FUNDAÇÃO CECIERJ/CONSÓRCIO CEDERJ

FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

PLANO DE TRABALHO – Círculo, Circunferência e Razões Trigonométricas no triângulo retângulo.

Claudia Valin dos Santos

Rio de Janeiro
2014

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como finalidade compreender o conceito de razão trigonométrica a partir da semelhança de triângulos, calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo, utilizar as razões trigonométricas para resolver problemas do cotidiano, reconhecer e diferenciar círculo e circunferência, identificando seus elementos e identificar o número (pi).

A presença cada vez maior da Matemática nas atividades humanas torna seu aprendizado fundamental para a inserção do cidadão no mundo do trabalho e das relações sociais.

No dia-a-dia as aulas, estão cada vez mais mecânicas. Tanto os alunos quantos os professores se limitam a decorar as fórmulas e a enunciar alguns códigos matemáticos que são aplicados a um grupo de regras.

O objetivo da matemática, na realidade, não é formar apenas gênios do cálculo, mas espera-se que a matemática contribua para a formação de um cidadão atuante.

Esse trabalho aborda os seguintes itens: contexto histórico, definições e roteiros de atividades, tudo envolvendo os conteúdos de círculo, circunferência e razões trigonométricas no triângulo retângulo..

Como esse trabalho envolve triângulos, serão necessários que os alunos tenham domínio sobre as propriedades básicas dos triângulos.

DESENVOLVIMENTO: ATIVIDADE 1

Duração prevista: 50 minutos.

Pré-requisitos: O aluno deve conhecer o conceito de semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras.

Recursos Pedagógicos: Folha de atividades, lápis de cor ou caneta hidrográfica e calculadora.

Organização da classe: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

Objetivo: Determinar a tangente, o seno e o cosseno de um ângulo agudo de um triângulo retângulo.

Habilidades: Compreender o conceito de razão trigonométrica a partir da semelhança de triângulos. Calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos agudos de um triângulo retângulo.

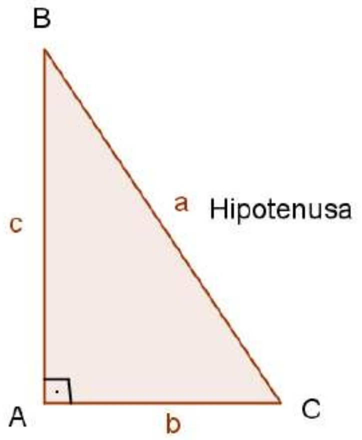
Metodologia:

Um pouco de História

A palavra Trigonometria tem origem grega e seu significado está ligado às medidas de um triângulo (trigonos: triângulo e metrein: medidas). É a área da Matemática onde se estuda as relações existentes entre os lados e os ângulos de um triângulo. Ela surgiu devido às necessidades da Astronomia, para calcular o tempo e se desenvolveu na Geografia e Navegação. Os estudos iniciais estão relacionados aos povos babilônicos e egípcios, sendo desenvolvidos pelos gregos e indianos. Através da prática, conseguiram criar situações de medição de distâncias inacessíveis. Hiparco de Niceia, que viveu em cerca de 120 AC, considerado o fundador da Trigonometria, foi um astrônomo grego, que introduziu a Trigonometria como ciência. Por meio de estudos ele implantou as relações existentes entre os elementos do triângulo. O Teorema de Pitágoras possui papel importante no desenvolvimento dos estudos trigonométricos, pois é através dele que desenvolvemos fórmulas teóricas comumente usadas nos cálculos relacionados a situações práticas cotidianas.

Elementos do Triângulo Retângulo

Todo triângulo retângulo apresenta um ângulo reto e dois agudos. O triângulo *ABC* da figura abaixo é retângulo em *A*.

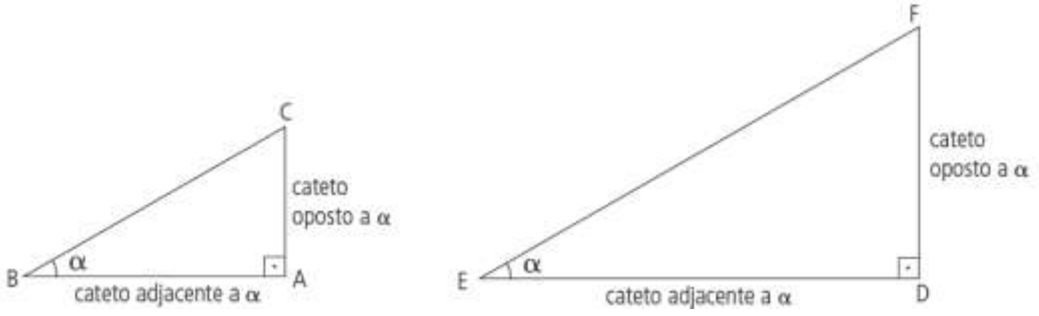


a = medida da hipotenusa (lado oposto ao ângulo de 90º)

