

# Módulos 1 e 2

Paulo A. Maia Neto  
Paulo H. Souto Ribeiro  
Ruynet L. de Matos Filho

Volume único

## Física 4A





Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

## Física 4A

Volume único - Módulos 1 e 2

Paulo A. Maia Neto

Paulo H. Souto Ribeiro

Ruynet L. de Matos Filho



**GOVERNO DO  
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

Ministério  
da Educação



Apoio:



**FAPERJ**

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo  
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001

Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

## Presidente

Masako Oya Masuda

## Vice-presidente

Mirian Crapez

## Coordenação do Curso de Física

Luiz Felipe Canto

## Material Didático

### ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Paulo A. Maia Neto

Paulo H. Souto Ribeiro

Ruynet L. de Matos Filho

### COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

### DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Janderson Lemos de Souza

Luciana Messeder

Marcelo Bastos Matos

### COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM

Maria Angélica Alves

Cyana Leahy-Dios

### COORDENAÇÃO DE AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Débora Barreiros

### AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Ana Paula Abreu-Fialho

Aroaldo Veneu

## Departamento de Produção

### EDITORA

Tereza Queiroz

### COORDENAÇÃO EDITORIAL

Jane Castellani

### REVISÃO TIPOGRÁFICA

Elaine Bayma

Marcus Knupp

Patrícia Paula

### COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

### PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

### ILUSTRAÇÃO

Fabiana Rocha

### CAPA

Fabiana Rocha

### PRODUÇÃO GRÁFICA

Patricia Seabra

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

M217f

Maia Neto, Paulo A.

Física 4A. v. único / Paulo A. Maia Neto. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

216p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-140-5

1. Eletromagnetismo. 2. Equações de Maxwell.  
3. Ondas eletromagnéticas. 4. Polarização. 5. Interferência e difração da luz 6. Interferômetro de Michelson. 7. Difração de Fraunhofer. I. Ribeiro, Paulo H. Souto. II. Matos Filho, Ruynet L. de. III. Título.

CDD: 530.1

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**  
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia**  
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO  
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**  
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Vieiralses

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**  
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitora: Malvina Tania Tuttman



**SUMÁRIO****Módulo 1: Ondas eletromagnéticas e polarização \_\_\_\_\_ 7****Aula 1 – As Equações de Maxwell \_\_\_\_\_ 9***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 2 – Introdução às ondas eletromagnéticas \_\_\_\_\_ 31***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 3 – Representação e propriedades das ondas eletromagnéticas \_\_\_\_\_ 47***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 4 – Polarização \_\_\_\_\_ 65***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 5 – Polarizadores e placas birrefringentes \_\_\_\_\_ 77***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 6 – Papel da polarização nos processos de reflexão e refração \_\_\_\_\_ 95***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 7 – Experimentos com a polarização da luz \_\_\_\_\_ 119***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Módulo 2: Interferência de difração \_\_\_\_\_ 125****Aula 8 – Interferência \_\_\_\_\_ 127***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 9 – Interferência em películas delgadas \_\_\_\_\_ 147***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 10 – Experimentos com interferômetro de Michelson \_\_\_\_\_ 169***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 11 – Difração de Fraunhofer \_\_\_\_\_ 175***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 12 – Aplicações da difração de Fraunhofer \_\_\_\_\_ 193***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho***Aula 13 – Experimentos com interferência e difração da luz \_\_\_\_\_ 209***Paulo A. Maia Neto / Paulo H. Souto Ribeiro / Ruynet L. de Matos Filho*





# Módulo 1

## Ondas eletromagnéticas e polarização

### Apresentação do módulo

No curso de Física 4, Módulo 1, faremos uma introdução à Óptica, estudando algumas propriedades da propagação da luz, que é uma onda eletromagnética. Vamos, então, explicar para você o que é uma onda eletromagnética e quais são as suas principais características. Para que você possa entender esses novos conceitos, precisamos completar a teoria do eletromagnetismo, estudada nas disciplinas Física 3A e 3B. Portanto, na primeira aula, você vai estudar o conjunto completo das quatro equações de Maxwell, do eletromagnetismo, preparando o terreno para as aulas seguintes.

