

CIRLENE ROCHA DE OLIVEIRA

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

**Trabalho apresentado ao curso de Formação
Continuada da Fundação CECIERJ –
Consórcio CEDERJ**

**Orientador: Maria Cláudia Padilha Tostes
(Tutora)**

Grupo 1

Série: 9º ano do Ensino Fundamental II

**Rio de Janeiro
2014**

Introdução

O objetivo deste plano de trabalho é apresentar os conceitos iniciais para o estudo da trigonometria. O estudo da trigonometria no nono ano justifica-se pelas suas aplicações práticas e também como preparo para outras atividades que serão posteriormente desenvolvidas no Ensino Médio.

As atividades propostas têm como objetivo levar os alunos a aplicar as razões trigonométricas estudadas para determinar elementos de triângulos retângulos, bem como buscar a percepção do aluno sobre a importância da trigonometria para realizar medições no cálculo de distâncias.

Trabalhar o conteúdo com significado, fazendo-os reconhecer a importância deste estudo para a humanidade, sempre com uma linguagem simples para que o aluno possa estabelecer uma relação dos conhecimentos adquiridos com sua realidade.

Habilidade relacionada

- Compreender o conceito de razão trigonométrica a partir da semelhança de triângulos.
- Calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos de um triângulo retângulo.
- Utilizar razões trigonométricas para resolver problemas do cotidiano.

Pré-requisitos

- Conhecer os elementos do triângulo retângulo: catetos e hipotenusa.
- Conhecer o conceito de razão entre duas grandezas.
- Reconhecer ângulos nos triângulos.
- Conhecer o conceito de semelhança de triângulos.
- Saber trabalhar com régua e transferidor.

Tempo de duração

- 9 aulas (450 minutos)

Recursos educacionais utilizados

- Projetor multimídia, folha de atividades, lápis, borracha, calculadora, transferidor, régua, trena, canudo plástico, fita adesiva, papelão.

Objetivos

Ao final das atividades o aluno deverá ser capaz de:

- Identificar os elementos do triângulo retângulo: cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa.
- Identificar e calcular as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um triângulo retângulo.
- Utilizar a tabela de razões trigonométricas no triângulo retângulo para resolver problemas.
- Aplicar os conhecimentos adquiridos para resolver problemas do cotidiano.
- Ter segurança na própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos.

ATIVIDADE 1 – Por que estudar trigonometria?**1. Videoaula**

Apresentação de vídeoaula com intuito de aguçar a curiosidade do aluno e para que perceba a importância e a aplicação da trigonometria para medir distâncias.

Nesta videoaula os alunos terão o primeiro contato com o teodolito. O professor deverá fazer uma intervenção para saber o conhecimento do aluno sobre este instrumento e, caso seja necessário, fazer associações com o cotidiano, pois é possível que eles já o tenham visto nas ruas e não tenham o conhecimento sobre sua utilidade.

2. Um pouco de história

Fazer a leitura do texto para que o aluno perceba a importância da trigonometria no desenvolvimento da história.

Por que estudar Trigonometria?

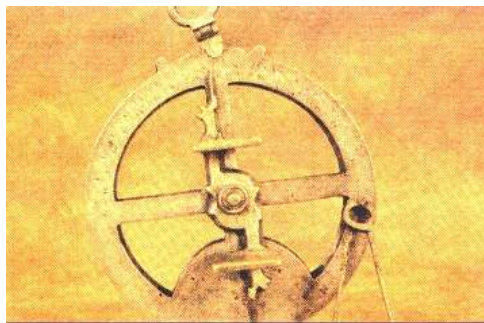
Há situações, em que se deseja efetuar medidas envolvendo objetos que não são diretamente acessíveis. Atualmente, a trigonometria não se limita apenas a estudar os triângulos. Sua aplicação se estende a outros campos da Matemática, como análise, e a outros campos da atividade humana, como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, a Topologia, a Engenharia Civil etc.

Observem algumas situações:

- a. Você já parou para imaginar como os navegadores da antiguidade faziam para calcular a que distância da terra eles encontravam-se enquanto navegavam?
- b. Seria impossível medir a distância da Terra à Lua, porém com a trigonometria se torna simples.
- c. Um engenheiro precisa saber a largura de um rio para construir uma ponte, o trabalho dele é mais fácil quando ele usa dos recursos trigonométricos.
- d. Um cartógrafo (desenhista de mapas) precisa saber a altura de uma montanha, o comprimento de um rio, etc. Sem a trigonometria ele demoraria anos para desenhar um mapa.

