GOVERNO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA

PLANO DE TRABALHO SOBRE

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULOS RETÂNGULO

TAREFA 2

MARLON VINICIUS SPILARI DA SILVA

SÃO GONÇALO/RJ

Introdução

Este plano de trabalho tem como objetivo permitir os alunos de turmas de 9º do ensino fundamental a conhecer os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo e sua aplicabilidade no seu cotidiano.

O conceito será introduzido com a história dos criadores e o surgimento dos conceitos da trigonometria. Através do recurso da história da matemática pretende despertar o interesse do alunado ao assunto abordado, já que é um conteúdo novo e geralmente de difícil entendimento. Após, serão demonstradas e apresentadas as definições das razões trigonométricas através de semelhança de triângulo, aplicar-se-á em resolução de problemas com ângulos notáveis e não notáveis.

Este plano de trabalho se dividirá da seguinte forma:

- 150 minutos para apresentação da história da matemática, a ideia de trigonometria, seu surgimento, aplicação e definição das razões trigonométricas.
- 100 minutos para construção e aplicação dos ângulos notáveis.
- 100 minutos para Resolução de problemas com ângulos notáveis e não-notáveis.
- 50 minutos para avaliação individual.

Atividade 1

- HABILIDADE RELACIONADA: Identificação de razões trigonométrica.

- PRÉ-REQUISITOS: Resolução de equações, Razão e Teorema de Pitágoras.

- TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos

- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: *Datashow* e livro didático.

- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

- OBJETIVOS: Mostrar através da história da matemática a importância do tema que será estudado e sua aplicabilidade em assuntos do cotidiano introduzindo os conceito de seno, cosseno e tangente. E Apresentar para aos alunos a importância que as relações trigonométricas desempenham nas medidas indiretas de distâncias.

<u>Metodologia</u>

Apresentar, em d*atashow,* a história sobre o surgimento e aplicabilidade da trigonometria:

A origem da trigonometria

Não se pode precisar a origem da trigonometria. Como toda área da matemática, a trigonometria surgiu por diversos estudiosos, principalmente através do estudo da astronomia, agrimensura e navegação. Povos como os egípcios e os babilônios deram importantes contribuições para a descoberta e aperfeiçoamento desse ramo matemático tão importante à época, bem como em dias atuais.

No *Papiro Rhind*, documento egípcio que data de aproximadamente três mil anos, foram encontrados problemas relacionados à cotangente. Na tábua cuneiforme *Plimpton*

322, tábua babilônia com texto escrito entre 1900 e 1600 a.C., foram localizados problemas envolvendo secantes.


Ptolomeu

Euclides de Alexandria, em sua obra mundialmente conhecida, *Os Elementos*, apresentou alguns conceitos trigonométricos, porém representados através de formas geométricas. Mas foi Hiparco de Nicéia, na segunda metade do século II a.C., quem recebeu o título de *Pai da Trigonometria*, isso porque apresentou um tratado com cerca de 12 volumes nos quais tratava da trigonometria com a autoridade de quem conhecia profundamente o assunto. Naquele mesmo período, Hiparco apresentou ao mundo uma tábua de cordas, sendo ele o responsável pela elaboração da primeira tabela trigonométrica que se tem registro. Ainda naquela época, Ptolomeu apresentou sua tábua de cordas contendo o cálculo do seno dos ângulos de 0º a 90º, ângulos que seriam utilizados nos estudos astronômicos em que ele estava engajado. Hiparco e Ptolomeu deram imensas contribuições para o desenvolvimento da Matemática e da Astronomia.