As ondas eletromagnéticas fazem parte da nossa vida atual e estão cada vez mais presentes em nosso cotidiano. Como veremos no curso, uma característica muito importante das ondas eletromagnéticas é o seu comprimento de onda: é ele que define a forma como elas interagem com as pessoas e com os objetos.

A onda eletromagnética mais importante de todas é, com certeza, a luz, ou, em outras palavras, aquela que tem o comprimento de onda perto de  $0,5\mu\text{m}$  ( $1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$  é um milhão de vezes menor do que um metro). Entretanto, ondas eletromagnéticas com muitos outros comprimentos de onda já fazem parte do nosso dia-a-dia. As microondas do forno (comprimento de onda em torno de  $1\text{cm}$ ); as ondas de rádio e televisão (comprimento de onda em torno de  $1\text{m}$ ); os raios X (comprimento de onda em torno de  $1\text{\AA}$  ou  $10^{-10}\text{m}$ ); os *lasers* de infravermelho dos aparelhos de CD e DVD (comprimento de onda em torno de  $1\mu\text{m}$ ); os sinais que viajam nos cabos e fibras óticas das linhas telefônicas e da TV a cabo; as ondas dos sinais dos telefones celulares etc.: todos esses são exemplos de onda eletromagnética!

Nosso objetivo é entender como são geradas estas ondas, como é que se deslocam, ou se propagam através do ar, do espaço vazio, e o que acontece quando passam por aberturas em placas opacas, atravessam algum material, como vidro, ou quartzo, quando encontram um espelho pela frente ou quando duas ondas eletromagnéticas se combinam.



# Aula 1 – As Equações de Maxwell

## Meta da Aula

Apresentar as equações de Maxwell na forma diferencial, incluindo o termo de corrente de deslocamento.

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Explicar a Lei de Conservação de Carga.
- Mostrar a necessidade da corrente de deslocamento para a consistência da teoria eletromagnética.
- Escrever as quatro equações de Maxwell na forma diferencial e discutir o significado físico de cada uma delas.

## Pré-requisitos

Como, nesta aula, faremos uma revisão de vários tópicos que você estudou em Física 3A e 3B, seria interessante revê-los antes de começar:

- Permissividade elétrica, Aula 1 de Física 3A.
- Lei de Gauss, Aula 5 de Física 3A.
- Densidade de corrente elétrica, Aula 12 de Física 3B.
- Lei de Ampère, de Física 3B.
- Lei de Faraday-Lenz, de Física 3B.

## Introdução

Nesta primeira aula do nosso curso, vamos completar a teoria do eletromagnetismo apresentada nas disciplinas Física 3A e Física 3B. Também serão revistos vários conceitos e resultados que você estudou nessas duas disciplinas, preparando o terreno para o estudo das ondas eletromagnéticas.

Vamos começar pela Lei de Ampère. No final do século XIX, Maxwell percebeu que era necessário modificá-la, acrescentando um termo adicional: a corrente de deslocamento. Em razão da presença desse termo, Maxwell mostrou que os campos elétrico e magnético poderiam se propagar como uma onda, com a velocidade da luz. Ele então concluiu que a luz deveria ser uma onda eletromagnética! Essa foi uma das mais importantes descobertas na história da ciência, e você terá a oportunidade de estudá-la em detalhe ao longo das próximas duas aulas.

Você precisará de vários resultados do cálculo diferencial e integral para campos vetoriais. Para sua comodidade, apresentamos um apêndice ao final da aula, resumindo os dois principais teoremas utilizados: o Teorema do Rotacional, também conhecido como Teorema de Stokes; e o Teorema da Divergência, também conhecido como Teorema de Gauss, que não deve ser confundido com a *Lei* de Gauss, da eletrostática.

