadas espaço-temporais do evento  $A$  no referencial  $S$ ; e  $t_B$  e  $x_B$  as coordenadas do evento  $B$  neste mesmo referencial.

Vamos supor que, para o referencial  $S$ ,  $B$  tenha ocorrido depois de  $A$ :  $t_B > t_A$ . Considere um segundo referencial,  $S'$ , em movimento, em relação a  $S$ , com velocidade  $V$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ . As coordenadas temporais dos eventos  $A$  e  $B$  em relação ao referencial  $S'$  são  $t'_A$  e  $t'_B$ . O que podemos dizer sobre o ordenamento temporal destes dois eventos do ponto de vista de  $S'$ ? Vamos mostrar que, em certas situações,  $B$  pode ocorrer *antes* de  $A$  do ponto de vista de  $S'$ , ou seja, as coordenadas temporais podem satisfazer  $t'_A > t'_B$ , apesar de ser  $t_B > t_A$ .

Usando a transformação de Lorentz, podemos obter  $t'_A$  e  $t'_B$  a partir das coordenadas no referencial  $S$  (lembre que  $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$  é o fator de Lorentz):

$$t'_B = \gamma \left( t_B - \frac{V}{c^2} x_B \right), \quad (5.1)$$

$$t'_A = \gamma \left( t_A - \frac{V}{c^2} x_A \right). \quad (5.2)$$

Subtraindo uma equação da outra e multiplicando por  $c$ , obtemos:

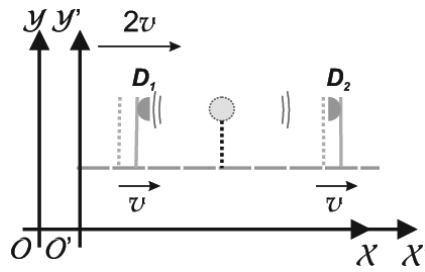
$$c(t'_B - t'_A) = \gamma \left[ c(t_B - t_A) - \frac{V}{c} (x_B - x_A) \right]. \quad (5.3)$$

De acordo com esta equação, podemos ter  $t'_B - t'_A < 0$  (e logo  $t'_B < t'_A$ ), apesar de ser  $t_B - t_A > 0$ , desde que  $(V/c)(x_B - x_A)$  seja positivo e maior do que  $c(t_B - t_A)$ . Portanto, quando a distância espacial entre os dois eventos é suficientemente grande, existem referenciais para os quais o evento  $B$  ocorre antes de  $A$ , apesar de  $B$  ocorrer depois de  $A$  do ponto de vista de  $S$ .

Vamos examinar um exemplo deste tipo. Ele já havia sido apresentado na Aula 2, mas, naquele momento do curso, você ainda não dispunha das ferramentas necessárias para analisá-lo em detalhe.

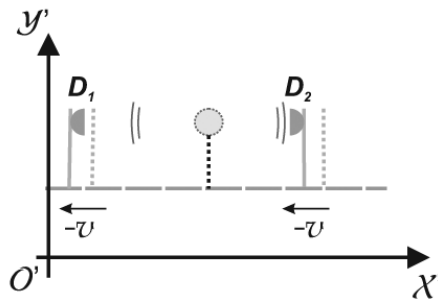
Uma fonte de luz e dois detectores,  $D_1$  e  $D_2$ , estão alinhados ao longo da direção do eixo  $OX$ . No instante da emissão de luz,  $D_1$  e  $D_2$  estão equidistantes da fonte. Em relação ao referencial  $S$ , os dois detectores se movem com velocidade  $v$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ . Note que o estado de movimento da fonte é irrelevante; só importa a sua posição no momento da emissão. Lembre que a luz emitida se propaga com a mesma velocidade  $c$  em todas as direções, independentemente do movimento da fonte.

Seja  $A$  o evento “detecção de luz por  $D_1$ ” e  $B$  o evento “detecção de luz por  $D_2$ ”. Uma vez que  $D_1$  se aproxima e  $D_2$  se afasta da fonte, o evento  $A$  é anterior ao evento  $B$  do ponto de vista do referencial  $S$ :  $t_A < t_B$ , como mostra a **Figura 5.1**.



**Figura 5.1:** Em relação ao referencial  $S$ , os detectores  $D_1$  e  $D_2$  se movem com velocidade  $v$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ . As posições em que os detectores *estavam* no momento da emissão estão representadas por linhas tracejadas.

Nesta figura, também indicamos o movimento do referencial  $S'$  em relação a  $S$ , com velocidade  $2v$ , ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ . (se você está lendo simultaneamente a Aula 2, note que estamos usando uma notação diferente da usada naquela aula para nomear os diferentes referenciais). Para determinar a velocidade  $v'$  dos detectores em relação a  $S'$ , vamos supor que  $v \ll c$ . Nesse caso, a lei de composição de velocidades de Galileu é uma boa aproximação para a lei de composição relativística, que você estudará na próxima aula. Assim, podemos tomar a aproximação  $v' \approx v - 2v = -v$ . O sinal negativo significa que, do ponto de vista do referencial  $S'$ , os detectores se deslocam para a esquerda (sentido negativo do eixo  $OX'$ ), como mostra a **Figura 5.2**.



**Figura 5.2:** Ponto de vista do referencial  $S'$ .

É muito simples entender, de forma intuitiva, por que os detectores se deslocam para a esquerda. Quando estamos no interior de um automóvel que ultrapassa um ônibus na estrada, temos a sensação de que este anda para trás ao observá-lo do ponto de vista do interior do automóvel. O referencial do automóvel é o análogo de  $S'$ , e o ônibus desempenha o papel dos nossos dois detectores.

Como consequência deste sentido do movimento dos detectores, agora é o detector  $D_1$  que se afasta e o detector  $D_2$  que se aproxima da fonte, invertendo a situação descrita pelo referencial  $S$  (compare as **Figuras 5.1** e **5.2**). Portanto, do ponto de vista do referencial  $S'$ , é  $D_2$  que irá detectar a luz primeiro! Para o referencial  $S'$ , o evento  $A$  é posterior ao evento  $B$ :  $t'_A > t'_B$ , invertendo o ordenamento temporal observado no referencial  $S$ . Observe que estamos discutindo um *único* par de eventos, utilizando duas descrições diferentes, associadas aos referenciais  $S$  e  $S'$ . Em cada descrição, a sequência temporal em que os dois eventos ocorrem é diferente:  $B$  depois de  $A$  de acordo com  $S$ ;  $A$  depois de  $B$  de acordo com  $S'$ .

Na Atividade Final 5, você vai mostrar que, para o referencial  $S$ , o intervalo de tempo entre os eventos vale  $t_B - t_A = vL/c^2$ , ao passo que, para o referencial  $S'$ , podemos usar a Equação (5.3) para obter  $t'_B - t'_A = -vL/c^2$  — observe a diferença de sinal! Para uma distância  $L = 10\text{m}$  e uma velocidade  $v = 10\text{m/s}$ , o intervalo de tempo em  $S$  vale apenas  $1,1 \times 10^{-15}\text{seg}$ . Como é muito difícil medir um tempo tão curto, na prática, ambos os referenciais concluiriam, neste exemplo, que os eventos foram simultâneos, dentro da incerteza experimental. Isso mostra que o problema de ordenamento temporal não é importante na maioria das situações práticas do dia-a-dia, nas quais podemos nos guiar por nossa intuição Newtoniana de tempo absoluto.

## Cone de luz

Vamos, a partir deste ponto, inverter a discussão, analisando a condição para que este tipo de ambigüidade sobre o ordenamento temporal **não** aconteça. Mostraremos que, se o comprimento  $|x_B - x_A|$  for suficientemente pequeno (lembre que  $|x|$  representa o módulo do número  $x$ ), *todos* os referenciais se deslocando ao longo da direção do eixo  $OX$  concordarão com o ordenamento temporal obtido no referencial  $S$ . Qual é, então, a condição a ser satisfeita pelo evento  $B$ , para que ele seja posterior a  $A$  em todos esses referenciais?

Se

$$|x_B - x_A| \leq c(t_B - t_A), \quad (5.4)$$

então, para *qualquer* referencial  $S'$ , vale a desigualdade

$$\frac{|V|}{c} |x_B - x_A| < c(t_B - t_A), \quad (5.5)$$

já que sua velocidade  $V$  deve sempre satisfazer a condição  $|V|/c < 1$ . De acordo com a Equação (5.3), teremos, nesse caso,  $t'_B > t'_A$  para *qualquer* referencial  $S'$  se movendo ao longo da direção do eixo  $OX$  (inclusive aqueles

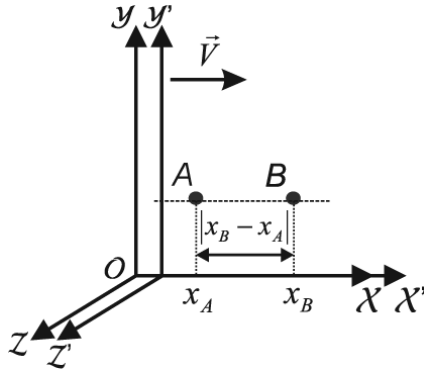
referenciais que se movem ao longo do sentido negativo do eixo, correspondendo a  $V < 0$ , que minimizam o intervalo de tempo quando  $x_B - x_A < 0$ ).

Assim, a desigualdade (5.4) é a condição procurada. Por que ela envolve apenas as coordenadas  $x_A$  e  $x_B$  (além dos tempos) e é independente das coordenadas associadas aos outros dois eixos cartesianos,  $y_A$ ,  $y_B$ ,  $z_A$  e  $z_B$ ? Esta característica é consequência de termos analisado apenas os referenciais em movimento ao longo da direção do eixo  $OX$ . A condição para ser  $t'_B > t'_A$  para *todos* os referenciais  $S'$ , inclusive aqueles que se movem em relação a  $S$  ao longo de direções espaciais não paralelas ao eixo  $OX$ , envolve a distância

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad (5.6)$$

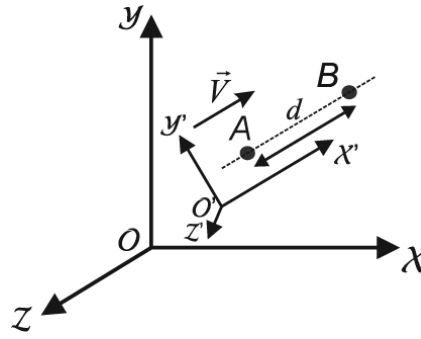
entre os pontos do espaço em que ocorreram os dois eventos (confira a Aula 2 para entender por que esta quantidade matemática representa a distância espacial).

Quando a direção que liga os dois pontos espaciais é paralela ao eixo  $OX$ , como na **Figura 5.3**, então  $y_B = y_A$ ,  $z_B = z_A$  e, em consequência,  $d = |x_B - x_A|$ .



**Figura 5.3:** Neste exemplo, a direção que liga os pontos espaciais em que os eventos  $A$  e  $B$  ocorreram é paralela ao eixo  $OX$ . Em consequência, a distância entre os pontos vale  $d = |x_B - x_A|$ , e a diferença temporal entre os eventos é minimizada para referenciais que se deslocam ao longo do eixo  $OX$ .

Mais geralmente, a direção que liga os dois pontos pode não ser paralela a nenhum dos eixos cartesianos, como no exemplo ilustrado pela **Figura 5.4**. Pode-se mostrar que os referenciais que se movimentam ao longo desta direção são aqueles que medem o menor valor para a diferença temporal  $t'_B - t'_A$ . Portanto, devemos analisar esta classe de referenciais ao derivar a condição para que seja  $t'_B - t'_A > 0$ .



**Figura 5.4:** A diferença temporal entre os eventos é minimizada para referenciais com velocidade  $\vec{V}$  paralela à direção que liga os pontos espaciais.

Pelo argumento de isotropia (equivalência entre as várias direções do espaço), a condição para esta classe de referenciais é análoga à Equação (5.4), com a distância  $d$  desempenhando o papel do comprimento  $|x_B - x_A|$ . Portanto, a condição para que  $t'_B - t'_A > 0$  para qualquer referencial  $S'$ , independentemente da direção do seu movimento em relação a  $S$ , é dada por uma desigualdade análoga à (5.4), com  $|x_B - x_A|$  substituído por  $d$ :

$$d \leq c(t_B - t_A). \quad (5.7)$$

Em termos do intervalo relativístico ao quadrado definido na Aula 2,

$$\Delta s^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - d^2, \quad (5.8)$$

podemos expressar esta condição pela desigualdade  $\Delta s^2 \geq 0$ . Quando o intervalo satisfaz a desigualdade  $\Delta s^2 > 0$ , dizemos que ele é do tipo *tempo*, pois, neste caso, existe um referencial para o qual as coordenadas espaciais dos dois eventos são iguais, como ilustraremos num exemplo mais adiante. Note que essa é uma propriedade intrínseca do par de eventos, não dependendo do referencial escolhido para descrevê-los, já que  $\Delta s^2$  assume o mesmo valor em todos os referenciais.

O ordenamento temporal também é invariante quando  $\Delta s^2 = 0$ , e, nesse caso, dizemos que o intervalo é do tipo *luz*. Por outro lado, quando  $\Delta s^2 < 0$ , o ordenamento temporal dos dois eventos não é o mesmo para todos os referenciais. Em particular, existe, nesse caso, um referencial para os quais os eventos são simultâneos, e, por isso, dizemos que o intervalo é do tipo *espaço*. Para o exemplo dos dois detectores discutido anteriormente, este referencial seria o referencial próprio dos detectores: neste referencial, as detecções são simultâneas, já que os detectores estão em repouso e são equidistantes da fonte no momento da emissão.

É imediato verificar que dois eventos associados a um intervalo do tipo tempo não poderiam ser simultâneos em nenhum referencial. De fato, ao calcularmos  $\Delta s^2$  num referencial em que os eventos tivessem a mesma coordenada temporal, teríamos  $\Delta s^2 \leq 0$  de acordo com a Equação (5.8).

### Exercício 5.1

Mostre que a desigualdade (5.7) implica a desigualdade (5.4). Entretanto, a recíproca não é verdadeira: apresente um par de eventos que satisfaça a segunda condição, mas não a primeira. Portanto, a desigualdade (5.4) é uma condição mais fraca do que a (5.7). De fato, enquanto a (5.7) garante que *todos* os referenciais inerciais ordenarão os tempos dos dois eventos da mesma forma, a (5.4) garante o mesmo ordenamento apenas para uma classe restrita de referenciais: aqueles que se movem ao longo da direção do eixo  $OX$ .

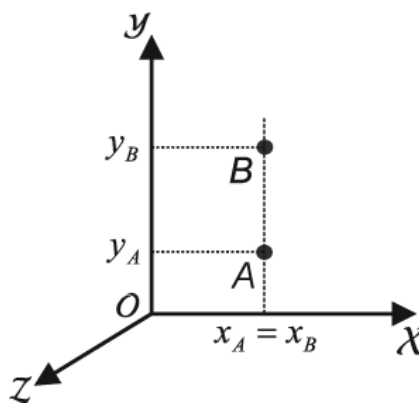
**Solução.** Uma vez que  $(y_B - y_A)^2$  e  $(z_B - z_A)^2$  são positivos ou nulos, temos:

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \geq \sqrt{(x_B - x_A)^2} = |x_B - x_A|. \quad (5.9)$$

Se os eventos  $A$  e  $B$  satisfazem a desigualdade (5.7), então podemos escrever, usando a (5.9):

$$|x_B - x_A| \leq d \leq c(t_B - t_A), \quad (5.10)$$

implicando a (5.4). Para mostrar que a recíproca não é verdadeira, basta apresentar o seguinte contra-exemplo:  $A$  e  $B$  tais que  $x_A = x_B$ ,  $z_A = z_B$  e  $y_B - y_A > c(t_B - t_A) > 0$ . Neste caso, temos  $d = |y_B - y_A| = y_B - y_A$  (veja a **Figura 5.5**) e, portanto,  $d > c(t_B - t_A)$ , violando a desigualdade (5.7), embora a (5.4) seja satisfeita. Assim, para todos os referenciais que se movem ao longo da direção do eixo  $OX$ , teremos  $t'_B > t'_A$ . Por outro lado, existem referenciais se deslocando ao longo da direção do eixo  $OY$  para os quais  $t'_B < t'_A$ .

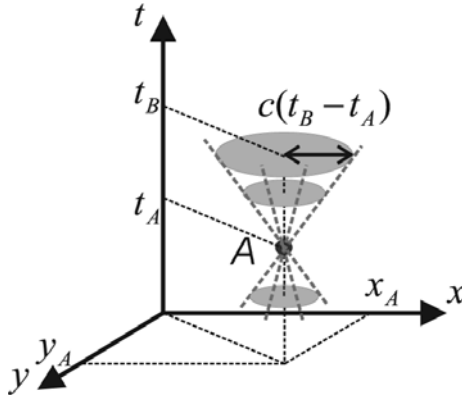


**Figura 5.5:** Pontos espaciais em que ocorreram os eventos  $A$  e  $B$ .

Para um dado evento  $A$ , gostaríamos de representar graficamente o conjunto de eventos satisfazendo a condição dada pela desigualdade (5.7). Como cada evento é caracterizado por quatro coordenadas espaço-temporais,  $t$ ,  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , este conjunto de eventos “reside” num espaço quadridimensional. Para ter uma visão no espaço tridimensional, vamos nos restringir aos eventos com  $z = z_A$ , o que equivale a tomar um “corte” da figura quadridimensional. Nesse caso particular, a desigualdade (5.7) fornece:

$$\sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \leq c(t - t_A). \quad (5.11)$$

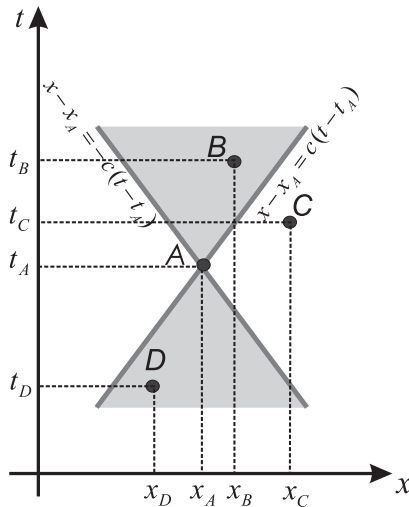
Para um dado tempo  $t = t_B$ , esta desigualdade define um disco de raio  $c(t_B - t_A)$ , como mostra a **Figura 5.6**. O conjunto dos vários discos associados a todos os valores possíveis de  $t$  (que pode ser qualquer número real, de  $-\infty$  a  $\infty$ ) forma um *cone* neste espaço tridimensional, chamado *cone de luz*, cujo vértice é o ponto do espaço-tempo associado ao evento  $A$ . A parte superior do cone, associada a  $t > t_A$ , representa o conjunto de eventos que ocorrem *após* o evento  $A$ , de acordo com o ponto de vista de *todos* os referenciais inerciais. Assim, esta região corresponde ao *futuro absoluto* de  $A$ . De forma análoga, a parte inferior do cone corresponde ao *passado absoluto* de  $A$ .



**Figura 5.6:** Cone de luz relativo ao evento  $A$ .

No caso mais geral, para valores arbitrários de  $z$ , a desigualdade (5.7) define uma esfera sólida de raio  $c(t - t_A)$  para cada tempo  $t$  (em vez de um disco). O conjunto das várias bolas forma um hipercone no espaço-tempo quadridimensional.

O corte (ou seção) do hipercone associado a  $z = z_A$  define o cone tridimensional mostrado na **Figura 5.6**. Se tomarmos mais um corte, nos restringindo aos eventos com  $y = y_A$ , obtemos a região bidimensional mostrada em cinza na **Figura 5.7**. Ela corresponde, justamente, à desigualdade (5.4), que se refere aos eventos cujas posições espaciais estão alinhadas com a direção do eixo  $OX$ .



**Figura 5.7:** Os eventos  $B$  e  $D$  estão, respectivamente, no futuro e no passado absolutos de  $A$ . O evento  $C$  ocorreu após o evento  $A$  para o referencial  $S$ , mas existem referenciais para os quais ele ocorreu antes de  $A$ .

Nesta figura, indicamos as coordenadas espaço-temporais do evento  $B$ , que está no interior do cone de luz de  $A$ , correspondendo ao futuro absoluto de  $A$ . Isto significa que as coordenadas espaço-temporais de  $B$ ,  $x_B$  e  $t_B$ , satisfazem a desigualdade (5.4). O evento  $D$  também está no interior do cone de luz e satisfaz esta desigualdade, mas corresponde ao passado absoluto de  $A$ . Por outro lado, o evento  $C$ , que está fora do cone, ocorreu após o evento  $A$ , de acordo com o referencial  $S$ , mas não de acordo com os referenciais que se deslocam ao longo do eixo  $OX$  com velocidade  $V$  na faixa definida pelas desigualdades  $V_0 \leq V < c$ , onde:

$$V_0 = \frac{c^2(t_C - t_A)}{x_C - x_A}. \quad (5.12)$$

Observe que a condição  $V_0 < c$  é satisfeita, já que  $x_C - x_A > c(t_C - t_A)$ .

#### Exercício 5.2

Mostre que o evento  $C$  indicado na **Figura 5.7** ocorre *antes* do evento  $A$ , de acordo com os referenciais que se deslocam ao longo do eixo  $OX$  com velocidades (em relação ao referencial  $S$ )  $V > V_0$ . Como o intervalo entre  $A$  e  $C$  é do tipo espaço, existe um referencial para o qual os eventos são simultâneos: qual é ele?

Sugestão: use a Equação (5.3) com  $t_B$  e  $x_B$  substituídos por  $t_C$  e  $x_C$ .

Resposta: trata-se do referencial que se desloca em relação a  $S$  com velocidade  $V = V_0$ .

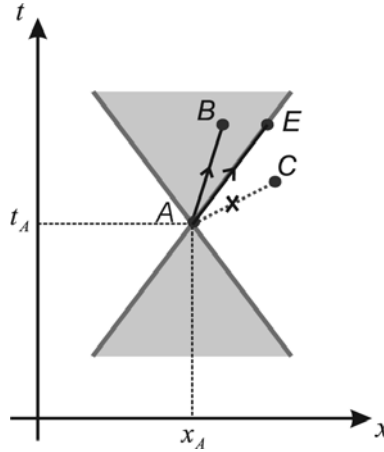
## Exercício 5.3

Forneça exemplos para as coordenadas de eventos  $B$ ,  $C$  e  $D$  que estejam, em relação ao evento  $A$ , no futuro absoluto, no futuro fora do cone de luz (correspondendo a um intervalo tipo espaço) e no passado absoluto, respectivamente (como na **Figura 5.7**). Tome os seguintes valores para as coordenadas do evento  $A$ :  $t_A = 0$  e  $x_A = 0$ .

Resposta comentada: para o evento  $B$ , quaisquer valores de  $x_B$  e  $t_B$  que satisfaçam  $|x_B| < ct_B$ . Por exemplo,  $x_B = 1\text{m}$  e  $t_B = 2\text{seg}$ . Para  $C$ , quaisquer valores com  $0 < ct_C < |x_C|$ . Uma possibilidade seria  $x_C = 4 \times 10^8\text{m}$  e  $t_C = 1\text{seg}$ . Para  $D$ , quaisquer valores que satisfaçam ambas as desigualdades  $t_D < 0$  e  $|x_D| < c|t_D|$ . Digamos,  $x_D = -20\text{m}$  e  $t_D = -3\text{seg}$ .

## Princípio da causalidade

Os conceitos de passado e futuro absolutos estão relacionados à possibilidade de conexão causal entre dois eventos. Suponha que o evento  $A$  seja a *causa* do evento  $B$ . Por exemplo,  $A$  pode ser o evento “arremesso de uma pedra”, e  $B$ , o evento “quebra de uma janela”. Vamos supor que a quebra da janela seja *consequência* (ou efeito) do arremesso da pedra. *Todos* os referenciais inerciais devem estar de acordo sobre o fato de que  $B$  é causado por  $A$ , porque o conceito de causa-efeito é absoluto: ele não pode depender de qual referencial é escolhido para descrever os eventos. Como o efeito é necessariamente posterior à sua causa, então  $B$  deve ocorrer *depois* de  $A$ , *qualquer que seja* o referencial usado na descrição dos eventos  $A$  e  $B$ . Portanto,  $B$  deve estar na parte superior do cone de luz de  $A$ , que corresponde ao futuro absoluto de  $A$ , como mostra a **Figura 5.8**. Este é o princípio da causalidade.



**Figura 5.8:** O evento  $A$  pode ser causa dos eventos  $B$  e  $E$ , mas não do evento  $C$ .

Para o exemplo discutido aqui, esta propriedade pode ser demonstrada explicitamente. Digamos que a pedra se desloca ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ , com velocidade constante  $v$ . Então, se  $x_B > 0$  é a coordenada que fornece a posição da janela, o instante de tempo  $t_B$  em que a pedra quebra a janela é tal que:

$$x_B - x_A = v(t_B - t_A), \quad (5.13)$$

já que  $x_B - x_A$  é a distância percorrida pela pedra desde o arremesso até a colisão com a janela. Como  $v < c$ , então a Equação (5.13) implica  $0 < x_B - x_A < c(t_B - t_A)$ , em acordo com a desigualdade (5.4).

Como o intervalo entre os eventos  $A$  e  $B$  é do tipo tempo, existe um referencial em relação ao qual as coordenadas espaciais dos dois eventos são idênticas. No exemplo considerado aqui, trata-se do referencial próprio da pedra! De fato, as coordenadas espaciais dos dois eventos são idênticas nesse caso, porque elas marcam a posição da pedra, que está em repouso neste referencial (é a janela que se aproxima com velocidade  $-v$  até colidir com a pedra).

Em lugar de quebrar a janela com uma pedra, poderíamos usar um laser de alta potência! Digamos, então, que  $A$  seja o evento “emissão de um pulso de luz laser”. O pulso se propaga no vácuo em direção à janela com velocidade  $c$ . Chamemos  $E$  o evento “quebra da janela por meio do pulso de luz”. Pelo mesmo argumento do caso anterior, as coordenadas  $x_E$  e  $t_E$  satisfazem:

$$x_E - x_A = c(t_E - t_A), \quad (5.14)$$

pois basta trocar  $v$  na Equação (5.13) pela velocidade do pulso  $c$ .

Pela Equação (5.14), o evento  $E$  está bem sobre a fronteira do cone de luz de  $A$  (o intervalo entre  $A$  e  $E$  é do tipo luz).  $E$  também satisfaz a condição (5.4) e, portanto, está no futuro absoluto de  $A$ , como deveria ser, já que  $E$  é explicitamente causado por  $A$ .

Nestes dois exemplos, a localização do evento “quebra da janela” no futuro absoluto é consequência do fato de que a conexão causal se dá por meio de uma propagação com velocidade menor ou igual a  $c$ . No primeiro exemplo, a conexão é mediada pelo movimento da pedra em direção à janela, com velocidade  $v < c$ . No segundo exemplo, ela é mediada pela propagação do pulso de luz, com velocidade igual a  $c$ .

O que aconteceria se pudéssemos estabelecer uma conexão com velocidade *maior* do que  $c$ ? Neste caso, estaríamos causando um evento localizado *fora* do futuro absoluto, como o evento  $C$  da **Figura 5.8**. Você mostrou, no Exercício 5.2, que, do ponto de vista de vários referenciais, o evento  $C$  ocorreu *antes* de  $A$ . Assim, se  $C$  fosse causado por  $A$ , isto estaria violando um princípio muito fundamental: a de que um efeito é sempre posterior à sua causa.

Devemos, então, concluir que nenhuma conexão superluminal (isto é, com velocidade maior do que a da luz no vácuo) pode ocorrer. É impossível enviar qualquer sinal ou informação com velocidade superluminal (imagine, no exemplo da janela, que a destruíssemos enviando um sinal para um mecanismo de disparo de uma bomba colocada ao seu lado). Este é um limite de caráter fundamental, e não apenas uma limitação tecnológica passageira, porque está ligado ao princípio da causalidade. *Qualquer* interação física — por exemplo, a interação eletromagnética — tem a sua velocidade de propagação limitada por  $c$ .

**Exercício 5.4**

Um cantor de ópera resolve demonstrar a potência da sua voz destruindo uma janela situada a  $d = 5\text{m}$  de distância. Calcule o tempo transcorrido entre o grito do cantor e a quebra da janela e mostre que o segundo evento está no futuro absoluto do primeiro. A velocidade de propagação do som no ar vale  $v_s = 340\text{m/s}$ .

Solução: seja  $A$  o evento “grito” e  $B$  o evento “quebra da janela”. Sem perda de generalidade, podemos supor  $t_A = 0$  e  $x_A = 0$ . As coordenadas do evento  $B$  são  $x_B = d = 5\text{m}$  e  $t_B = d/v_s = 0.0147\text{seg}$  (aproximadamente 15 milésimos de segundo). Note que  $ct_B = (c/v_s)x_B = 1.47 \times 10^6\text{m} > x_B$ ; portanto, o evento  $B$  satisfaz a desigualdade (5.4), logo está no futuro absoluto de  $A$ . Isto é consequência de a velocidade do som ser menor do que  $c$ .

**Conclusão**

Nesta aula, discutimos em detalhe o problema do ordenamento temporal de dois eventos. Mostramos que, em alguns casos, este ordenamento pode ser diferente para referenciais diferentes. Para que um determinado evento  $B$  seja posterior ao evento  $A$  para todos os referenciais, ele precisa estar localizado na metade superior do cone de luz de  $A$ . Esta é a condição para que  $B$  possa ser consequência de  $A$ . Discutimos vários exemplos de eventos conectados por uma relação de causa-efeito. Em todos eles, a conexão causal é mediada por uma propagação com velocidade menor ou igual a  $c$ . É justamente esta limitação da velocidade que garante que o evento “efeito” esteja sempre no futuro absoluto do evento “causa”.

**Atividades Finais**

As soluções das questões 4 e 5 são apresentadas no final da aula.

1. Escreva a condição para que um determinado evento  $B$  esteja no futuro absoluto de um evento  $A$ . Represente graficamente as regiões do espaço-tempo associadas ao futuro e ao passado absolutos de  $A$  (cone de luz).
2. Determine a condição para que possa existir conexão causal entre dois determinados eventos.