Astrolábio (no passado)

Um dos mais antigos instrumentos científicos, que teria surgido no século III a.C. A sua invenção é atribuída ao matemático e astrônomo grego Hiparco.

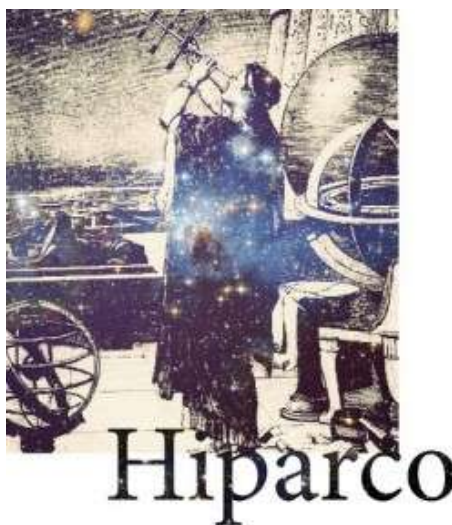
**Teodolito (no presente)**

Instrumento geodésico, que serve para levantar plantas, medir ângulos reduzidos ao horizonte e distâncias.



Pode-se dizer que foi a Astronomia a grande impulsionadora da Trigonometria, pois foi o astrônomo grego Hiparco (190 a.C – 125 a.C) quem empregou pela primeira vez relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

Na Grécia antiga, entre os anos de 190 a.C. e 125 a.C., viveu Hiparco, um matemático que construiu a primeira tabela trigonométrica.



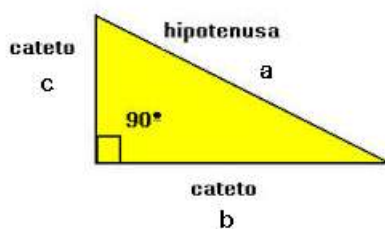
Esse trabalho foi muito importante para o desenvolvimento da Astronomia, pois facilitava o cálculo de distâncias inacessíveis, o que lhe valeu o título de PAI DA TRIGONOMETRIA.

Fonte: <http://www.infoescola.com/matematica/trigonometria>

3. Revisando o Teorema de Pitágoras.

Neste momento após a revisão do Teorema de Pitágoras e sua aplicação, o professor deverá questionar os alunos sobre o item “b” e fazer a diferenciação do problema para o uso da trigonometria no triângulo retângulo, onde não é conhecida a altura do prédio.

Atividade: Relembrando o Teorema de Pitágoras

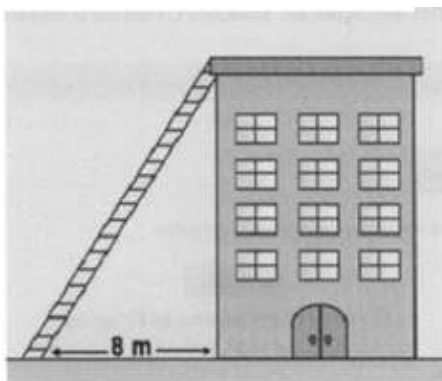


Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- a) Resolva o problema da altura da escada.

A figura abaixo mostra um edifício que tem 15 metros de altura. Qual a altura da escada que está encostada na parte superior do prédio?



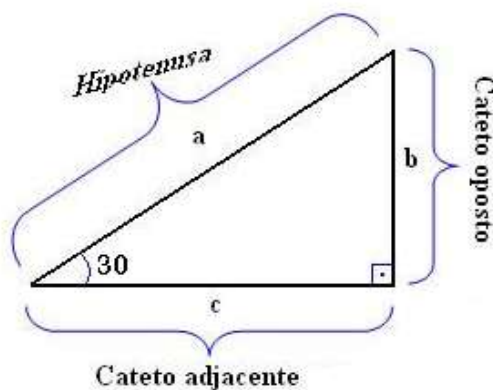
- b) Agora responda: Você acha que seria possível utilizar o Teorema de Pitágoras para descobrir a altura da escada se não soubéssemos a altura do prédio? Por quê?

É importante que o aluno perceba que o Teorema de Pitágoras só pode ser aplicado quando conhecemos dois lados do triângulo.