## A Lei de Ampère na forma diferencial

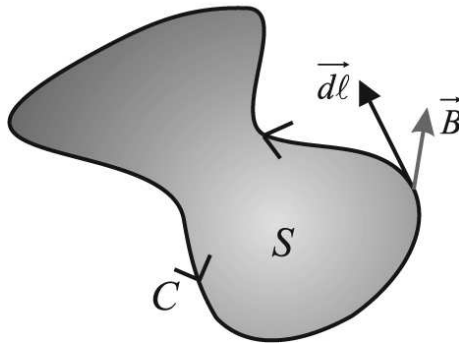
Experimente aproximar uma bússola a um fio que conduza uma corrente elétrica. O ponteiro da bússola mostrará, de forma clara, que a corrente gera um campo magnético  $\vec{B}$  na sua vizinhança. No curso de Física 3B, você estudou a situação estacionária, em que as densidades de carga e corrente são constantes no tempo. Nesse caso, a corrente  $I$  e o campo magnético gerado  $\vec{B}$  estão relacionados pela Lei de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I. \quad (1.1)$$

No lado esquerdo desta equação, temos a integral de linha do campo magnético  $\vec{B}$  sobre o caminho orientado fechado  $C$ . O vetor infinitesimal  $d\vec{\ell}$  é tangente ao caminho  $C$  em cada ponto  $\vec{r}$  de  $C$ , o seu sentido é determinado pela orientação de  $C$ , e o seu módulo representa o comprimento da seção infinitesimal do caminho em torno de  $\vec{r}$ .

No lado direito da equação, temos o produto da permeabilidade magnética do vácuo  $\mu_0$ , que é uma constante física universal, pela corrente elétrica  $I$ , que “fura” a superfície  $S$ , cuja borda é o caminho  $C$ , como mostra a **Figura 1.1**.

A Lei de Ampère, na forma integral dada pela Equação (1.1), contém informação *global* sobre os valores de  $\vec{B}$ . A partir da Equação (1.1), podemos extrair informação *local* sobre o campo  $\vec{B}$  num dado ponto do espaço  $\vec{r}$ ,

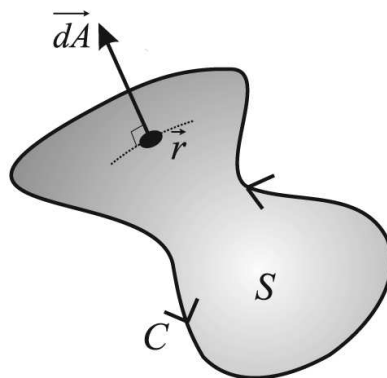


**Figura 1.1:** Representação geométrica da integral de linha do campo magnético  $\vec{B}$  sobre a curva orientada fechada  $C$ . O vetor  $d\vec{\ell}$  é tangente à curva em cada ponto.

se a combinarmos com um resultado matemático importante: o Teorema do Rotacional (ver apêndice no final da aula). Aplicando este teorema, podemos escrever a integral de linha do campo magnético  $\vec{B}$  em termos de uma integral de superfície do *rotacional* de  $\vec{B}$ :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{A}. \quad (1.2)$$

No lado direito desta equação,  $d\vec{A}$  é um vetor perpendicular ao plano tangente à superfície  $S$  em cada ponto  $\vec{r}$  (veja a **Figura 1.2**), e com módulo igual à área da seção infinitesimal em torno de  $\vec{r}$ . O sentido do vetor  $d\vec{A}$  é determinado pela regra da mão direita em função da orientação do caminho  $C$ . Se a orientação de  $C$  é invertida, todos os vetores  $d\vec{A}$  também são invertidos (assim como os vetores  $d\vec{\ell}$ ), trocando o sinal em ambos os lados da Equação (1.2).