3. Explique por que não é possível a propagação de sinal com velocidade maior do que a velocidade da luz.
4. Um torcedor muito supersticioso assistiu, pela televisão em sua casa no Rio de Janeiro, à final da Copa do Mundo de 2002, realizada em Tóquio. A seleção brasileira fez o seu primeiro gol 1 centésimo de segundo *após* o torcedor ter colocado o seu “boné da sorte”, de acordo com o referencial terrestre. Para a distância entre o torcedor e o estádio, tome o valor do diâmetro da Terra. Suponha que o referencial terrestre seja aproximadamente inercial.
  - a) Este gol pôde ter sido causado ou influenciado pelo gesto do torcedor? Justifique.
  - b) Determine um referencial para o qual o gol ocorreu *antes* do gesto do torcedor.
5. Em relação ao referencial  $S$  mostrado na **Figura 5.1**, os detectores  $D_1$  e  $D_2$  se movimentam com velocidades iguais a  $v$ , ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ . A distância entre os detectores vale  $L$ . No instante  $t = 0$ , uma fonte de luz equidistante dos detectores é ligada, e o detector  $D_1$  se encontra na posição de coordenada  $x = 0$ . Chame  $A$  o evento “detecção de luz por  $D_1$ ” e  $B$  o evento “detecção de luz por  $D_2$ ”.  
 O referencial  $S'$  se desloca em relação a  $S$  com velocidade  $2v$ , também ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ .  
 Ao resolver os itens a seguir, suponha que  $v \ll c$  e despreze termos da ordem de  $(v/c)^2$ .
  - a) Calcule as coordenadas espaço-temporais dos eventos  $A$  e  $B$  no referencial  $S$ . Determine o intervalo de tempo  $t_B - t_A$  entre os eventos, observado por este referencial.
  - b) Calcule o intervalo de tempo  $t'_B - t'_A$  observado pelo referencial  $S'$  por dois métodos diferentes: utilizando a Equação (5.3) e por meio da análise do movimento dos detectores no referencial  $S'$ .

## Resumo

O evento  $B$  está no cone de luz do evento  $A$  se as suas coordenadas espaço-temporais satisfazem a desigualdade:

$$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \leq c(t_B - t_A).$$

Esta é a condição para que possa existir conexão causal entre  $A$  e  $B$ .

## E na próxima aula...

...vamos derivar a lei de composição de velocidades relativística.

### Solução da questão 4

a) Seja  $A$  o evento “torcedor colocou boné” e  $B$  o evento “seleção fez o primeiro gol”. No referencial terrestre, o intervalo de tempo entre os eventos é tal que  $c(t_B - t_A) = 3 \times 10^6 \text{m}$ . A distância entre as posições em que ocorreram os eventos vale  $d = 1.3 \times 10^7 \text{m}$ . Como  $d > c(t_B - t_A)$ , o intervalo entre os eventos é do tipo espaço, e  $A$  não pode ser a causa de  $B$ , nem mesmo parcialmente.

b) Tome um referencial inercial se movendo em relação ao referencial terrestre ao longo da direção que liga as cidades do Rio de Janeiro e Tóquio, no sentido Rio–Tóquio. Se a velocidade do referencial for maior do que  $V_0 = c^2(t_B - t_A)/d = 0,23c = 6,9 \times 10^7 \text{m/seg}$ , então, para este referencial, o gol aconteceu antes do gesto do torcedor. É por esta razão que este não pode ser a causa daquele.

### Solução da questão 5

Comentário inicial: na Atividade Final 4, da Aula 2, você fez uma análise semelhante pedida aqui, exceto por uma diferença fundamental: lá você usou a lei de composição de velocidades para a propagação da luz, porque o objetivo era analisar o problema à luz da Física Newtoniana. Aqui, ao contrário, vamos usar o postulado da invariância da velocidade da luz e usar explicitamente que ela tem o mesmo valor em todas as direções e para todos os referenciais, independentemente do movimento da fonte.

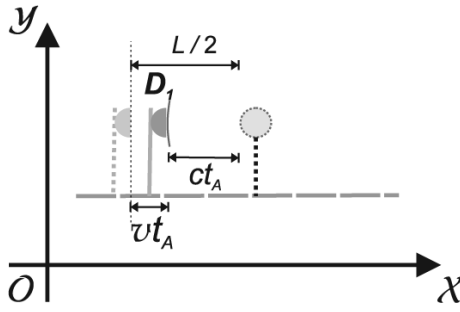
a) O tempo transcorrido entre a emissão de luz e a detecção por  $D_1$  vale  $t_A$ .  $D_1$  percorre uma distância igual a  $vt_A$  durante este intervalo, e a luz percorre uma distância igual a  $ct_A$ . A **Figura 5.9** mostra que a soma dessas duas distâncias é igual à separação entre a fonte e  $D_1$ , que vale  $L/2$ .

Temos então

$$ct_A + vt_A = \frac{L}{2}, \quad (5.15)$$

e logo

$$t_A = \frac{L}{2(c+v)}. \quad (5.16)$$



**Figura 5.9:** Descrição pelo referencial  $S$ : entre os instantes de emissão e detecção da luz,  $D_1$  se aproxima da fonte de uma distância  $vt_A$ .

As coordenadas do evento  $A$  são  $t_A$  e

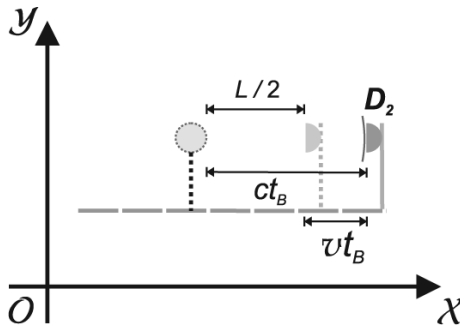
$$x_A = vt_A = \frac{vL}{2(c+v)}. \quad (5.17)$$

De forma análoga,  $t_B$  representa o intervalo de tempo entre a emissão de luz e a detecção por  $D_2$ . Para atingir  $D_2$ , a luz precisa percorrer uma distância maior do que  $L/2$ , devido ao movimento do detector, que está se afastando da fonte. De acordo com a **Figura 5.10**, temos:

$$ct_B - vt_B = \frac{L}{2}, \quad (5.18)$$

e logo

$$t_B = \frac{L}{2(c-v)}. \quad (5.19)$$



**Figura 5.10:** Descrição pelo referencial  $S$ :  $D_2$  se afasta da fonte.

A coordenada espacial de  $B$  vale:

$$x_B = L + vt_B = L + \frac{vL}{2(c-v)}. \quad (5.20)$$

Comparando as Equações (5.16) e (5.19), podemos concluir que  $t_B > t_A$  (em acordo com a discussão qualitativa no início da aula), já que  $c-v < c+v$ . Ainda de acordo com estas equações, o intervalo de tempo entre os eventos vale:

$$t_B - t_A = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v} \right) = \frac{vL}{c^2 - v^2}. \quad (5.21)$$

Podemos colocar  $c^2$  em evidência:

$$t_B - t_A = \frac{vL}{c^2(1 - v^2/c^2)}. \quad (5.22)$$

Desprezando o termo  $(v/c)^2$ , obtemos:

$$t_B - t_A \approx \frac{vL}{c^2}. \quad (5.23)$$

b) Vamos começar calculando  $t'_B - t'_A$  a partir da Equação (5.3) e dos resultados obtidos para  $x_B$  e  $x_A$ , dados pelas Equações (5.17) e (5.20), respectivamente:

$$t'_B - t'_A = \gamma \left\{ t_B - t_A - \frac{2v}{c^2} [L + v(t_B - t_A)] \right\}. \quad (5.24)$$

Substituindo, nesta equação, o resultado para  $t_B - t_A$  dado pela Equação (5.22), obtemos:

$$t'_B - t'_A = \gamma \left[ \left( 1 - \frac{2v^2}{c^2} \right) \frac{vL}{c^2(1 - v^2/c^2)} - \frac{2vL}{c^2} \right]. \quad (5.25)$$

Desprezando os termos com  $(v/c)^2$  (nesse caso,  $\gamma \approx 1$ ) nesta equação, obtemos:

$$t'_B - t'_A = -\frac{vL}{c^2}. \quad (5.26)$$

Portanto,  $t'_B - t'_A$  tem sinal oposto ao de  $t_B - t_A$ . Para o referencial  $S'$ ,  $B$  ocorre antes de  $A$ , embora  $B$  ocorra depois de  $A$  do ponto de vista de  $S$ .

Vamos calcular  $t'_B - t'_A$  por meio de um segundo método, analisando as **Figuras 5.11 e 5.12**, onde apresentamos o ponto de vista de  $S'$  para os dois eventos.

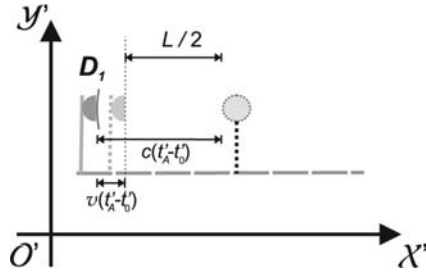
Neste referencial, os detectores se movem para a esquerda com velocidade em módulo aproximadamente igual a  $v$ . Note que podemos usar a lei de composição de Galileu para analisar os detectores, porque  $v \ll c$ . Por outro lado, certamente não podemos usá-la para analisar a velocidade de propagação da luz!

Chamemos  $t'_0$  o instante de emissão de acordo com o referencial  $S'$ . Entre os instantes da emissão e detecção,  $D_1$  se afastou de  $v(t'_A - t'_0)$ . De acordo com a **Figura 5.11**, temos:

$$c(t'_A - t'_0) = v(t'_A - t'_0) + \frac{L}{2}, \quad (5.27)$$

e logo

$$t'_A = t'_0 + \frac{L}{2(c - v)}. \quad (5.28)$$



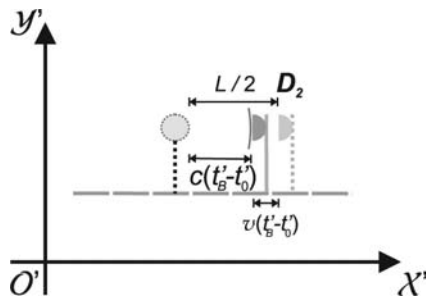
**Figura 5.11:** Ponto de vista do referencial  $S'$  :  $D_1$  se afasta da fonte.

Por outro lado, o detector  $B$  se aproxima da fonte à distância  $v(t'_B - t'_0)$ , de acordo com a descrição do referencial  $S'$ . Pela **Figura 5.12**, temos:

$$c(t'_B - t'_0) + v(t'_B - t'_0) = \frac{L}{2}, \quad (5.29)$$

e, então,

$$t'_B = t'_0 + \frac{L}{2(c + v)}. \quad (5.30)$$



**Figura 5.12:** Ponto de vista do referencial  $S'$  :  $D_2$  se aproxima da fonte.

Combinando estes resultados, obtemos novamente o resultado dado pela Equação (5.26).



## Aula 6 – Composição de velocidades e quadrivelocidade

### Meta da aula

Derivar a lei de composição de velocidades relativística e apresentar o conceito de quadrivelocidade.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- descrever e utilizar a lei de composição de velocidades relativística;
- escrever as regras de transformação de um quadrivetor;
- definir a quadrivelocidade de um partícula.

### Pré-requisitos

Para compreender esta aula, é recomendável ler e realizar as atividades propostas nas aulas anteriores desta disciplina. Os tópicos listados a seguir serão particularmente importantes:

- espaço-tempo (Aula 2);
- tempo próprio (Aula 3);
- transformação de Lorentz (Aula 4).

Também é interessante rever a lei de composição de velocidades de Galileu apresentada na Aula 13, da disciplina Física 1A.

### Introdução

Nesta aula, vamos concluir a nossa introdução à cinemática relativística apresentando dois tópicos relacionados: a lei de composição de velocidades relativística e o conceito de quadrivelocidade. Após esta aula, você estará preparado para aprender, na próxima aula, noções básicas de dinâmica relativística.

## Lei de composição de velocidades relativística

Mais uma vez, nosso ponto de partida é a transformação de Lorentz, que fornece as coordenadas espaço-temporais de um determinado evento no referencial  $S'$ , a partir das coordenadas no referencial  $S$ :

$$x' = \gamma(x - Vt) \quad (6.1)$$

$$y' = y \quad (6.2)$$

$$z' = z \quad (6.3)$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right). \quad (6.4)$$

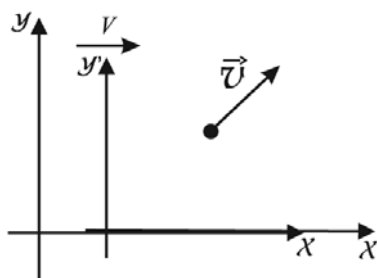
onde  $V$  é a velocidade de  $S'$  em relação a  $S$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ . Note que o vetor  $\vec{V}$ , que representa a velocidade de  $S'$ , é paralelo a esse eixo, e o seu sentido coincide com o sentido positivo de  $OX$ .

Podemos descrever o movimento de uma partícula no referencial  $S$  pelas três funções,  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ , que determinam a sua posição num tempo  $t$  qualquer. As derivadas dessas funções representam as componentes cartesianas do *vetor velocidade*  $\vec{v}$  da partícula de acordo com o referencial  $S$  (veja a **Figura 6.1**):

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad (6.5)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \quad (6.6)$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (6.7)$$



**Figura 6.1:** Velocidade  $\vec{v}$  de uma partícula em relação ao referencial  $S$ . O referencial  $S'$  se move em relação a  $S$  com velocidade  $V$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ .

Para o referencial  $S'$ , a velocidade  $\vec{v}'$  dessa mesma partícula é dada, de forma análoga, pelas derivadas das funções  $x'(t')$ ,  $y'(t')$  e  $z'(t')$  – note que, nesse caso, derivamos em relação a  $t'$ , que é o tempo do referencial  $S'$  :

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} \quad (6.8)$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} \quad (6.9)$$

$$v'_z = \frac{dz'}{dt'}. \quad (6.10)$$

Podemos derivar a relação entre os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{v}'$  a partir da transformação de Lorentz para as coordenadas espaço-temporais. Das Equações (6.1)-(6.4), obtemos:

$$dx' = \gamma (dx - V dt) \quad (6.11)$$

$$dy' = dy \quad (6.12)$$

$$dz' = dz \quad (6.13)$$

$$dt' = \gamma \left( dt - \frac{V}{c^2} dx \right). \quad (6.14)$$

Combinando as Equações (6.11) e (6.14), encontramos

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 - \frac{V}{c^2} \frac{dx}{dt}}. \quad (6.15)$$

Comparando com as Equações (6.5) e (6.8), obtemos

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{Vv_x}{c^2}}. \quad (6.16)$$

De forma análoga, obtemos para as demais componentes:

$$v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{Vv_x}{c^2})}, \quad (6.17)$$

$$v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{Vv_x}{c^2})}. \quad (6.18)$$

As Equações (6.16)-(6.18) fornecem a *lei de composição de velocidades relativística*.

#### Exercício 6.1

Obtenha a Equação (6.17) a partir das Equações (6.12) e (6.14).

Embora os deslocamentos infinitesimais transversais à velocidade  $\vec{V}$ ,  $dy$  e  $dz$ , sejam invariantes, as componentes transversais da velocidade são diferentes em  $S$  e  $S'$ , conforme mostram as Equações (6.17) e (6.18). Essa propriedade decorre da diferença entre os intervalos de tempo infinitesimais  $dt$  e  $dt'$ .

No exercício a seguir, voce irá inverter as Equações (6.16)-(6.18) para obter a velocidade no referencial  $S$  em termos da velocidade em  $S'$ .

### Exercício 6.2

Partindo das Equações (6.16)-(6.18), determine as componentes cartesianas de  $\vec{v}$  em termos das componentes de  $\vec{v}'$ .

Sugestão: comece pela Equação (6.16).

Resposta:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{Vv'_x}{c^2}} \quad (6.19)$$

$$v_y = \frac{v'_y}{\gamma(1 + \frac{Vv'_x}{c^2})} \quad (6.20)$$

$$v_z = \frac{v'_z}{\gamma(1 + \frac{Vv'_x}{c^2})}. \quad (6.21)$$

O resultado desse exercício poderia ser obtido sem nenhum cálculo! Pelo princípio da relatividade, a regra de transformação de  $S'$  para  $S$  deve ter a mesma forma da transformação de  $S$  para  $S'$ . Afinal,  $S$  e  $S'$  não possuem nenhum atributo especial, e o que vale para o primeiro certamente valerá para o segundo. Como  $S$  se move em relação a  $S'$  com velocidade  $-\vec{V}$ , a transformação de  $S'$  para  $S$  deve ter a mesma forma das (6.16)-(6.18), bastando trocar  $V$  por  $-V$  (lembre que o mesmo argumento foi usado para a própria transformação de Lorentz na Aula 4). Compare as Equações (6.16)-(6.18) com as (6.19)-(6.21)!

Usando a Equação (6.19), você será capaz de compreender melhor o resultado da Atividade Final 5, da Aula 4. Nesta atividade, você havia tomado duas transformações de Lorentz sucessivas: de  $S''$  para  $S'$  e de  $S'$

e  $S$ . Nos dois casos, a velocidade relativa entre os referenciais valia  $V$ . Você havia mostrado que a transformação de  $S''$  para  $S$  obtida pela composição das duas transformações tinha a forma da transformação de Lorentz, associada a uma velocidade  $V_c = 2V/(1 + V^2/c^2)$ . Pela Equação (6.19), a velocidade de  $S''$  em relação a  $S$  tem justamente este valor!

## O limite não-relativístico e a lei de composição de velocidades de Galileu

Na maioria das situações do nosso dia-a-dia, as velocidades envolvidas – tanto da partícula como do referencial  $S'$  em relação a  $S$  – são muito menores do que a velocidade da luz  $c$ . Como já discutimos nas aulas anteriores, esse regime é conhecido como limite não-relativístico. Neste limite, podemos desprezar o termo  $Vv_x/c^2$  nas Equações (6.16)-(6.18), assim como os termos da ordem de  $V^2/c^2$ , o que permite tomar  $\gamma \approx 1$ . Então, obtemos neste limite:

$$v'_x \approx v_x - V \quad (6.22)$$

$$v'_y \approx v_y \quad (6.23)$$

$$v'_z \approx v_z. \quad (6.24)$$

Essas três equações podem ser condensadas numa única equação vetorial, se lembrarmos de que o vetor  $\vec{V}$ , que representa a velocidade de  $S'$ , em relação a  $S$ , possui componentes  $y$  e  $z$  nulas, já que  $S'$  se desloca ao longo do eixo  $OX$  do referencial  $S$  (veja novamente a **Figura 6.1**). Podemos, então, escrever a equação vetorial

$$\vec{v}' \approx \vec{v} - \vec{V}, \quad (6.25)$$

que é a lei de composição de velocidades de Galileu. Este é mais um exemplo em que obtemos o resultado da Mecânica Newtoniana no limite não-relativístico (você já viu na Aula 3, por exemplo, que o efeito de dilatação temporal é desprezível neste limite, resgatando a noção Newtoniana de tempo absoluto). Em outras palavras, a Mecânica Newtoniana é uma boa aproximação da teoria da relatividade quando as velocidades são muito menores do que  $c$ , como no exemplo proposto pelo exercício a seguir.

## Exercício 6.3

Um ônibus se desloca com velocidade  $\vec{V}$ , de módulo igual a 80km/h em relação ao referencial da estrada. Ele é ultrapassado por um carro, que se desloca com velocidade  $\vec{v}$  (relativa a  $S$ ) paralela a  $\vec{V}$ , de módulo igual a 100km/h, como mostra a **Figura 6.2**.  $S'$  é o referencial próprio do ônibus. Portanto, ele é o referencial associado a um observador sentado no interior do ônibus. Determine a velocidade do carro medida por um observador no interior do ônibus (velocidade  $\vec{v}'$  em relação a  $S'$ ). Podemos usar a lei de composição de velocidades de Galileu neste exemplo? Justifique.

Solução: neste exemplo, as velocidades são muito menores do que  $c$  e, portanto, a lei de composição de Galileu, dada pela Equação (6.25), fornece uma ótima aproximação. Como os vetores  $\vec{V}$  e  $\vec{v}$  são paralelos e têm o mesmo sentido, a diferença  $\vec{v} - \vec{V}$  tem módulo igual a  $|\vec{v}| - |\vec{V}| = 40\text{km/h}$ . Este é o módulo da velocidade medida no referencial  $S'$  do ônibus.

Podemos verificar que a expressão relativística exata, dada pela Equação (6.16), fornece, na prática, o mesmo resultado. Para isto, precisamos calcular o termo  $Vv_x/c^2 = Vv/c^2 = 8,2 \times 10^{-15}$  (note que tomamos o eixo  $OX$  ao longo da direção das velocidades). O resultado exato é, então, dado por

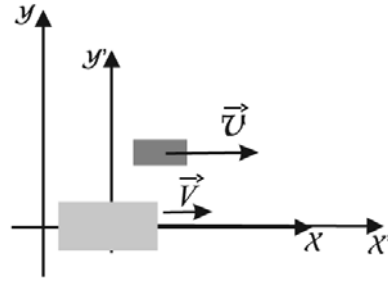
$$v' = \frac{40}{1 - 8,2 \times 10^{-15}} \text{km/h.} \quad (6.26)$$

Este resultado é tão próximo de 40km/h que a sua calculadora não será capaz de apontar a diferença... De fato, o resultado é

$$v' = (40 + 3,3 \times 10^{-13}) \text{km/h} = 40,00000000000033 \text{km/h.}$$

Assim, a correção relativística,  $3,3 \times 10^{-13}\text{km/h}$ , é completamente desprezível e certamente muito menor do que as incertezas na determinação experimental das velocidades.

As previsões da teoria da relatividade nos parecem sempre contra-intuitivas quando lidamos com situações distantes do limite não-relativístico. Na atividade proposta a seguir, vamos analisar um exemplo deste tipo. Cuidado! Para a atividade a seguir, a lei de composição de Galileu não é uma boa aproximação...



**Figura 6.2:** No referencial  $S$  da estrada, um ônibus se movimenta com velocidade  $\vec{V}$ . Ele é ultrapassado por um carro com velocidade  $\vec{v}$ .  $S'$  representa o referencial próprio do ônibus.

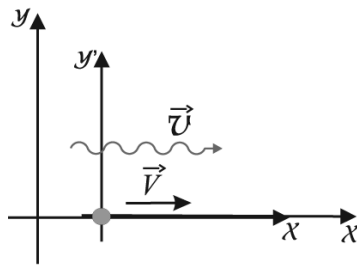
#### Exercício 6.4

No referencial terrestre  $S$ , um múon (confira a Aula 3) de velocidade  $V = 0,998c$  é ‘ultrapassado’ por um feixe de luz de velocidade  $c$  como mostra a **Figura 6.3**. Calcule a velocidade  $v'$  do feixe em relação ao referencial próprio  $S'$  do múon. Mostre que, neste exemplo, não podemos usar a lei de composição de velocidades de Galileu.

Solução: vamos novamente escolher os eixos cartesianos de forma a ter os vetores  $\vec{V}$  e  $\vec{v}$  (este representando a velocidade do feixe no referencial  $S$ , com  $|\vec{v}| = c$ ) paralelos ao eixo  $OX$ . Portanto,  $v_y = v_z = 0$ , fornecendo, pelas Equações (6.17) e (6.18),  $v'_y = v'_z = 0$ . Assim, o vetor  $\vec{v}'$  também é paralelo ao eixo  $OX$  e aos vetores  $\vec{V}$  e  $\vec{v}$ . O seu módulo é igual a  $v'_x$ , que é dado pelo Equação (6.16):

$$v' = \frac{c - V}{1 - \frac{Vc}{c^2}} = \frac{c - V}{1 - \frac{V}{c}} = c. \quad (6.27)$$

Portanto, a velocidade da luz no referencial  $S'$  também vale  $c$ , não importando o valor da velocidade  $V$  de  $S'$  em relação a  $S$ . Se tivéssemos usado a lei de composição de Galileu, teríamos obtido  $c - V = 0,002c$  para a velocidade do feixe em relação ao referencial  $S'$ . Este valor é muito diferente do resultado correto!



**Figura 6.3:** Um feixe de luz se propaga, com velocidade  $\vec{v}$  de módulo igual a  $c$ , ao longo da mesma direção e sentido do múon.

Você poderia ter antecipado o resultado do exercício anterior, mesmo se não soubesse nada sobre a lei de composição de velocidades relativística. Como você viu na Aula 2, a invariância da velocidade da luz, que vale  $c = 3,0 \times 10^8 \text{m/s}$  em todos os referenciais inerciais, foi um dos dois postulados fundamentais a partir dos quais Einstein construiu a teoria da relatividade restrita. Naturalmente, a lei de composição de velocidades relativística deve necessariamente estar em acordo com este postulado fundamental, já que ela é derivada no contexto da teoria da relatividade.

Em contrapartida, a lei de composição de Galileu é claramente incompatível com este postulado, como exemplificado pelo exercício anterior. Ao romper com esta lei, somos obrigados a romper também com a Mecânica Newtoniana! De fato, para que a segunda lei de Newton fosse compatível com o princípio da relatividade, seria preciso que a aceleração de uma dada partícula tivesse o mesmo valor em diferentes referenciais inerciais. Isto garantiria que as leis da Mecânica teriam a mesma forma em todos os referenciais inerciais, conforme exigido pelo princípio da relatividade. Basta derivar em relação ao tempo ambos os lados da Equação (6.25) para concluir que esta propriedade seria verdadeira se valesse a lei de composição de Galileu. Entretanto, ao trocar a lei de Galileu pela lei de composição relativística, a aceleração deixa de ser invariante. Em outras palavras, a aceleração de uma dada partícula é diferente para diferentes referenciais de acordo com a cinemática relativística.

Portanto, podemos concluir que os postulados da teoria da relatividade são incompatíveis com a Mecânica Newtoniana, o que mostra a necessidade de trocá-la por uma nova dinâmica, construída em sintonia com a cinemática relativística. Na próxima aula, faremos uma breve introdução à dinâmica relativística. Para podermos iniciar esta nova etapa, precisamos ainda de mais

um conceito da cinemática relativística, apresentado a seguir, que irá preparar o terreno para a definição de momento linear na teoria da relatividade.

## Quadrivetores

Nas últimas aulas, temos sistematicamente caracterizado um determinado evento por meio das suas coordenadas espaço-temporais relativas a um determinado referencial  $S$ . Como você já viu em aulas anteriores, é sempre conveniente multiplicar a coordenada temporal  $t$  pela velocidade da luz  $c$ , de forma a produzir uma quantidade com dimensão física de comprimento. Vamos, então, representar o conjunto de quatro coordenadas espaço-temporais na forma  $(ct, x, y, z)$ .

Este mesmo evento é caracterizado, num outro referencial  $S'$ , pelas coordenadas espaço-temporais  $(ct', x', y', z')$ . A transformação de Lorentz fornece os valores das coordenadas no referencial  $S'$  em termos das coordenadas em  $S$ . Quando  $S'$  se move em relação a  $S$  com velocidade  $V$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ , temos:

$$ct' = \gamma \left( ct - \frac{V}{c} x \right) \quad (6.28)$$

$$x' = \gamma \left( x - \frac{V}{c} ct \right) \quad (6.29)$$

$$y' = y \quad (6.30)$$

$$z' = z. \quad (6.31)$$

Podemos interpretar esse conjunto de quatro equações como uma *regra de transformação* para o objeto matemático  $(ct, x, y, z)$ . Esta regra é análoga à regra de transformação de um *vetor* quando rodamos os eixos coordenados. Na Aula 2, você teve a oportunidade de conhecer esta regra, que mistura as três componentes cartesianas do vetor, por exemplo o vetor posição espacial  $(x, y, z)$ . A transformação de rotação possui uma propriedade importante: a quantidade  $x^2 + y^2 + z^2$ , que representa a distância entre o ponto e a origem neste exemplo, é invariante.

De forma semelhante, a transformação de Lorentz mistura as componentes de  $(ct, x, y, z)$  (no exemplo dado pelas Equações (6.28)–(6.31), ela mistura apenas as componentes  $ct$  e  $x$ ), mas deixa invariante uma determinada combinação das componentes: o intervalo relativístico ao quadrado (entre o evento considerado e aquele de coordenadas nulas)

$$s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (6.32)$$

Para explorar esta analogia mais a fundo, dizemos que  $(ct, x, y, z)$  é um *quadrivetor*. O conceito de quadrivetor generaliza o conceito de vetor, associado ao espaço tridimensional, para o espaço-tempo da teoria da relatividade, com suas quatro dimensões: uma temporal e três espaciais. Por definição, um quadrivetor é qualquer conjunto de quatro componentes,  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ , que se transformam, quando da mudança do referencial  $S$  para  $S'$ , exatamente pela mesma regra usada para  $(ct, x, y, z)$ , a transformação de Lorentz dada por:

$$a'_0 = \gamma \left( a_0 - \frac{V}{c} a_1 \right) \quad (6.33)$$

$$a'_1 = \gamma \left( a_1 - \frac{V}{c} a_0 \right) \quad (6.34)$$

$$a'_2 = a_2 \quad (6.35)$$

$$a'_3 = a_3. \quad (6.36)$$

Compare as Equações (6.33)-(6.36) com as Equações (6.28)-(6.31): a componente  $a_0$  desempenha o mesmo papel de  $ct$  e por isso é chamada *componente temporal* do quadrivetor.  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são as componentes espaciais, associadas, respectivamente, aos eixos cartesianos  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$ . As três componentes espaciais  $(a_1, a_2, a_3)$  formam um vetor, isto é, se transformam por rotações dos eixos coordenados exatamente pela mesma regra usada para o vetor posição espacial. Mais explicitamente, elas definem o vetor  $\vec{a} = a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z}$ , onde  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  são os vetores unitários ao longo das direções dos eixos cartesianos. Dizemos que  $\vec{a}$  é a parte espacial do quadrivetor  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ .

Qual seria um exemplo de quadrivetor? Justamente por ter servido de modelo para a nossa definição geral de quadrivetor, o conjunto (ordenado) de coordenadas espaço-temporais  $(ct, x, y, z)$  é o nosso primeiro exemplo de quadrivetor: trata-se do *quadrivetor posição*.

Observe que empregamos a palavra ‘posição’ num sentido mais amplo do que o usual. O quadrivetor posição  $(ct, x, y, z)$  localiza um evento não só num dado ponto do espaço tridimensional, mas também no tempo. Portanto, ele determina uma posição no espaço-tempo quadridimensional.

Você sabe que a parte espacial do quadrivetor posição,  $(x, y, z)$ , representa a posição espacial  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$  em que o evento ocorreu.  $\vec{r}$  é muitas vezes chamado simplesmente de ‘posição’, mas para não gerar confusão vamos a partir de agora chamá-lo de ‘posição espacial’.

Assim como o quadrivetor posição está associado a uma grandeza invariante,  $s^2$  dado pela Equação (6.32), *qualquer* quadrivetor tem a quantidade

$$a_0'^2 - a_1'^2 - a_2'^2 - a_3'^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \quad (6.37)$$

invariante. Em outras palavras, embora as suas componentes mudem quando mudamos de referencial, a combinação específica escrita acima tem o mesmo valor em todos os referenciais.