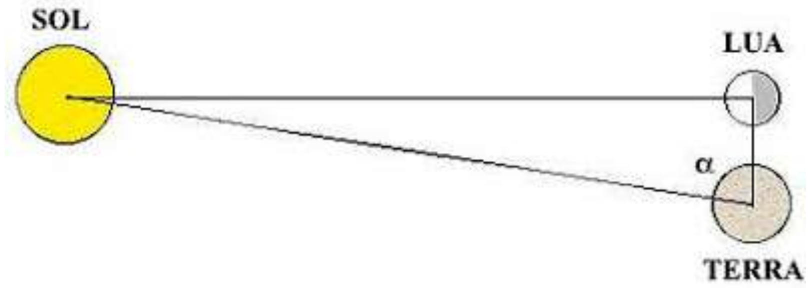
Hiparco, ao lado de Ptolomeu, é, sem dúvida, um dos nomes mais ilustres dos estudos antigos da trigonometria. É atribuída a ele, também, a divisão do círculo em 360º. Advindos do estudo da Astronomia surgiram os conceitos de *seno* e *cosseno*. A tangente supostamente surgiu da necessidade de se calcular alturas e/ou distâncias.

A obra matemática mais influente da antiguidade foi escrita pelo astrônomo e matemático Ptolomeu de Alexandria, a *Syntaxis Mathematica*, obra de 13 livros relacionados à trigonometria. Ainda em terreno grego, *Menelau de Alexandria*escreveu três volumes destinados ao estudo da trigonometria, sendo o primeiro atido à ideia de triângulos esféricos, o segundo é uma aplicação da geometria esférica a astronomia e o terceiro trata do *Teorema de Menelau*.

Após um breve um debate e comentários sobre os *slides*, apresentar a seguinte situação:

Qual a distância Terra-Sol?

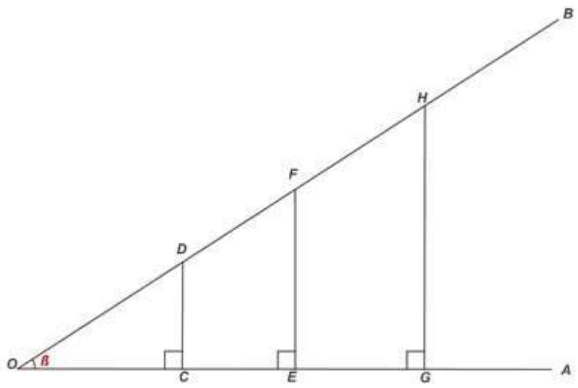
Aristarco também calculou a distância Terra-Sol. Ele mediu o valor do ângulo subentendido entre a direção Terra-Lua (alfa, na figura abaixo), que é a separação angular Sol-Lua. Ele assumiu ainda, que no quarto crescente (ou minguante) o ângulo entre a direção Terra-Lua e a direção Lua-Sol é reto.



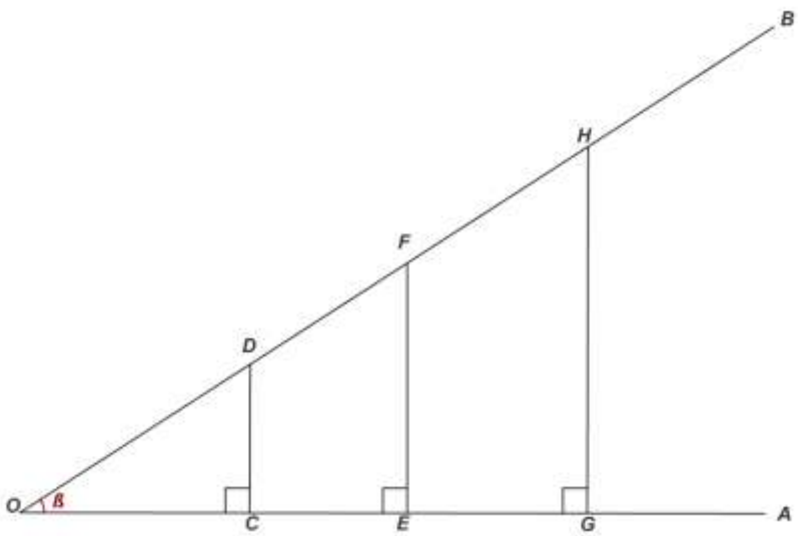
Outra vez utilizando uma das propriedades de triângulos deste tipo, que relaciona razão entre dois lados e alfa, foi possível calcular a distância pretendida. A medida de alfa feita por ele, utilizando o instrumento disponível na época, deu alfa = 87 graus. Com isto ele encontrou a distância Terra-Sol como sendo cerca de 20 vezes a distância Terra-Lua. O valor de alfa medido por instrumentos modernos é 89.8 graus, o que dá para a distância Terra-Sol aproximadamente 150 milhões de quilômetros, ou seja, quase 400 vezes a distância Terra-Lua. O procedimento estava correto, mas o instrumento de medição de ângulos utilizado por ele é que não permitiu obter valor mais preciso.