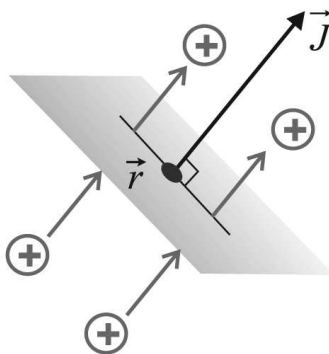


**Figura 1.2:** Vetor  $d\vec{A}$  utilizado na integral de superfície.

Também podemos escrever a corrente elétrica  $I$  em termos de uma integral de superfície, se introduzirmos a densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r})$ , que contém informação local sobre o transporte de carga elétrica em cada ponto do espaço  $\vec{r}$ :

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}. \quad (1.3)$$

De acordo com esta equação, a corrente  $I$  que “fura” a superfície  $S$  é igual ao fluxo (ou integral de superfície) da densidade de corrente através de  $S$ . Este resultado é consequência direta da própria definição de densidade de corrente: o módulo  $|\vec{J}(\vec{r})|$  representa a corrente por unidade de área que atravessa uma superfície infinitesimal, em torno do ponto  $\vec{r}$ , que é perpendicular ao vetor  $\vec{J}(\vec{r})$  (veja a **Figura 1.3**). A direção e o sentido de  $\vec{J}(\vec{r})$  são determinados pela direção e pelo sentido do transporte de cargas na vizinhança de  $\vec{r}$ , conforme mostra a **Figura 1.3**.



**Figura 1.3:** Superfície infinitesimal para a definição da densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r})$ .

**Exercício 1.1**

Um fio de corrente retilíneo tem uma seção reta circular, de raio  $a = 0,50\text{mm}$ . Como mostra a **Figura 1.4**, o fio se estende ao longo da direção do eixo  $z$ . A densidade de corrente no interior do fio é uniforme (isto é, não varia de ponto a ponto no interior do fio), com  $|\vec{J}| = 1,0\text{ A/mm}^2$ . Calcule a corrente elétrica transportada pelo fio. Resolva o exercício *antes* de ler a solução apresentada a seguir!

Solução: Vamos usar a Equação (1.3) tomando a seguinte superfície  $S$ : o disco plano de raio  $a$  perpendicular ao eixo  $z$  (veja a **Figura 1.4**). Como a superfície é plana, todos os vetores  $\vec{dA}$  coincidem:  $\vec{dA} = dA \hat{z}$ , onde  $\hat{z}$  é o vetor unitário na direção do eixo  $z$ . Como  $\vec{J}$  também é paralelo a  $\hat{z}$ , o produto escalar vale  $\vec{J} \cdot \vec{dA} = |\vec{J}| dA$ . Temos, então:

$$I = \int_S |\vec{J}| dA,$$

mas, como  $|\vec{J}|$  é constante sobre  $S$ , podemos tirá-lo da integral e obter:

$$I = |\vec{J}| \int_S dA = |\vec{J}| \times \pi a^2 = 1,0\text{ A/mm}^2 \times 0,79\text{ mm}^2 = 0,79\text{ A}.$$



**Figura 1.4:** Densidade de corrente elétrica uniforme em fio de seção reta circular.

Combinando as Equações (1.2) e (1.3), podemos escrever a Lei de Ampère, Equação (1.1), na seguinte forma:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \vec{J}) \cdot \vec{dA} = 0. \quad (1.4)$$

Como esta integral se anula para qualquer superfície  $S$ , o integrando deve ser nulo em todos os pontos do espaço. Obtemos, assim, a Lei de Ampère na forma local ou diferencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r}). \quad (1.5)$$

Esta equação contém informação local sobre o campo magnético num ponto do espaço qualquer  $\vec{r}$ , uma vez conhecida a densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r})$  nesse ponto.

## A Lei de Conservação de Carga

Vamos analisar agora uma consequência importante da Lei de Ampère, analisando a sua forma local, dada pela Equação (1.5). Para isto, precisamos do seguinte resultado matemático: o divergente do rotacional de um campo vetorial  $\vec{F}$  é nulo:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0. \quad (1.6)$$

### Exercício 1.2

Demonstre a Equação (1.6).

Solução: combinando as definições do divergente e do rotacional (ver apêndice), obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right).$$

Nas parcelas acima, podemos inverter a ordem das derivadas parciais. Por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F_z}{\partial x} \right).$$

Com isso, as seis parcelas acima se cancelam aos pares.