#### Exercício 6.5

Demonstre a Equação (6.37) a partir da regra de transformação dada pelas Equações (6.33)–(6.36).

**Solução:** as Equações (6.33) e (6.34) fornecem

$$a_0'^2 - a_1'^2 = \gamma^2 [a_0 - (V/c)a_1]^2 - \gamma^2 [a_1 - (V/c)a_0]^2. \quad (6.38)$$

Podemos colocar  $\gamma^2$  em evidência e expandir a diferença ao quadrado em cada parcela. Os termos cruzados se cancelam, resultando em

$$a_0'^2 - a_1'^2 = \gamma^2 \{ [1 - (V/c)^2]a_0^2 - [1 - (V/c)^2]a_1^2 \}. \quad (6.39)$$

Nesta equação, tomamos  $\gamma^2 = 1/(1 - (V/c)^2)$ , resultando em:

$$a_0'^2 - a_1'^2 = a_0^2 - a_1^2. \quad (6.40)$$

Pelas Equações (6.35) e (6.36),  $a_2'^2 = a_2^2$  e  $a_3'^2 = a_3^2$ . Combinando estes resultados com a Equação (6.40), obtemos a Equação (6.37).

Na verdade, esta propriedade de invariância não vale apenas para a transformação dada pelas Equações (6.33)–(6.36), que implementa a passagem para um referencial se deslocando ao longo da direção do eixo  $OX$ . Pode-se mostrar que ela também vale quando passamos para a descrição por *qualquer* referencial inercial.

Quando dizemos que uma grandeza é *invariante de Lorentz*, significa que ela tem o mesmo valor em todos os referenciais inerciais. Portanto, podemos dizer que a quantidade  $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$  é invariante de Lorentz. Em contrapartida, a componente  $a_2$ , por exemplo, não é invariante de Lorentz,

embora ela não mude de valor quando passamos para um referencial se movendo ao longo da direção do eixo  $OX$ , como mostra a Equação (6.17). De fato, ela não tem o mesmo valor em *todos* os referenciais inerciais. Em particular, o seu valor é modificado para os referenciais que se deslocam ao longo da direção do eixo  $OY$ .

A seguir, você irá conhecer um segundo exemplo de quadrivetor...

## Quadrivelocidade

Vamos voltar à situação apresentada no início da aula: o movimento de uma partícula é descrito pelo referencial  $S$  através das três funções do tempo  $(x(t), y(t), z(t))$ , que representam as componentes cartesianas do vetor posição espacial  $\vec{r}(t)$ . Para cada valor do tempo  $t$  medido em  $S$ , sabemos que  $\vec{r}(t)$  é a parte espacial do quadrivetor posição  $(ct, x(t), y(t), z(t))$  associado ao evento ‘passagem da partícula pelo ponto espacial  $\vec{r}(t)$ ’.

Observe que a velocidade

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

da partícula é um vetor no espaço tridimensional. Será que ela é a parte espacial de um quadrivetor?

Para responder a esta pergunta, precisamos analisar como a velocidade se transforma quando passamos para um referencial  $S'$  se movendo ao longo da direção do eixo  $OX$ . Este é justamente o problema de composição de velocidades, que você estudou na primeira parte desta aula.

Analisando as Equações (6.17) e (6.18), você chegará rapidamente à conclusão que  $\vec{v}$  **não** é a parte espacial de um quadrivetor, já que  $v'_y \neq v_y$  e  $v'_z \neq v_z$ , ao passo que, pelas Equações (6.35) e (6.36), estas componentes não poderiam mudar se  $\vec{v}$  fosse a parte espacial de um quadrivetor.

Já comentamos nesta aula sobre a razão de  $v_y = \frac{dy}{dt}$  ser diferente de  $v'_y = \frac{dy'}{dt'}$  (um argumento em tudo análogo vale para  $v_z$ ). Embora  $dy$  seja igual a  $dy'$  (porque  $S'$  se move ao longo da direção do eixo  $OX$ ), o intervalo de tempo infinitesimal  $dt'$  medido em  $S'$  é diferente do intervalo  $dt$  medido em  $S$ .

Este argumento sugere que se dividíssemos  $dy$  por alguma grandeza (infinitesimal) invariante de Lorentz, teríamos, como resultado, a componente de um quadrivetor. De forma mais rigorosa, devemos derivar  $y$  em relação a algum parâmetro invariante com dimensão física de tempo, em lugar de derivar em relação ao tempo  $t$  do referencial  $S$ .

Você já conhece, da Aula 3, um parâmetro com estas propriedades: o *tempo próprio*  $\tau$ . Ele representa o tempo medido no referencial inercial em relação ao qual a partícula está instantaneamente em repouso (referencial próprio).

Por construção, o tempo próprio é invariante de Lorentz, ao contrário do tempo  $t$  do referencial  $S$ . Assim, se derivarmos o quadri vetor posição  $(ct, x, y, z)$  em relação a  $\tau$ , devemos obter um quadri vetor com dimensão física de velocidade. Vamos, então, definir a quadrivelocidade  $(U_0, U_1, U_2, U_3)$  por meio das seguintes equações para as suas quatro componentes:

$$U_0 = \frac{d(ct)}{d\tau} \quad (6.41)$$

$$U_1 = \frac{dx}{d\tau} \quad (6.42)$$

$$U_2 = \frac{dy}{d\tau} \quad (6.43)$$

$$U_3 = \frac{dz}{d\tau}. \quad (6.44)$$

Você aprendeu, na Aula 3, que o tempo do referencial  $S$  é dilatado em relação ao tempo próprio  $\tau$ :

$$dt = \gamma d\tau, \quad (6.45)$$

onde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (6.46)$$

é definido aqui em termos da velocidade da partícula em relação ao referencial  $S$  (ou, de forma equivalente, da velocidade do referencial próprio da partícula em relação a  $S$ ).

Substituindo este resultado nas Equações (6.41)–(6.44), obtemos:

$$U_0 = \gamma \frac{d(ct)}{dt} = \gamma c \quad (6.47)$$

$$U_1 = \gamma \frac{dx}{dt} = \gamma v_x \quad (6.48)$$

$$U_2 = \gamma \frac{dy}{dt} = \gamma v_y \quad (6.49)$$

$$U_3 = \gamma \frac{dz}{dt} = \gamma v_z. \quad (6.50)$$

Portanto, a quadrivelocidade é da forma  $(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$ . Sua parte espacial é o vetor tridimensional  $\gamma \vec{v}$ .

## Exercício 6.6

Em relação ao referencial da Terra (referencial  $S$ ), um elétron se desloca com velocidade  $v = 0,98c$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ . Determine a sua quadrivelocidade.

**Solução:** como as componentes da velocidade  $v_y$  e  $v_z$  são nulas, a quadrivelocidade é da forma  $(\gamma c, \gamma v, 0, 0)$ , com

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\sqrt{1 - 0,98^2} = 5,0.$$

Assim, a quadrivelocidade vale  $(5,0c, 4,9c, 0, 0)$ .

Note que neste exemplo, a parte espacial da quadrivelocidade tem módulo comparável ao da parte temporal ( $4,9c$  contra  $5,0c$ ). Esta situação é típica de velocidades relativísticas (isto é, muito altas, próximas de  $c$ ). Observe que, nestas situações, a parte espacial da quadrivelocidade é muito diferente da velocidade  $\vec{v}$ . Em contrapartida, para velocidades  $v \ll c$ , temos  $\gamma \approx 1$ , e, então, a parte espacial é aproximadamente igual à  $\vec{v}$ . Nestas situações, a componente temporal da quadrivelocidade é muito maior do que o módulo da parte espacial.

No exercício a seguir, você irá verificar que a quadrivelocidade se transforma como um quadrivetor, em acordo com os argumentos apresentados anteriormente.

## Exercício 6.7

Calcule a quadrivelocidade do elétron do exercício anterior em relação ao seu referencial próprio por dois métodos diferentes:

- diretamente a partir da definição da quadrivelocidade;
- a partir do valor no referencial  $S$  obtido no exercício anterior, usando a regra de transformação de um quadrivetor dada pelas Equações (6.33)–(6.36).

**Solução:** como o referencial próprio acompanha o movimento da partícula, ela está parada em relação a este referencial:  $\vec{v} = \vec{0}$ . Usando a sua definição, a quadrivelocidade vale  $(c, 0, 0, 0)$  já que  $\gamma = 1$  no caso considerado aqui. Vamos agora calcular usando a regra de transformação de um quadrivetor. No exercício anterior, obtemos as componentes em relação ao referencial  $S$ :  $U_0 = \gamma c$ ,  $U_1 = \gamma v$ , e  $U_2 = U_3 = 0$ . A Equação (6.33) fornece então

$$U'_0 = \gamma(U_0 - \frac{v}{c}U_1) = \gamma\left(\gamma c - \frac{v}{c}\gamma v\right).$$

Colocando  $\gamma c$  em evidência, temos

$$U'_0 = \gamma^2 c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c.$$

Usando a Equação (6.34), obtemos

$$U'_1 = \gamma(U_1 - \frac{v}{c}U_0) = \gamma\left(\gamma v - \frac{v}{c}\gamma c\right) = 0.$$

As Equações (6.35) e (6.36) também fornecem valores nulos para  $U'_2$  e  $U'_3$ . Dessa forma, obtemos o mesmo resultado para a quadrivelocidade, como se poderia esperar.

Agora, você irá fazer mais um teste para verificar que a quadrivelocidade é, de fato, um quadrivetor, analisando uma propriedade muito importante de quadrivetores.

## Exercício 6.8

Conforme discutimos anteriormente, para todo quadri-vetor  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ , a quantidade  $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$  é invariante de Lorentz (veja a Equação (6.37) e o Exercício 6.5). Verifique se esta propriedade é satisfeita pelo quadri-vetor velocidade calculado nos Exercícios 6.6 (no referencial  $S$ ) e 6.7 (no referencial  $S'$ ).

**Solução:** de acordo com o resultado obtido no Exercício 6.6, no referencial  $S$  a quadri-velocidade é da forma  $(\gamma c, \gamma v, 0, 0)$ . Temos, então,

$$U_0^2 - U_1^2 - U_2^2 - U_3^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 (1 - v^2/c^2) = c^2,$$

que é independente de  $v$ . Não é difícil verificar que este resultado é geral: qualquer que seja a direção do vetor velocidade  $\vec{v}$ , esta grandeza invariante de Lorentz é independente de  $\vec{v}$  e vale  $c^2$ .

Esta propriedade poderia ser antecipada: como o conceito de velocidade necessariamente faz referência a um determinado referencial (não existe velocidade ‘absoluta’), uma grandeza invariante de Lorentz (e logo independente de referencial) não poderia depender de  $\vec{v}$ .

É imediato verificar, para o quadri-vetor  $(c, 0, 0, 0)$  calculado no referencial próprio  $S'$ , que

$$U_0'^2 - U_1'^2 - U_2'^2 - U_3'^2 = c^2.$$

## Conclusão

Nesta aula, derivamos a lei de composição de velocidades relativística a partir da transformação de Lorentz. Uma propriedade importante desta lei é a invariância da velocidade da luz, em acordo com o postulado discutido na Aula 2. Por outro lado, para velocidades muito menores do que  $c$ , reobtemos, como uma aproximação, a lei de composição de velocidades de Galileu. Este é mais um exemplo ilustrando a relação entre o limite não-relativístico e a Mecânica Newtoniana.

Na segunda parte da aula, apresentamos o conceito de quadri-vetor, que está associado a uma regra específica de transformação por mudança de referencial. Apresentamos dois exemplos de quadri-vetor: o quadri-vetor

posição e a quadri-velocidade. Este segundo exemplo será o nosso ponto de partida para a introdução do momento relativístico na próxima aula, que será dedicada à dinâmica relativística.

## Atividades finais

As soluções dos Problemas 2 e 3 serão apresentadas no final da aula.

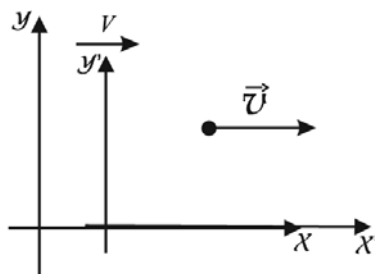
1. Uma partícula se move em relação ao referencial  $S'$  com velocidade  $v' = c/2$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX'$ .  $S'$  se move em relação ao referencial  $S$  com velocidade  $V = 3c/4$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ . Determine a velocidade da partícula em relação ao referencial  $S$  e mostre que o seu módulo é menor do que  $c$ . Pode-se mostrar, de forma mais geral, que o resultado da composição de duas velocidades menores do que  $c$  é sempre menor que  $c$ . Compare com o resultado da lei de composição de Galileu.

Resposta: a velocidade é paralela ao eixo  $OX$ , e seu módulo vale  $v = (10/11)c < c$ . Em contrapartida, a lei de composição de Galileu forneceria  $(5/4)c > c$ .

2. Um feixe de luz se propaga ao longo do sentido positivo do eixo  $OY$  do referencial  $S'$ , que se move em relação ao referencial  $S$  com velocidade  $V$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ . Determine a velocidade e a direção de propagação do feixe em relação ao referencial  $S$ .
3. Nesta atividade, o objetivo é obter a lei de composição de velocidades de Galileu a partir da regra de transformação da quadri-velocidade, tomando o limite não-relativístico.

Um partícula se move em relação ao referencial  $S$  com velocidade  $v \ll c$  ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ , como mostra a **Figura 6.4**.

- a) Calcule a quadri-velocidade desprezando termos da ordem de  $(v/c)^2$ .
- b) O referencial  $S'$  se move em relação a  $S$  com velocidade  $V \ll c$ , também ao longo da direção do eixo  $OX$  (veja a **Figura 6.4**). Calcule a quadri-velocidade da partícula no referencial  $S$ , usando a regra de transformação de quadri-vetores, desprezando termos da ordem  $V^2/c^2$  e  $Vv/c^2$ . Mostre que o resultado coincide com a lei de composição de velocidades de Galileu.



**Figura 6.4:** Ponto de vista do referencial  $S$ .

## Resumo

A lei de composição de velocidades relativística fornece a velocidade de uma partícula em relação a um referencial inercial  $S'$ , se soubermos a sua velocidade em relação ao referencial inercial  $S$ , e a velocidade de  $S'$  em relação a  $S$ . De acordo com esta lei, a velocidade da luz  $c$  é invariante. Para velocidades muito menores do que  $c$ , ela pode ser aproximada pela lei de composição de Galileu.

Quando mudamos de referencial, um quadrivetor qualquer  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  se transforma pela mesma regra usada para o quadrivetor posição  $(ct, x, y, z)$ : a transformação de Lorentz. Nesta transformação, a quantidade  $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$  não é modificada (invariante de Lorentz).

A quadrivelocidade de uma partícula  $(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$  é um exemplo importante de quadrivetor. A parte espacial da quadrivelocidade é o produto da velocidade pelo fator de Lorentz,  $\gamma \vec{v}$ .

## E na próxima aula...

...faremos uma breve introdução à dinâmica relativística, o que nos levará à famosa equação  $E = mc^2$ .

### Solução da Questão 2:

Pela Equação (6.19), temos  $v_x = V$ . A Equação (6.20) fornece

$$v_y = \sqrt{1 - V^2/c^2} c = \sqrt{c^2 - V^2}. \quad (6.51)$$

Assim, o módulo da velocidade de propagação no referencial  $S$  vale

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{V^2 + c^2 - V^2} = c, \quad (6.52)$$

como esperado (a velocidade da luz vale  $c$  em todos os referenciais).

O feixe de luz se propaga ao longo de uma direção formando um ângulo  $\theta$  em relação ao eixo  $OX$ , com  $\cos \theta = V/c$ .

### Solução da Questão 3:

a) Desprezando  $(v/c)^2$ , temos  $\gamma \approx 1$ . Nesse caso, a quadrivelocidade pode ser aproximada por  $(c, v, 0, 0)$  já que as componentes  $y$  e  $z$  da velocidades são nulas.

b) Pelo resultado do item anterior, as componentes da quadrivelocidade no referencial  $S$  são  $U_0 = c$ ,  $U_1 = v$  e  $U_2 = U_3 = 0$ . Pela Equação (6.33), temos

$$U'_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}(U_0 - \frac{V}{c}U_1) = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}c(1 - \frac{Vv}{c^2}). \quad (6.53)$$

Desprezando os termos  $V^2/c^2$  e  $Vv/c^2$ , temos

$$U'_0 \approx c. \quad (6.54)$$

A equação (6.34) fornece

$$U'_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}(U_1 - \frac{V}{c}U_0) \approx v - V. \quad (6.55)$$

Pelas Equações (6.35) e (6.36),  $U'_2 = U'_3 = 0$ . Portanto, no referencial  $S'$  a quadrivelocidade vale, no limite não-relativístico,  $(c, v - V, 0, 0)$ , o que signifiva que o vetor velocidade está ao longo do eixo  $OX$ , e tem módulo igual a  $v - V$ , em acordo com a lei de composição de velocidades de Galileu, Equação (6.25).



## Aula 7 – Dinâmica relativística

### Meta da aula

Apresentar uma introdução à dinâmica relativística de uma partícula.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- definir o quadrimomento e o vetor momento relativístico de uma partícula;
- determinar a velocidade de uma partícula, sob o efeito de uma força constante, em função do tempo;
- calcular as energias total, cinética e de repouso de uma partícula de massa de repouso e velocidade conhecidas;
- explicar e expressar matematicamente o princípio de equivalência entre massa e energia;
- escrever a relação entre energia e momento de uma partícula.

### Pré-requisitos

Para compreender esta aula, é recomendável ler e realizar as atividades propostas nas aulas anteriores desta disciplina. O conceito de quadri-velocidade, apresentado no final da Aula 6, é especialmente importante para a compreensão desta aula.

### Introdução

Nas seis aulas anteriores, apresentamos a cinemática relativística. Você teve a oportunidade de conhecer detalhadamente vários efeitos cinemáticos importantes, tais como a dilatação temporal e a contração de Lorentz. Encerrando o nosso estudo da teoria da relatividade restrita, apresentaremos nesta aula alguns dos conceitos básicos da dinâmica relativística.

Vamos começar revendo resultados importantes da dinâmica Newtoniana e, em seguida, discutir o conceito de momento linear na teoria da relatividade. Como coroamento do nosso estudo, vamos derivar, no final da

aula, o princípio de equivalência entre massa e energia, que se traduz na famosa equação  $E = mc^2$ .

## Alguns resultados da dinâmica Newtoniana

Antes de iniciar o estudo da dinâmica relativística, vamos fazer uma revisão rápida de alguns conceitos muito importantes da dinâmica Newtoniana, pré-relativística, que você estudou nos cursos de Física 1A e 1B.

Um dos resultados fundamentais da Mecânica Newtoniana é a Segunda Lei de Newton: uma partícula de massa  $m$ , sob a ação de uma força  $\vec{F}$ , adquire uma aceleração

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (7.1)$$

Já comentamos que esta Lei não é compatível com o Princípio da Relatividade quando empregamos a cinemática relativística. Para entender como ela será modificada na teoria da relatividade, é interessante escrevê-la em termos do *momento linear*

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (\text{Newtoniano}) \quad (7.2)$$

onde  $\vec{v}$  é a velocidade da partícula.

O momento linear desempenha um papel fundamental na Mecânica Newtoniana. Você pode ter uma idéia intuitiva sobre o significado do momento linear refletindo sobre a seguinte situação física: imagine que uma bicicleta e um caminhão se desloquem com a *mesma* velocidade e colidam contra um muro. Qual dos dois irá provocar o maior estrago sobre o muro? Sabemos, de nossa experiência diária, que o caminhão irá provocar um estrago maior. Isto acontece porque ele possui uma massa maior do que a bicicleta. Por outro lado, esse mesmo caminhão produziria um estrago ainda maior sobre o muro, se sua velocidade fosse maior. Este exemplo sugere que a grandeza física chave nos processos de colisão é o momento linear, que, na Mecânica Newtoniana, é o produto da massa pela velocidade, como mostra a Equação (7.2). De fato, o momento linear total de duas partículas é conservado num processo de colisão entre elas, se nenhuma força externa (isto é, que não esteja associada à interação entre as partículas) atuar sobre elas.

Para escrever a Segunda Lei de Newton em termos do momento linear  $\vec{p}$ , basta lembrar que a aceleração de uma partícula é a derivada temporal da sua velocidade:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Combinando esta equação com a Equação (7.1), obtemos

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (7.3)$$

que expressa a Segunda Lei em termos da derivada (ou taxa de variação) do momento da partícula.

De acordo com este resultado, a taxa de variação do momento de uma partícula é igual à força  $\vec{F}$  exercida sobre ela. Ao empurrar um carro inicialmente em repouso, você está exercendo uma força aproximadamente constante  $\vec{F}$  sobre ele durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ . De acordo com a Equação (7.3), o carro adquire, então, um momento linear  $\vec{p} = \vec{F}\Delta t$ . Se, em lugar do carro, estivéssemos empurrando um carrinho de bebê com a mesma força  $\vec{F}$  e durante o mesmo intervalo de tempo, o ganho de momento do carrinho seria o mesmo. Como o carrinho tem uma massa bem menor do que o carro, este momento  $\vec{p} = m\vec{v}$  adquirido corresponderia a uma velocidade de módulo bem maior.

Para encerrar a nossa breve revisão da Mecânica Newtoniana, vamos destacar o caráter *vetorial* do momento  $\vec{p}$ . Isto significa que a Segunda Lei, dada pela Equação (7.3), tem a mesma forma qualquer que seja a orientação dos eixos coordenados utilizados para descrever o movimento da partícula. Se usarmos dois sistemas de eixos com orientações diferentes, as componentes cartesianas  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  serão diferentes, mas o *vetor*  $\vec{p}$  será o mesmo nos dois casos, pois o conceito de vetor no espaço tridimensional independe do sistema de eixos coordenados. Em consequência,  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  se transformam por uma regra bem específica quando rodamos os eixos coordenados, como você estudou na Aula 2 (veja a seção ‘Rotações espaciais’). Esta regra, que expressa, matematicamente, o caráter vetorial de  $\vec{p}$ , garante que as componentes do momento transformadas por rotação dos eixos também satisfaçam a Equação (7.3).

## Momento relativístico

No espaço-tempo quadridimensional da teoria da relatividade, o conceito de quadri vetor, que você estudou na Aula 6, é o análogo do conceito de vetor tridimensional. Para que as leis da Mecânica sejam as mesmas em todos os referenciais inerciais (Princípio da Relatividade), elas devem ser formuladas em termos de quadri vetores, pois estes se transformam por mudança de referencial (transformação de Lorentz) exatamente da forma necessária para garantir a equivalência entre os diferentes referenciais inerciais.

Como na Mecânica Newtoniana, a grandeza chave para a dinâmica relativística de uma partícula é o seu momento linear. Como definir o quadrivetor momento? Você aprendeu, na aula anterior, que podemos definir a quadri-velocidade de uma partícula  $(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$ , onde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  é o fator de Lorentz associado à velocidade  $\vec{v}$  da partícula. Note que  $v^2 = |\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$  é o módulo ao quadrado da velocidade da partícula.

Por analogia com a Mecânica Newtoniana, vamos multiplicar a quadri-velocidade pela grandeza que representa a massa da partícula, medida no seu referencial de repouso (ou referencial próprio). Esta grandeza, que chamaremos *massa de repouso* (ou massa própria)  $m_0$ , representa uma propriedade intrínseca da partícula considerada, e não depende do referencial usado para descrever o seu movimento.

Vamos, então, definir o *quadrimento* da partícula como sendo o produto da sua massa de repouso  $m_0$  pela quadri-velocidade:

$$(p_0, p_x, p_y, p_z) = m_0 (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z), \quad (7.4)$$

ou, de forma mais explícita,

$$p_0 = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.5)$$

$$p_x = \frac{m_0 v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.6)$$

$$p_y = \frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.7)$$

$$p_z = \frac{m_0 v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.8)$$

A massa de repouso  $m_0$  da partícula é um invariante de Lorentz: por construção, ela tem o mesmo valor em todos os referenciais inerciais. Portanto, o quadrimento é definido como o produto de um invariante de Lorentz por um quadrivetor, a quadri-velocidade. Assim, a regra de transformação (por mudança de referencial) para as quatro componentes do quadrimento é idêntica à regra de transformação das componentes da quadri-velocidade, o que garante que o quadrimento é, de fato, um quadrivetor. Esta situação é análoga à multiplicação de um vetor no espaço tridimensional por um escalar (que é um número invariante por rotações dos eixos coordenados). Nesse caso, o produto é automaticamente um vetor se transformando por rotação dos eixos coordenados, exatamente como o vetor original.

A parte *espacial* do quadrimento, formada pelas componentes  $p_x, p_y$  e  $p_z$ , é um vetor tridimensional, que chamaremos *momento relativístico*  $\vec{p}$ .

Pelas Equações (7.6)–(7.8), temos:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (7.9)$$

O momento relativístico é *diferente* do momento linear da Mecânica Newtoniana, definido pela Equação (7.2), devido à presença do fator de Lorentz  $\gamma$  na Equação (7.9). Comparando estas duas equações, você poderia concluir que, na teoria da relatividade, a massa  $m_0$  da partícula é trocada pela *massa relativística*

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (7.10)$$

que *depende* da velocidade da partícula. Em termos de  $m$ , o momento relativístico tem a mesma forma da definição Newtoniana de momento, dada pela Equação (7.2). Portanto, tudo se passa como se a massa da partícula aumentasse à medida que ela ganhasse velocidade, devido à multiplicação pelo fator de Lorentz  $\gamma \geq 1$ , que, como você já sabe, é tanto maior quanto mais a velocidade se aproxima do seu valor limite  $c$ . Essa variação da massa relativística com a velocidade tem conseqüências muito importantes na dinâmica relativística, fazendo com que ela seja bastante diferente da dinâmica Newtoniana.

Observe que, no referencial de repouso da partícula, temos  $v = 0$  e, portanto,  $m = m_0$  de acordo com a Equação (7.10), o que confirma a nossa interpretação de  $m_0$  como massa de repouso.

Em contrapartida, para velocidades elevadas, comparáveis à velocidade da luz  $c$ ,  $m$  se torna muito maior do que a massa de repouso  $m_0$ . Devido à dependência de  $m$  com a velocidade da partícula, esta não é proporcional ao momento, conforme você irá descobrir no exercício proposto a seguir.

## Exercício 7.1

Uma partícula de massa de repouso  $m_0$  possui momento  $\vec{p} = p \hat{x}$  ao longo da direção do eixo  $OX$ . Determine a sua velocidade  $\vec{v}$  usando a definição de momento relativístico dada pela Equação (7.9). Compare o seu resultado com a expressão que seria obtida de acordo com a Mecânica Newtoniana. Analise detalhadamente os casos em que  $p \ll m_0 c$ ,  $p = m_0 c$ , e  $p \gg m_0 c$ . Faça um gráfico do módulo da velocidade  $v$  em função de  $p$ .

**Solução:** pela Equação (7.9), o vetor velocidade  $\vec{v}$  é paralelo ao vetor momento  $\vec{p}$ . Assim, temos  $v_y = v_z = 0$ , e  $\vec{v} = v \hat{x}$ . Para calcular  $v$  em termos de  $p$ , é preciso inverter a equação

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = p. \quad (7.11)$$

Para isto, elevamos ao quadrado ambos os lados desta equação, e multiplicamos pelo denominador da fração no seu lado esquerdo:

$$m_0^2 v^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) p^2. \quad (7.12)$$

Em seguida, agrupamos os termos em  $v^2$  do mesmo lado da equação:

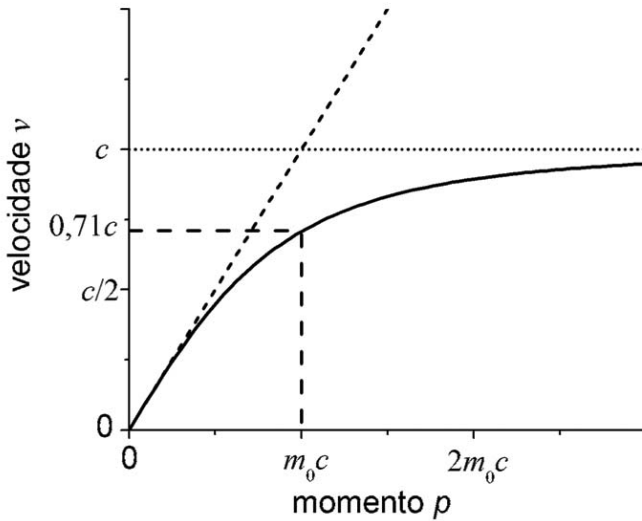
$$\left(m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}\right) v^2 = p^2, \quad (7.13)$$

para obter, então, o resultado

$$v = \frac{p}{\sqrt{m_0^2 + \frac{p^2}{c^2}}}. \quad (7.14)$$

Para valores pequenos de momento,  $p \ll m_0 c$ , podemos aproximar esta expressão pelo resultado da Mecânica Newtoniana  $v = p/m_0$ , pelo qual a velocidade seria proporcional ao momento ( $v$  função linear de  $p$ ). Observe que a condição sobre o momento é equivalente, então, à condição de pequenas velocidades:  $v \ll c$ . Na **Figura 7.1**, apresentamos o gráfico de  $v$  em função de  $p$ , com a curva cheia representando o resultado relativístico exato, dado pela Equação (7.14), e a reta tracejada a aproximação Newtoniana, válida para  $v \ll c$  ou, de forma equivalente,  $p \ll m_0 c$  (limite não-relativístico). Observe, pelo gráfico, que a velocidade satura no valor limite  $c$  para valores grandes de  $p$ . De fato, para  $p \gg m_0 c$ , podemos desprezar a parcela  $m_0^2$  no denominador na Equação (7.14), e obter  $v \approx c$ . Na **Figura 7.1**, indicamos explicitamente o valor da velocidade para  $p = m_0 c$ :  $v = c/\sqrt{2} \approx 0,71 c$ , que já é significativamente menor que o resultado Newtoniano para este valor de  $p$  ( $v = c$ ).

Por meio do gráfico mostrado na **Figura 7.1**, você poderá concluir que a velocidade  $v$  da partícula é sempre menor do que  $c$ , mesmo para valores arbitrariamente grandes do momento relativístico  $p$ . De fato, como você aprendeu nas aulas anteriores dessa disciplina,  $c$  é o limite superior para as velocidades e para a propagação de sinais, o que está relacionado à questão da causalidade analisada em detalhe na Aula 6. Veremos, ainda nesta aula, que apenas partículas de massa de repouso nula podem ter velocidade em módulo igual a  $c$ .