b e **c** = medidas dos catetos

Encontrando as razões trigonométricas através da semelhança de triângulos

Traçamos dois triângulos retângulos semelhantes: (ABC ~ DEF). São semelhantes pois têm um ângulo de medida (alfa) e um ângulo reto. Identificamos em cada triângulo o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo marcado.



AC e DF são chamados de cateto oposto porque são os lados opostos ao ângulo alfa.

AB e DE são chamados de cateto adjacente (Adjacente quer dizer: junto) porque são os lados mais próximos do ângulo alfa.

Demonstrando

Os lados correspondentes são proporcionais, certo?

$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$$

Multiplicamos os termos da proporção em cruz:

AC . DE = DF . AB

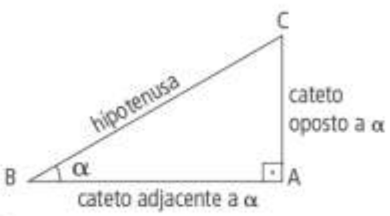
E escrevemos outra proporção:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

A razão acima chama-se tangente.

Ainda há mais duas relações para descobrirmos. Veja abaixo os triângulos que nos levaram à tangente do ângulo alfa.

Podemos escrever outras duas proporções a partir dos lados correspondentes:



$$\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

$$AC \cdot EF = DF \cdot BC$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

$$AB \cdot EF = DE \cdot BC$$

Assim, chegamos a uma nova proporção em cada caso:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DF}{EF} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

A razão acima chama-se seno

$$\frac{AC}{BC} = \frac{DE}{EF} = \frac{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

A razão acima chama-se cosseno

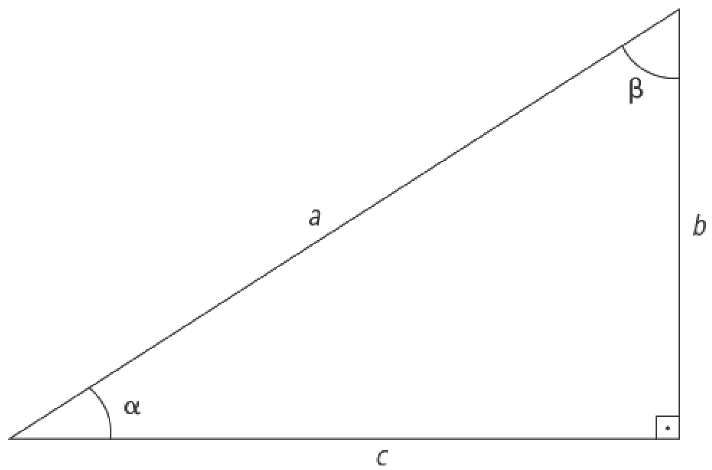
Logo,

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto de } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\cos\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente de } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto de } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente de } \alpha}$$

Considere o triângulo abaixo.



a) Qual é a hipotenusa?

____

b) Qual é o cateto oposto a α?

____

c) Qual é o cateto adjacente a α ?

____

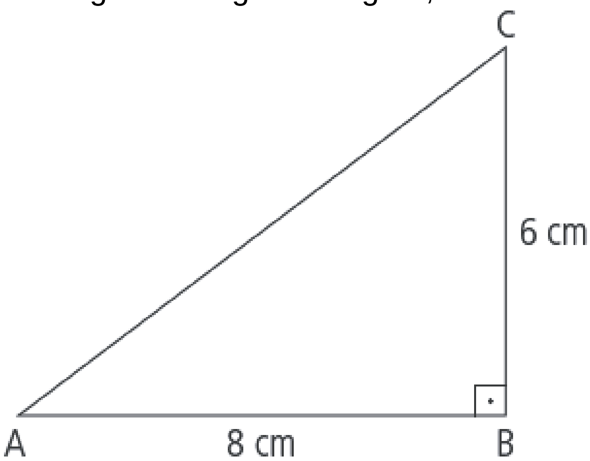
d) Qual é o cateto oposto a β?

____

e) Qual é o cateto adjacente a β?