Tomando o divergente em ambos os lados da Equação (1.5), você poderá concluir que a densidade de corrente tem divergente nulo no caso estacionário:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0. \quad (1.7)$$

Vamos escrever esse resultado de forma mais explícita:

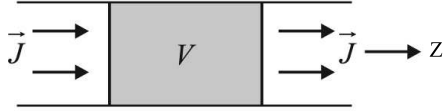
$$\frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = 0. \quad (1.8)$$



Para entender o significado desse resultado, vamos supor que o vetor densidade de corrente esteja alinhado com a direção  $z$  em todos os pontos ( $J_x = J_y = 0$ ). Nesse caso, temos:

$$\frac{\partial J_z}{\partial z} = 0.$$

Como a derivada é nula, podemos concluir, neste caso, que  $J_z$  não varia ao longo do eixo  $z$ , como mostra a **Figura 1.5**. Essa propriedade tem uma consequência importante: a carga total compreendida no volume  $V$  da figura não varia no tempo, pois toda a corrente que entra nele é compensada exatamente pela corrente que sai desse volume. Como você poderia esperar, a Lei de Ampère, dada pela Equação (1.1), implica que a carga total no volume  $V$  é sempre constante no tempo! Isso confirma o que você já sabia: a Equação (1.1) só vale quando cargas e correntes não variam no tempo.



**Figura 1.5:** Contabilidade de entrada e saída de corrente no volume  $V$ .

Com um pouco mais de matemática, podemos generalizar esse argumento para densidades de corrente  $\vec{J}(\vec{r})$  e volumes  $V$  arbitrários. Vamos começar aplicando o Teorema da Divergência para  $\vec{J}(\vec{r})$ :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}) d^3r = \oint_S \vec{J} \cdot \vec{dA}, \quad (1.9)$$

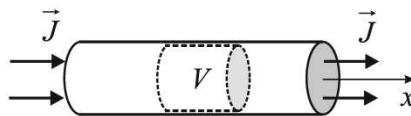
onde a superfície  $S$  agora representa a *fronteira* do volume  $V$  (superfície que envolve  $V$ ) e, portanto, é uma superfície *fechada*, com os vetores  $\vec{dA}$  apontando para fora. A integral sobre  $S$  representa a corrente elétrica líquida *para fora* do volume  $V$  - compare com a Equação (1.3). Em outras palavras, essa integral representa a contabilidade ou “balanço” total de entrada e saída de cargas por unidade de tempo. Se ela é positiva, há mais saída do que entrada, e, nesse caso, a carga total  $Q$  contida no interior do volume  $V$  estará diminuindo, a uma taxa proporcional à integral no lado direito da Equação (1.9). Em termos matemáticos, isso corresponderia a uma função  $Q(t)$  decrescente, com derivada negativa igual a:

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \vec{J} \cdot \vec{dA}. \quad (1.10)$$

Essa equação expressa a Lei de Conservação de Carga Elétrica: a taxa de variação da carga no interior do volume  $V$  é igual à corrente elétrica líquida (ou total) *para dentro* de  $V$ .

### Exercício 1.3

Considere novamente o fio de corrente retilíneo que você analisou no exercício 1.1. Como antes, suponha que a densidade de corrente seja uniforme no interior do fio. Tome o volume  $V$  de forma cilíndrica mostrado na **Figura 1.6**. A carga  $Q$ , no interior desse volume, varia no tempo? Para responder a esta questão, calcule a corrente elétrica total para dentro de  $V$ . Sugestão: mostre que o fluxo de  $\vec{J}$  através das paredes laterais de  $V$  é nulo. Para as duas superfícies em forma de disco que completam o bordo de  $V$ , use o resultado do Exercício 1.1, tomando muito cuidado com o sinal de cada parcela.