ATIVIDADE 2 – Identificando os lados de um triângulo retângulo

Antes de começarmos os estudos das razões trigonométricas é preciso que o aluno esteja familiarizado com a nomenclatura dos lados do triângulo retângulo.

Triângulo Retângulo



- Um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos é reto, ou seja, tem 90° .
- Os lados deste triângulo são denominados catetos e hipotenusa.
- A **hipotenusa** é o lado oposto ao ângulo reto do triângulo.

Os outros dois lados do triângulo são chamados **catetos**. Para sabermos se será cateto oposto ou cateto adjacente é preciso levar em consideração a posição do ângulo agudo que está sendo analisado.

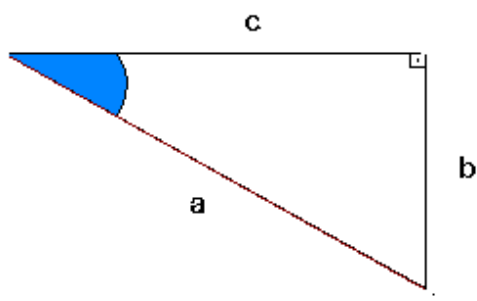
Observe no desenho a posição do ângulo agudo de 30° .

- O lado do triângulo adjacente (junto) ao ângulo de 30° é chamado **cateto adjacente**.
- O lado do triângulo que está na posição oposta ao ângulo de 30° é chamado **cateto oposto**.

Atividade.

Identifique nos triângulos abaixo os catetos e a hipotenusa, sempre analisando a posição dada do ângulo agudo.

a)

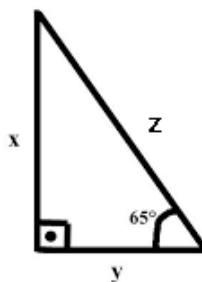


Cateto Oposto: _____

Cateto Adjacente: _____

Hipotenusa: _____

b)



Cateto Oposto: _____

Cateto Adjacente: _____

Hipotenusa: _____

ATIVIDADE 3 – Conhecendo as razões trigonométricas

Esta atividade apresenta as razões trigonométricas e busca no aluno a percepção de que as razões seno, cosseno e tangente são sempre as mesmas, independente do tamanho dos lados do triângulo, desde que os triângulos sejam semelhantes.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

➤ Seno de um ângulo agudo

Em um triângulo retângulo qualquer, o seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a ele e a medida da hipotenusa.

Escrevemos assim:

$$\text{Seno} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

➤ Cosseno de um ângulo agudo

Em um triângulo retângulo qualquer, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a ele e a medida da hipotenusa.

Escrevemos assim:

$$\text{Cosseno} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

➤ Tangente de um ângulo agudo

Em um triângulo retângulo qualquer, o **tangente** de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a ele.

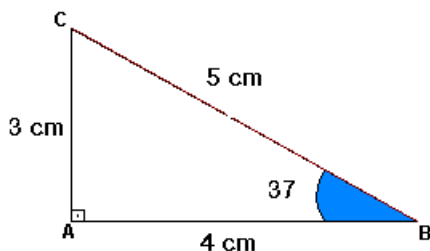
Escrevemos assim:

$$\text{Tangente} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

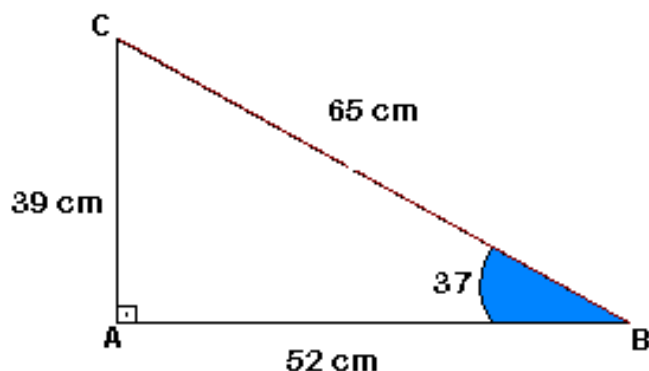
Atividade.

Em cada triângulo identifique os lados como cateto oposto, cateto adjacente, hipotenusa e depois, com o auxílio da calculadora, calcule as razões seno, cosseno e tangente referente ao ângulo de 37° .

a)



b)



É importante que o aluno perceba que todos os valores encontrados para as razões seno, cosseno e tangente são iguais para os dois triângulos, uma vez que se trata de triângulos semelhantes.