Depois desta aplicação, definir o que é seno, cosseno e tangente através de semelhança de triângulos.

Seno através da semelhança de triângulos



Façamos uma construção de triângulos semelhantes para analisarmos as proporcionalidades dessa semelhança.



Você consegue identificar três triângulos semelhantes? Veja que na imagem acima temos três triângulos retângulos: ∆DOC, ∆FOE, ∆HOG.

Em um dos casos de semelhança de triângulos têm-se a necessidade de termos dois ângulos congruentes, isso nos dá a garantia de que os triângulos são semelhantes.

Portanto, note que nos três triângulos podemos aplicar esse caso de semelhança, pois o ângulo β é comum a todos os triângulos e todos eles possuem um ângulo reto. Sendo assim, vejamos algumas razões de proporcionalidade que teremos em razão de serem triângulos semelhantes.

$$\frac{DC}{OD} = \frac{FE}{OF} = \frac{HG}{OH}$$

Como estes triângulos são semelhantes, podemos afirmar que estas razões são iguais entre si e resulta um valor em comum, ou seja:

$$\frac{DC}{OD} = \frac{FE}{OF} = \frac{HG}{OH} = k \ \ (constante)$$

Contudo, temos que os segmentos DC, FE, HG constituem os catetos opostos ao ângulo β. Os segmentos OD, OF, OH são as hipotenusas dos triângulos ΔDOC, ΔFOE, ΔHOG, respectivamente.

Logo, temos:

$$sen\ \beta = \frac{DC}{DC} = \frac{FE}{OF} = \frac{HG}{OH}$$

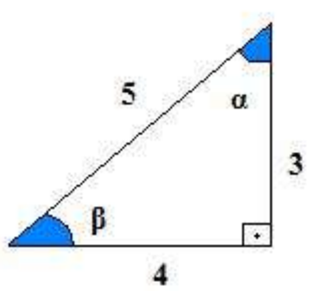
$$sen\ \beta = \frac{medida\ do\ cateto\ oposto\ ao\ ângulo\ \beta}{medida\ da\ hipotenusa}$$

Também, através de semelhança nestes triângulos pode-se deduzir o cosseno e a tangente de **β**.

Aplicações:

Exemplo1

Determine os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos do triângulo abaixo.



Solução: Temos que

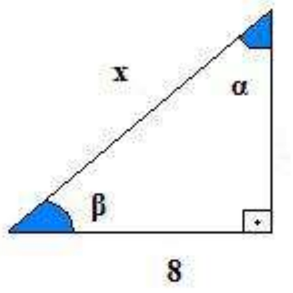
$$sen\,\alpha = \frac{4}{5} \qquad sen\,\beta = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \qquad \cos\beta = \frac{4}{5}$$

$$tg\,\alpha = \frac{4}{3} \qquad tg\,\beta = \frac{3}{4}$$

Exemplo2

Sabendo que sen α =1/2 , determine o valor de x no triângulo retângulo abaixo:



Solução: A hipotenusa do triângulo é x e o lado com medida conhecida é o cateto oposto ao ângulo α. Assim, temos que:

$$sen\,\alpha = \frac{8}{x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{8}{x}$$

$$x = 16$$

Exercícios de fixação: Utilizar os exercícios do livro didático

Atividade 2

- HABILIDADE RELACIONADA: Utilização de tabela relacionada ao tema.