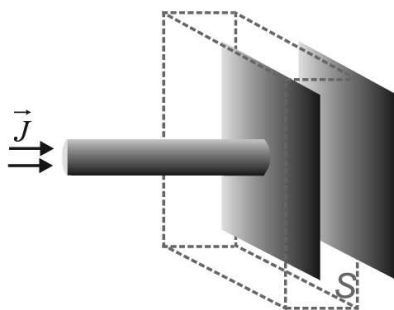


**Figura 1.6:** Volume  $V$  no interior do fio.

Na situação em que vale a Lei de Ampère, a densidade de corrente tem divergente nulo (veja a Equação (1.7)), e então a contabilidade de entrada e saída para qualquer volume espacial resulta sempre em “empate”. Mais precisamente, pela Equação (1.9), o fluxo de  $\vec{J}$  é sempre nulo para uma superfície fechada nesse caso. Pela Equação (1.10), obtemos então  $dQ/dt = 0$ , para concluir novamente que a carga  $Q$  é necessariamente constante quando vale a Lei de Ampère. Esse é o caso do exemplo que você examinou no Exercício 1.3, onde  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ , porque  $\vec{J}$  é uniforme, e, portanto, todas as derivadas parciais se anulam. Por outro lado, no exercício a seguir, você vai analisar uma situação física importante, em que a carga  $Q$  não é constante. Assim, a Lei de Ampère não se aplica a esse exemplo!

**Exercício 1.4**

Considere que o nosso fio de corrente retilíneo dos Exercícios 1.1 e 1.3 carregue a placa de um capacitor. A superfície fechada  $S$  mostrada na **Figura 1.7** envolve completamente a placa e corta o fio de corrente bem rente à placa. Portanto, a carga contida no volume  $V$  interior a  $S$  é a carga da placa do capacitor  $Q$ . Calcule  $dQ/dt$ . Compare com os resultados dos Exercícios 1.1 e 1.3. Sugestão: mostre que o fluxo de  $\vec{J}$  é nulo em toda a superfície  $S$ , exceto na região em que ela corta o fio de corrente.



**Figura 1.7:** A superfície fechada  $S$  envolve uma das placas do capacitor.

Na verdade, podemos deduzir uma restrição ainda mais forte para a Lei de Ampère. Não só a carga *global*  $Q$  no volume  $V$  deve ser constante, também a densidade de carga  $\rho(\vec{r})$  em cada ponto  $\vec{r}$  no interior do volume, que representa a carga por unidade de volume na vizinhança de  $\vec{r}$ , deve ser constante. A carga total em  $V$  é dada por:

$$Q(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) d^3r. \quad (1.11)$$

Substituindo esta expressão no lado esquerdo da Equação (1.10), obtemos:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) d^3r = - \oint_S \vec{J} \cdot \vec{dA}. \quad (1.12)$$

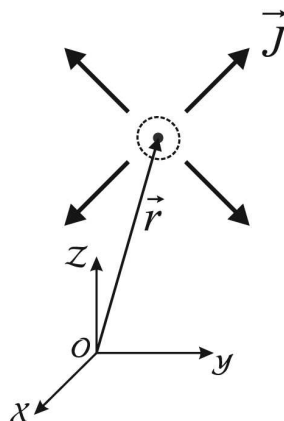
Para o lado direito da equação acima, usamos o Teorema de Gauss para a densidade de corrente (Equação (1.7)), para obter:

$$\int_V \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right) d^3r = 0. \quad (1.13)$$

Como a integral se anula para qualquer volume  $V$ , o integrando é identicamente nulo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t). \quad (1.14)$$

Esta é a expressão da lei de conservação de carga *local*: num ponto em que o divergente de  $\vec{J}$  é positivo, a densidade de carga local terá derivada temporal negativa e, portanto, estará *decrecendo*. Esse resultado está relacionado à noção intuitiva do divergente de um campo. Onde o divergente é positivo, como no ponto  $\vec{r}$ , mostrado na **Figura 1.8**, há mais carga saindo do que entrando na vizinhança em torno de  $\vec{r}$ , mostrada na figura; logo, a densidade de carga local estará diminuindo.