Neste momento será apresentada a tabela trigonométrica dos ângulos agudos, que servirá como material de consulta na resolução de situações-problema.

- c) Agora, consulte a tabela trigonométrica abaixo e verifique se os valores encontrados por você no item anterior estão corretos.

Tabela trigonométrica dos ângulos agudos

Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,682	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,766	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,788	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,809	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,829	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,848	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,515	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,866	0,5	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,309	0,9511	0,3249	63°	0,891	0,454	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,342	0,9397	0,364	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,404	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,342	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,454	0,891	0,5095	72°	0,9511	0,309	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5	0,866	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,515	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,848	0,6249	77°	0,9744	0,225	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,829	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,809	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,788	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,766	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,682	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-

ATIVIDADE 4 – Conhecendo os Ângulos Notáveis

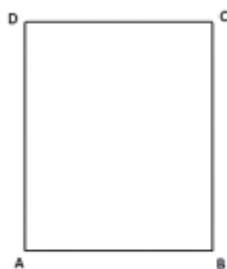
O objetivo principal desta atividade é desconstruir a cultura de decorar fórmulas e tabelas, auxiliando o aluno a encontrar as razões trigonométricas dos ângulos notáveis 30° , 45° e 60° com o auxílio da geometria.

Para esta atividade será necessário que o professor leve para sala de aula triângulos equiláteros desenhados através da ferramenta de desenho do Word.

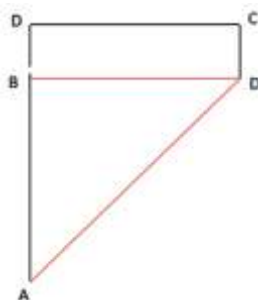
Atividade.

Obtendo um quadrado (via dobradura):

1. Tome uma folha de papel. Note que esta folha tem a forma de um retângulo. A figura a seguir representará esta folha:



2. Leve o segmento AB até o lado AD, para isto você deverá fixar o ponto A e deslizar o ponto B de modo que a semi-reta AB coincida com a semi-reta AD:



3. Recorte o segmento BD da folha de papel, abra o triângulo ABD, então teremos um quadrado.

- a) Agora que temos triângulo equilátero, desenho que foi entregue pelo professor, e quadrado, trace uma semirreta representando a altura do triângulo e uma na diagonal de cada quadrado. Em seguida, marque todos os ângulos internos das duas figuras.
- b) Tente achar as medidas dos senos, cossenos e tangentes de todos os ângulos do triângulo, obtidos no item anterior, a partir das fórmulas já estudadas. Lembre-se que só deve medir com o auxílio de uma régua, os lados dos triângulos e que todos os demais segmentos (alturas e diagonais) devem ser calculados a partir dos lados do triângulo equilátero e do quadrado. Que tal usar o teorema de Pitágoras sempre que for necessário. Pense junto com seus colegas em como fazer isso.
- d) Agora, anote as medidas que encontrou em tabelas como a amostrada abaixo. Faça uma tabela para cada triângulo traçado e compare as medidas encontradas.

	30°	45°	60°
Seno			
Cosseno			
Tangente			

Neste momento os alunos devem perceber que independente do tamanho dos triângulos os valores do seno, cosseno e tangente de cada ângulo notável não se alteram.

- e) Agora, compare as medidas anotadas nas suas tabelas com aquelas anotadas nas tabelas dos seus colegas. Há alguma semelhança entre os valores?

É importante chamar a atenção que os valores podem estar aproximados devido aos instrumentos de medidas e aos cálculos

realizados. Mas, que os valores dos senos cossenos e tangentes de cada ângulo coincidem a menos de um erro de arredondamento numérico.

- f) Observe agora as medidas dadas na tabela abaixo. Com o auxílio da calculadora verifique se esses valores coincidem com os seus e com os dos seus colegas.

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Agora, eles terão a oportunidade de perceber que os valores da tabela dos ângulos notáveis com os números irracionais coincidem com os valores encontrados por eles, a menos de um erro de arredondamento.