**Figura 7.1:** Variação da velocidade  $v$  de uma partícula em função do seu momento relativístico  $p$  (linha cheia). A reta tracejada corresponde ao limite não-relativístico ( $v$  proporcional a  $p$ ). No gráfico é indicado o valor de  $v$  para  $p = m_0c$ .

## Dinâmica relativística

Em termos do momento relativístico  $\vec{p}$ , a lei fundamental da dinâmica relativística se escreve exatamente como a segunda Lei de Newton (compare com a Equação (7.3),

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (7.15)$$

onde  $\vec{F}$  é a força que atua sobre a partícula (se há várias forças atuando,  $\vec{F}$  representa a força resultante). Entretanto, existe uma diferença fundamental em relação à Mecânica Newtoniana: o momento linear relativístico, definido pela Equação (7.9), não é proporcional à velocidade como no caso Newtoniano, como você mostrou no Exercício 7.1 (veja a **Figura 7.1**), devido à

multiplicação pelo fator de Lorentz  $\gamma$ . Você irá descobrir, no exercício a seguir, que a dinâmica relativística é muito diferente da dinâmica Newtoniana quando a velocidade da partícula se aproxima da velocidade da luz  $c$ .

### Exercício 7.2

Uma partícula de carga  $q$  e massa de repouso  $m_0$ , em repouso em  $t = 0$ , é acelerada pela ação de um campo elétrico uniforme  $\vec{E} = E_0 \hat{x}$ . Calcule a velocidade da partícula no tempo  $t$ . Mostre que ela é sempre menor do que a velocidade da luz  $c$ . Sugestão: use a Equação (7.15), com  $\vec{F} = q\vec{E}$  constante, e o resultado do exercício anterior.

**Solução:** pela Equação (7.15), as componentes  $y$  e  $z$  do momento são constantes. Como a partícula está inicialmente em repouso, temos  $p_y = p_z = 0$ , e, logo,  $v_y = v_z = 0$ . Assim, a partícula adquire momento e velocidade ao longo da direção do eixo  $OX$ :  $\vec{p}(t) = p(t)\hat{x}$ , com

$$\frac{dp}{dt} = q E_0. \quad (7.16)$$

Como o lado direito desta equação não depende do tempo, podemos integrá-la facilmente, usando  $p(0) = 0$ :

$$p(t) = q E_0 t. \quad (7.17)$$

Assim, o momento da partícula cresce linearmente no tempo. O comportamento da velocidade em função do tempo pode ser, então, diretamente compreendido a partir da **Figura 7.1**. Inicialmente, enquanto ela ainda é muito menor do que  $c$ , a velocidade cresce linearmente (aceleração constante). Mas à medida que ela vai se aproximando de  $c$ , a aceleração vai diminuindo, de forma que a velocidade não ultrapassa o limite dado pela velocidade da luz  $c$ . Combinando o resultado do exercício anterior, dado pela Equação (7.14), com a Equação (7.17), obtemos

$$v(t) = \frac{q E_0 t}{\sqrt{m_0^2 + \frac{(q E_0 t)^2}{c^2}}} = \frac{q E_0 t}{\sqrt{m_0^2 c^2 + (q E_0 t)^2}} c. \quad (7.18)$$

A fração que multiplica  $c$  nesta última expressão possui um denominador maior do que o numerador e, portanto, é menor do que a unidade. Em consequência, temos  $v(t) < c$  para todo tempo  $t$ . Observe que  $v(t)$  se aproxima de  $c$  para valores grandes de  $t$  (tempos longos), mas sem nunca alcançar ou ultrapassar este valor limite.

Vale a pena comparar o resultado do Exercício 7.2, dado pela Equação (7.18), com o resultado que teríamos obtido usando a Mecânica Newtoniana, tomando  $v(t) = p(t)/m_0$  para obter, da Equação (7.17),  $v(t) = qE_0t/m_0$ . Se examinarmos a expressão dada pela Equação (7.18) para tempos curtos, tais que o momento adquirido  $p(t) = qE_0t$  seja ainda muito menor do que  $m_0c$ , podemos desprezar o termo  $(qE_0t)^2$  no denominador, obtendo o resultado Newtoniano como uma aproximação. Essa situação corresponde, mais uma vez, ao limite de baixas velocidades:  $v(t) \ll c$ , que temos chamado também de *limite não-relativístico*. Você já viu, ao longo de nosso curso, diversas outras situações em que os resultados da Mecânica Newtoniana são reobtidos a partir da teoria da relatividade, no limite de pequenas velocidades.

## Energia cinética

Além de momento, também transferimos energia para uma partícula sobre a qual exercemos uma força. Assim como na Mecânica Newtoniana, a partícula, inicialmente em repouso na posição  $\vec{r}_i$ , adquire energia cinética  $T$  igual ao *trabalho* exercido pela força resultante (soma de todas as forças)  $\vec{F}$ . Se  $\vec{F}$  é paralela à direção do eixo  $OX$ ,  $\vec{F} = F\hat{x}$ , então, o ganho de energia cinética vale

$$T = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F dx, \quad (7.19)$$

onde  $\vec{r}_f$  é a posição final da partícula.

Usando a Equação (7.15), você irá mostrar, no exercício a seguir, que a energia cinética  $T$  adquirida pela partícula de massa de repouso  $m_0$  vale, no instante em que sua velocidade tem módulo  $v$ ,

$$T = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2. \quad (7.20)$$

## Exercício 7.3

Calcule a energia cinética de uma partícula de massa de repouso  $m_0$  e velocidade de módulo  $v$ , tomando, como ponto de partida, a expressão para o trabalho realizado pela força resultante dada pela Equação (7.19).

**Solução:** combinando as Equações (7.15) e (7.19), obtemos

$$T = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \frac{dp_x}{dt} dx. \quad (7.21)$$

Usando a expressão para  $p_x$  dada pela Equação (7.6), obtemos

$$T = m_0 \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} dx. \quad (7.22)$$

A derivada nesta equação é obtida pela regra da derivada de um produto de funções:

$$\frac{d}{dt} \frac{v_x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} = \left( \frac{v_x^2/c^2}{(1 - v_x^2/c^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}} \right) \frac{dv_x}{dt} = \frac{\frac{dv_x}{dt}}{(1 - v_x^2/c^2)^{3/2}}. \quad (7.23)$$

Ao substituir este resultado na Equação (7.22), fazemos também uma mudança na variável de integração, de  $x$  para  $v_x$ . Para isto, usamos a seguinte relação

$$\frac{dv_x}{dt} dx = \frac{dv_x}{dt} \frac{dx}{dv_x} dv_x = \frac{dx}{dt} dv_x = v_x dv_x,$$

que é obtida com o auxílio da regra da cadeia. Obtemos, então,

$$T = m_0 \int_0^v \frac{v_x}{(1 - v_x^2/c^2)^{3/2}} dv_x, \quad (7.24)$$

onde  $v$  é a componente  $x$  da velocidade da partícula quando ela chega à posição  $\vec{r}_f$ . Como a velocidade da partícula é paralela ao eixo  $OX$ , podemos identificar  $v$  com o módulo da velocidade. Calculando esta integral, obtemos

$$T = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right), \quad (7.25)$$

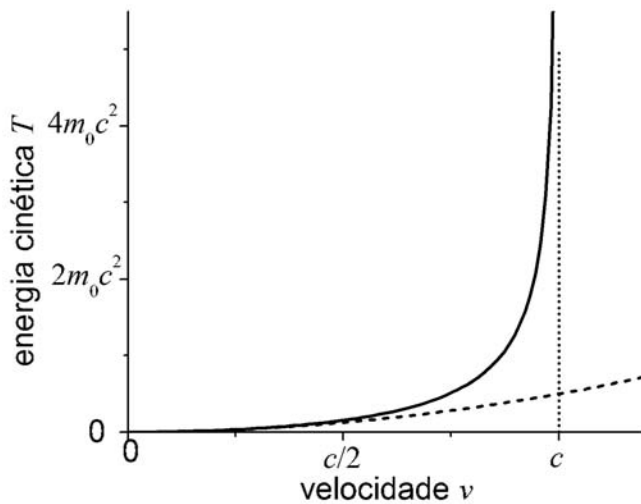
demonstrando, assim, a Equação (7.20).

Apesar de ter sido derivado num caso particular (força ao longo do eixo  $OX$ ), o resultado da Equação (7.20) (ou Equação (7.25)) é bastante geral, fornecendo a energia cinética  $T$  de uma partícula qualquer de massa

de repouso  $m_0$  e velocidade de módulo  $v$ .

Na **Figura 7.2**, mostramos o gráfico da energia cinética  $T$  em função da velocidade  $v$  da partícula, que é obtido a partir da Equação (7.20), e representada pela linha cheia. Observe no gráfico que a energia cinética cresce com a velocidade, conforme você poderia ter antecipado. De fato, a energia cinética é a energia associada ao *movimento* da partícula e, portanto, deve ser tanto maior quanto maior for a velocidade.

Também representamos, no mesmo gráfico, os valores de  $m_0v^2/2$  (linha tracejada), correspondendo à energia cinética de acordo com a Mecânica Newtoniana. No exercício a seguir, você mostrará que, para velocidades muito menores do que a velocidade da luz, a energia cinética relativística pode ser bem aproximada pela expressão Newtoniana (observe no gráfico que as linhas cheia e tracejada se aproximam e se juntam para velocidades pequenas). Com isso, você estará verificando mais um exemplo de como obtemos a Mecânica Newtoniana a partir da teoria da relatividade no limite de baixas velocidades.



**Figura 7.2:** Variação da energia cinética  $T$  com a velocidade  $v$ . A massa de repouso da partícula vale  $m_0$ . Linha cheia: resultado relativístico; linha tracejada: resultado Newtoniano ( $T = m_0v^2/2$ ).

## Exercício 7.4

Obtenha uma expressão aproximada para a energia cinética, dada pela Equação (7.20), no limite em que  $v \ll c$ .

**Solução:** podemos escrever a energia cinética na forma (veja a Equação (7.25)):

$$T = (\gamma - 1)m_0c^2, \quad (7.26)$$

onde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$  é o fator de Lorentz associado à velocidade  $v$  da partícula. Você já obteve, no Exercício 3.2 da Aula 3, a expressão que fornece uma aproximação para  $\gamma$  quando  $v \ll c$  (veja a Equação (3.6) da Aula 3):

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (7.27)$$

Ao substituir esta expressão na Equação (7.26), obtemos

$$T = \frac{1}{2}m_0v^2, \quad (7.28)$$

que é a conhecida expressão para a energia cinética na Mecânica Newtoniana.

Conforme você pode observar no gráfico da **Figura 7.2**, a energia cinética  $T$  se torna bem maior do que  $m_0v^2/2$  à medida que  $v$  se aproxima da velocidade da luz  $c$ , tornando-se infinita no limite  $v \rightarrow c$ . Este resultado é bastante importante, pois mostra que seria necessário fornecer uma quantidade infinita de energia para acelerar uma partícula de massa de repouso  $m_0$  não-nula até a velocidade da luz. Podemos, então, concluir que partículas com  $m_0$  não-nulo sempre têm velocidades menores do que  $c$ .

### Massa e energia: $E = mc^2$

De acordo com a Equação (7.20), a energia cinética  $T$  de uma partícula é obtida subtraindo a parcela  $m_0c^2$  da parcela  $\gamma m_0c^2$ . Observe que  $m_0c^2$  não depende da velocidade da partícula e tem sempre o mesmo valor, mesmo que ela esteja em repouso. Devemos, então, interpretar o resultado para a energia cinética da seguinte forma: a parcela

$$E = \gamma m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (7.29)$$

é a *energia total* da partícula. Quando a partícula está em repouso, obtemos, tomando  $v = 0$  nesta equação,  $E = m_0 c^2$ . Portanto,  $m_0 c^2$  representa a energia da partícula quando ela se encontra em repouso, ou *energia de repouso*. A energia cinética  $T$ , dada pela Equação (7.20), é a *diferença* entre a energia total e a energia de repouso. Assim, a energia total da partícula  $E$  é a soma da energia cinética, que está associada ao movimento e se anula para  $v = 0$ , com a energia de repouso  $m_0 c^2$ , que é uma propriedade intrínseca da partícula:

$$E = T + m_0 c^2. \quad (7.30)$$

Não há, na Mecânica Newtoniana, nada que seja análogo à energia de repouso  $m_0 c^2$ . Esta energia está diretamente relacionada a um princípio fundamental da teoria da relatividade: a equivalência entre massa e energia. Nas palavras de Einstein (ainda em 1905): “a massa de uma partícula é uma medida do seu conteúdo de energia”. A energia de repouso  $m_0 c^2$  é o conteúdo de energia associado à quantidade de massa  $m_0$ . Pode-se mostrar, de forma mais geral, que massa e energia são sempre equivalentes. Por exemplo, em termos da massa relativística  $m = \gamma m_0$  definida pela Equação (7.10), a energia total da partícula dada pela Equação (7.29), vale  $E = m c^2$ .

### Princípio de equivalência entre massa e energia

$$E = m c^2. \quad (7.31)$$

A toda massa  $m$  corresponde uma energia  $E$  dada pela Equação (7.31). Reciprocamente, toda quantidade de energia  $E$  possui propriedades inerciais quantificadas por uma massa  $m$  dada por esta mesma equação. Por essa razão, o princípio de equivalência entre massa e energia, que se expressa matematicamente pela Equação (7.31), também é conhecido como a *lei da inércia da energia*. Ele vale para todas as formas de energia, por exemplo para a energia eletromagnética, à qual também devemos associar uma quantidade de inércia de acordo com esta equação.

A quantidade  $c^2$  desempenha o papel de fator de conversão entre massa e energia. O seu valor numérico no Sistema Internacional de Unidades é enorme:  $c^2 = 9 \times 10^{16} (\text{m/seg})^2$ . Portanto, a energia de repouso é enorme para uma partícula macroscópica, como no exemplo discutido no exercício a seguir.

## Exercício 7.5

Calcule a energia de repouso de uma bolinha de gude, de massa igual a  $m_0 = 5\text{g}$ . Compare-a com a energia gasta em sua casa durante um determinado mês (veja a sua conta de energia elétrica!), para responder à seguinte questão: quantas residências (com consumo igual ao da sua casa) poderiam ser aprovisionadas durante um mês inteiro com a energia de repouso de uma única bolinha de gude?

**Solução:** a energia de repouso da bolinha vale

$$m_0 c^2 = 5 \times 10^{-3} \text{kg} \times (3 \times 10^8 \text{m/s})^2 = 4,5 \times 10^{14} \text{J},$$

onde J representa a unidade de energia do Sistema Internacional de Unidades, o Joule.

Um valor possível para o consumo mensal de energia elétrica numa residência seria 300kWh. A unidade kWh, usada pelas companhias distribuidoras de energia elétrica, significa  $1\text{kWh} = 1000\text{W} \times 1\text{hora} = 1000\text{J/seg} \times 3600\text{seg} = 3,6 \times 10^6 \text{J}$ . Assim, neste exemplo, o consumo mensal vale  $1,08 \times 10^9 \text{J}$ . Dividindo a energia de repouso pelo consumo mensal de cada residência, concluímos que a bolinha seria suficiente para o consumo de cerca de 416.667 residências. Isto equivale a uma cidade de tamanho médio!

Após este exercício, você já deve estar desconfiando que não é factível converter a energia de repouso da bolinha em energia elétrica. Na verdade, a energia de repouso representa apenas um *limite superior* para a energia que pode ser extraída de uma certa quantidade de massa. Em outras palavras, a energia obtida de uma massa  $m_0$  nunca pode ser superior a  $m_0 c^2$ . Em geral, a quantidade de energia que de fato pode ser obtida é muito menor do que este limite superior.

Para uma bolinha de gude, seria muito difícil imaginar algum processo para conversão de massa em energia ‘útil’. Vamos, então, supor que a nossa massa de 5g seja constituída de um material combustível, por exemplo gasolina. Sabe-se que a combustão de 5g de gasolina fornece cerca de  $2 \times 10^5 \text{J}$  de energia. Esse valor é várias ordens de grandeza menor do que a energia de repouso calculada no Exercício 7.5, e é claro que essa quantidade de gasolina não é suficiente para fornecer energia para uma cidade inteira durante um mês... Assim, neste exemplo apenas uma fração muito pequena da energia de

repouso disponível é convertida. Isto significa que a massa total dos produtos da combustão é aproximadamente igual à massa de combustível inicial. De fato, a diminuição de massa é igual à energia gerada dividida pelo fator de conversão  $c^2$  :  $\Delta m = 2 \times 10^5 \text{J} / (9 \times 10^{16} (\text{m/seg})^2) = 2,2 \times 10^{-12} \text{kg} = 2,2 \times 10^{-9} \text{g}$ , que é várias ordens de grandeza menor do que a massa inicial. De forma mais geral, a massa é aproximadamente conservada em todas as reações químicas, porque as energias produzidas (ou consumidas) estão sempre várias ordens de grandeza abaixo da energia de repouso, como ilustrado por este exemplo.

Uma maneira muito mais eficiente de “gastar” a energia de repouso disponível numa certa quantidade de massa é através de reações *nucleares*, que envolvem modificações da estrutura do núcleo atômico, ao passo que as reações químicas envolvem tipicamente os elétrons de valência dos átomos, deixando o núcleo inalterado. No exercício a seguir, você irá analisar um exemplo importante de reação nuclear.

#### Exercício 7.6

A reação nuclear mais importante para geração de energia em usinas nucleares é a fissão do isótopo 235 do urânio (U-235). Nesse processo, o núcleo do urânio se divide em dois núcleos menores. Uma massa de 5g de U-235 produz, através dessa reação,  $4,1 \times 10^{11} \text{J}$  de energia. Determine a variação percentual de massa nesse processo.

**Solução:** a variação de massa vale  $\Delta m = 4,1 \times 10^{11} \text{J} / (9 \times 10^{16} (\text{m/seg})^2) = 4,6 \times 10^{-3} \text{g}$ , o que corresponde a um percentual de  $100 \times 4,6 \times 10^{-3} / 5 = 0.092\%$  da massa inicial. Esta é, também, a percentagem da energia de repouso gasta nesta reação nuclear.

Outras reações nucleares são ainda mais eficientes do que o exemplo considerado no exercício anterior, envolvendo frações ainda maiores da energia de repouso. Por esta razão, o princípio de equivalência entre massa e energia é muito importante em Física Nuclear.

## Energia e momento

Comparando a Equação (7.29) com a definição do quadrimomento, dada pela Equação (7.4), você deverá perceber que a sua componente tempo-

ral pode ser expressa em termos da energia total (confira também a Equação (7.5))

$$p_0 = \frac{E}{c} \quad (7.32)$$

de forma que podemos escrever o quadrimomento como  $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ .

A Equação (7.29) fornece a energia total  $E$  em termos da velocidade  $v$  da partícula. Também é muito importante relacionar  $E$  diretamente com o momento relativístico  $\vec{p}$ . Para obter esta relação, usaremos a propriedade de invariância de Lorentz da quantidade  $a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$  de um quadrivetor  $(a_0, a_1, a_2, a_3)$  genérico, que você estudou na Aula 6 (veja em particular a Equação (6.37) desta aula). Aplicando esta propriedade para o quadrivetor momento, podemos concluir que

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \frac{E'^2}{c^2} - p_x'^2 - p_y'^2 - p_z'^2, \quad (7.33)$$

onde  $(E'/c, p_x', p_y', p_z')$  são as componentes do quadrivetor num referencial  $S'$  qualquer. Vamos tomar, como referencial  $S'$ , aquele em que a partícula está instantaneamente em repouso. Nesse caso, temos  $p_x' = p_y' = p_z' = 0$  e  $E' = m_0 c^2$ . Observe que  $E'$  é a energia de repouso da partícula. A Equação (7.33) fornece, então,

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2 c^2. \quad (7.34)$$

### Exercício 7.7

Demonstre a Equação (7.34) diretamente a partir das definições de  $E$  (Equação (7.29)) e de  $\vec{p}$  (Equação (7.9)).

**Solução:** usando as Equações (7.9) e (7.29) obtemos:

$$\frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = \gamma^2 m_0^2 c^2 - \gamma^2 m_0^2 v^2 = \gamma^2 m_0^2 (c^2 - v^2). \quad (7.35)$$

O fator de Lorentz ao quadrado vale

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2/c^2} = \frac{c^2}{c^2 - v^2}. \quad (7.36)$$

Substituindo este resultado na Equação (7.35), obtemos o resultado da Equação (7.34), já que o fator  $c^2 - v^2$  é cancelado.

Multiplicando a Equação (7.34) por  $c^2$ , obtemos

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad (7.37)$$

onde  $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$  é o módulo ao quadrado do momento relativístico. Basta, agora, tomar a raiz quadrada para obter um dos resultados mais importantes da aula, que fornece a energia  $E$  em termos do momento  $p$ :

### Relação entre energia e momento

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2}. \quad (7.38)$$

A relação entre energia e momento dada pela Equação (7.38) também vale para partículas de massa de repouso nula ( $m_0 = 0$ ). Nesse caso, ela fornece o resultado

$$E = pc \quad (m_0 = 0) \quad (7.39)$$

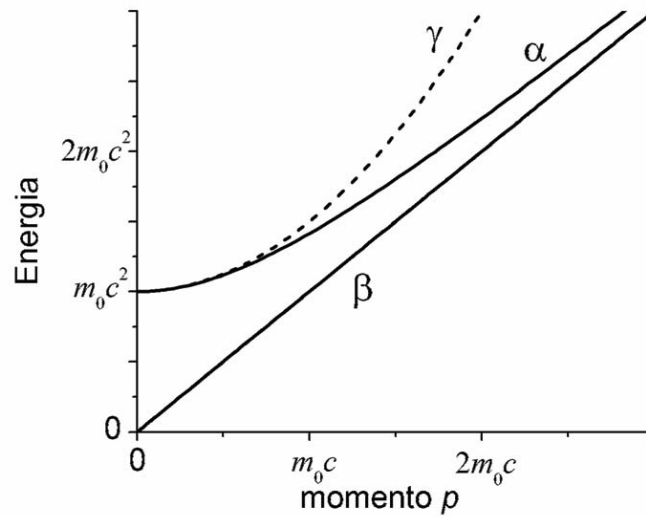
Tomando  $m_0 = 0$  na Equação (7.14), obtemos  $v = c$ , mostrando que partículas de massa de repouso nula têm velocidade igual à da luz, em qualquer referencial inercial. Observe que  $p$  *não depende* de  $v$  neste caso!

No Módulo 2 desta disciplina, onde faremos uma introdução à Física Quântica, você aprenderá que a luz (e mais geralmente qualquer radiação eletromagnética) é composta por partículas que, naturalmente, têm massa de repouso nula, de forma a ter velocidade  $v = c$  em todos os referenciais. Essas partículas são chamadas *fótons*. Você verá no Módulo 2 que a energia e o momento do fóton, relacionados pela Equação (7.39), dependem do comprimento de onda da radiação eletromagnética. Vale a pena lembrar que a Equação (7.39) já havia sido empregada na disciplina de Física 4A, no estudo do efeito de pressão de radiação.

Na **Figura 7.3**, apresentamos o gráfico da energia  $E$  em função de  $p$  para uma partícula de massa de repouso  $m_0$  (linha  $\alpha$ ) e para uma partícula de massa de repouso nula (reta  $\beta$ ). Observe que para  $p \gg m_0 c$ , a energia pode ser aproximada pelo produto  $pc$ , de forma que a linha  $\alpha$  se aproxima da reta. Este é o limite *ultra-relativístico*, em que  $v$  é muito próximo de  $c$  (mas menor do que  $c$ ). No limite oposto (limite não-relativístico),  $p \ll m_0 c$ , temos  $v \approx p/m_0$ , e

$$E = \frac{p^2}{2m_0} + m_0 c^2 \quad (p \ll m_0 c). \quad (7.40)$$

Esta expressão pode ser escrita na forma  $E = T + m_0c^2$ , com a energia cinética aproximada pelo resultado Newtoniano  $T = m_0v^2/2$  (veja o Exercício 7.4), já que  $p = m_0v$  neste limite. Na **Figura 7.3**, a linha tracejada  $\gamma$  representa os valores de energia nessa aproximação. Como esperado, a linha tracejada se aproxima da linha  $\alpha$  apenas para valores pequenos de  $p$ .



**Figura 7.3:** Variação da energia total  $E$  com o módulo do momento relativístico  $p$ . Linha  $\alpha$ : partícula de massa de repouso  $m_0$ ; linha  $\beta$ : partícula de massa de repouso nula; linha  $\gamma$ : partícula de massa de repouso  $m_0$ , no limite não-relativístico.

## Exercício 7.8

A massa de repouso do elétron vale  $m_0 = 9,1094 \times 10^{-31} \text{kg}$ . Calcule: a) a sua energia de repouso na unidade MeV (milhões de elétron-volts:  $1 \text{MeV} = 10^6 \text{eV} = 1,602 \times 10^{-13} \text{J}$ ); a energia (na unidade MeV) e a razão  $v/c$  para b)  $p = m_0 c/10$ ; c)  $p = m_0 c$  e d)  $p = 10m_0 c$ .

**Respostas comentadas:** a) a energia de repouso vale  $0,511 \text{MeV}$ ;

b)  $v/c = 0,0995$ , valor muito próximo do resultado Newtoniano  $p/(m_0 c) = 0,1$ .

A energia vale  $E = 1,00499m_0 c^2 = 0,513 \text{MeV}$ . Note que a energia cinética vale, então,  $T = 0,00499m_0 c^2$ , valor bem próximo do resultado Newtoniano  $p^2/(2m_0) = 0,005m_0 c^2$ . Nesse regime não-relativístico, a energia cinética é muito menor do que a energia de repouso.

c)  $v/c = 0,71$ , bem diferente do valor Newtoniano  $p/(m_0 c) = 1$  (confira a **Figura 7.1**). A energia vale  $E = \sqrt{2}m_0 c^2 = 0,723 \text{MeV}$ .

d)  $v/c = 0,995$ : observe que  $v$  não ultrapassa  $c$  mesmo para valores grandes de momento (veja novamente a **Figura 7.1**). A energia vale  $E = 10,0499m_0 c^2 = 5,14 \text{MeV}$ , que é bem próximo do valor obtido no limite ultra-relativístico,  $p_0 c = 10m_0 c^2$ .

## Conclusão

Nesta aula, apresentamos uma introdução à dinâmica relativística de uma partícula. Nosso ponto de partida foi a definição de alguns conceitos fundamentais: quadrimomento, momento relativístico e massa de repouso. Como exemplo de aplicação do formalismo, analisamos o movimento de uma partícula carregada sob a ação de um campo elétrico uniforme.

Obtivemos a expressão geral para a energia cinética da partícula, cuja interpretação nos levou ao conceito de energia de repouso. A energia de repouso é um caso particular do princípio de equivalência entre massa e energia. Discutimos em detalhe as relações entre as diferentes grandezas que caracterizam a dinâmica da partícula: velocidade, momento relativístico, energia cinética e energia total.

## Atividades Finais

1. Mostre que, no limite não-relativístico (velocidades  $v \ll c$ ), a energia cinética de uma partícula é muito menor que a energia de repouso.

**Solução:** no limite não-relativístico, podemos aproximar a energia cinética pelo resultado Newtoniano:  $T \approx m_0 v^2/2$ . Assim, a razão entre  $T$  e a energia de repouso vale  $T/(m_0 c^2) \approx (v/c)^2/2 \ll 1$  e, portanto,  $T \ll m_0 c^2$ .

2. No Exercício 7.2 (carga sob a ação de campo elétrico uniforme), suponha que a partícula seja um elétron na atmosfera, onde existe um campo elétrico de módulo aproximadamente igual a  $E_0 = 100 \text{ V/m}$ . Calcule o tempo necessário para o elétron alcançar a velocidade  $c/\sqrt{2} \approx 0,71c$ , partindo do repouso.

**Solução:** por inspeção direta da Equação (7.18), concluímos que esta velocidade é obtida quando

$$qE_0 t = m_0 c,$$

fornecendo

$$t = \frac{m_0 c}{qE_0} = \frac{m_0 c^2}{qE_0 c}.$$

Antes de substituir os valores numéricos nesta equação, é importante notar que a quantidade de energia obtida pela multiplicação da carga do elétron por 1V é, por definição, igual a 1eV. Temos, então,  $qE_0 c = 3 \times 10^4 \text{ MeV/seg}$ . Usando o valor da energia de repouso do elétron obtido no Exercício 7.8, obtemos:

$$t = \frac{0.511 \text{ MeV}}{3 \times 10^4 \text{ MeV}} \text{ seg} = 1,7 \times 10^{-5} \text{ seg}. \quad (7.41)$$

3. Um exemplo importante de conversão de energia de radiação em massa é o efeito de criação de um par elétron-pósitron (o pósitron é a anti-partícula do elétron e tem a mesma massa de repouso do elétron). Calcule a energia mínima necessária para a criação deste par de partículas.

**Solução:** pelo princípio de equivalência entre massa e energia, a energia mínima necessária é igual à soma das energias de repouso do elétron e do pósitron:  $E_{\min} = m_0^{\text{el}} c^2 + m_0^{\text{pos}} c^2 = 2 \times 0,511 \text{ MeV} = 1,022 \text{ MeV}$ .

## Resumo

O momento relativístico de uma partícula de massa de repouso  $m_0$  e velocidade  $\vec{v}$  vale

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

A variação da velocidade em função do tempo, para uma partícula sob a ação de uma força dada  $\vec{F}$ , pode ser obtida da equação  $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ .

A energia total da partícula vale

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Para  $v = 0$ ,  $E$  é igual à energia de repouso  $m_0 c^2$ .

Em termos do momento relativístico, a energia é dada por

$$E = \sqrt{(p c)^2 + (m_0 c^2)^2}.$$

Massa e energia são grandezas equivalentes, relacionadas pela equação

$$E = m c^2.$$



## Módulo 2

# Introdução à Física Quântica

### Apresentação do módulo

A Mecânica Quântica fornece a estrutura teórica básica para a grande maioria das áreas da Física. As propriedades de moléculas, átomos, núcleos atômicos e partículas subatômicas (tais como prótons e nêutrons) são analisadas por modelos teóricos muito diferentes, mas que têm em comum o fato de serem baseados na Mecânica Quântica.

Várias propriedades importantes de meios materiais, tais como a condutividade elétrica, são estudadas por meio de teorias quânticas. Os avanços na Física da Matéria Condensada tiveram enorme impacto tecnológico a partir dos anos 50 do século passado (período conhecido como pós-guerra). Assim, diodos e transistores são exemplos de dispositivos semicondutores, inventados neste contexto, que são essenciais para a tecnologia moderna, por permitirem a miniaturização de circuitos elétricos. Hoje em dia, é impossível encontrar algum aparelho eletrônico (televisão, telefone celular, computador etc.) que não contenha circuitos integrados com milhares de dispositivos deste tipo (num computador moderno o número de transistores em cada circuito integrado do processador é da ordem de dezenas de milhões).