____

No triângulo retângulo da figura, calcule os valores de:



a) sen Å6

b) cos Å

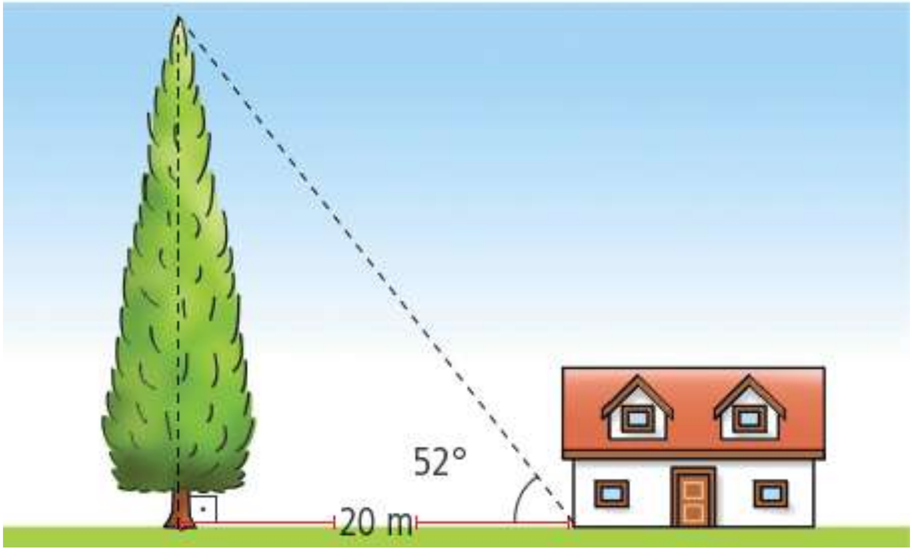
c) tg Å

d) sen Å

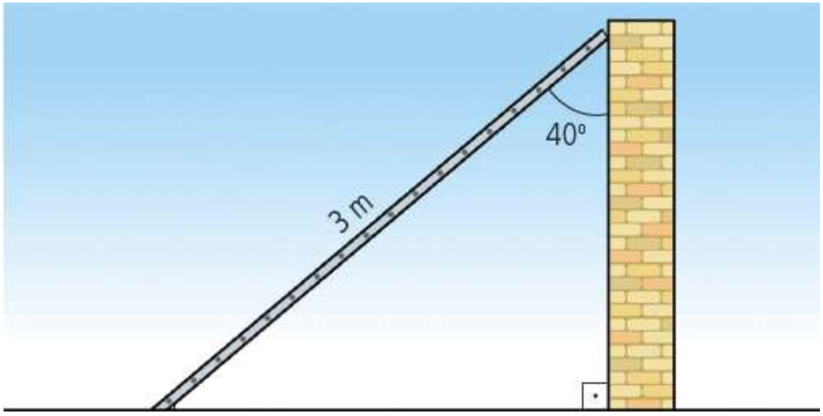
e) cos Å

f) tg Å

Veja a figura abaixo. Pode-se tombar a árvore em direção à casa, sem atingir a construção? Utilize a calculadora.



Uma escada medindo 3 m precisa fazer um ângulo de 40° com a parede para que não escorregue. A que distância o pé da escada precisa ficar da parede? Utilize a calculadora.



DESENVOLVIMENTO: ATIVIDADE 2

Duração prevista: 50 minutos.

Pré-requisitos: O aluno deve conhecer o conceito de semelhança de triângulos e o teorema de Pitágoras

Recursos Pedagógicos: Folha de atividades, lápis de cor ou caneta hidrográfica.

Organização da classe: Turma disposta em dupla de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

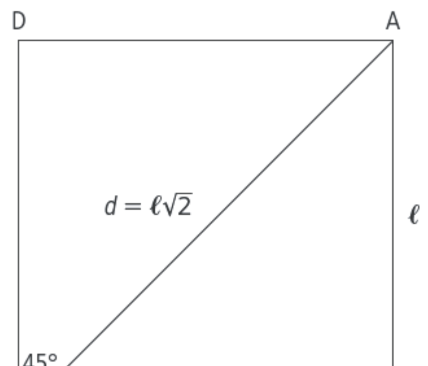
Objetivo: Determinar os valores exatos de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°. Utilizar as razões trigonométricas para resolver problemas.

Habilidades: Utilizar as razões trigonométricas para resolver problemas do cotidiano.

Metodologia.

As razões trigonométricas e os ângulos de 30º, 45º e 60º

A diagonal *d* é eixo de simetria do quadrado de lado l : divide o ângulo reto em dois ângulos de 45º.