- PRÉ-REQUISITOS: Resolução de equações, Razão e Teorema de Pitágoras.

- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos

- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático.

- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

- OBJETIVOS: Construir e utilizar a tabela dos ângulos notáveis.

Metodologia

Quando nos deparamos com um triângulo equilátero, temos a certeza de que se trata também de um triângulo equiângulo, pois os três ângulos são iguais. Sabendo que a soma dos ângulos de um triângulo qualquer é 180°, podemos chamar os ângulos de nosso triângulo por x. Sendo assim:

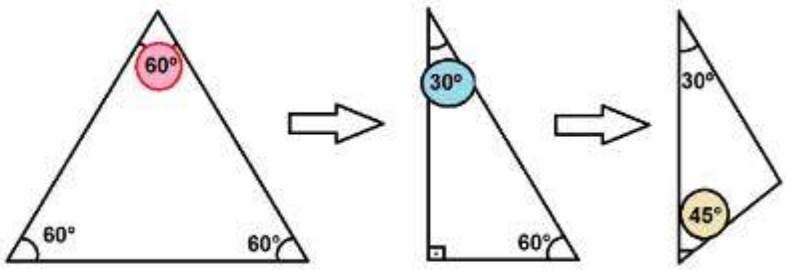
$$x + x + x = 180°$$

$$3x = 180°$$

$$x = \frac{180°}{3}$$

$$x = 60°$$

Portanto, podemos concluir que os ângulos de nosso triângulo equilátero são iguais a 60°. Se traçarmos a bissetriz de um dos ângulos e também a altura do mesmo lado, veremos que elas coincidem, isto é, por se tratar de uma bissetriz, ela dividirá um ângulo de 60° ao meio e formará um ângulo de 90° com o lado oposto ao ângulo, podendo essa reta ser classificada como altura. Haverá a formação de dois triângulos idênticos. Realizando a análise de um desses, veremos que é um triângulo formado pelos ângulos 30°, 60° e 90°. Se traçarmos a bissetriz referente ao ângulo de 90°, formaremos um novo triângulo, agora com um ângulo de 45°. Esses ângulos destacados são chamados de ângulos notáveis. O processo descrito para encontrar esses ângulos pode ser visualizado na figura a seguir:



Ao trabalharmos com exercícios sobre trigonometria, vamos nos deparar com diversas questões que exigem conhecimento acerca das razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) de ângulos notáveis. A partir delas, podemos encontrar as razões trigonométricas de outros ângulos. Vamos começar o processo de montagem da tabela de razões trigonométricas dos ângulos notáveis:

1°) Organize a tabela! Nos elementos da primeira linha, coloque as razões trigonométricas:

	sen	cos	tg
30°			
45°			
60°			

Organizando a tabela de razões trigonométricas para os ângulos notáveis

2°) Desce e Sobe! Agora, preenchemos a coluna do seno de cima para baixo e a do cosseno de baixo para cima com a sequência numérica 1, 2, 3. A tabela ficará da seguinte forma:

	sen	cos	tg
30°	1	3	
45°	2	2	
60°	3	1	

Começando a preencher as colunas de seno e cosseno

3°) Olhe a raiz! Nós vamos agora preencher o símbolo da raiz para todos os números, exceto para o 1. Feito isso, escrevemos todos esses números como frações, de modo que todos tenham denominador igual a dois. Vejamos como ficará:

	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	

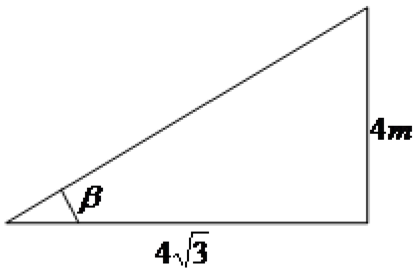
Concluindo as razões seno e cosseno para os ângulos notáveis