Poderíamos mencionar ainda vários outros exemplos para sublinhar a importância do desenvolvimento da Mecânica Quântica no mundo contemporâneo. A possibilidade de controle na escala molecular e atômica modificou os paradigmas de método de desenvolvimento tecnológico. A figura do inventor do século XIX com seus métodos de tentativa-e-erro foi substituída pelo cientista do século XX guiado pela Mecânica Quântica. E, ainda nos dias atuais, de forma crescente, vemos novas tecnologias serem obtidas como produto direto dos avanços das várias áreas de aplicação da Mecânica Quântica.

A Mecânica Quântica é uma das teorias mais testadas experimentalmente, com a utilização de montagens cada vez mais sofisticadas. Até hoje, ela foi confirmada por todos os testes experimentais, consolidando-se como a *teoria fundamental da Natureza*. Entretanto, ainda existe, atualmente, um debate intenso sobre a sua interpretação. A permanência de problemas conceituais ainda em aberto, cerca de 80 anos após a sua elaboração, é consequência do caráter revolucionário da Mecânica Quântica, que repre-

senta uma ruptura com a Mecânica Newtoniana ainda mais profunda do que aquela realizada por Einstein com a sua Teoria da Relatividade, que você estudou no Módulo 1.

Essa ruptura está relacionada ao conceito de causalidade, que é fundamental na Mecânica Newtoniana: todos os fenômenos podem ser explicados, de forma racional, como consequência de uma determinada *causa*. Assim no quadro da Mecânica Newtoniana, não há lugar para o acaso, e a noção de probabilidade só é introduzida quando se desconhecem as condições físicas que determinam o futuro. Por exemplo, podemos tentar sortear um número de 1 a 6 ao azar lançando um dado. Entretanto, a face (ou número) que será indicada no final não é, em princípio, aleatória. Ela pode, de fato, ser prevista se conhecermos com precisão suficientemente grande as condições iniciais do lançamento e as propriedades das superfícies com as quais o dado entrará em contato.

De forma mais geral, na Mecânica Newtoniana o futuro é *determinado* de forma unívoca se conhecermos as condições iniciais e todas as interações relevantes. Nesse sentido a idéia de “universo mecânico” é bem resumida pelo matemático francês Pierre-Simon Laplace, que escreveu em 1814:

Devemos entender o estado presente do universo como o efeito do seu estado passado e a causa do estado futuro. Um intelecto que, num dado momento, saberia todas as forças que colocam a natureza em movimento, e a situação de todos os itens das quais a natureza é composta, e se este intelecto fosse ainda suficientemente vasto para analisar estes dados, ele incluiria numa única fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e do mais leve átomo; nada seria incerto para um tal intelecto, e o futuro, assim como o passado, estaria presente diante de seus olhos.

A Mecânica Quântica rompe radicalmente com o determinismo causal Newtoniano (ou Laplaciano), ao introduzir o acaso com um caráter fundamental. Como você irá descobrir no presente módulo, mesmo quando dispomos de informação completa sobre o estado de um determinado sistema quântico, não é possível prever, em geral, o resultado de uma medida ou observação. Tudo o que a Mecânica Quântica fornece são *probabilidades* para os diferentes resultados possíveis.

Vamos iniciar o módulo apresentando dois tópicos que tiveram papel importante na história do desenvolvimento da Mecânica Quântica, no início

do século XX: o efeito foto-elétrico (Aula 8) e o espectro do átomo de hidrogênio (Aula 9). No primeiro tópico, você verá mais um exemplo do papel fundamental desempenhado por Einstein na construção da Física Moderna. O conceito de espectro apresentado na Aula 9 será estudado experimentalmente na Aula 10, onde você irá medir o espectro do hidrogênio com o auxílio de uma rede de difração. Na Aula 11, você irá realizar experimentos com um prisma refrator, que também pode ser usado para espectroscopia. As Aulas 12 e 13 apresentarão uma breve introdução ao formalismo básico da Mecânica Quântica, tomando como exemplo o problema da polarização da luz.



## Aula 8 – O efeito fotoelétrico e os quanta de luz

### Meta da aula

Apresentar uma introdução ao efeito fotoelétrico, incluindo a teoria de Einstein baseada no conceito de quanta de luz.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- explicar o esquema de quantização de Planck;
- apresentar o efeito fotoelétrico;
- explicar o conceito de quanta de luz, e usá-lo como base do modelo teórico para o efeito fotoelétrico;
- utilizar o conceito de fóton e relacionar a sua energia com a frequência, o comprimento de onda e o momento linear.

### Pré-requisitos

Para compreender esta aula, é recomendável rever os conceitos de:

- Oscilador harmônico, Aula 2 de Física 2B.
- Ondas e espectro da radiação eletromagnética, Aulas 2 e 3, de Física 4A.
- Relação entre energia e momento relativístico, Aula 7, de Física 4B.

### Introdução

No final do século XIX, uma série de resultados experimentais pavimentou o caminho para o surgimento, no início do século XX, da Mecânica Quântica. Vamos destacar três descobertas especialmente importantes: a análise espectral em 1860, o efeito fotoelétrico em 1887 e o elétron em 1897.

A primeira e a terceira, que foram fundamentais para a descoberta da estrutura atômica, serão analisadas na próxima aula. Nesta aula, vamos apresentar o efeito fotoelétrico e suas principais propriedades, para, em seguida, entender a teoria proposta por Einstein para este efeito.

Esta teoria foi apresentada por Einstein em 1905, portanto no mesmo ano em que ele formulou a teoria da relatividade restrita, que você estudou no Módulo 1. O resultado central neste trabalho é o conceito de *quantum de luz*, do qual a teoria do efeito fotoelétrico é obtida como uma das aplicações. Para o próprio Einstein, este conceito teria sido a sua única contribuição realmente revolucionária! De fato, o conceito de quantum de luz foi fundamental para o desenvolvimento posterior da Mecânica Quântica.

Ainda em 1905, com a idade de 26 anos, Einstein concluiu a sua tese de doutorado sobre um método teórico para determinação de diâmetros de moléculas e do número de Avogadro, e dois artigos sobre a teoria do movimento Browniano. Esses trabalhos, que não serão discutidos aqui, também tiveram um impacto científico notável, embora não tenham o caráter revolucionário dos trabalhos sobre a relatividade e os quanta de luz.

Devido ao conjunto de trabalhos fundamentais escritos por Einstein em 1905, ele é conhecido como o “ano miraculoso”. Para comemorar a passagem de 100 anos do “ano miraculoso”, a Organização das Nações Unidas (ONU) declarou 2005 como o Ano Internacional da Física. Vários eventos de divulgação científica, apoiados pela Unesco, estão sendo organizados em vários países neste ano.

Vamos, a seguir, estudar como a idéia de quantum de energia apareceu no último ano do século XIX.

**Max Planck** nasceu em Kiel, Alemanha, em 1858. Físico teórico, foi um dos primeiros cientistas de prestígio de sua geração a reconhecer a importância da teoria da relatividade restrita, e autor do primeiro trabalho sobre a teoria da relatividade (excluindo os artigos pioneiros do próprio Einstein), em 1906. Sua contribuição mais importante, que lhe valeu o Prêmio Nobel de Física em 1918, foi a introdução do conceito de quantização e da constante correspondente que leva o seu nome.

## O quantum de energia

A palavra *quantum* (cujo plural é *quanta*) significa uma quantidade mínima indivisível, a partir da qual pode-se construir quantidades maiores tomando múltiplos *inteiros* do quantum fundamental. O conceito de quantum de energia foi introduzido por **Max Planck** em 1900. Planck estava investigando como a energia da radiação eletromagnética é distribuída entre as diferentes frequências numa situação de equilíbrio térmico a uma dada temperatura. Na Aula 2 de Física 4A, você aprendeu que a teoria do eletromagnetismo de Maxwell prevê a existência de ondas eletromagnéticas. A frequência da onda é utilizada para classificá-la: de frequências mais

baixas para mais altas, temos ondas de rádio, microondas, infravermelho, luz visível etc. As ondas eletromagnéticas podem ser geradas por correntes alternadas e, mais geralmente, por cargas elétricas em movimento não-uniforme. Este efeito é chamado de *radiação*, e o conjunto de frequências das ondas eletromagnéticas é o *espectro da radiação eletromagnética*. Planck considerou o seguinte problema: no interior de uma caixa fechada em equilíbrio térmico, a radiação eletromagnética é constantemente gerada e absorvida pelas paredes da caixa. Como modelo, Planck considerou que as paredes eram formadas de osciladores harmônicos carregados, com frequência natural de oscilação  $\nu$ . Para obter um resultado para a distribuição de energia eletromagnética (entre as diferentes frequências do espectro de radiação) em acordo com os resultados experimentais, Planck supôs que a energia  $E$  do oscilador era quantizada, isto é, um múltiplo inteiro do quantum de energia  $h\nu$  :

$$E = n h \nu, \quad (8.1)$$

onde  $n$  é um número natural qualquer ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ). Assim, de acordo com a hipótese de Planck, a energia do oscilador não poderia ser uma fração do quantum fundamental de energia (por exemplo  $h\nu/4$ ). Por outro lado, na Mecânica Newtoniana a energia do oscilador pode ter *qualquer* valor, bastando preparar uma condição inicial adequada para obter o valor de energia desejado.

A constante  $h$  é chamada *constante de Planck* e vale

$$h = 6,626069 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{seg}. \quad (8.2)$$

Observe que, para obter uma dimensão física de energia pela multiplicação por uma frequência,  $h$  tem a dimensão de energia $\times$ tempo e, portanto, é medida em J $\cdot$ seg no Sistema Internacional de Unidades. Note, ainda, como o seu valor numérico, nesta unidade, é pequeno!

Pelo fato de a constante de Planck ser muito pequena, o quantum de energia  $h\nu$  é muito menor do que as energias típicas de um oscilador macroscópico, conforme você irá descobrir no exercício a seguir. Isto significa que, para sistemas macroscópicos, a “granulação” associada ao quantum de energia é tão fina que a torna indistinguível da variação contínua de energia prevista pela Mecânica Newtoniana.

## Exercício 8.1

Na extremidade de uma mola de constante elástica  $k = 4,0 \text{ N/m}$  se prende um corpo de massa  $m = 25 \text{ g}$ .

a) Determine os valores possíveis para a energia do oscilador de acordo com a hipótese de quantização de Planck.

b) Calcule a razão entre o valor do quantum de energia e a energia de um oscilador com a seguinte condição inicial: velocidade inicial  $v_0 = 0$ , posição inicial  $x_0 = 2 \text{ cm}$ .

c) Determine, a partir do resultado do item b, a precisão com que a posição inicial deveria ser medida para que fosse possível verificar a hipótese de quantização de energia.

**Sugestão:** para resolver este exercício, você irá precisar de alguns resultados básicos sobre a dinâmica do oscilador harmônico. Reveja a Aula 16 de Física 1A, caso necessário.

**Solução:**

a) A frequência natural de oscilação vale

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4,0 \text{ N/m}}{0,025 \text{ Kg}}} = 2,013 \text{ seg}^{-1}. \quad (8.3)$$

Pela Equação (8.1), as energias possíveis valem  $0, h\nu, 2h\nu, 3h\nu$  etc. Para o nosso exemplo numérico, temos  $0 \text{ J}; 1,3 \times 10^{-33} \text{ J}; 2,7 \times 10^{-33} \text{ J};$  etc.

b) A energia para esta condição inicial vale  $E = kx_0^2/2 = 8,0 \times 10^{-4} \text{ J}$ . A razão vale, portanto,  $h\nu/E = 1,7 \times 10^{-30}$ .

c) Para investigar se a energia varia continuamente, como previsto pela Mecânica Newtoniana, ou se, ao contrário, ela é quantizada, seria preciso variar a energia, de forma controlada, de uma quantidade  $\delta E$  menor ou da ordem do quantum de energia  $h\nu$ :  $\delta E \sim h\nu$ . Para isto, poderíamos variar a posição inicial (posição de onde o corpo é largado) de uma quantidade  $\delta x$ , com  $\delta E = k\delta x^2/2 \approx kx\delta x$ . Assim, a incerteza na medida da posição precisaria ser menor do que  $\delta x \approx h\nu/kx \approx 1,7 \times 10^{-32} \text{ m}$ , o que é impossível — essa escala de comprimento é muito menor que a escala atômica! Em outras palavras, qualquer variação controlada realista da posição  $x$  provoca uma variação de energia muitas ordens de grandeza maior do que  $h\nu$ . Experimente, por exemplo, comparar a variação de energia para  $\delta x = 1 \mu\text{m}$  (que já é um valor muito pequeno para este tipo de sistema) com o valor de  $h\nu$ . Assim, é impossível perceber a quantização, essencialmente porque o quantum de energia é muitas ordens de grandeza menor do que as energias típicas neste sistema.

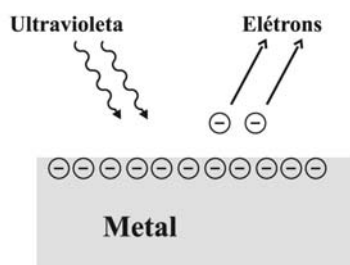
A quantização não é relevante para osciladores macroscópicos, como no exemplo considerado no exercício anterior. Para estes sistemas, podemos continuar usando a Mecânica Newtoniana.

Em contrapartida, para fenômenos na escala atômica ou molecular as regras de quantização se tornam fundamentais, e as previsões da Mecânica Quântica se tornam completamente diferentes dos resultados Newtonianos. A seguir, você irá estudar em detalhe um exemplo deste tipo: o efeito fotoelétrico.

## O efeito fotoelétrico

O efeito fotoelétrico foi descoberto por **H. Hertz**, de forma acidental, em 1887, ao realizar o seu famoso experimento de geração de ondas eletromagnéticas em laboratório. O objetivo deste experimento era verificar a teoria do eletromagnetismo de Maxwell, que, como você aprendeu na Aula 2, de Física 4A, prevê a existência de ondas eletromagnéticas propagando no vácuo com velocidade igual à da luz,  $c$ . O experimento de Hertz confirmou que a luz é uma onda eletromagnética, o que parecia ser a palavra final no longo debate sobre a natureza da luz iniciado no século XVII.

Como resultado colateral do seu experimento, Hertz percebeu que a incidência de luz ultravioleta sobre a superfície de um metal produzia descargas elétricas (centelhas). Conforme descoberto por **J. J. Thomson** anos mais tarde, essas descargas eram constituídas de elétrons arrancados da superfície graças à energia fornecida pela luz, como ilustrado na **Figura 8.1**, que mostra o esquema básico do efeito fotoelétrico. Os elétrons que escapam da superfície são chamados *fotoelétrons*, e a corrente elétrica associada, *fotocorrente*.



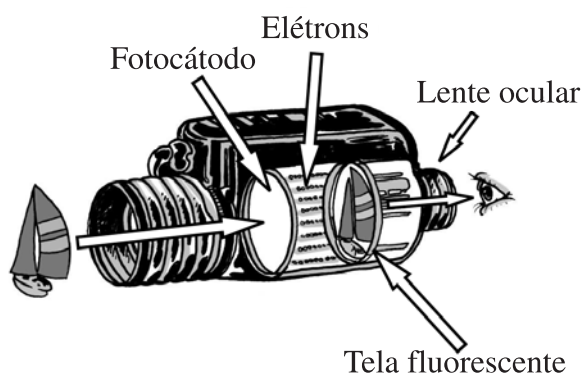
**Figura 8.1:** Efeito fotoelétrico: a energia fornecida pela luz ultravioleta arranca os elétrons da superfície do metal.

**Heinrich Hertz** nasceu em Hamburg, Alemanha, em 1857. Para verificar a teoria do eletromagnetismo de Maxwell, produziu ondas eletromagnéticas em laboratório, mostrando que suas propriedades eram corretamente descritas pela teoria de Maxwell. Esse resultado teve grande importância para comprovar a natureza eletromagnética da luz, conforme previsto por Maxwell.

**Joseph J. Thomson** nasceu em Manchester, Inglaterra, em 1856. Seus experimentos com raios catódicos, que serão discutidos na Aula 10, levaram-no à descoberta do elétron em 1897. Thomson mostrou que os elétrons eram partículas presentes nos átomos, mas de massa muito menor do que a massa atômica. Recebeu o Prêmio Nobel de Física em 1906.

Atualmente, o efeito fotoelétrico é entendido, de uma forma mais genérica, como sendo qualquer fenômeno que envolva a liberação de partículas carregadas (que podem ser íons em vez de elétrons) de um meio material qualquer que absorva radiação eletromagnética (luz visível, ultravioleta, raios X etc.).

Existem muitas aplicações tecnológicas do efeito fotoelétrico. Por exemplo, dispositivos de visão noturna (visores noturnos) são baseados nesse efeito. No visor noturno, a radiação infravermelha e a luz no espectro visível ambiente (de estrelas ou da Lua) são convertidas em elétrons no *fotocátodo*, por meio do efeito fotoelétrico, como mostra a **Figura 8.2**. A corrente fotoelétrica resultante é amplificada por meio de diferentes processos e, finalmente, incide sobre uma tela fluorescente. Esta faz a conversão de volta de elétrons em luz. Com isso é produzida luz mais intensa do que a luz incidente original, e mais concentrada na região do espectro visível. A luz gerada dessa forma é observada diretamente através da lente ocular do dispositivo.



**Figura 8.2:** Esquema de funcionamento de um visor noturno.

## Propriedades do efeito fotoelétrico

Após a sua descoberta por Hertz, o efeito fotoelétrico foi objeto de pesquisa experimental por diferentes laboratórios. No início do século XX, algumas de suas propriedades fundamentais já eram, em parte, conhecidas:

- A energia de cada fotoelétron não depende da intensidade da luz usada no efeito; apenas o *número* de fotoelétrons (e, portanto, a fotocorrente) depende da intensidade. De certa forma, essa propriedade é surpreendente, porque a energia fornecida ao elétron para que ele escape da superfície provém da luz incidente.

- A energia de cada fotoelétron é uma função crescente da *freqüência* da luz empregada no efeito.
- O efeito não ocorre se a freqüência da luz é menor do que um certo valor, chamado *freqüência de limiar*, que depende do meio metálico usado.

Você verá, a seguir, que a teoria proposta por Einstein em 1905 explica todas essas propriedades e estabelece uma relação quantitativa entre a energia do elétron e a freqüência da luz.

## Einstein e os quanta de luz

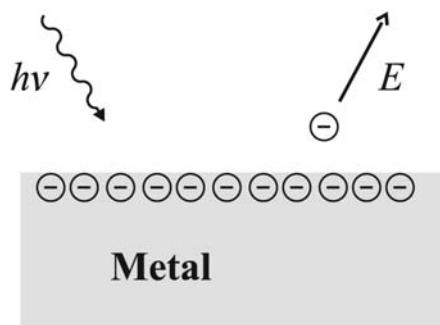
A explicação do efeito fotoelétrico, e das suas principais propriedades, foi apresentada por Einstein no artigo “Sobre um ponto de vista heurístico relativo à geração e conversão de luz”, publicado na revista alemã *Annalen der Physik*, em 1905. A sua motivação inicial era reexaminar o problema da distribuição de energia da radiação em equilíbrio térmico. Conforme discutimos no início da aula, Planck havia obtido, em 1900, o resultado correto para essa distribuição, conhecido como *espectro de Planck*, a partir da hipótese de quantização da energia do oscilador harmônico.

Em vez de quantizar a energia do oscilador, Einstein propôs que os processos de geração e absorção de luz de freqüência  $\nu$  ocorressem *como se* a luz fosse constituída de quanta de energia  $h\nu$ , com  $h$  representando a constante de Planck. De maneira geral, este princípio valeria para toda radiação eletromagnética de freqüência suficientemente alta.

Vamos aplicar esse princípio para entender as propriedades do efeito fotoelétrico. Neste efeito, um determinado quantum de luz de energia  $h\nu$  é inteiramente transferido para um elétron do metal.

Para que o elétron escape da superfície do metal, é preciso gastar uma quantidade de energia  $W$ , que é a *função trabalho* do meio metálico.  $W$  representa a energia potencial associada aos íons positivos na vizinhança da superfície, cujo valor depende do meio metálico considerado.

Se a energia  $h\nu$  transferida ao elétron for maior do que  $W$ , ele poderá escapar da superfície, como mostra a **Figura 8.3**.



**Figura 8.3:** Efeito fotoelétrico: o quantum de luz de energia  $h\nu$  é transferido para um elétron do metal, que consegue, então, escapar da superfície com energia cinética  $E$ .

Nesse caso, a sua energia cinética máxima será

$$E_{\max} = h\nu - W. \quad (8.4)$$

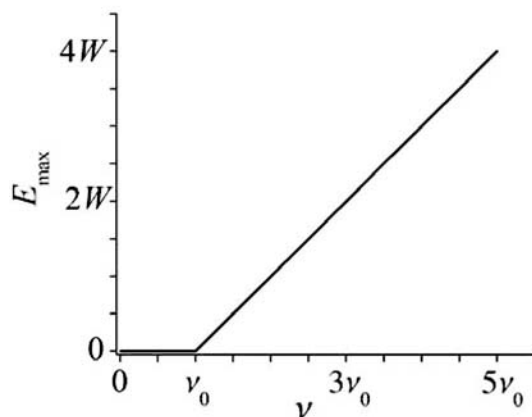
Observe que, em geral, a energia  $E$  do fotoelétron será menor do que  $E_{\max}$ , devido a perdas adicionais de energia no interior do meio metálico.

Pela teoria de Einstein, a energia dos fotoelétrons depende da frequência  $\nu$  da luz (ou de outro tipo de radiação eletromagnética) mas não da sua intensidade, em acordo com os resultados experimentais. A Equação (8.4) explica por que a energia cresce com a frequência e determina que a lei de crescimento é *linear* (isto é, a energia máxima cresce linearmente com a frequência).

Finalmente, a teoria de Einstein também explica a existência do limiar de frequência, abaixo do qual não há geração de fotocorrente. De fato, se a energia fornecida ao elétron  $h\nu$  for menor do que a função trabalho, o elétron não pode escapar da superfície. Portanto, a frequência de limiar  $\nu_0$  é determinada pela condição limite  $h\nu_0 = W$ , fornecendo

$$\nu_0 = \frac{W}{h}. \quad (8.5)$$

Na **Figura 8.4**, apresentamos o gráfico da energia máxima  $E_{\max}$  em função da frequência da luz incidente, obtido a partir da Equação (8.4). O valor nulo de  $E_{\max}$  para  $\nu < \nu_0$  significa que não há efeito fotoelétrico para esta faixa de frequências.



**Figura 8.4:** Energia máxima do fotoelétron  $E_{\max}$  em função da frequência da luz  $\nu$ .

Para  $\nu > \nu_0$ , a variação de  $E_{\max}$  em função de  $\nu$  é representada graficamente por uma reta, cujo coeficiente angular, que quantifica a sua inclinação em relação ao eixo horizontal, é igual à constante de Planck  $h$ . Portanto, o valor do coeficiente angular é uma propriedade *universal* do efeito fotoelétrico. Os vários meios metálicos são caracterizados por diferentes valores da função trabalho  $W$  e da frequência de limiar  $\nu_0$ ; entretanto, o coeficiente angular tem o *mesmo valor* para todos eles.

A confirmação experimental da relação linear entre  $E_{\max}$  e  $\nu$  e da universalidade do coeficiente angular só veio muitos anos após o trabalho teórico de Einstein. Entre 1914 e 1916, **R. Millikan** publicou uma série de trabalhos experimentais sobre a variação de  $E_{\max}$  com a frequência para vários meios metálicos diferentes. Esses resultados confirmaram a validade da Equação (8.4), fornecendo o seguinte valor experimental para a constante de Planck  $h$  (compare com o valor atual dado pela Equação (8.2)):  $6,57 \times 10^{-34}$  J-seg.

#### **Robert A. Millikan**

nasceu em Morrison, Estados Unidos, em 1868. Físico experimental, realizou experimentos com gotas de óleo para medir a carga do elétron. Millikan mostrou que a carga elétrica total das gotas era sempre um múltiplo inteiro da carga do elétron (quantização de carga). Recebeu o Prêmio Nobel de Física em 1923, por seus experimentos sobre a carga do elétron e o efeito fotoelétrico.

## Exercício 8.2

Vamos comparar, neste exercício, as propriedades de dois metais, ouro e sódio, no que se refere ao efeito fotoelétrico. A função trabalho do ouro vale  $W = 5.1 \text{ eV}$  e a do sódio  $W = 2.7 \text{ eV}$ .

a) Quanto vale a frequência de limiar em cada caso? Qual é o maior comprimento de onda  $\lambda_0$  que pode ser utilizado para a geração do efeito fotoelétrico em cada caso? É possível obter o efeito com luz visível no caso do ouro? E no caso do sódio? Justifique.

b) Quanto vale a energia máxima do fotoelétron para a frequência  $\nu = 2\nu_0$  em cada caso?

**Solução:**

a) A frequência de limiar é dada pela Equação (8.5), com a constante de Planck  $h$  dada pela Equação (8.2). Usando que  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ , obtemos  $\nu_0 = 1,2 \times 10^{15} \text{ seg}^{-1}$  para o ouro e  $\nu_0 = 6,5 \times 10^{14} \text{ seg}^{-1}$  para o sódio. Como o comprimento de onda está relacionado à frequência pela relação  $\lambda = c/\nu$ , o maior valor de  $\lambda$  corresponde ao menor valor de  $\nu$  que gera fotoelétrons. Temos, então,  $\lambda_0 = 0,24 \mu\text{m}$  para o ouro, que corresponde à região do ultravioleta, e  $\lambda_0 = 0,46 \mu\text{m}$  para o sódio, que corresponde à cor azul. Uma vez que os comprimentos de onda no visível são maiores do que  $0,24 \mu\text{m}$ , não há efeito fotoelétrico no visível com o ouro (é preciso usar ultravioleta ou comprimentos de onda ainda menores). Para o sódio, pode-se usar azul e violeta, mas não vermelho, por exemplo.

b) Pelas Equações (8.4) e (8.5), temos

$$E_{\text{max}} = 2h\nu_0 - W = W$$

em ambos os casos e, portanto, a energia máxima vale  $5.1 \text{ eV}$  para o ouro e  $2.7 \text{ eV}$  para o sódio.

Em reconhecimento à sua contribuição para a compreensão do efeito fotoelétrico, condensada pela Equação (8.4), Einstein recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1921 (concedido em 1922) por (nas palavras da citação oficial) “seus serviços à física teórica e especialmente pela sua descoberta da lei do efeito fotoelétrico.”

O conceito de quanta de luz introduzido por Einstein repercutiu no desenvolvimento da Física muito além da sua aplicação ao efeito fotoelétrico. Conforme você verá a seguir, ele foi gradualmente evoluindo para o conceito de *fótons*, ou partículas de luz.

## Dos quanta de luz aos fótons

Qual é a verdadeira natureza da luz? Desde o século XVII, este foi um tema intensamente debatido. Seria a luz constituída de partículas? Na disciplina de Física 4A, você estudou as contribuições fundamentais de Huygens, Young e Fresnel, dentre outros, ao estudo dos efeitos de interferência e difração da luz. Por serem tipicamente ondulatórios (eles ocorrem para ondas sonoras, ondas na superfície de um lago etc.), estes fenômenos pareciam indicar, de forma clara, que a luz seria uma onda. A formulação da teoria do eletromagnetismo de Maxwell, na segunda metade do século XIX, forneceu uma base formal mais sólida a favor da tese de que a luz seria uma onda. Finalmente, o experimento de Hertz, mencionado no início da aula, parecia ser a palavra final no debate sobre a natureza da luz.

Assim, no início do século XX, a possibilidade de a luz ser formada de partículas (ou *corpúsculos*) parecia definitivamente descartada, sobretudo em função do sucesso do eletromagnetismo de Maxwell. É nesse contexto que o quantum de luz e o princípio sobre a sua geração e conversão são propostos por Einstein.

Essas hipóteses pareciam estar em desacordo com a teoria eletromagnética e resgatavam, de certa forma, o conceito de partículas de luz. Não surpreende, portanto, que tenham sido recebidas de forma bastante desfavorável pela comunidade científica da época, mesmo após a verificação experimental da teoria do efeito fotoelétrico. Um exemplo desta reação desfavorável é fornecido pelo seguinte comentário de Millikan, escrito em 1949, sobre seus resultados experimentais para o efeito fotoelétrico: “Gastei dez anos de minha vida testando aquela equação obtida por Einstein em 1905 [Equação (8.4)] e, contrariando todas as minhas expectativas, fui compelido em 1915 a afirmar de forma categórica a sua verificação apesar de sua falta de sentido, já que ela parecia violar tudo o que sabíamos sobre a interferência de luz.”

O próprio Einstein havia sido bastante cauteloso em 1905, apresentando o seu princípio como sendo “heurístico” (isto é, sem justificativa ou injustificável) e evitando interpretar os seus quanta de luz como partículas. Entretanto, já em 1909, Einstein propunha que a teoria definitiva da luz deveria surgir de uma *fusão* dos conceitos ondulatório e corpuscular.

Duas décadas mais tarde, essa visão seria materializada pela Mecânica Quântica. Não só a luz tem caráter dual, exibindo comportamento corpuscular ou ondulatório dependendo da situação experimental, como também as partículas materiais, tais como elétrons, prótons e átomos, podem exibir

comportamento ondulatório! A dualidade onda-partícula é um dos princípios fundamentais da Mecânica Quântica. Atualmente, são bastante comuns experimentos de *interferência* com átomos e moléculas. Especula-se que, num futuro próximo, os relógios atômicos responsáveis pelo padrão de tempo serão baseados em interferometria atômica.

O quantum de luz de Einstein foi gradualmente assumindo o seu caráter de corpúsculo, dando origem ao conceito de *fóton* (este nome foi introduzido pelo físico-químico americano G. Lewis em 1926). Os experimentos de colisão (espalhamento Compton) entre elétrons e fótons de alta frequência, na faixa de raios X, realizados em 1923, foram particularmente importantes para demonstrar o caráter corpuscular dos fótons. Como qualquer partícula, o fóton, além de possuir energia  $E = h\nu$ , onde  $\nu$  é a sua frequência, possui também momento linear  $\vec{p}$ . No espalhamento Compton, o momento total é conservado, desde que se considere corretamente o momento dos fótons.