Pelo teorema de Pitágoras:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$

$$d^2 = 2\ell^2$$

$$d = \ell\sqrt{2}$$

Descobrimos, pelo teorema de Pitágoras, que $d = \ell\, l\sqrt{2}$
O triângulo ABC é retângulo. Vamos calcular:

$$\text{sen } 45° = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de } 45°}{\text{medida da hipotenusa}}$$

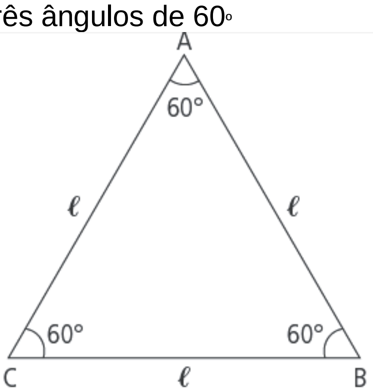
$$\text{sen } 45° = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \underbrace{\frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{racionalizando o denominador}}$$

$$\cos 45° = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo de } 45°}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 45°}{\text{medida do cateto adjacente a } 45°} = \frac{\cancel{\ell}}{\cancel{\ell}} = 1$$

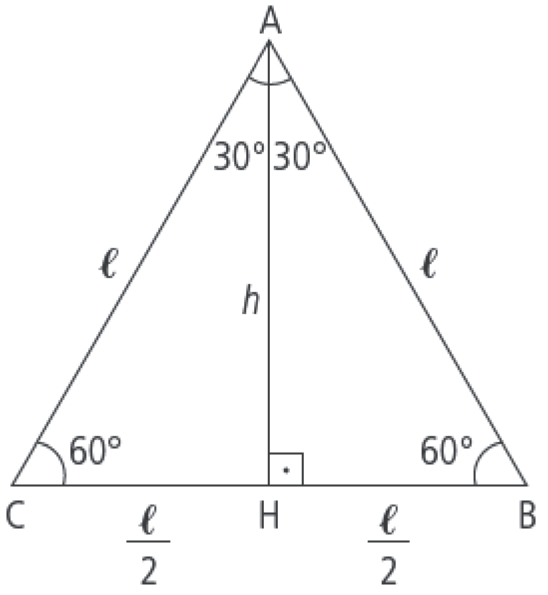
Podemos obter também, a partir do triângulo equilátero, os valores exatos das razões trigonométricas para os ângulos de 30° e de 60°.

Um triângulo equilátero tem três ângulos de 60°



traçamos a altura AH que está num dos eixos de simetria do triângulo equilátero
de lado ℓ, obtendo o triângulo retângulo AHB.

Lembrando que, a altura de um triângulo equilátero é calculada pelo teorema Pitágoras. A altura do triângulo equilátero é $\mathbf{h = \ell\frac{\sqrt{3}}{2}}$



O triângulo ACH = ABH

Sem 60º = $\frac{h}{l}$ cos 60º = $\frac{\frac{l}{2}}{l}$ tg 60º = $\frac{h}{\frac{l}{2}}$

logo,

$$\text{sen } 60° = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de } 60°}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\cancel{\ell}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\ell}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\text{medida do cateto adajacente ao ângulo de } 60°}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\cancel{\ell}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{\ell}} = \frac{1}{2}$$

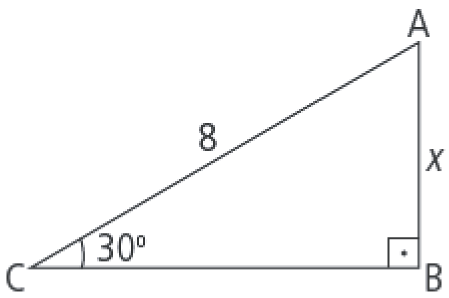
$$\text{tg } 60° = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 60°}{\text{medida do cateto adjacente a } 60°}$$

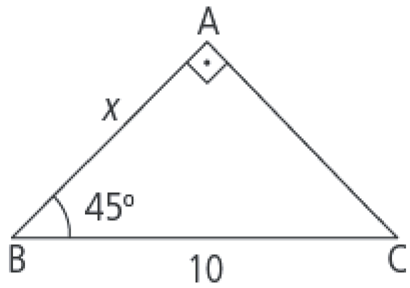
$$\text{tg } 60° = \frac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\cancel{\ell}\sqrt{3}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{\ell}} = \sqrt{3}$$

Faça dupla com um colega. Determinem a partir do triângulo AHB, os valores exatos de sen 30º, cos 30º e tg 30º. Copiem e completem a tabela abaixo no caderno. Lembrem-se da racionalização!