4°) Tudo muda na Tangente! Na coluna da tangente, a regra muda. Nós usaremos o sentido de cima para baixo. Para preencher, devemos colocar “raiz de três sobre três, um e raiz de três.” Assim sendo:

	sen	cos	tg
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Exemplo 1:

Um poste de 4 metros de altura projeta uma sombra de 4√3 metros sobre o solo. Qual é a inclinação dos raios luminosos que originaram a sombra?



$$tg\beta = \frac{4}{4\sqrt{3}}$$

$$tg\beta = \frac{4}{4\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$tg\beta = \frac{4\sqrt{3}}{4*3}$$

$$tg\beta = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow 30^o$$

A inclinação dos raios solares é de 30º.

Exemplo 2:

(Unifor-CE) No instante em que o ângulo de elevação do Sol acima do horizonte é de 60°, a sombra de um poste mede 2 m, como mostra a figura.

A altura desse poste é de, aproximadamente:

a) 4,1 m b) 3,8 m c) 4,0 m d) 3,4m e) 3,2m

Exercícios de fixação: Utilizar os exercícios do livro didático

Atividade 3

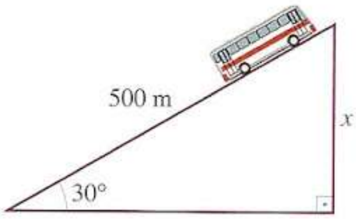
- HABILIDADE RELACIONADA:
- PRÉ-REQUISITOS: Resolução de equações, Razão e Teorema de Pitágoras.
- TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos
- RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.
- OBJETIVOS: Aplicar os conceitos de seno, cosseno e tangente de ângulos não notáveis através da tabela das razões trigonométricas de 1º a 90º.

Metodologia

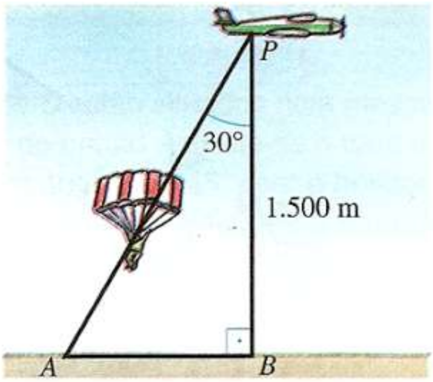
Com o uso da tabela das razões trigonométricas de 1º a 90º, resolver as seguintes questões:

Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,682	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,766	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,788	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,809	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,829	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,848	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,515	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,866	0,5	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,309	0,9511	0,3249	63°	0,891	0,454	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,342	0,9397	0,364	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,404	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,342	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,454	0,891	0,5095	72°	0,9511	0,309	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5	0,866	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,515	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,848	0,6249	77°	0,9744	0,225	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,829	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,809	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,788	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,766	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,682	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-

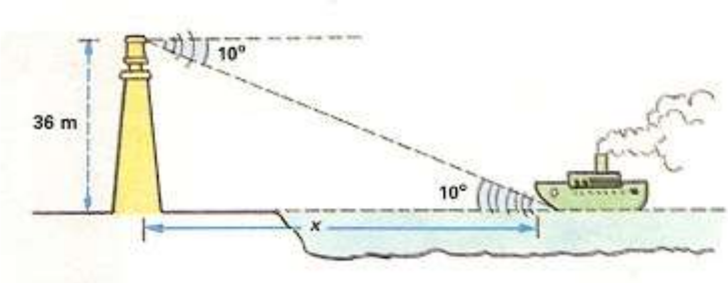
1) Um ônibus sobe uma rampa que forma com a horizontal um ângulo de 30°. Tendo percorrido 500 m, o ônibus se encontra a que altura em relação à horizontal?