Na Aula 7, você aprendeu que a relação entre a energia  $E$  e o módulo do momento  $p$  para uma partícula de massa de repouso  $m_0$  é

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2}. \quad (8.6)$$

Você viu, também na Aula 7, que a condição de que o fóton tenha a velocidade da luz  $c$  implica que a sua massa de repouso seja nula. Assim, a energia e o momento do fóton se relacionam pela Equação (8.6) com  $m_0 = 0$ :

$$E = pc. \quad (8.7)$$

Esta é exatamente a relação entre energia e momento de uma onda eletromagnética, prevista pela teoria de Maxwell, que você estudou na Aula 3, de Física 4A.

Combinando a relação de Einstein  $E = h\nu$  com a Equação (8.7), obtemos uma expressão para o módulo do momento do fóton em termos da sua frequência:  $p = h\nu/c$ . Em termos do comprimento de onda do fóton,  $\lambda = c/\nu$ , obtemos

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (8.8)$$

O *vetor* momento linear  $\vec{p}$  do fóton tem sua direção determinada pela direção de propagação da onda eletromagnética associada que, por sua vez, coincide com a direção do vetor número de onda  $\vec{k}$ . Visto que  $k = 2\pi/\lambda$ , podemos escrever a Equação (8.8) na forma:

$$\vec{p} = \frac{h}{2\pi} \vec{k} = \hbar \vec{k}, \quad (8.9)$$

onde  $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054572 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{seg}$  é a constante de Planck reduzida (mais conhecida como “h-cortado”).

### Exercício 8.3

Um feixe de luz de comprimento de onda  $\lambda = 0,63 \mu\text{m}$  (vermelho) e potência 2 mW é completamente absorvido por um corpo de face plana perpendicular à sua direção de propagação.

- Determine o fluxo de fótons  $\Delta N/\Delta t$  associados ao feixe (número de fótons que atravessam uma área perpendicular ao feixe por unidade de tempo).
- Determine o momento linear de cada fóton do feixe.
- Calcule, por meio dos resultados dos itens anteriores, a força exercida pelo feixe sobre o corpo.

#### Solução:

- A potência do feixe é igual ao fluxo de fótons multiplicado pela energia de cada fóton:

$$P = \frac{\Delta N}{\Delta t} h\nu = \frac{\Delta N}{\Delta t} \frac{hc}{\lambda}.$$

Dessa equação, obtemos  $\Delta N/\Delta t = P\lambda/(hc) = 6,3 \times 10^{15}$  fótons/seg.

- O módulo momento de cada fóton vale  $p = h/\lambda = 1,05 \times 10^{-27} \text{ Kg} \cdot \text{m/seg}$ . O vetor  $\vec{p}$  aponta para a direção e sentido de propagação do feixe.

- Ao ser absorvido, o fóton transfere integralmente o seu momento  $\vec{p}$  para o corpo. Durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ ,  $\Delta N$  fótons são absorvidos e, portanto, o momento total transferido vale  $\Delta N \vec{p}$ . A força exercida sobre o corpo é igual à taxa de transferência de momento (momento transferido por intervalo de tempo):

$$\vec{F} = \frac{\Delta N \vec{p}}{\Delta t}.$$

Usando o resultado para o fluxo de fótons  $\Delta N/\Delta t$  calculado no item anterior, obtemos  $F = 6,7 \times 10^{-12} \text{ N}$ .  $\vec{F}$  é paralelo à direção de propagação do feixe.

Este valor poderia ser calculado, mais diretamente, a partir do resultado, obtido na Aula 3 de Física 4A, para a pressão de radiação. Basta multiplicar a pressão pela área para obter  $F = P/c = 6,7 \times 10^{-12} \text{ N} = 6,7 \text{ pN}$ . Isto mostra que não é preciso usar o conceito de fóton para calcular a força exercida pelo feixe. Este efeito pode ser calculado usando apenas o eletromagnetismo de Maxwell.

De acordo com a Mecânica Quântica, o número de partículas não é conservado, sejam elas fótons, elétrons etc. Entretanto, para criar uma partícula

material de massa de repouso  $m_0$ , é preciso dispor de uma quantidade de energia maior ou igual à sua energia de repouso  $m_0c^2$ , ao passo que para os fótons temos  $m_0 = 0$ . Assim, a energia necessária para criar um fóton é, em geral, muitas ordens de grandeza menor do que a energia necessária para criar uma partícula material, tal como o elétron. Para este caso, a energia mínima necessária vale  $m_0c^2 = 0,511 \text{ MeV}$  (veja o Exercício 7.8 da Aula 7 e lembre que 1 MeV significa 1 milhão de elétronsvolt).

#### Exercício 8.4

Determine a energia necessária para criar um fóton com comprimento de onda  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ , que corresponde à cor azul-claro, na unidade eV. Compare com a energia mínima necessária para criar um elétron.

Resposta: a energia necessária vale  $h\nu = hc/\lambda = 2,5 \text{ eV}$ , portanto cerca de duzentas mil vezes menor do que a energia necessária para criar o elétron.

Em muitas situações físicas, podemos supor que o número de elétrons (e de outras partículas materiais) é conservado, conforme se esperaria para partículas no seu sentido “clássico”, porque a energia mínima necessária para criá-los é muito elevada. Todavia, para fótons na região do visível, como no exercício anterior, esta hipótese de conservação não é, em geral, válida. Processos de criação e destruição de fótons no visível ocorrem de forma freqüente ao nosso redor. O próprio mecanismo de visão é baseado na absorção de fótons na retina! De fato, reações químicas envolvem, tipicamente, energias da ordem de eV (para cada par de moléculas envolvidas na reação), que correspondem, como você descobriu no exercício anterior, à ordem de grandeza de energia dos fótons na região do visível. De forma mais geral, esta é a escala típica de energia em processos de modificação das energias dos elétrons de valência dos átomos. Como você verá na próxima aula, estes processos são, tipicamente, acompanhados da criação ou destruição de fótons na região em torno da faixa do espectro do visível.

Para radiação eletromagnética de comprimento de onda na faixa de metros (ondas de rádio), o quantum de energia é ainda muito menor, conforme você mostrará no exercício a seguir. Por envolver energias tão pequenas, é impossível detectar fótons individuais nesse caso. Assim, para comprimentos de onda muito grandes (ou, de forma equivalente, freqüências muito baixas),

é muito difícil perceber a quantização de energia da radiação, assim como na situação do Exercício 8.1, em que você mostrou que a quantização de energia de um oscilador harmônico macroscópico é, na prática, irrelevante. Nesta faixa de comprimentos de onda, não encontramos efeitos corpusculares, e o caráter ondulatório, pautado pelos efeitos de difração e interferência, é completamente dominante.

#### Exercício 8.5

Determine o valor do quantum de radiação, na unidade eV, para  $\lambda = 1 \text{ m}$ .

Resposta: a energia vale  $h\nu = hc/\lambda = 1,2 \times 10^{-6} \text{ eV}$  e é dois milhões de vezes menor do que a energia do fóton azul (compare com o Exercício 8.4).

No limite oposto do espectro eletromagnético, a *radiação gama* corresponde à quanta de energia acima de milhões de elétrons-volt. Assim, fótons gama possuem energia superior à energia de repouso do elétron. Fótons gama são emitidos em processos de modificação da estrutura do núcleo atômico (reações nucleares), que envolvem escalas de energia dessa ordem de grandeza, permitindo também a criação de elétrons (que nesse contexto são chamados *partículas beta*). No exercício a seguir, você irá calcular o comprimento de onda de um fóton gama de energia 2,8 MeV.

#### Exercício 8.6

No decaimento radioativo de um núcleo atômico, um fóton gama de energia 2,8 MeV é criado. Calcule o seu comprimento de onda.

Resposta: o comprimento de onda do fóton vale  $\lambda = 4,4 \times 10^{-13} \text{ m}$ .

Devido a esses valores tão pequenos de comprimentos de onda (muito menores do que o tamanho de um átomo), é impossível observar efeitos ondulatórios (tais como difração e interferência) com fótons gama. Portanto, fótons gama se comportam como partículas.

## Conclusão

É curioso que o efeito fotoelétrico tenha sido observado, pela primeira vez, justamente no experimento em que Hertz produziu ondas eletromagnéticas. Os resultados obtidos por Hertz pareciam ser a prova definitiva da natureza ondulatória da luz, afastando de vez a interpretação corpuscular.

Entretanto, o efeito fotoelétrico e o sucesso obtido pela teoria proposta por Einstein, com base no conceito de quanta de luz, acabaram contribuindo para gerar uma fusão dos conceitos ondulatório e corpuscular. Esta fusão é implementada pelo princípio de dualidade onda-partícula da Mecânica Quântica, que vale tanto para fótons como para partículas materiais.

O princípio de geração e conversão de quanta de luz e sua aplicação à teoria do efeito fotoelétrico foi um dos trabalhos precursores mais importantes para o surgimento da Física Quântica.

## Atividades Finais

1. Explique o esquema de quantização proposto por Planck.
2. Descreva a fenomenologia do efeito fotoelétrico, relatando em detalhe as suas principais propriedades. A energia de cada fotoelétron depende da intensidade da luz? E da sua frequência?
3. Escreva e explique o significado da equação que resume a teoria de Einstein para o efeito fotoelétrico. Obtenha, a partir desta equação, as propriedades descritas no item anterior.
4. Explique como seria possível medir a constante de Planck a partir do efeito fotoelétrico.
5. Observando o espectro da radiação eletromagnética, identifique a região em que o comportamento ondulatório é dominante, e a região em que o comportamento corpuscular é dominante.

## Resumo

Para obter a distribuição de energia da radiação eletromagnética em equilíbrio térmico, Planck supôs, em 1900, que a energia dos osciladores harmônicos interagindo com a radiação seria quantizada de acordo com a condição  $E = nh\nu$ , onde  $n$  é um número inteiro não negativo qualquer,  $\nu$

a frequência natural de oscilação e  $h$  uma constante universal (constante de Planck).

Em 1905, Einstein propôs que processos de geração e conversão de luz ocorreriam como se ela fosse composta de quanta de energia  $h\nu$ , com  $\nu$  representando a sua frequência.

Com aplicação dessa hipótese, Einstein obteve uma teoria para o efeito fotoelétrico, que foi mais tarde confirmada experimentalmente.

O quantum de luz deu origem ao conceito de fóton, no contexto do princípio de dualidade onda-partícula da Mecânica Quântica.

## E na próxima aula...

...você irá aprender como o conhecimento sobre a estrutura atômica foi se desenvolvendo em sintonia com a formulação da Física Quântica.

## Leituras Recomendadas

- Sobre o Ano Internacional da Física, veja a página da Sociedade Brasileira de Física na internet: <http://www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/amf/>
- Para uma discussão mais aprofundada e completa do papel de Einstein no desenvolvimento da Mecânica Quântica, recomendamos a biografia científica de Einstein: *Sutil é o Senhor...*, de A. Pais, ed. Nova Fronteira, 1995.



## Aula 9 – O modelo atômico de Bohr

### Meta da aula

Apresentar a hipótese de quantização no contexto da Física Atômica.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- descrever o experimento de Rutherford que levou à descoberta do núcleo atômico;
- explicar o princípio da análise espectral;
- apresentar o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio;
- escrever a regra de quantização dos níveis de energia do átomo de hidrogênio;
- calcular o comprimento de onda de De Broglie de uma partícula a partir do valor do seu momento linear.

### Pré-requisitos

Para compreender esta aula, será útil rever os conceitos de:

- Comprimento de onda e espectro eletromagnético, Aulas 2 e 3 de Física 4A.
- Modos normais de oscilação numa corda vibrante, Aula 12 de Física 2B.
- Quantum de luz, Aula 8 de Física 4B.

### Introdução

Na aula anterior, discutimos o efeito fotoelétrico e a sua teoria formulada por Einstein, com base no conceito de quantum de luz. Este é um dos vários exemplos de avanços experimentais obtidos no final do século XIX e

início do XX que pavimentaram o caminho para o surgimento da Mecânica Quântica.

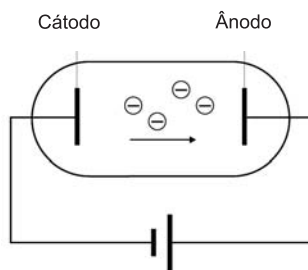
Nesta aula, vamos analisar uma série de resultados experimentais que foram, gradualmente, revelando a estrutura atômica. No final do século XIX, a própria existência dos átomos era questionada, e nada se sabia sobre a sua estrutura.

A descoberta do elétron, em 1897, foi o primeiro passo para desvendar o mistério da estrutura atômica. Após discutir esta descoberta, vamos apresentar o experimento que levou à descoberta do núcleo atômico, em 1911.

Voltando no tempo, vamos apresentar o princípio da análise espectral, descoberto em 1860. Os avanços experimentais no campo da Espectroscopia foram decisivos para que **Niels Bohr** formulasse o modelo quântico do átomo de hidrogênio, em 1913. Vamos encerrar a aula apresentando brevemente o conceito de ondas de matéria de **Louis De Broglie** (1924), que demarca a fronteira entre a ‘velha’ Física Quântica, de natureza heurística e que inclui as contribuições de Planck, Einstein e Bohr, e a moderna Mecânica Quântica, cujo formalismo básico, desenvolvido entre os anos de 1925 e 1928, representa a teoria fundamental da Natureza.

## A descoberta do elétron

Em meados do século XIX, o físico alemão Julius Plucker desenvolveu, em colaboração com seu assistente Heinrich Geissler, o tubo de raios catódicos (CRT na sigla em inglês), mostrado na Figura 9.1. Um tubo de vidro selado contém, em seu interior, duas placas metálicas (eletrodos), que são ligadas a uma fonte de tensão elétrica. O eletrodo de potencial positivo é chamado *ânodo*, e o de potencial negativo, *cátodo*. A pressão no interior do tubo é reduzida por meio de uma bomba de vácuo.



**Figura 9.1:** Tubo de raios catódicos.

**Louis-Victor De Broglie** nasceu em Dieppe, França, em 1892. De família nobre, formou-se em História em 1910, no entanto, mais tarde se converteu à Física Teórica. Recebeu o Prêmio Nobel de Física de 1929, “por sua descoberta da natureza ondulatória dos elétrons.”

Físico dinamarquês, **Niels H. D. Bohr** nasceu em Copenhaga no ano de 1885. Além do modelo para o átomo de hidrogênio discutido nesta aula, que lhe valeu o Prêmio Nobel de Física de 1922, Bohr contribuiu de forma significativa para a interpretação da Mecânica Quântica e na área de Física Nuclear. Fundador e diretor do Instituto de Física Teórica de Copenhaga, teve grande influência sobre a geração de físicos teóricos que formularam a Mecânica Quântica.

Ao aplicar uma tensão suficientemente elevada, uma corrente elétrica é gerada entre o cátodo e o ânodo através do gás rarefeito no interior do tubo (raios catódicos). Em geral, os raios catódicos são observados diretamente ao colidirem com as paredes de vidro do tubo, produzindo luminescência (ou seja, emissão de luz visível). Na época, muitos cientistas acreditavam que os raios catódicos seriam algum tipo de onda, pelo fato de eles propagarem em linha reta (sem sofrer efeito gravitacional). Observando a deflexão (isto é, o desvio) dos raios catódicos sob o efeito de um campo magnético, o físico inglês William Crookes mostrou que os raios eram, na verdade, constituídos de partículas de carga negativa.

Alguns anos mais tarde, em 1897, J. J. Thomson observou a deflexão produzida pela aplicação de um campo elétrico, confirmando a conclusão de Crookes sobre a natureza dos raios catódicos. Medindo as deflexão provocadas por campos elétrico e magnético, Thomson mediu a razão entre a carga  $q$  e a massa  $m$  das partículas constituintes dos raios catódicos. Thomson mostrou que  $q/m$  não dependia do tipo de metal do eletrodo, e nem do gás no interior do tubo. Comparando com os valores na época conhecidos para íons (átomos carregados eletricamente pela retirada ou captura de elétrons), Thomson concluiu que as partículas tinham massa muito menor do que o átomo mais leve, o hidrogênio (H).

Dois anos mais tarde, Thomson aplicou método semelhante para as partículas produzidas no efeito fotoelétrico (veja a Aula 8), mostrando que elas também possuíam a mesma razão  $q/m$ . Além disso, ele conseguiu, dessa vez, medir separadamente a carga  $q$  das partículas, obtendo um valor igual em módulo (mas de sinal oposto) ao da carga do íon  $H^+$ .

De posse desses resultados experimentais, Thomson concluiu que os raios catódicos, assim como as descargas no efeito fotoelétrico, eram constituídos de partículas presentes em todos os tipos de substâncias, de massa cerca de 2.000 vezes menor do que o átomo de hidrogênio.

Em linguagem moderna, estas partículas são chamadas elétrons. Os elétrons são partículas *subatômicas* presentes na estrutura de todos os átomos, independentemente do elemento químico considerado.

Anos mais tarde, em 1910, esses resultados foram confirmados por Millikan, que obteve um valor mais preciso para a carga do elétron. O experimento de Millikan demonstrou, também, que a carga elétrica é quantizada: toda carga na Natureza é um múltiplo inteiro da carga fundamental do elétron,

cujo módulo vale, na unidade de carga do Sistema Internacional (Coulomb),

$$e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}.$$

A carga do elétron é negativa e vale  $-e$ .

A descoberta do elétron marcou o início de uma revolução no conhecimento sobre a estrutura da matéria, que evoluiu em sintonia com o desenvolvimento da Física Quântica. Pela primeira vez era identificada uma partícula subatômica, primeiro passo para revelar a estrutura dos átomos. Atualmente, sabe-se que o elétron é, de fato, uma partícula *elementar*, no sentido de não ter estrutura interna: o elétron *não* é formado de partículas ainda menores e não faz sentido pensar em “partes” ou “pedaços” do elétron. Ao longo de várias décadas posteriores à descoberta pioneira de Thomson, várias outras partículas elementares seriam descobertas, revelando a estrutura subatômica fundamental do nosso Universo.

Além de sua importância na ciência básica, o estudo dos raios catódicos teve um impacto tecnológico enorme, sendo, ainda hoje, fundamental na nossa vida diária. De fato, a maioria dos aparelhos de vídeo, tais como televisores, monitores de computador, osciloscópios etc, ainda é baseada no tubo de raios catódicos (CRT). Um século e meio após a descoberta de Plucker e Geissler, somente agora a tecnologia CRT está sendo substituída pelos monitores e televisores de plasma ou cristal líquido.

## A descoberta do núcleo atômico

Tendo em mãos os resultados experimentais sobre as propriedades dos elétrons, Thomson logo se lançou na busca por modelos para a estrutura dos átomos. Uma propriedade essencial do átomo é a sua *neutralidade*: o átomo tem carga elétrica nula. Para obter um modelo de átomo neutro, Thomson imaginou que a carga negativa dos elétrons seria compensada por uma carga positiva distribuída de forma difusa e uniforme sobre todo o volume do átomo.

Sem associar matéria (e massa) à carga positiva, Thomson teve de supor, inicialmente, que um átomo teria milhares de elétrons, de forma a ter uma massa total muito maior do que a massa de cada elétron, em acordo com os resultados experimentais. Por exemplo, o átomo de hidrogênio teria cerca de 2.000 elétrons! Na verdade, o átomo de hidrogênio possui apenas *um* elétron.

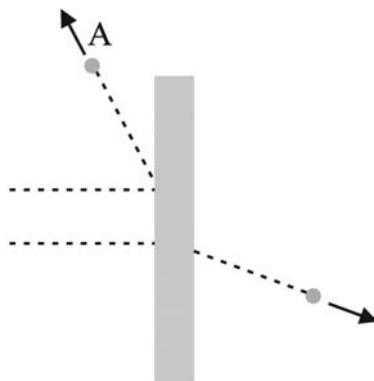
Já em 1906, o próprio Thomson havia descartado esse modelo, mais uma vez em função de novos resultados experimentais, para concluir que o número de elétrons num átomo era muito menor do que suposto inicialmente. Mas como explicar, então, que a massa do átomo é milhares de vezes maior do que a do elétron?

A resposta veio com a descoberta do núcleo atômico por **Ernest Rutherford** em 1911. Na verdade, a contribuição dos elétrons à massa atômica é desprezível, porque a massa do núcleo é muito maior.

Quando fez esta descoberta tão fundamental, o talento de Rutherford como físico experimental já era amplamente reconhecido. Devido às suas contribuições na área de radioatividade, ele tinha recebido, já em 1908, um Prêmio Nobel. Entre vários outros resultados importantes, Rutherford havia descoberto, em 1899, que substâncias radioativas emitiam dois tipos de “raios” com propriedades físicas bem distintas, que ele chamou raios alfa e beta. Os raios beta são elétrons, ou partículas beta, criados em processos nucleares, conforme mencionamos na Aula 8. Na presente aula, são os raios alfa que terão papel especial. Em 1903, Rutherford havia descoberto que eles eram formados por partículas de carga *positiva*, e de massa muito maior do que o elétron.

Graças ao domínio das técnicas experimentais associadas à geração de partículas alfa, Rutherford passou a usá-las, em seu laboratório, como ferramenta para investigar a estrutura da matéria. Sob a orientação de Rutherford, seu assistente **Hans Geiger** realizou em 1908 um experimento de *espalhamento* de partículas alfa por uma fina lâmina metálica.

O princípio básico deste tipo de experimento é ilustrado pela **Figura 9.2**. Um feixe de partículas alfa é lançado sobre uma lâmina metálica.



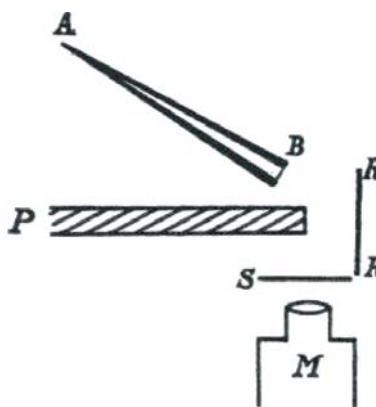
**Figura 9.2:** Espalhamento de partículas alfa por uma lâmina metálica.

Filho de imigrantes ingleses, **Ernest Rutherford** nasceu numa fazenda na província de Nelson, Nova Zelândia, em 1871. Em 1895, mudou-se para a Inglaterra, para trabalhar no laboratório de J. J. Thomson. Físico experimental renomado, recebeu o Prêmio Nobel de Química em 1908, por “suas investigações de elementos radioativos e a química de substâncias radioativas.”

**Hans Geiger** nasceu em Neustadt an der Haardt, Alemanha, em 1882. É muito conhecido pela invenção do detector (contador de Geiger ou de Geiger-Müller) de atividade radioativa. O contador de Geiger mede a quantidade de partículas alfa, beta e fótons gama (veja a Aula 9) emitidos por uma substância radioativa.

Ao interagir com o metal, a partícula é defletida (ou ‘espalhada’). Rutherford estava especialmente interessado na possibilidade de observar grandes ângulos de deflexão. Para ângulos maiores do que  $90^\circ$  (caso da partícula A na **Figura 9.2**), dizemos que a partícula é refletida pela lâmina metálica.

Para investigar esta possibilidade, Geiger montou, em colaboração com o estudante de graduação Ernest Marsden, o experimento indicado na **Figura 9.3**, que é reproduzida do artigo “Sobre a reflexão difusiva de partículas alfa” publicado na revista inglesa *Proceedings of the Royal Society*, em 1909. As partículas alfa, geradas no tubo  $AB$ , saem pela extremidade  $B$  e incidem sobre a lâmina metálica  $RR$ , situada a cerca de 1 cm de  $B$ . O anteparo de chumbo  $P$  bloqueia a passagem das partículas, impedindo que elas alcancem a placa de detecção  $S$  diretamente. Assim, *apenas* as partículas que são *refletidas* pela folha  $RR$  são detectadas em  $S$ . Ao atingir a placa  $S$ , a partícula alfa produz um *flash* de luz (cintilação), que é observado por meio do microscópio  $M$  e contado visual e manualmente.



**Figura 9.3:** Montagem experimental para medida de reflexão de partículas alfa (reproduzida do artigo de H. Geiger e E. Marsden, 1909).

Geiger e Marsden mediram o fluxo de partículas alfa refletidas sob diferentes condições experimentais, variando a espessura e a composição das lâminas refletoras. Com um arranjo experimental ligeiramente diferente daquele mostrado na **Figura 9.3**, concluíram que uma entre cada 8.000 partículas lançadas era refletida por uma lâmina de platina.

Como já se sabia na época, as partículas alfa possuem massa (e também velocidade na situação do experimento de Geiger e Marsden) muito maior do que a dos elétrons (cerca de 7.000 vezes maior conforme você mostrará no Exercício 9.1 mais adiante). Por terem momento linear muito maior do que o dos elétrons, o desvio das partículas alfa devido à interação com estas

partículas é desprezível. Esta situação física é semelhante à colisão entre um caminhão de sete toneladas, que seria o análogo da partícula alfa, e uma bola de futebol de 1 quilograma. A colisão tem um efeito enorme sobre a bola, mas é irrelevante para o movimento do caminhão.

Como explicar, então, que algumas das partículas alfa eram desviadas de um ângulo grande, maior do que  $90^\circ$ , conforme observado por Geiger e Marsden? Para explicar este resultado experimental, Rutherford propôs que toda carga elétrica positiva do átomo estivesse concentrada no seu centro (carga pontual), em vez de espalhada uniformemente por todo o seu volume como no modelo de Thomson. Esta carga central é chamada *núcleo*.

O núcleo concentra quase toda a massa do átomo (a massa dos elétrons sendo muito pequena), e é responsável pela deflexão das partículas alfa, devido ao efeito de repulsão eletrostática (tanto o núcleo como a partícula alfa têm cargas positivas). O núcleo do átomo de platina, por exemplo, é cerca de 50 vezes mais massivo do que a partícula alfa e, portanto, é capaz de defletir essa partícula de ângulos grandes.

Na verdade, o núcleo atômico não é pontual, como suposto, por simplicidade, no modelo de Rutherford. Mas, de qualquer forma, ele é muito menor do que o átomo (cerca de 10.000 vezes menor, o que explica o bom acordo com os resultados experimentais obtidos por Rutherford). Portanto, a matéria é quase toda feita de espaços vazios!

O núcleo de um átomo com  $Z$  elétrons possui uma carga elétrica  $Ze$ , (lembre-se de que  $-e$  é a carga do elétron). Assim, a carga total do átomo é nula (neutralidade do átomo), já que a contribuição dos elétrons para a carga total vale  $Z(-e)$ .

O valor de  $Z$ , que é chamado *número atômico*, *determina* as propriedades químicas de um determinado átomo. Assim, cada valor de  $Z$  corresponde a um determinado elemento químico. Por exemplo,  $Z = 6$  corresponde ao carbono (C) e  $Z = 7$  ao nitrogênio (N). O átomo mais simples é o hidrogênio (H): ele possui apenas um elétron ( $Z = 1$ ), como já mencionamos.

Trabalhando no laboratório chefiado por Rutherford (na Universidade de Manchester, Inglaterra), o físico experimental **Henry Moseley** determinou experimentalmente, em 1913, o valor de  $Z$  para todos os elementos químicos então conhecidos. Com esse resultado, Moseley reformulou a estrutura da tabela periódica (veja a **Figura 9.4**), organizando os elementos químicos por valores crescentes de  $Z$ . Na sua lista de números atômicos, de  $Z = 1$  (H) até  $Z = 92$  (urânio U), havia sete lacunas. Moseley concluiu, de forma correta,

**Henry G. J. Moseley** nasceu em Weymouth, Inglaterra, em 1887. Seus experimentos com raios X foram fundamentais para a organização e compreensão da tabela periódica em termos das propriedades atômicas. Faleceu na batalha de Gallipoli, Turquia, durante a Primeira Guerra Mundial, quando tinha apenas 27 anos.

que existiam sete elementos químicos ainda a serem descobertos correspondendo aos valores de  $Z$  ausentes na lista.

| TABELA PERIÓDICA |    |     |    |     |     |     |     |     |    |     |    |     |     |     |     |     |     |
|------------------|----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1                | IA | 1   | H  | 2   | IIA |     |     |     |    |     |    |     |     |     |     |     | 0   |
| 2                |    | 3   | Li | 4   | Be  |     |     |     |    |     |    |     |     |     |     |     | 10  |
| 3                |    | 5   | Na | 6   | Mg  |     |     |     |    |     |    |     |     |     |     |     | 18  |
| 4                |    | 7   | K  | 8   | Ca  | 9   | Sc  | 10  | Ti | 11  | V  | 12  | Cr  | 13  | Mn  | 14  | Fe  |
| 5                |    | 15  | Rb | 16  | Sr  | 17  | Y   | 18  | Zr | 19  | Nb | 20  | Mo  | 21  | Tc  | 22  | Ru  |
| 6                |    | 23  | Cs | 24  | Ba  | 25  | *La | 26  | Hf | 27  | Ta | 28  | W   | 29  | Re  | 30  | Os  |
| 7                |    | 31  | Fr | 32  | Ra  | 33  | +Ac | 34  | Rf | 35  | Ha | 36  | 106 | 37  | 107 | 38  | 108 |
|                  |    | 39  |    | 40  |     | 41  |     | 42  |    | 43  |    | 44  |     | 45  |     | 46  |     |
|                  |    | 47  |    | 48  |     | 49  |     | 50  |    | 51  |    | 52  |     | 53  |     | 54  |     |
|                  |    | 55  |    | 56  |     | 57  |     | 58  |    | 59  |    | 60  |     | 61  |     | 62  |     |
|                  |    | 63  |    | 64  |     | 65  |     | 66  |    | 67  |    | 68  |     | 69  |     | 70  |     |
|                  |    | 71  |    | 72  |     | 73  |     | 74  |    | 75  |    | 76  |     | 77  |     | 78  |     |
|                  |    | 79  |    | 80  |     | 81  |     | 82  |    | 83  |    | 84  |     | 85  |     | 86  |     |
|                  |    | 87  |    | 88  |     | 89  |     | 90  |    | 91  |    | 92  |     | 93  |     | 94  |     |
|                  |    | 95  |    | 96  |     | 97  |     | 98  |    | 99  |    | 100 |     | 101 |     | 102 |     |
|                  |    | 103 |    | 104 |     | 105 |     | 106 |    | 107 |    | 108 |     | 109 |     | 110 |     |

Figura 9.4: Tabela periódica dos elementos, com os valores do número atômico  $Z$ .

O físico inglês **James Chadwick** nasceu em Manchester em 1891. Em colaboração com Rutherford, identificou o próton (núcleo do átomo de H) como constituinte de todos os núcleos atômicos. Recebeu o Prêmio Nobel de Física em 1935 pela descoberta do nêutron.

O núcleo é composto de *prótons*, que têm carga  $e$  (portanto igual em módulo à carga do elétron), e de *nêutrons*, de carga elétrica nula, descobertos por **J. Chadwick** em 1932, e que têm massa aproximadamente igual à do próton. O núcleo do H é o único que não contém nenhum nêutron; todos os demais átomos possuem nêutrons.