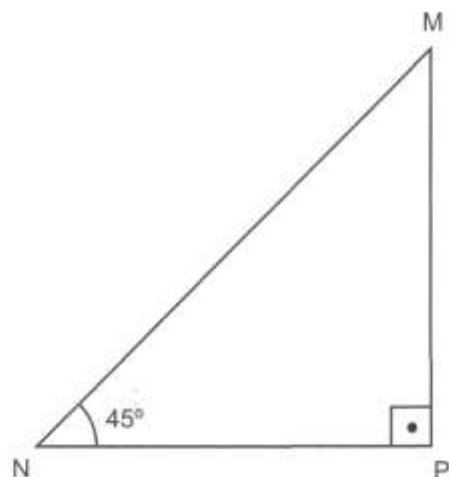
ATIVIDADE 5 – Praticando o conhecimento

Esta atividade visa pôr em prática todos os conceitos trabalhados sobre as relações trigonométricas no triângulo retângulo e o uso da tabela trigonométrica dos ângulos agudos, através da resolução de situações-problemas que envolvam seno, cosseno e tangente.

Atividade

Questão 1.

Observe o triângulo MNP desenhado abaixo, no qual o lado MN mede 3 m.

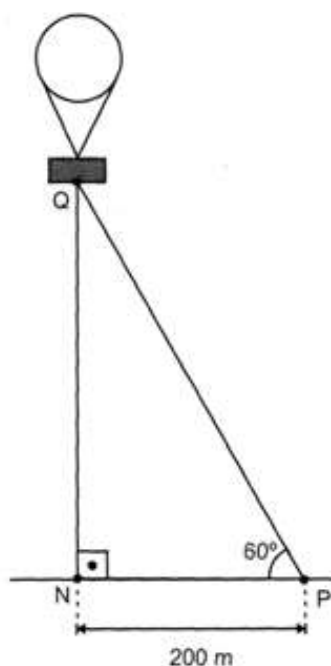


<p>Dado:</p> $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$
--

Qual é a medida do lado NP desse triângulo?

Questão 2.

Um balão inicia uma subida vertical a partir do ponto N. No instante em que esse balão passa pelo ponto Q, José, cuja posição está representada pelo ponto P, avista esse balão segundo um ângulo de 60° . O desenho abaixo ilustra essa situação, na qual os pontos P e N encontram-se no mesmo plano horizontal.



<p>Dado:</p> $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$

Nesse instante, qual é a medida da distância \overline{PQ} entre José e o balão?

Questão 3.

Observe no esquema abaixo os cruzamentos de algumas ruas do bairro onde Júlia mora. Nesse bairro, as ruas Japão e Salvador são perpendiculares e as ruas Goiás e Salvador se cruzam formando um ângulo de 30° . A medida do comprimento da rua Salvador, entre as ruas Goiás e Japão, é 400 m.



Considerando que todas as ruas são retas e estão no mesmo plano, qual é a medida do comprimento x da rua Japão, entre as ruas Goiás e Salvador?

ATIVIDADE 6 – Trigonometria em ação

Nesta atividade o aluno terá a oportunidade de vivenciar e pôr em prática todo o conhecimento adquirido. Através da construção do teodolito caseiro, com materiais de baixo custo, será possível despertar o interesse do aluno para explorar a Matemática experimental, e com isso valorizar o que está sendo aprendido em sala de aula, deixando de ser simplesmente um conteúdo vazio e sem sentido para o aluno.

Atividade.**Construindo um teodolito caseiro**

O teodolito é um instrumento óptico de medida composto por uma mira móvel e dois círculos graduados (de 0° a 360°), localizados em planos perpendiculares. Utilizado na topografia, na geodésia e na agrimensura para

realizar medidas de ângulos verticais e horizontais, usados em rede de triangulação.



Geodésia: é uma ciência, parte da Cartografia, que trata das medidas na superfície da Terra e, por extensão, em qualquer corpo celeste.

Agrimensura: avaliação das superfícies das terras. Medir e demarcar terras.

Materiais necessários:

- 1 copo descartável com tampa
- 1 palito de churrasco
- 1 canudo
- Cópia de um transferidor de 360°
- Papelão no tamanho 15 x 15 cm

Montando o teodolito

- Cole a cópia do transferidor no papelão.
- Cole a tampa do copo no centro do transferidor.
- Faça o furo no copo, de maneira que o palito ultrapasse os dois lados do copo.
- Cole o canudo no fundo do copo, de modo a ficar paralelo ao palito de churrasco.

Veja abaixo a imagem do teodolito pronto.



Agora, com o teodolito já montado poderemos dar início às atividades.

Será preciso ter em mãos: lápis, borracha, papel, calculadora e a tabela trigonométrica dos ângulos agudos.

1ª atividade: Pode ser realizada dentro da sala de aula.