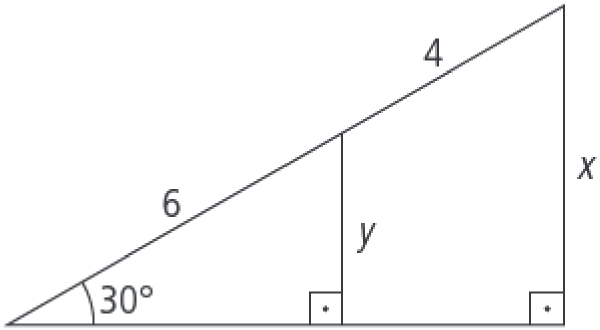
ângulo	sen	cos	tg
30º			
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Calcule o valor de *x* em cada um dos triângulos retângulos.

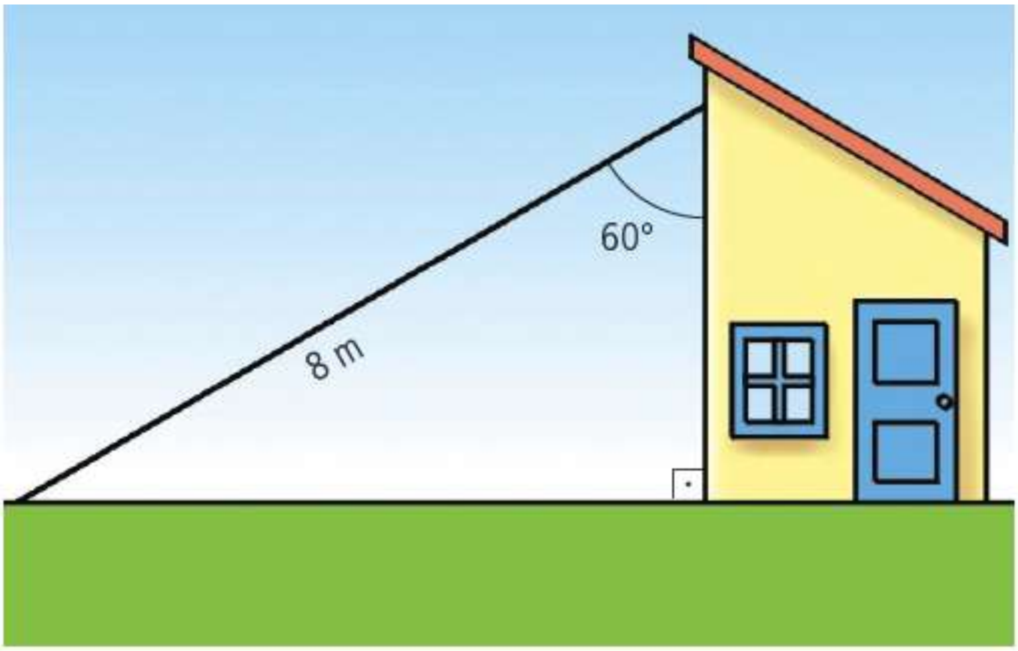




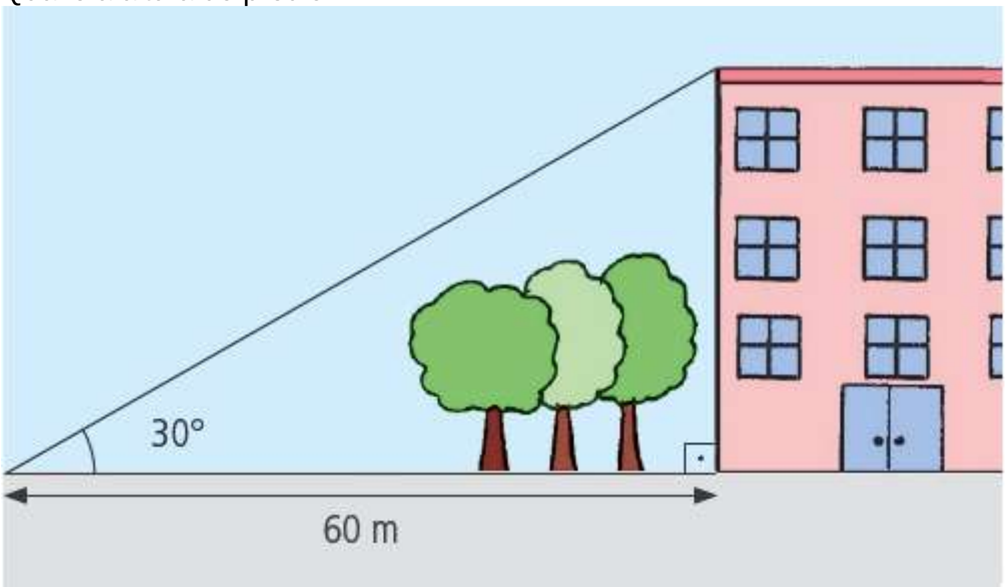
Calcule *x* e *y*.