Prótons e nêutrons não são, ao contrário do elétron, partículas elementares. A estrutura de prótons e nêutrons só foi descoberta muito mais recentemente; eles são constituídos de partículas elementares chamadas *quarks*.

## Exercício 9.1

Rutherford e seu estudante Thomas Royds mostraram, em 1909, que a partícula alfa é idêntica ao núcleo do átomo de hélio (He) que contém dois nêutrons.

a) Determine a carga elétrica da partícula alfa. Sugestão: consulte a tabela periódica na **Figura 9.4**.

b) Determine a massa  $m_\alpha$  da partícula alfa. Considere a contribuição inercial da energia de ligação deste núcleo (reveja a Aula 7), que vale  $\Delta E = -28,3 \text{ MeV}$  e os seguintes valores para as massas do próton e do nêutron:  $m_p = 1,6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$  e  $m_n = 1,6749 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

c) Determine a razão entre  $m_\alpha$  e a massa do elétron  $m_e$ . Analisando este resultado, comente sobre a possibilidade de a partícula alfa ser defletida pelo elétron no espalhamento Rutherford.

**Solução:**

a) Como  $Z = 2$ , a carga vale  $2e = 3,2 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

b)

$$m_\alpha = 2m_p + 2m_n + \frac{\Delta E}{c^2}.$$

Temos  $\Delta E/c^2 = -28,3 \times 10^6 \times 1,602 \times 10^{-19} / (3,00 \times 10^8)^2 = -5,04 \times 10^{-29} \text{ kg}$ . Esta é a contribuição da energia de ligação do núcleo, dada pela relação de equivalência entre massa e energia. Graças a ela, a massa total do núcleo é *menor* do que a soma das massas dos seus componentes (este efeito é chamado defeito de massa). Substituindo este valor na equação anterior, obtemos  $m_\alpha = 6,645 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

c) A razão vale  $m_\alpha/m_e = 6,645 \times 10^{-27} / (9,109 \times 10^{-31}) = 7294$ . Como a massa da partícula alfa é muito maior do que a massa do elétron, o efeito de deflexão devido à interação com esta partícula é desprezível. Assim, no espalhamento Rutherford a partícula alfa interage apenas com o núcleo atômico, que tem massa muito maior do que  $m_\alpha$ .

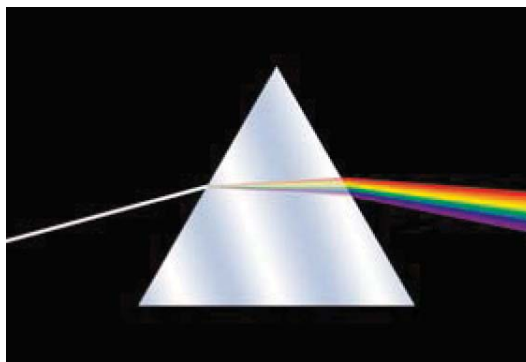
O experimento de espalhamento de Rutherford, descrito anteriormente, é um exemplo de grande avanço científico obtido a partir do desenvolvimento de novos dispositivos e técnicas experimentais. Para o sucesso deste experimento, foram muito importantes, por exemplo, a produção de feixes mais intensos de partículas alfa (já que apenas uma fração pequena do fluxo total é refletido) e o uso de um novo método de detecção (cintiladores). A idéia

de realizar um experimento de espalhamento para obter informação sobre as propriedades do alvo (o núcleo atômico no exemplo de Rutherford), ou da sua interação com a partícula espalhada, ainda é, nos dias atuais, amplamente empregada em várias áreas da Física.

Vamos, a seguir, analisar um outro exemplo deste tipo, numa área da Ciência, a Espectroscopia, considerada completamente desconectada da Física Atômica até o momento em que Bohr entra em cena.

## A descoberta da análise espectral

É provável que você já tenha observado o efeito de *dispersão* da luz solar ao atravessar um prisma de vidro (veja a **Figura 9.5**). Newton foi o primeiro a mostrar, com esse experimento, que a luz “branca” é formada pela mistura de várias cores diferentes. Para interpretar corretamente este experimento, é preciso entender que o prisma não “cria” as cores observadas; ele apenas *separa* espacialmente o que já preexiste na luz incidente branca.



**Figura 9.5:** Dispersão da luz branca ao atravessar um prisma de vidro.

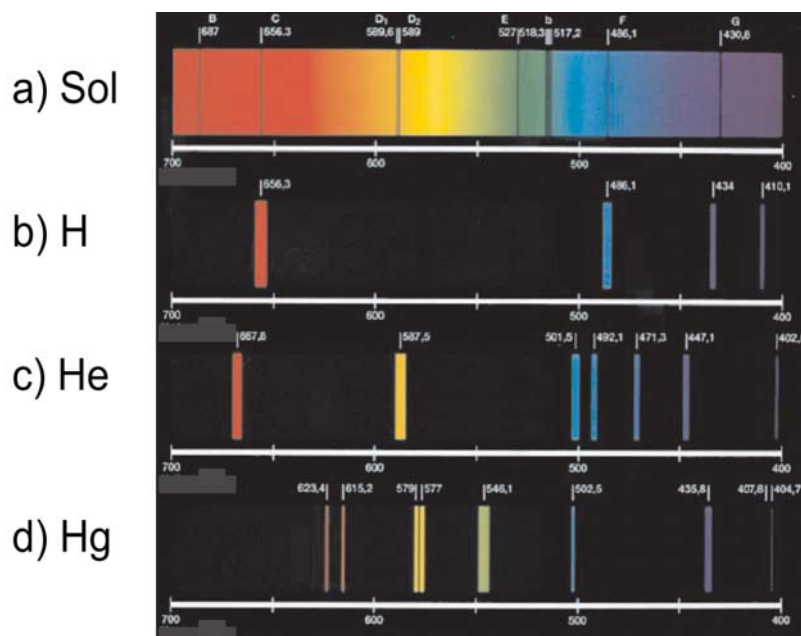
Por que ocorre esse efeito? Na luz branca, há vários comprimentos de onda misturados. O índice de refração do vidro, do qual o prisma é feito, é *diferente* para cada um destes comprimentos de onda. Você aprendeu, na Aula 6 de Física 4A, que a direção em que a luz é refratada ao passar do ar para o vidro é determinada por esse índice (lei de Snell). Assim, cada comprimento de onda presente na luz incidente irá propagar numa direção diferente, resultando na separação espacial mostrada na **Figura 9.5**.

Nossa visão associa um tom de cor a cada valor de comprimento de onda. Portanto, ao projetar os feixes refratados pelo prisma sobre um anteparo, obtemos faixas coloridas, em que a cor varia continuamente do vermelho (menor desvio) ao violeta (maior desvio), passando pelo laranja, amarelo,

verde e azul, acompanhando a variação contínua do comprimento de onda. Essas faixas representam todo o *espectro* visível.

Um efeito muito semelhante ocorre no arco-íris. Em vez de um prisma de vidro, nesse caso a luz branca é separada em suas componentes espectrais devido à refração por pequenas gotas de água em suspensão na atmosfera.

Na verdade, a luz solar não contém todos os comprimentos de onda possíveis. Ao analisar o espectro da luz solar com mais detalhe, o cientista inglês William Wollaston descobriu, em 1802, que havia lacunas ou linhas escuras na faixa colorida, correspondendo a comprimentos de onda *ausentes* na luz solar. Estas linhas foram medidas e catalogadas por Joseph von Fraunhofer (1814) e são conhecidas como linhas de Fraunhofer (veja a **Figura 9.6a**, que você poderá visualizar em cores na Plataforma). Você já conhece, pela leitura da Aula 12 de Física 4A, a contribuição deste cientista ao estudo da difração. Ele foi o primeiro a usar uma rede de difração para analisar o espectro da luz. Nas próximas duas aulas, você usará os dois métodos: a rede de difração na Aula 10, e o prisma refrator na Aula 11.



**Figura 9.6:** (a) Linhas escuras de Fraunhofer no espectro solar. (b), (c) e (d) Espectros de emissão dos átomos de hidrogênio (H), hélio (He) e mercúrio (Hg). Os valores de comprimento de onda são indicados em nanômetros.

Outro físico alemão também mencionado na Aula 12, Gustav Kirchhoff, contribuiu, muitos anos mais tarde, com a explicação para as linhas escuras de Fraunhofer. Desde o século XVII, já se sabia que substâncias aquecidas emitiam luz com espectro *discreto*. Por exemplo, ao colocar sal de cozinha numa chama, essa substância emite luz de cor amarela que, ao atravessar um prisma, é dividida em linhas finas (em vez das faixas coloridas observadas com a luz solar). A linha mais intensa corresponde ao comprimento de onda  $\lambda = 589\text{nm}$  e é chamada linha D, característica do elemento químico sódio (na verdade são duas linhas muito próximas entre si). Você irá observar, nas Aulas 10 e 11, as linhas espectrais emitidas por lâmpadas de hidrogênio e de vapor de mercúrio, que correspondem às **Figuras 9.6.b e 9.6.d**.

Kirchhoff demonstrou que os comprimentos de onda emitidos por uma substância coincidem com aqueles que esta mesma substância é capaz de absorver. Uma das linhas escuras de Fraunhofer corresponde ao mesmo comprimento de onda da linha D do sódio,  $\lambda = 589\text{nm}$  (veja a **Figura 9.6.a**). Então Kirchhoff concluiu, em 1859, que existe sódio nas camadas mais externas do Sol, que absorve esse comprimento de onda da luz branca emitida pelas regiões mais internas, deixando, assim, uma “buraco” no espectro da luz solar. De maneira mais geral, a existência de uma linha escura do espectro solar na mesma posição (e logo com o mesmo comprimento de onda) de uma linha colorida de emissão de um determinado elemento químico indica que esse elemento está presente no Sol. Assim, a análise das linhas de Fraunhofer traz informação sobre a composição química da camada externa do Sol. Este método permite descobrir a composição química de estrelas distantes!

O método de Kirchhoff é baseado numa propriedade muito importante: cada elemento químico tem o seu espectro característico, que é o *mesmo* tanto para emissão como para absorção de luz. Assim, o espectro funciona como uma “impressão digital” de cada elemento químico. Vamos resumir estes conceitos no quadro a seguir:

*Espectro* de um elemento químico: conjunto de comprimentos de onda emitidos ou absorvidos pelo elemento.

Exemplo: espectro do hidrogênio (H) (veja também a **Figura 9.6.b**). Além dos quatro comprimentos de onda na região visível listados abaixo, há vários outros no ultravioleta e infravermelho.

| $\lambda$ (nm) | cor        |
|----------------|------------|
| 656            | vermelho   |
| 486            | azul-verde |
| 434            | violeta    |
| 410            | violeta    |

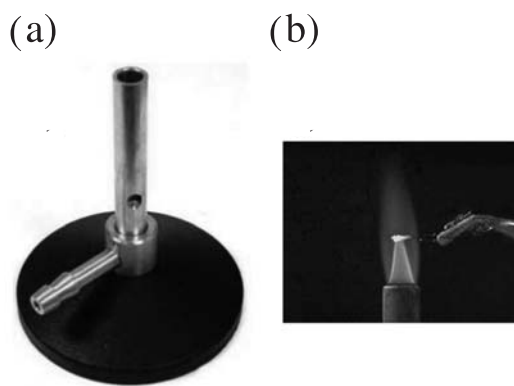
Espectro de emissão: linhas coloridas obtidas pela dispersão da luz emitida pela amostra. Cada linha corresponde a um determinado comprimento de onda.

Espectro de absorção: linhas escuras obtidas ao transmitir luz branca através da amostra. As linhas escuras estão sempre nas mesmas posições das linhas claras emitidas pela mesma amostra. Assim, o espectro de absorção coincide com o espectro de emissão.

Não são apenas as estrelas distantes que podem ser analisadas por meio da medida do espectro. Em colaboração com seu colega químico **Robert Bunsen**, Kirchhoff transformou a Espectroscopia numa poderosa ferramenta para a *análise química* de amostras diversas em laboratório. O objetivo, nessa área, é identificar os elementos químicos presentes numa determinada amostra, um problema de grande importância na indústria.

O grande salto na técnica de Espectroscopia foi consequência, em grande parte, do desenvolvimento do *bico de Bunsen* (veja a **Figura 9.7.a**) em 1860, que até hoje é amplamente usado nos laboratórios de Química. Para fazer a amostra emitir luz suficientemente intensa, Bunsen e Kirchhoff precisavam esquentá-la a temperaturas bem elevadas. O bico de Bunsen produz uma chama de *baixa luminosidade* e alta temperatura. Com ela, Bunsen e Kirchhoff podiam obter temperaturas elevadas sem misturar a luz gerada pela amostra com a luz gerada pela chama. Assim, eles desenvolveram um método mais preciso de análise espectral, capaz de detectar a presença de quantidades muito pequenas de um determinado elemento químico.

**Robert W. Bunsen** nasceu em Göttingen, Alemanha, em 1811. Químico, colaborou com seu colega físico Gustav Kirchhoff no desenvolvimento da análise química espectral, por meio da qual descobriram dois novos elementos químicos, célio e rubídio. Desenvolveu o conceito de um queimador em que gás e ar fossem misturados antes da combustão (bico de Bunsen), cuja concepção foi realizada por Peter Desdega, a partir de um modelo mais antigo devido a Michael Faraday. Desdega era técnico da Universidade de Heidelberg, onde Bunsen e Kirchhoff eram professores.



**Figura 9.7:** (a) Exemplo de bico de Bunsen; e (b) chama gerada por este dispositivo.

Graças a esses avanços na Espectroscopia, vários novos elementos químicos foram descobertos na segunda metade do século XIX, como por exemplo o hélio (veja a **Figura 9.6.c**). Os próprios Bunsen e Kirchhoff descobriram dois novos elementos: o célio e o rubídio.

Veremos, a seguir, como esses resultados experimentais, em conjunto com os avanços na compreensão da estrutura atômica discutidos anteriormente, prepararam o terreno para que Bohr formulasse o seu modelo quântico para o átomo de hidrogênio.

## O modelo atômico de Bohr

Como explicar fisicamente os espectros dos diferentes elementos químicos? Por que um dado elemento emite luz apenas em determinados comprimentos de onda característicos? Conforme sabemos atualmente, a resposta para estas perguntas é fornecida pela Física Atômica. Entretanto, até o início do século XX, a idéia de relacionar a Espectroscopia com a estrutura atômica ainda não havia sido explorada com sucesso. Como comentamos no início da aula, nessa época a própria realidade física dos átomos ainda era questionada por muitos cientistas.

Bohr foi o responsável por estabelecer a ponte entre a Espectroscopia e a Física Atômica, explicando a primeira em termos da dinâmica dos átomos e, reciprocamente, usando os resultados experimentais como guia na formulação do seu modelo atômico. Para seguir este caminho, Bohr teve de construir uma outra ponte, ainda menos óbvia do que esta, ao usar a hipótese de quantização

numa situação física completamente distinta daquela considerada por Planck e Einstein, que você estudou na Aula 8.

Para entender o contexto em que Bohr formulou esse modelo teórico, vamos acompanhar a sua trajetória nos anos imediatamente anteriores ao da sua grande contribuição. Logo após concluir o doutoramento na Dinamarca em 1911, Bohr seguiu para um pós-doutorado em Cambridge, Inglaterra, no laboratório de J. J. Thomson. No ano seguinte, Bohr se transferiu para Manchester, para trabalhar com Rutherford, com quem iniciou uma intensa colaboração.

Bohr acompanhava de perto os avanços experimentais obtidos no laboratório de Rutherford. Um dos resultados obtidos na época mostrava que o átomo de hidrogênio era o mais simples de todos, contendo apenas um único elétron e o núcleo atômico ( $Z = 1$  para o H, confira a tabela da **Figura 9.4**).

Por sua simplicidade, o hidrogênio era o candidato natural para iniciar a formulação de um modelo teórico para a estrutura atômica. Além do hidrogênio, qualquer íon contendo apenas um elétron também é igualmente simples. Por exemplo, ao retirarmos um elétron do átomo de Hélio, obtemos um *íon* com um único elétron em que o núcleo tem carga  $2e$ . Ao contrário de um átomo neutro, o íon possui uma carga total não-nula. Este íon possui, em particular, uma carga total positiva igual a  $e$ . Ele é representado pelo símbolo  $\text{He}^+$ .

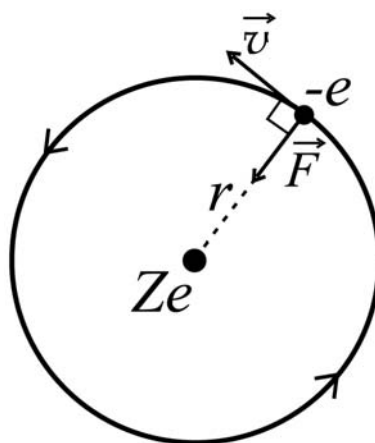
De maneira geral, todos os íons obtidos arrancando  $Z - 1$  elétrons de um átomo de número atômico  $Z$  são chamados *hidrogenóides*, porque, como o hidrogênio, possuem apenas um único elétron. Observe que o núcleo tem carga  $Ze$  e, portanto, a carga total do íon vale  $(Z - 1)e$ .

### Exercício 9.2

Apresente um exemplo de íon hidrogenóide diferente do  $\text{He}^+$ . Escreva o seu número atômico  $Z$  e a sua carga elétrica total. Sugestão: consulte a tabela periódica da **Figura 9.4**.

Resposta: um exemplo possível, dentre vários outros, seria o íon  $\text{Li}^{++}$ , cuja carga total vale  $2e$ , e que corresponde a  $Z = 3$ . Ele é obtido a partir do átomo de Li ao retirar dois elétrons.

Na **Figura 9.8**, representamos o modelo considerado por Rutherford e Bohr para um átomo de H ou íon hidrogenóide.



**Figura 9.8:** Modelo atômico para átomo de H ( $Z = 1$ ) ou íon hidrogenóide.

Neste modelo, o elétron não poderia estar em repouso, pois neste caso ele seria atraído em direção ao núcleo, desestabilizando o átomo, cujo tamanho é definido pela distância  $r$  indicada na **Figura 9.8**, que deve ser muito maior do que o tamanho do núcleo. Assim, nesse modelo o átomo gira em torno do núcleo, com velocidade  $\vec{v}$ . Se o movimento é circular, como mostrado na **Figura 9.8**, então o módulo da velocidade  $v$  seria constante. Seu valor estaria relacionado à distância  $r$  (raio da órbita circular), conforme você mostrará no exercício a seguir.

## Exercício 9.3

Determine o raio da órbita circular do elétron em torno do núcleo atômico como função do módulo da velocidade  $v$  do elétron.

**Solução:** no movimento circular uniforme, a aceleração da partícula aponta para o centro do círculo (aceleração centrípeta), e seu módulo vale  $a = v^2/r$ . De acordo com a Segunda Lei de Newton, a força resultante deve apontar também para o centro. Esta é justamente a situação da **Figura 9.8**, onde a única força que atua sobre o elétron é a força de atração eletrostática exercida pelo núcleo de carga  $Ze$ . Pela Lei de Coulomb, o módulo da força vale  $F = Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ , onde  $\epsilon_0$  é a permissividade elétrica do vácuo. Pela Segunda Lei,

$$Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r^2) = m_e v^2/r \quad (9.1)$$

( $m_e$  é a massa do elétron). Resolvendo esta equação para a distância  $r$ , obtemos

$$r = Ze^2/(4\pi\epsilon_0 m_e v^2). \quad (9.2)$$

Assim, quanto menor for a velocidade do elétron, mais afastada do núcleo estará a órbita circular.

Usando a Equação (9.1), podemos relacionar a energia cinética do elétron  $T = m_e v^2/2$  com a energia potencial  $V = -Ze^2/(4\pi\epsilon_0 r)$  associada à interação eletrostática com o núcleo (teorema do virial):  $T = -V/2$ , ou, mais explicitamente,

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (9.3)$$

Com isto, a energia mecânica total do elétron vale

$$E = T + V = -T = \frac{V}{2} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (9.4)$$

Este modelo atômico apresentava dois problemas fundamentais:

- o modelo não fornecia nenhuma escala de comprimento definindo o *tamanho* do átomo. Já se sabia, na época, que os átomos tinham um tamanho característico. O tamanho do átomo, dado pela distância  $r$  na **Figura 9.8**, pode possuir qualquer valor de acordo com a Equação (9.2), dependendo da velocidade  $v$  do elétron.

- de acordo com o Eletromagnetismo, o átomo não seria estável. Com efeito, uma partícula acelerada de carga não-nula emite radiação e, em consequência, perde energia, já que a radiação eletromagnética transporta energia. Num movimento circular, a aceleração da partícula é necessariamente não-nula (confira a solução do Exercício 9.3). Assim, a energia  $E$  do elétron em órbita diminuiria com o tempo. Pela Equação (9.4), isto corresponderia a diminuir a distância  $r$ , de forma a tornar a energia  $E$  mais negativa e, portanto, menor (embora maior em módulo). Depois de algum tempo, o átomo iria finalmente colapsar (isto é, diminuir de tamanho rapidamente) na posição do núcleo.

Em 1913, Bohr propôs um modelo heurístico para resolver estas duas questões. O ingrediente fundamental para a sua formulação foi o resultado experimental para o espectro do hidrogênio. Conforme já comentamos, a existência de uma conexão entre a Espectroscopia e a dinâmica atômica não era, na época, nada óbvia!

O espectro do hidrogênio havia sido medido por Anders Ångström em 1860. Já apresentamos uma lista dos comprimentos de onda no visível na **Tabela 9.1**, que reproduzimos abaixo:

| $\lambda$ (nm) | cor        |
|----------------|------------|
| 656            | vermelho   |
| 486            | azul-verde |
| 434            | violeta    |
| 410            | violeta    |

**Tabela 9.1**

Johann Balmer, professor de Matemática de um colégio suíço de Ensino Médio, mostrou, em 1885, que os quatro valores para o comprimento de onda  $\lambda$  no visível podiam ser ajustados pela seguinte fórmula empírica:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, 6. \quad (9.5)$$

O valor da constante  $R_H$  foi obtido por Balmer a partir dos quatro valores de  $\lambda$  no visível conhecidos na época. Mais tarde, Balmer verificou que sua fórmula também fornecia valores corretos para comprimentos de onda no ultravioleta, tomando  $n = 7, 8, \dots$  na Equação (9.5).

No exercício a seguir, você irá calcular  $R_H$  e verificar a validade da fórmula de Balmer usando os valores da **Tabela 9.1**.

**Exercício 9.4**

Calcule o valor de  $R_H$  tomando  $\lambda = 656\text{nm}$  e  $n = 3$  na Equação (9.5). Verifique se os outros três valores de  $\lambda$  também são fornecidos por esta mesma equação, se tomarmos  $n = 4$ ,  $n = 5$  e  $n = 6$ . Calcule o valor de  $\lambda$  para  $n = 7$ , e mostre que ele está na faixa do ultravioleta.

**Resposta:**

$$R_H = 0,01097 \text{ nm}^{-1} = 1,097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}. \quad (9.6)$$

Para  $n = 7$ , a Equação (9.5) fornece  $\lambda = 397 \text{ nm}$ , na região do ultravioleta.

Bohr teve a idéia de explicar a propriedade de que o espectro é discreto em termos de uma condição de quantização. Assim, o número inteiro  $n$  na fórmula de Balmer, Equação (9.5), seria o número de quanta de energia.

Para obter a fórmula de Balmer, Bohr supôs que a energia cinética  $T$  do elétron seria um múltiplo inteiro de um quantum de energia de valor  $h\nu_e/2$ :

$$T = n \frac{h\nu_e}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.7)$$

onde  $h$  é a constante de Planck. A frequência  $\nu_e$  de rotação do elétron (número de voltas por unidade de tempo) está relacionada à velocidade e ao raio de rotação:  $\nu_e = v/r$ . Substituindo esta equação na Equação (9.7), obtemos

$$\frac{m_e v^2}{2} = \frac{nhv}{4\pi r}. \quad (9.8)$$

Esta é uma segunda equação relacionando  $v$  e  $r$  (a primeira, Equação (9.3), foi obtida a partir da Mecânica Newtoniana). Temos, então, *duas* equações para duas incógnitas,  $v$  e  $r$ . Podemos, então, resolver estas equações para obter  $v$  e  $r$  para um dado valor do número inteiro  $n$ . A Equação (9.8) fornece

$$v = \frac{nh}{2\pi m_e r}. \quad (9.9)$$

Substituindo este resultado na Equação (9.3), obtemos

$$\frac{m_e}{2} \left( \frac{nh}{2\pi m_e r} \right)^2 = \frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (9.10)$$

Finalmente, podemos resolver esta equação para  $r$  e obter

$$r = n^2 \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi Z e^2 m_e}. \quad (9.11)$$

Bohr obteve, portanto, uma *escala de tamanho*, quantificada pela distância  $r$ , para o átomo ou íon hidrogenóide, em termos das grandezas físicas fundamentais que caracterizam o sistema atômico: o número atômico  $Z$ , a carga e a massa do elétron  $-e$  e  $m_e$ ; além das constantes universais  $h$  e  $\epsilon_0$ .

Para o átomo de hidrogênio ( $Z = 1$ ), podemos escrever:

$$r = n^2 a_0. \quad (9.12)$$

onde

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m}. \quad (9.13)$$

é o *raio de Bohr*.

A energia total  $E$  do elétron pode também ser expressa em termos das constantes fundamentais, se combinarmos as Equações (9.4) e (9.11):

$$E = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = -\frac{Ze^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{\pi Ze^2 m_e}{\epsilon_0 h^2} \frac{1}{n^2}. \quad (9.14)$$

De acordo com este resultado, a energia do elétron no átomo hidrogenóide não pode ter qualquer valor. Como  $n$  é um inteiro positivo, apenas um conjunto discreto de energias é permitido. Cada valor inteiro de  $n$ , chamado *número quântico principal*, define um *nível de energia*

$$E_n = -\frac{\mathcal{R}_Z}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.15)$$

onde, pela Equação (9.15),

$$\mathcal{R}_Z = \frac{(Ze^2)^2 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2} = 13,6 Z^2 \text{ eV}. \quad (9.16)$$

Cada nível de energia, associado a um valor inteiro de  $n$ , corresponde, pela Equação (9.11), a uma órbita de raio

$$r_n = n^2 \frac{a_0}{Z}. \quad (9.17)$$

A órbita mais interna (menor  $r_n$ ) corresponde à menor energia possível, chamada *energia fundamental*. Para obtê-la basta tomar  $n = 1$  na Equação (9.15):

$$E_1 = -\mathcal{R}_Z = -13,6 Z^2 \text{ eV}. \quad (9.18)$$

Este nível de energia corresponde a uma órbita de raio

$$r_1 = \frac{a_0}{Z}. \quad (9.19)$$

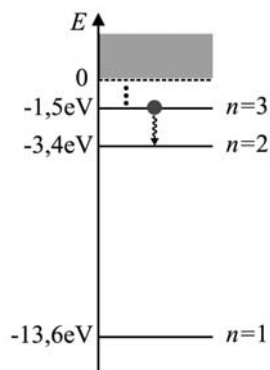
Os níveis de energia mais altos ( $n > 1$ ) correspondem a órbitas de raios maiores. No limite em que  $r$  é infinitamente grande, a energia  $E$  se aproxima de zero (confira, por exemplo, a Equação (9.4)). Neste limite, o elétron não está mais preso ao núcleo, definindo o *limiar de ionização*. Assim, se o átomo ou íon hidrogenóide se encontra no nível de energia fundamental ( $E = -\mathcal{R}_Z$ ), é preciso fornecer uma energia igual a  $\mathcal{R}_Z$  ao elétron para que sua energia passe a ser nula e ele escape da atração do núcleo. Portanto,  $\mathcal{R}_Z$  representa a energia de ionização do átomo ou íon hidrogenóide. Para o hidrogênio ( $Z = 1$ ), a energia de ionização vale  $\mathcal{R} = 13,6 \text{ eV}$ . Para valores maiores de  $Z$ , é preciso pagar um preço energético maior para arrancar o elétron, já que o núcleo tem uma carga proporcional a  $Z$ .

### Exercício 9.5

Calcule a energia necessária para arrancar o único elétron do íon  $\text{Li}^{++}$ . Suponha que o elétron esteja no nível de energia fundamental.

**Resposta:** tomando  $Z = 2$  na Equação (9.16), obtemos  $\mathcal{R}_2 = 54,4 \text{ eV}$ .

Podemos representar os níveis de energia por meio de um diagrama, como o da **Figura 9.9**, que representa o caso do hidrogênio ( $Z = 1$ ).



**Figura 9.9:** Diagrama de níveis de energia do átomo de hidrogênio.

Neste diagrama, representamos o nível de energia fundamental ( $n = 1$ ) e os dois níveis de energia correspondendo a  $n = 2$  e  $n = 3$ . Existem, ainda, infinitos níveis de energia, correspondendo a números quânticos principais  $n = 4, 5, 6, \dots$  situados entre o nível  $n = 3$  e o limiar de ionização associado à energia  $E = 0$ .

Como explicar o espectro do átomo de hidrogênio a partir destes resultados? O elétron passa de um nível de energia maior  $E_n$  para um nível de energia menor  $E_m$  espontaneamente. Ao fazê-lo, ele emite um quantum de luz (fóton) de energia  $h\nu$ , onde  $\nu$  é a frequência do fóton (veja a Aula 8). Por conservação de energia, a energia inicial do átomo  $E_n$  deve ser igual à energia final do conjunto átomo-fóton:

$$E_n = E_m + h\nu. \quad (9.20)$$

A partir da Equação (9.15), obtemos, para o sistema hidrogenóide,

$$h\nu = \mathcal{R} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (9.21)$$

Na **Figura 9.9**, mostramos um exemplo de transição deste tipo, com  $n = 3$  (nível inicial) e  $m = 2$  (nível final).

O comprimento de onda do fóton emitido é tal que  $1/\lambda = \nu/c$ . Obtemos, então,

$$\frac{1}{\lambda} = R_Z \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (9.22)$$

onde

$$R_Z = \frac{\mathcal{R}_Z}{hc} = \frac{m_e(Ze^2)^2}{8c\epsilon_0^2 h^3} \quad (9.23)$$

O conjunto das Equações (9.22) e (9.23), juntamente com a Equação (9.15) para os níveis de energia, constitui o resultado central do modelo de Bohr. Ele pode ser comparado diretamente com os resultados experimentais para o espectro de sistemas hidrogenóides. Por exemplo, as Equações (9.22) e (9.23) fornecem os valores para o espectro do íon  $\text{He}^+$  ( $Z = 2$ ), que não eram conhecidos na época.