Os alunos podem medir o ângulo formado por dois pontos (alvos) quaisquer, tanto na horizontal como na vertical.

2ª atividade: Realizada fora da sala de aula.

Propor aos alunos que, com os instrumentos construídos, treinas para a medição de comprimentos e tabelas trigonométricas, encontrem a altura da escola, de escadas, trava do gol na quadra de esportes e outras que não possam ser obtidas diretamente.

Observações importantes.

- É preciso primeiro mirar na horizontal para posicionar o transferidor, e a seguir deslocar a mira para o ponto extremo do que se quer medir.

Lembrar aos alunos que, para o cálculo de alturas, deve ser acrescentada a altura entre o chão e os olhos da pessoa que faz a medição.

Avaliação

A proposta de avaliação é uma avaliação qualitativa e não quantitativa.

O professor, através da observação das atividades com o teodolito, deverá avaliar a aprendizagem dos conceitos adquiridos pelos alunos, e sua aplicação nas tarefas propostas.

Após a realização de todas as tarefas solicitar aos alunos que preencham a ficha de autoavaliação, cujo objetivo é fazer com que os alunos percebam o próprio desenvolvimento de suas aprendizagens, bem como o professor também poderá avaliar o êxito do trabalho desenvolvido, podendo buscar melhorias e ajustes caso sejam necessárias.

Habilidades e competências esperadas:

- Identificar os elementos do triângulo retângulo: cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa.
- Identificar e calcular as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de um triângulo retângulo.
- Utilizar a tabela de razões trigonométricas no triângulo retângulo para resolver problemas.

FICHA DE AUTOAVALIAÇÃO




Data: ____/____/____

Aluno(a): _____

Turma: _____

Professor: _____

Trigonometria do triângulo retângulo

Competências, atitudes e comportamento. (o que eu aprendi)			
Estive atento às explicações.			
Demonstrei interesse pelo assunto tratado.			
Dei minha opinião e respeitei a dos outros.			
Relacionei-me bem com meus colegas e professor.			
Participei das atividades solicitadas.			
Fui capaz de organizar e realizar o trabalho sozinho.			
Tentei corrigi meus erros.			
Trabalhei de forma organizada e limpa.			
Consegui reconhecer os lados do triângulo (cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa).			
Consegui calcular as razões de seno, cosseno e tangente.			
A calculadora foi um instrumento útil para facilitar a aprendizagem.			
Consegui identificar na tabela trigonométrica os valores das razões, de acordo com o ângulo pedido.			
Consegui ler e interpretar as situações-problema.			
As questões apresentadas foram de fácil entendimento.			
A construção do teodolito foi bem explicada.			
Consegui utilizar a trena para medir as distâncias.			
Consegui identificar os ângulos utilizando o teodolito.			
Foi fácil aplicar a trigonometria no cálculo dos experimentos.			
O conhecimento adquirido foi relevante e poderei aplicá-lo facilmente em outras situações.			
Resumindo, posso classificar todo meu trabalho e minha aprendizagem como:			

Gostaria ainda de dizer que: _____

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GRANJA, Carlos Eduardo & **PASTORE**, José Luiz. **Atividade experimentais de matemática nos anos finais do Ensino Fundamental**. 1ª Edição. São Paulo: Edições SM Ltda.

Obra concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. **Projeto Araribá Matemática**. 9º ano. 3ª edição. São Paulo: Moderna, 2010.

ANDRINI, Álvaro & **VASCONCELOS**, Maria José. **Praticando Matemática**. Volume 4. 1ª Edição. São Paulo: Ed. Do Brasil, 2006.

Autoavaliação. Como ajudar seus alunos. Revista Nova escola. Disponível em: < <http://revistaescola.abril.com.br/formacao/autoavaliacao-como-ajudar-seus-alunos-nesse-processo-planejamento-538875.shtml?page=1> >. Acesso em 09 setembro 2014.

Fundação CECCIERJ. Consórcio Cederj. Roteiro de ação 5. Razões trigonométricas no triângulo retângulo. 9º ano. 3º Bimestre.

Utilizando as relações trigonométricas. Novo Telecurso. Aula 44. Disponível em: < <http://www.infoescola.com/matematica/trigonometria/> >. Acesso em 06 setembro 2014.

História e aplicações da trigonometria. Infoescola. Disponível em: < <http://www.infoescola.com/matematica/trigonometria/> >. Acesso em 06 setembro 2014.