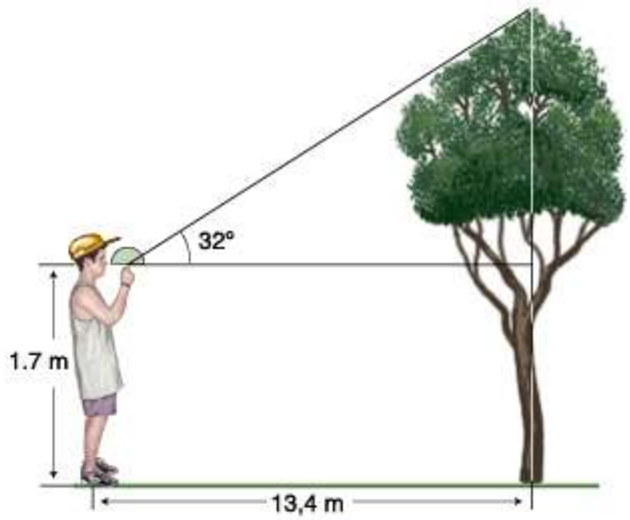
2) Um paraquedista salta de um avião quando este se encontra a 1500 m de altura. Devido à velocidade do avião e da ação do vento, o paraquedista cai conforme indica o segmento PA, inclinado 30° em relação a PB(conforme figura abaixo). A que distância do ponto B o paraquedista vai cair?



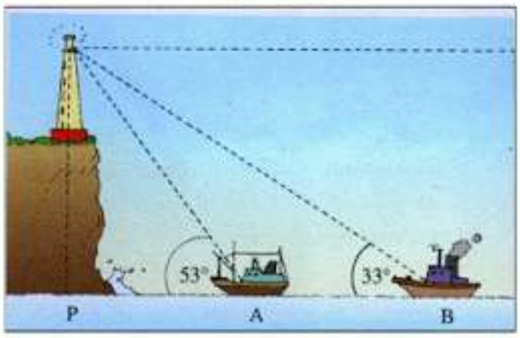
3) Sob um ângulo de depressão de 10° avista-se do alto de um farol, cuja altura é de 36m, um navio. A que distância do farol se encontra tal navio?



4) Deu cupim no pé da árvore e agora, infelizmente, será preciso derrubá-la. Antes, os bombeiros deverão estimar sua altura para saber se, na queda, ela não atingirá as casas vizinhas. Qual é a altura aproximada da árvore?



5) Os tripulantes dos barcos A e B avistam o topo do farol segundo ângulos de 53º e 33º respectivamente. Sabendo que o farol se encontra a 125m de altura, determine a distância entre os dois barcos.



Avaliação

A avaliação dos assuntos abordados neste plano de trabalho se dará pela participação na realização das atividades feitas em sala de aula.

Além da participação, será aplicada uma avaliação escrita e individual (50 minutos) para verificação da assimilação do conteúdo estudado.

Também serão pontuados os acertos das questões relacionados ao tema de razões trigonométricas na prova do SAERJINHO.

Referências bibliográficas

ANDRINI, Álvaro. **Praticando a Matemática.** Editora do Brasil. 2012.

CENTURIÓN, Marília. **Matemática - teoria e contexto**. Editora Saraiva. 2012.

A história da trigonometria, disponível em: <http://www.infoescola.com/matematica/historia-da-trigonometria/> Acessado em 05/09/2014

<http://www.alunosonline.com.br/matematica/razoes-trigonometricas-para-angulos-notaveis.html > Acessado em 05/09/2014

<http://www.alunosonline.com.br/matematica/aplicacoes-da-trigonometria.html> Acessado em 05/09/2014

<http://www.alunosonline.com.br/matematica/relacoes-trigonometricas-no-triangulo-retangulo.html> Acessado em 05/09/2014

<http://matematicosdemogi.blogspot.com.br/2014/09/plano-de-aula-razoes-trigonometricas.html> Acessado em 07/09/2014

<http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo3/tabela_trigonom.html> Acessado em 07/09/2014

<http://trigonometriaemfoco.blogspot.com.br/2009/04/atividades-envolvendo-as-razoes.html> Acessado em 07/09/2014