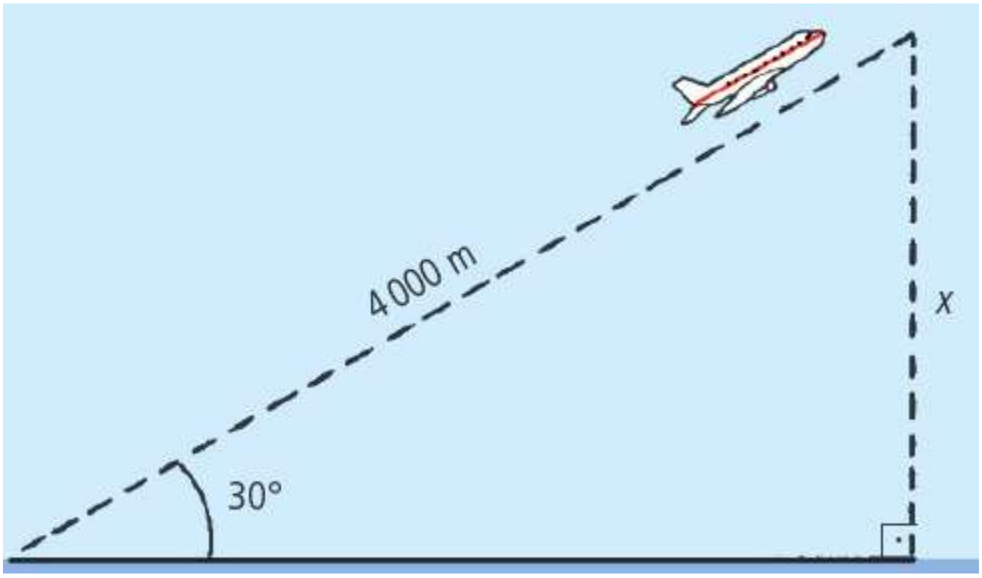
Uma escada de 8 m é encostada em uma parede, formando com ela um ângulo de 60°. A que altura da parede a escada se apoia?
Utilize a tabela que você construiu.



Qual é a altura do prédio?



Um avião levanta voo sob um ângulo de 30° em relação à pista. Qual será a altura do avião quando este percorrer 4 000 m em linha reta?



DESENVOLVIMENTO: ATIVIDADE 3

Duração prevista: 50 minutos.

Pré-requisitos: O aluno deve conhecer o conceito de ponto, reta e plano.

Recursos Pedagógicos: Folha de atividades, lápis de cor ou caneta hidrográfica.

Organização da classe: Turma disposta em duplas de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

Objetivo: Diferenciar circunferência e círculo. Identificar os elementos de uma circunferência.

Habilidades: Reconhecer e diferenciar círculo e circunferência, identificando seus elementos.

Metodologia:

Ideias de circulo e circunferência

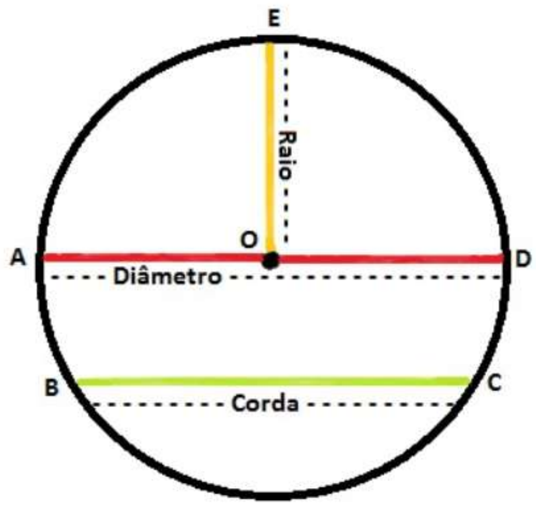
A circunferência é uma figura geométrica formada por inúmeros pontos cuja união resulta em uma linha fechada e que estão a uma mesma distância de um ponto central. Imagine um compasso, se você firmar a pontinha de metal do compasso em um papel e girar a pontinha de grafite ao redor da de metal, você desenhará uma circunferência. Você pode ter o mesmo resultado se, por exemplo, olhar para um pneu de bicicleta. O pneu de qualquer bicicleta tem o formato de uma circunferência. Cada pedacinho que o compõe está a uma mesma distância do eixo do pneu, aquele local central onde os raios do pneu encontram-se. Inclusive, em uma circunferência, chamamos por raio a distância entre a extremidade da circunferência e seu centro.