Além de generalizar a fórmula de Balmer, este resultado fornece uma expressão para a constante de Rydberg  $R_Z$  em termos das constantes fundamentais que caracterizam o sistema hidrogenóide. Para o hidrogênio ( $Z = 1$ ), Bohr obteve, a partir dos valores conhecidos na época para as diversas constantes que aparecem na Equação (9.23), um valor em acordo com o resultado experimental, dado pela Equação (9.6).

**Exercício 9.6**

Calcule o comprimento de onda do fóton emitido quando o elétron do íon  $\text{He}^+$  passa do nível com  $n = 3$  para o nível com  $n = 2$ .

**Solução:** essa transição corresponde, no caso do hidrogênio, ao comprimento de onda  $\lambda = 656 \text{ nm}$  da **Tabela 9.1**. Para o íon  $\text{He}^+$ , este valor de  $\lambda$  é multiplicado por  $1/Z^2 = 1/4$ , já que a constante de Rydberg  $R_Z$  é quatro vezes maior nesse caso de acordo com a Equação (9.23) (veja também a Equação (9.22)). Temos então  $\lambda = 656/4 = 164 \text{ nm}$ , no ultravioleta.

Uma das constantes que aparecem na expressão de  $R_Z$  da Equação (9.23) é a constante de Planck  $h$ . Na Aula 8, você estudou duas situações em que esta constante também aparece: na derivação do espectro da radiação térmica (Planck, 1900) e na hipótese dos quanta de luz (Einstein, 1905). No trabalho apresentado nesta aula, Bohr introduziu, pela terceira vez na história, a constante  $h$ , num contexto completamente distinto daqueles considerados por Planck e Einstein.

Por meio da hipótese de quantização, Bohr conseguiu explicar fisicamente a fórmula de Balmer e obter uma escala de comprimento característica de tamanho do átomo (raio de Bohr), em termos das suas constantes fundamentais.

O conceito de quanta é, de fato, fundamental para a compreensão da estrutura atômica. O método de Bohr foi, anos mais tarde, substituído pelo formalismo da Mecânica Quântica. Algumas das idéias do modelo de Bohr foram abandonadas, tais como o conceito de órbita do elétron (veja a **Figura 9.8**). De fato, a derivação de Bohr é, ainda, baseada na Mecânica Newtoniana, com a hipótese de quantização sendo introduzida de forma heurística. Dessa forma, Bohr não conseguiu explicar por que o nível de energia fundamental é estável — no seu modelo a estabilidade é postulada de forma arbitrária. Entretanto, o modelo de Bohr contém vários dos ingredientes fundamentais da Mecânica Quântica. É sobretudo notável que o resultado central do modelo de Bohr, dado pelas Equações (9.15) e (9.22), *coincida* com o resultado da Mecânica Quântica não-relativística.

## De Broglie e as ondas de matéria

Situações físicas envolvendo um conjunto discreto de comprimentos de onda já eram bem conhecidas muito antes da formulação da Mecânica Quântica. Você mesmo estudou, no curso de Física 2B (Aula 12), uma situação deste tipo: no problema de uma corda vibrante presa nas suas extremidades, surgem *modos normais de oscilação*. Cada modo normal corresponde a um determinado comprimento de onda  $\lambda$ . Uma onda estacionária na corda não pode ter um valor qualquer de  $\lambda$ ; apenas os valores da forma  $2L/n$ , com  $n$  inteiro positivo, são permitidos para uma corda de comprimento  $L$ .

Inspirado pela proposta de Einstein de que a verdadeira natureza da luz seria resultado de uma fusão dos conceitos de onda e partícula (veja a Aula 8), Broglie imaginou que, reciprocamente, as partículas materiais e, em particular o elétron, teriam também comportamento ondulatório. Com este princípio, a quantização de Bohr seria obtida de forma natural, de maneira semelhante ao que acontece no problema da corda vibrante.

De Broglie propôs, então, associar uma *onda de matéria* de comprimento de onda

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} \quad (9.24)$$

a uma partícula de momento linear  $p$ , onde  $h$  é novamente a constante de Planck.

Para uma partícula macroscópica,  $\lambda$  é muito pequeno, impedindo a observação de efeitos ondulatórios. Por exemplo, para uma bola de futebol de massa igual a 1kg e de velocidade 1m/s, o comprimento de onda de De Broglie vale  $\lambda_{dB} = 6,6 \times 10^{-34}$  m.

Por outro lado, efeitos de difração e interferência já foram observados com elétrons, nêutrons, átomos e moléculas, cujos comprimentos de onda  $\lambda_{dB}$  são muito maiores do que neste exemplo. Para o elétron no átomo de hidrogênio, no contexto do modelo de Bohr,  $\lambda_{dB}$  é várias ordens de grandeza maior. Neste caso,  $\lambda_{dB}$  é da ordem do raio de Bohr  $a_0$ , conforme você irá mostrar no exercício a seguir.

**Exercício 9.7**

Calcule o comprimento de onda de De Broglie para o elétron no nível de energia fundamental do átomo de hidrogênio.

**Solução:** o módulo do momento pode ser calculado a partir da energia cinética:  $p = \sqrt{2m_e T}$ . Pela Equação (9.4), temos, então,  $p = \sqrt{-2m_e E} = \sqrt{2m_e |E|}$ . Para o nível fundamental,  $|E| = \mathcal{R}$ , temos  $p = \sqrt{2m_e \mathcal{R}}$ . Substituindo este resultado na Equação (9.24), e usando a Equação (9.16) com  $Z = 1$ , obtemos  $\lambda = h / \sqrt{2m_e^2 e^4 / (8\epsilon_0^2 h^2)} = 2\epsilon_0 h^2 / (m_e e^2)$ . Comparando este resultado com a definição do raio de Bohr  $a_0$  dada pela Equação (9.13), obtemos

$$\lambda_{dB} = 2\pi a_0 = 3,32 \times 10^{-10} \text{ m.} \quad (9.25)$$

Na teoria quântica do átomo de hidrogênio, o nível de energia fundamental está, de fato, associado a uma onda estacionária, que não é, entretanto, senoidal e, portanto, não está associada a um comprimento de onda bem definido. Mas é verdade, por outro lado, que a escala de comprimento associada à variação desta onda estacionária é determinada pelo comprimento  $a_0$ . Assim, não é coincidência que encontremos um valor da ordem de  $a_0$  ao calcular o comprimento de onda de De Broglie a partir do modelo de Bohr.

O conceito de onda de matéria de De Broglie inspirou o físico austríaco Erwin Schrödinger a formular a equação dinâmica fundamental da Mecânica Quântica, por analogia com a equação de onda. Ela é chamada Equação de Schrödinger.

## Conclusão

Nesta aula, apresentamos um panorama dos resultados experimentais, no final do século XIX e início do XX, que pavimentaram o caminho para a formulação da Mecânica Quântica. Em particular, os resultados sobre a existência do elétron e do núcleo atômico, e os espectros de diferentes elementos químicos (e sobretudo o do hidrogênio) foram fundamentais para a formulação do modelo atômico de Bohr. Juntamente com as contribuições de Planck e Einstein apresentadas na Aula 8, a teoria de Bohr foi uma das principais precursoras da Mecânica Quântica.

## Atividades Finais

1. Para os antigos, o átomo seria a menor unidade constitutiva de toda a matéria. De acordo com sua raiz grega, a palavra átomo significa “indivisível”. Assim, o átomo seria a unidade mínima elementar, sem conter nenhum tipo de estrutura. Explique como as descobertas de Thomson e Rutherford modificaram este conceito de “átomo”.
2. Para levar em conta o fato de que o núcleo atômico não é um centro de força fixo, devemos corrigir a Equação (9.23) para a constante de Rydberg  $R_Z$  trocando a massa do elétron pela *massa reduzida*

$$\mu = \frac{m_e m_N}{m_e + m_N}, \quad (9.26)$$

onde  $m_N$  é a massa do núcleo. Sabendo que a massa do próton vale  $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$  kg, calcule a variação percentual da constante de Rydberg devido a essa correção para o caso do hidrogênio.

3. Níveis de energia correspondendo a valores grandes do número quântico principal são chamados níveis de Rydberg. Calcule o raio da órbita associada ao nível  $n = 50$ . Calcule o comprimento de onda do fóton emitido quando o elétron passa do nível  $n = 51$  para o nível  $n = 50$ . Compare a frequência  $\nu$  do fóton com a frequência  $\nu_e$  de revolução do elétron em sua órbita.

## Resumo

O elétron foi a primeira partícula subatômica descoberta, por meio de experimentos com raios catódicos. O núcleo atômico foi descoberto alguns anos mais tarde, por meio de um experimento de espalhamento de partículas alfa.

Na época destas importantes descobertas sobre a estrutura atômica, a Espectroscopia já era uma área bastante desenvolvida, mas ainda não havia nenhum modelo físico que explicasse os resultados experimentais.

Ao introduzir uma regra de quantização envolvendo a constante de Planck  $h$ , Bohr formulou um modelo para o átomo de hidrogênio capaz de explicar, em detalhe, os resultados experimentais para o espectro deste elemento químico. Dentre outros resultados importantes, este modelo fornecia uma escala de comprimento característica do tamanho do átomo.

## E na próxima aula...

...você irá realizar experimentos de Espectroscopia.

### Solução dos problemas 2 e 3.

2. Pela Equação (9.23), a razão entre o valor corrigido  $R_H^{\text{cor}}$  e o valor não-corrigido vale

$$\frac{R_H^{\text{cor}}}{R_H} = \frac{\mu}{m_e} = \frac{1}{m_e/m_p + 1}.$$

A razão entre as massas vale  $m_e/m_p = 5,5 \times 10^{-4}$ , logo  $R_H^{\text{cor}}/R_H = 0,99945$ . Portanto, a constante de Rydberg é, na verdade, 0,055% menor do que o valor obtido da Equação (9.23).

3. O raio da órbita vale  $r = 50^2 a_0 = 0,14 \mu\text{m}$ . O inverso do comprimento de onda do fóton vale  $1/\lambda = R_H(1/50^2 - 1/51^2) = 1,55 \times 10^{-5} R_H$ . Substituindo o valor de  $R_H$ , obtemos  $\lambda = 5,9 \text{ mm}$ , que corresponde à região de microondas. A frequência do fóton vale

$$\nu = c/\lambda = 1,55 \times 10^{-5} c R_H = 1,55 \times 10^{-5} \mathcal{R}/h.$$

Por outro lado, pela hipótese de quantização de Bohr, Equação (9.7), a frequência de revolução vale

$$\nu_e = 2T/(50h) = 2\mathcal{R}/(50^3 h) = 1,6 \times 10^{-5} \mathcal{R}/h.$$

Este exemplo mostra que para  $n$  grande a frequência emitida numa transição entre dois níveis vizinhos é muito próxima da frequência de revolução  $\nu_e$ . Observe que, classicamente, o elétron emitiria radiação de frequência igual a  $\nu_e$ .



# Aula 10 – Espectroscopia com Rede de Difração

## Metas da aula

Apresentar a técnica experimental de espectroscopia com rede de difração e empregá-la na análise do espectro da luz branca e do átomo de hidrogênio.

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- alinhar um espectrômetro de rede de difração;
- calibrar o espectrômetro utilizando, como amostra de referência, vapor de mercúrio;
- obter o espectro de raias na região do visível de uma amostra qualquer.

## Pré-requisitos

Para realizar as atividades experimentais propostas nesta aula, você precisará dos seguintes conceitos:

- Rede de difração (Aulas 13 e 15 de Física 4A).
- Níveis de energia do átomo de Hidrogênio (Aula 9 de Física 4B).

## Introdução

Por meio dos experimentos de difração e interferência da Aula 14, você descobriu que, quando um feixe de luz atravessa uma rede de difração, há máximos de interferência em posições angulares  $\theta$  relacionadas com a separação entre as fendas  $d$  e o comprimento de onda  $\lambda$  pela equação:

$$m\lambda = d \sin \theta, \text{ ou } \sin \theta = \frac{m}{d}\lambda \quad (10.1)$$

onde  $m$  é um número inteiro que define a ordem do máximo de interferência.

De acordo com a Equação (10.1), a posição angular de um certo máximo depende do comprimento de onda  $\lambda$ . Na experiência em que um feixe de *laser* incide sobre a rede de difração, o feixe tem um único comprimento de onda e, portanto, para cada ordem (ou seja, para cada valor de  $m$ ) temos apenas um máximo. O que ocorreria se, em vez de usar um *laser*, usássemos um feixe de luz contendo diferentes comprimentos de onda? Siga o procedimento experimental a seguir, e você poderá responder a esta pergunta, a partir de suas observações.

### Atividade experimental: observação do espectro contínuo da luz branca

O objetivo desta parte do experimento é a observação do espectro contínuo, para compará-lo com o espectro discreto das lâmpadas de vapor atômico.



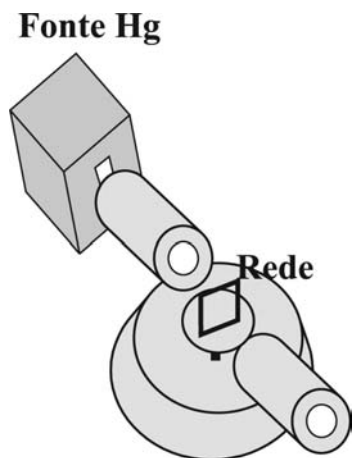
**Figura 10.1:** Arranjo experimental para observação do espectro contínuo da luz branca.

1. Monte o sistema mostrado na **Figura 10.1**, colocando a fonte de luz branca em cima do barramento. Veja se o feixe de luz está aproximadamente colimado, ou seja, se propaga sem divergência. Caso necessário, coloque uma lente convergente na saída da fonte e ajuste a distância entre a lente e o filamento da lâmpada, de modo a obter um feixe colimado até uma distância de cerca de meio metro.
2. Coloque a rede de difração no suporte e faça o feixe de luz branca atravessá-la. Observe a luz difratada em um anteparo. A distância entre o anteparo e a rede deve ser ajustada para que se veja, pelo menos, os dois primeiros máximos de interferência.
3. Note que, em cada máximo, temos todo o espectro visível, ou seja, todas as cores que somos capazes de enxergar. Verifique se existe se-

paração (escuros) entre as cores dentro de um mesmo máximo e anote o resultado para compará-lo com o espectro da lâmpada de mercúrio.

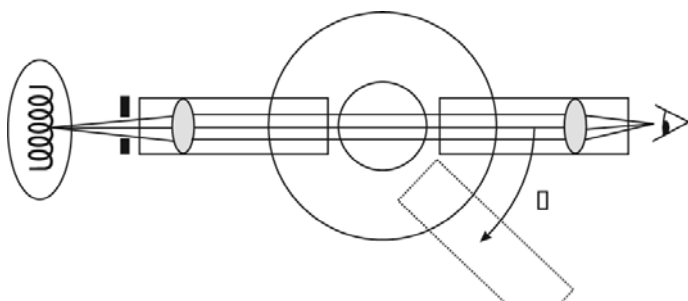
## Atividade experimental: calibração da rede de difração

1. Posicione a lâmpada de vapor de mercúrio de modo a iluminar a fenda de entrada do goniômetro (veja a **Figura 10.2**).



**Figura 10.2:** Arranjo experimental para espectroscopia do vapor de mercúrio.

2. Funcionamento do goniômetro. O goniômetro contém um tubo (colimador) com uma fenda de largura ajustável na entrada da luz (veja a **Figura 10.3**).

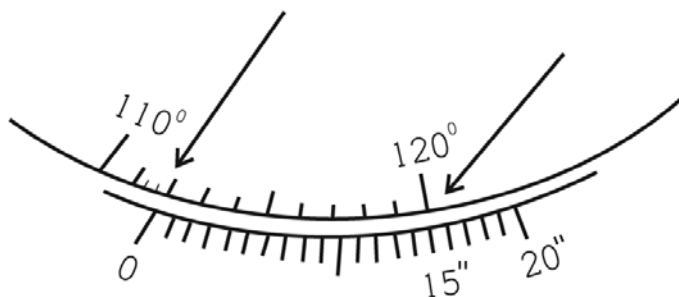


**Figura 10.3:** Representação esquemática de um goniômetro.

Dentro do colimador há uma lente, que serve para colimar (tornar paralelos) os raios de luz que atravessam a fenda. O feixe de luz colimado atravessa a rede de difração. Em seguida, entra no segundo tubo, onde temos outra lente que coleta os raios paralelos e produz uma

imagem. Esta imagem pode ser observada diretamente, posicionando o olho junto ao tubo de saída. Na realidade, as duas lentes do sistema estão montadas em uma configuração do tipo luneta. O nome goniômetro vem do fato de que o segundo tubo pode girar em torno de um eixo e com isto podemos coletar a luz espalhada em diferentes ângulos. Além disto, podemos medir este ângulo com grande precisão, através da escala angular e do vernier.

3. Funcionamento do vernier. O vernier é uma escala secundária que serve para aumentar a resolução de uma escala primária. Veja a **Figura 10.4**.



**Figura 10.4:** Leitura com o auxílio do vernier. O zero da escala inferior é o ponteiro que indica a leitura da posição angular. Note que ele aponta para uma posição entre 111 e 112 graus. Cada grau é ainda subdividido em três partes, logo cada sub-divisão tem 20 minutos. Olhando apenas para a escala superior, a única coisa que podemos dizer é que a leitura está entre 111 graus e 40 minutos e 112 graus. Olhando então para a escala inferior, buscamos o ponto em que os riscos da escala superior melhor se emparelham com os riscos da escala inferior. Isto acontece no ponto 15" (15 minutos). Desta forma a leitura final é 111 graus e 55 minutos.

Este sistema é muito utilizado nos paquímetros. Ao contrário da escala primária, o vernier fica do lado da seta ou marcador da medida e sua escala varia entre zero e o valor da menor divisão da escala primária. Para fazer a leitura, basta comparar o alinhamento dos riscos da escala primária com os riscos da escala secundária. O risco da escala do vernier que estiver mais alinhado com qualquer risco da escala primária dará o valor da leitura no vernier. Este valor deve ser somado ao menor valor da escala primária próximo da seta (que é o zero do vernier).

4. Observe a imagem da fenda de entrada, através do sistema óptico do goniômetro e ajuste as lentes de forma a obter uma imagem nítida. Note que a luz da lâmpada de mercúrio é muito intensa. Para olhar diretamente para a fenda iluminada por ela, feche um pouco a fenda de entrada do colimador.

5. Uma vez que o ajuste de foco foi feito, abra a fenda para cerca de 5mm e coloque a rede no centro do goniômetro.
6. A luz será espalhada pela rede em ângulos que dependerão do comprimento de onda. Olhando através do telescópio (com liberdade de rotação), procure o primeiro máximo de interferência para as várias cores.

Observação: o mercúrio tem um espectro discreto, ou seja, não emite luz com todos os comprimentos de onda visíveis, mas apenas alguns deles. Neste caso, a luz difratada não terá a aparência de um arco-íris contínuo, e será composta de linhas coloridas individuais. Estas linhas são chamadas usualmente de raias. As linhas (ou raias) do vapor de mercúrio e seus respectivos comprimentos de onda são conhecidos (veja a tabela a seguir).

| cor           | intensidade | $\lambda$ (Å) |
|---------------|-------------|---------------|
| vermelho      | fraco       | 6152          |
| amarelo       | forte       | 5791          |
| amarelo       | forte       | 5770          |
| verde         | forte       | 5461          |
| verde-azulado | média       | 4916          |
| azul-anil     | forte       | 4358          |
| violeta       | fraca       | 4078          |
| violeta       | média       | 4047          |

7. Faça a medida do ângulo de difração (com relação à direção frontal) de cada raia para  $m = 1$ . Note que a precisão da sua medida depende da largura da fenda de entrada. Assim, ajuste a menor largura de fenda possível, de modo que você ainda consiga enxergar claramente a linha a ser medida.
8. Não se esqueça de anotar os resultados das medidas!

## Atividade experimental: espectroscopia do átomo de hidrogênio

Através do tratamento dos dados obtidos com as medidas com a lâmpada de vapor de mercúrio, podemos obter o número de linhas por unidade de comprimento da nossa rede de difração. Assim, podemos inverter o problema e, tendo uma rede conhecida, encontrar os comprimentos de onda das raiais espectrais do átomo de hidrogênio.

O átomo de hidrogênio é muito estudado, devido à sua simplicidade. Ele é constituído de apenas um próton e um elétron. Como você aprendeu na Aula 9, medidas do espectro do átomo de hidrogênio foram importantes na história da Mecânica Quântica. Atualmente, a espectroscopia do hidrogênio ainda desempenha um papel importante, por exemplo na determinação experimental de constantes físicas fundamentais.

A técnica de espectroscopia com rede de difração e observação da luz difratada diretamente com os olhos só nos dá acesso às raiais visíveis. Sendo assim, para o caso do hidrogênio teremos acesso às suas quatro raiais visíveis. Este conjunto de raiais é parte da série de Balmer, que você estudou na Aula 9. Vamos, a seguir, medir os comprimentos de onda correspondentes.

1. Na montagem anterior, substitua a lâmpada de vapor de mercúrio por uma lâmpada de vapor de hidrogênio.
2. Posicione a lâmpada de modo a maximizar a intensidade da luz transmitida pela fenda. Isto pode ser feito pela observação da fenda através do telescópio (sem a rede) e encontrando a posição da lâmpada que produz a maior intensidade luminosa.
3. Coloque a rede de difração no suporte e encontre as quatro raiais da série de Balmer. As raiais são violeta, violeta-azul, verde e vermelha.
4. Meça o ângulo de difração para o primeiro máximo de cada linha e anote o resultado.

Observação: caso a sala esteja clara e dependendo da potência da lâmpada, você poderá ter dificuldade para ver as raiais. Neste caso, procure escurecer a região de onde vem a luz difratada para aumentar o contraste.

## Análise dos dados

1. Explique qual é a diferença entre o espectro da luz branca e os espectros das lâmpadas de vapor de mercúrio e de hidrogênio.
2. Justifique sua resposta sobre os espectros das lâmpadas incandescente e de vapor atômico, em termos das características microscópicas destas fontes de luz.

Sugestão: em um vapor atômico, a luz tem sua origem nas transições eletrônicas de cada um dos átomos. Na lâmpada incandescente, a luz é emitida por elétrons em um condutor.

3. Use suas medidas com a lâmpada de mercúrio, para fazer uma tabela contendo uma primeira coluna com os valores de  $m\lambda$  (se você mediu o primeiro máximo de interferência para todas as raiais, então  $m = 1$  sempre), uma segunda coluna com os respectivos valores de  $\theta$  e uma terceira coluna com valores de  $\sin\theta$ .
4. Faça um gráfico de  $m\lambda$  em função de  $\sin\theta$ .
5. Encontre a melhor reta para os seus dados experimentais e, a partir da inclinação desta reta, encontre o parâmetro de calibração da rede, ou seja, o número de linhas por unidade de comprimento  $d^{-1}$ .

Sugestão: seria desejável fazer a regressão linear dos dados para encontrar a melhor reta. Caso isto não seja possível, faça um ajuste visual, mas não se esqueça de traçar a reta no gráfico e mostrar o cálculo da inclinação.

6. Use o valor encontrado no item anterior e as suas medidas com a lâmpada de hidrogênio para obter os valores dos comprimentos de onda emitidos pelo átomo de hidrogênio na região visível. Compare com o resultado teórico da Aula 9.

## E na próxima aula...

...você fará um experimento de dispersão da luz através de um prisma.



## Aula 11 – Dispersão da luz em um prisma

### Meta da aula

Estudar experimentalmente a dispersão de um feixe de luz multicromático através de um prisma.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- alinhar um prisma de modo a observar a dispersão do feixe de luz incidente;
- obter o índice de refração do material do prisma em função do comprimento de onda (equação de Cauchy).

### Pré-requisito

Para realizar as atividades experimentais propostas nesta aula, você precisará do conceito de refração da luz, discutido no curso de Física 4A, Aula 6.

### Introdução

Quando a luz se propaga em um meio diferente do vácuo, sua velocidade de propagação muda, dependendo desse meio. A grandeza que caracteriza um determinado meio segundo a velocidade de propagação da luz é o seu índice de refração  $n$ :

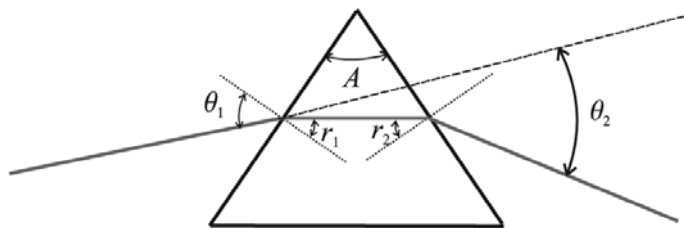
$$n = \frac{c}{v}, \quad (11.1)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo e  $v$  é a velocidade da luz no meio.

O índice de refração  $n$  não é o mesmo para todas as cores em um dado meio. Como um feixe de luz qualquer pode ser decomposto em ondas planas monocromáticas, veremos que, ao se propagar em um meio qualquer, as ondas associadas a comprimentos de onda diferentes terão velocidades diferentes. A fórmula de Cauchy relaciona o índice de refração com o comprimento de onda:

$$n(\lambda) = a\lambda^{-2} + b. \quad (11.2)$$

O problema se reduz, então, a obter os valores de  $a$  e  $b$  para cada material. Se soubermos esses valores, poderemos calcular o índice de refração para cada comprimento de onda. A seguir, faremos uma experiência em que serão determinados os valores de  $a$  e  $b$  para um determinado prisma. Mas antes, vejamos como é desviado um feixe que incide sobre uma das faces de um prisma. Veja a **Figura 11.1**.



**Figura 11.1:** Refração através de um prisma.

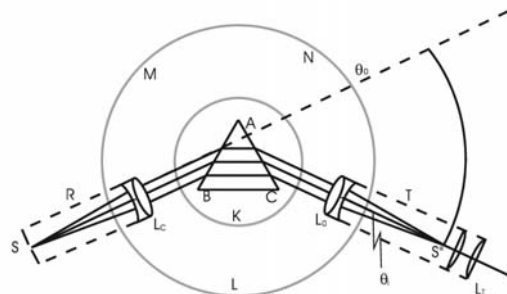
Podemos calcular o ângulo de desvio  $\theta_2$  em função do ângulo de incidência  $\theta_1$ , aplicando a lei de Snell em cada uma das interfaces, a de entrada e a de saída. Teríamos como resultado uma função do tipo  $\theta_2 = f(\theta_1)$ , pois para cada ângulo de incidência teríamos um ângulo de desvio diferente. Esta função pode ser minimizada de forma a se obter o ângulo de incidência  $\theta_1$ , para o qual o ângulo de espalhamento  $\theta_2$  é mínimo. Estabelecer uma relação desse tipo é muito conveniente, pois no momento da realização do experimento é fácil determinar o ângulo de desvio mínimo. Dessa forma, podemos obter uma relação entre o ângulo de desvio mínimo  $\theta_2^{min}$ , que pode ser medido, e o índice de refração para o comprimento de onda da luz desviada:

$$n(\lambda) = \frac{\text{sen} \left\{ \frac{1}{2} [\theta_2^{min}(\lambda) + A] \right\}}{\text{sen} \left[ \frac{1}{2} A \right]}, \quad (11.3)$$

onde  $A$  é o ângulo do vértice do prisma, indicado na **Figura 11.1**. A idéia agora é fazer várias medidas de ângulo de desvio mínimo para vários e diferentes comprimentos de onda conhecidos. Com os ângulos medidos, podemos calcular os valores dos índices de refração correspondentes, através da Equação (11.3). Em seguida, se fizermos um gráfico de  $n(\lambda)$  versus  $\lambda^2$ , os parâmetros  $a$  e  $b$  da Equação (11.2) serão os coeficientes angular e linear, respectivamente.

## Procedimento Experimental

1. Ajuste a lâmpada de mercúrio, de tal forma que ela ilumine a fenda de entrada do goniômetro. Utilizando uma pequena abertura da fenda de entrada, maximize a quantidade de luz que atravessa o goniômetro, olhando na saída com o telescópio posicionado na direção frontal.
2. Abra agora a fenda de entrada de modo a obter uma boa quantidade de luz para realizar o alinhamento do prisma.



**Figura 11.2:** Refração através de um prisma: posicionamento no goniômetro.

O prisma deve ser posicionado conforme a **Figura 11.2**, de tal maneira que os raios de luz provenientes da fonte entrem por uma das faces e saiam pela outra. Você pode procurar o feixe de saída olhando diretamente para a face de saída do prisma, sem o telescópio.

Sugestão: O ângulo de incidência na face de entrada (com relação à normal) para que o feixe saia do prisma é bem grande, acima de 30 graus. O ângulo de espalhamento é bastante grande também, da ordem de 50 graus.

3. Uma vez que o prisma esteja devidamente posicionado, olhe para a luz espalhada através do telescópio, fazendo os ajustes de foco necessários para que uma imagem nítida da fenda de entrada seja obtida.
4. Feche a fenda de entrada para a menor dimensão possível em que você ainda consiga ver a luz espalhada de todas as raia do vapor de mercúrio.
5. Encontre o ângulo de desvio mínimo para cada uma das raia e meça esse ângulo com relação à direção frontal, anotando os respectivos valores de comprimento de onda e ângulo mínimo de espalhamento.

Sugestão: para encontrar o ângulo de desvio mínimo, varie o ângulo de incidência e observe o feixe de saída. O ângulo de incidência pode ser variado, rodando-se a base giratória do goniômetro em que o prisma se encontra. Você verá que, para qualquer ângulo de incidência que permita a saída do feixe, o ângulo de saída nunca será menor do que um determinado valor, que é o ângulo mínimo. O observador fica com a impressão de que o feixe de saída *bate* na posição de mínimo e volta.

### Análise dos dados

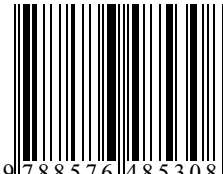
1. Apresente sua tabela de dados, contendo colunas com os valores de  $\lambda$ ,  $\theta_2^{min}(\lambda)$  e  $n(\lambda)$ .
2. Faça um gráfico de  $n(\lambda)$  *versus*  $\lambda^2$  e obtenha os valores dos coeficientes angular e linear.
3. Com os resultados do seu experimento, calcule o valor do índice de refração do material do prisma para  $\lambda = 300$  nm.

### E na próxima aula...

...você começará a estudar as regras básicas da Mecânica Quântica.



ISBN 978-85-7648-530-8



9 788576 485308



**UENF**  
Universidade Estadual  
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense



**FAPERJ**  
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo  
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro



**GOVERNO DO  
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério  
da Educação