Os pneus das bicicletas são exemplos de circunferências

Se nós fizermos uma circunferência e preenchermos todo o seu interior, ela tornar-se-á um círculo. Este, por sua vez, é formado por uma circunferência e pelos infinitos pontos que preenchem seu interior. Por exemplo, uma bela e suculenta pizza pode representar um círculo. A pizza possui o formato de uma circunferência, mas é deliciosamente preenchida!

Uma pizza representa um círculo, pois sua extremidade é uma circunferência e seu interior é preenchido

Elementos de uma Circunferência



- **Ponto central ou centro:** é o ponto que equidista de todos os pontos que formam a circunferência (letra O);

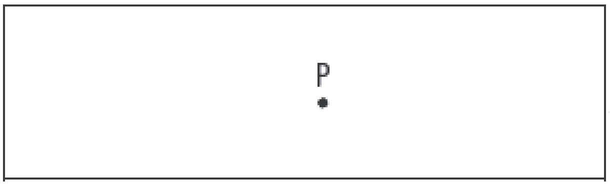
- **Raio:** é o segmento que sai do ponto central e tem seu extremo na circunferência (segmento OE);

- **Diâmetro:** é a maior corda da circunferência já que a atravessa de uma extremidade à outra (segmento AD);

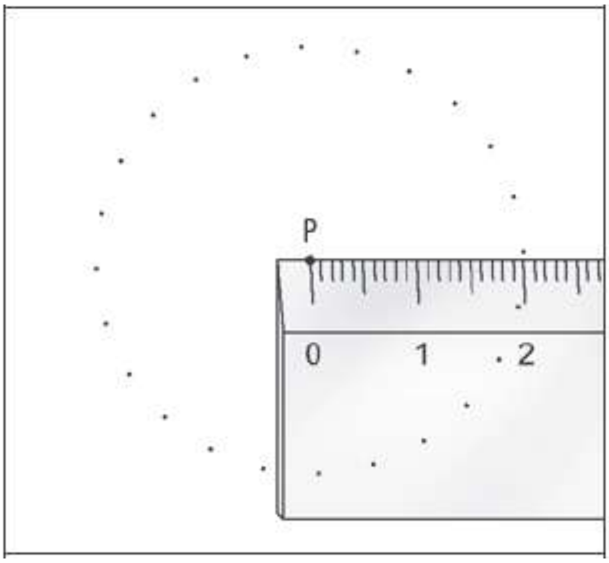
- **Corda:** é um segmento de reta que tem extremos na circunferência (segmento BC);

Faça no seu caderno

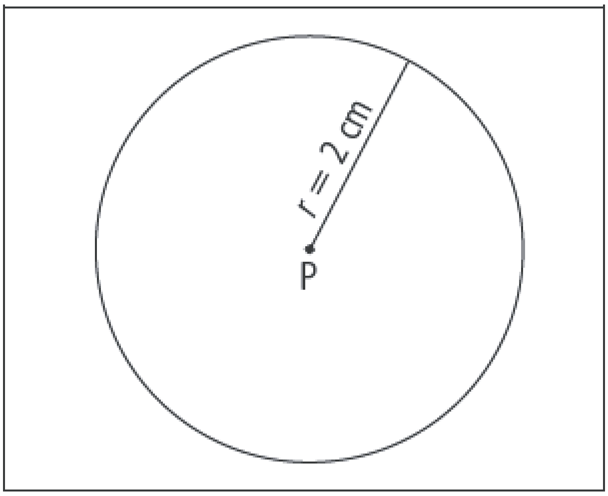
Marque um ponto P na folha de seu caderno.



Usando régua, marque um ponto sobre a folha, que esteja a 2 cm de P. Vá girando a régua e marcando na folha outros pontos distantes 2 cm de P.

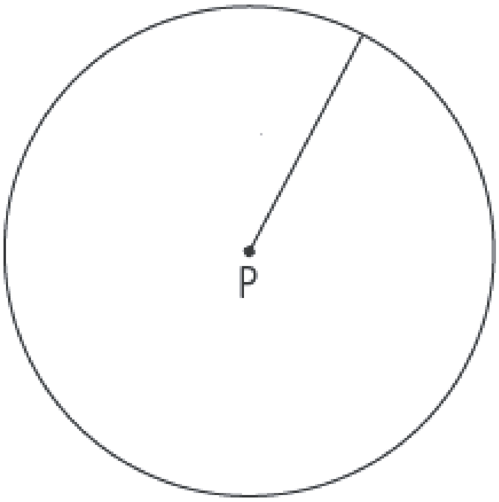


Se tomarmos todos os pontos da folha que distam 2 cm de P, obteremos uma linha fechada ao redor de P: uma **circunferência**.



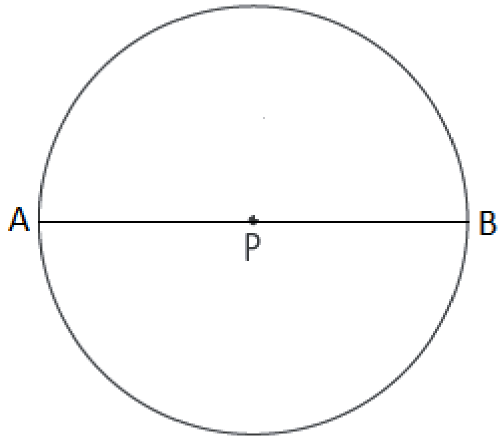
P é o **centro** dessa circunferência. A **distância** de P até
qualquer ponto da circunferência é o seu **raio**.
A circunferência do exemplo tem raio de 2 cm.
Unindo a circunferência e os pontos do seu interior, obtemos um **círculo**:

Use a régua para determinar a medida do raio desta circunferência, que tem centro no ponto O.



Resposta__________________________

O ponto P é o centro da circunferência abaixo. PA e PB são raios da circunferência. O segmento AB é um **diâmetro** da circunferência. Qual é a relação entre a medida do raio e a do diâmetro de uma circunferência?



Resposta_______________________________________

DESENVOLVIMENTO: ATIVIDADE 4

Duração prevista: 50 minutos.

Pré-requisitos: O aluno deve conhecer uma circunferência e seus elementos.

Recursos Pedagógicos: Relógio de parede, botão, moeda, prato, régua, lápis de cor ou caneta hidrográfica e folha de atividades.

Organização da classe: Turma disposta em grupos de 4 alunos de forma a propiciar um trabalho colaborativo.

Objetivo: Encontrar número π (PI) e entender que ele é o resultado da medida do comprimento da circunferência dividido pelo diâmetro da mesma, seja para qualquer dimensão de círculo.

Habilidades: Identificar o número (pi).

Metodologia

Levaremos para a sala de aula objetos como:

1º Cada grupo de alunos escolhe dois objetos diferentes.

2ºOs alunos medirão o comprimento da circunferência e o diâmetro de cada objeto.

3º Pediremos para que eles anotem esses resultados.

3º Em seguidas (em cada objeto) eles deverão dividir o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro.

Pediremos para que os alunos discutam sobre:

O que eles perceberam que aconteceu ?

Houve alguma regularidade ?

AVALIAÇÃO

1. O aluno será avaliado de forma qualitativa durante a execução das quatro atividades propostas. Cada atividade corresponderá no máximo um ponto. Totalizando, ao final das quatro tarefas, um valor máximo de quatro pontos.

2. Será aplicada uma avaliação com 5 questões envolvendo os conteúdos de Trigonometria no triângulo retângulo, circulo e circunferência.

3. Cada aluno responderá um questionário, com as perguntas envolvendo as quatro atividades praticadas em sala de aula, ao qual terá como alternativas de resposta: ótima, boa, regular ou ruim. Com isso, poderei avaliar a qualidade da metodologia utilizada em sala.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, Álvaro. VASCONCELOS, Maria José – Praticando matemática, 3. Ed. renovada. – São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

Rio de Janeiro, Governo do Estado do / Secretaria de Estado da Educação. *Currículo Mínimo: Matemática*, 2012. Disponível em: <http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/curriculo_identificacao.asp>. Acesso em 04/09/2014.

CECIERJ, Fundação/Consórcio CEDERJ, *Roteiro de ação: Funções*. Disponível : http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=242

Acesso 04/09/2014.

FÒRUM, Temático 2, Razões trigonométricas no triângulo retângulo e circulo set./2014. Disponível em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/forum/discuss.php?d=16786. Acesso em 07/09/2014.

Amanda Gonçalves - http://www.escolakids.com/diferenca-entre-circunferencia-circulo-e-esfera.htm - Acesso em 06/09/2014

Priscila Marquezine http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=25986- Acesso em 06/09/2014