**Figura 1.8:** Densidade de corrente  $\vec{J}$  na vizinhança do ponto  $\vec{r}$ , com  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r})$  positivo. Em relação ao sistema de eixos coordenados mostrado na figura, o vetor  $\vec{r}$  possui coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

**Exercício 1.5**

Como nos Exercícios 1.1 e 1.3, um fio de corrente retilíneo transporta uma corrente elétrica. Diferentemente do que você fez nos exemplos anteriores, suponha agora que a densidade de corrente não seja uniforme e seja dada por:

(a)

$$\vec{J}(z) = J_0 \exp[-(x^2 + y^2)/\ell^2] \hat{z};$$

(b)

$$\vec{J}(z) = J_0 \exp[-z/\ell] \hat{z}.$$

Para os dois casos, tome  $J_0 = 1,0 \text{ A/mm}^2$  e  $\ell = 1.0 \text{ cm}$ . Calcule a taxa de variação da densidade de carga,  $\partial_t \rho$ , num ponto qualquer do interior do fio. Esse exemplo ajuda a entender a razão pela qual a corrente elétrica é sempre bem uniforme ao longo do fio. Se isto não ocorresse, como no exemplo (b) discutido aqui, haveria acúmulo de carga elétrica ao longo do fio, produzindo um campo elétrico adicional que automaticamente tornaria a corrente novamente uniforme. Por outro lado, a densidade de corrente pode variar no plano perpendicular à direção do fio, como no exemplo (a) acima, porque, nesse caso, não há acúmulo de carga.

Como mostramos na Equação (1.7), a Lei de Ampère só pode valer quando a densidade de corrente tem divergente nulo, e, neste caso, a densidade de carga é constante no tempo em todos os pontos. O que acontece se a carga não é constante, como nos Exercícios 1.4 e 1.5? Para dar conta dessa situação, é preciso *modificar* a Lei de Ampère!

## A corrente de deslocamento de Maxwell

Maxwell modificou a Lei de Ampère para que ela se tornasse consistente com a Lei de Conservação de Carga, dada pela Equação (1.14). Você já descobriu que a Lei de Ampère implica um valor nulo para  $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$ , o que só é consistente com a Equação (1.14) nos casos em que a densidade de carga  $\rho(\vec{r}, t)$  não dependa do tempo.

Quando há variação temporal, o divergente de  $\vec{J}$  deve ser diferente de zero. Podemos relacioná-lo com o *campo elétrico*  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , se combinarmos os

resultados vistos nesta aula com a Teoria da Eletrostática, que você estudou na disciplina Física 3A. Vamos começar lembrando a Lei de Gauss:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0}, \quad (1.15)$$

onde  $Q(t)$  é a carga total contida no volume  $V$ , cuja fronteira é a superfície fechada  $S$ . Também aparece no lado direito desta equação a constante  $\epsilon_0$ , que representa a permissividade elétrica do vácuo.

Agora, volte algumas páginas para trás, até a Equação (1.11), que relaciona a carga total  $Q(t)$  com a integral de volume da densidade de carga  $\rho(\vec{r}, t)$ . Substituindo essa equação no lado direito da Equação (1.15), obtemos:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{A} = \int_V \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} d^3r. \quad (1.16)$$

Usando o Teorema da Divergência, podemos escrever o lado esquerdo dessa equação em termos da integral de volume do divergente de  $\vec{E}$ :

$$\int_V \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0} \right) d^3r = 0. \quad (1.17)$$

Como essa integral se anula para qualquer volume  $V$ , o integrando deve ser identicamente nulo. Obtemos, assim, a Lei de Gauss na forma diferencial:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t)}{\epsilon_0}. \quad (1.18)$$

Como você aprendeu em Física 3A, a Lei de Gauss é um dos pilares da eletrostática. Aqui, estamos dando um passo não trivial ao supor que ela também vale no caso de densidades de carga dependentes do tempo.

Combinando a Lei de Conservação de Carga, Equação (1.14), com a Lei de Gauss, Equação (1.18), obtemos:

$$\epsilon_0 \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}. \quad (1.19)$$

Para comparar esta equação com a Lei de Ampère, Equação (1.5), é interessante multiplicá-la pela constante  $\mu_0$ , que, como  $\epsilon_0$ , pode ser fatorada para fora ou para dentro dos símbolos de derivação. Podemos, ainda, inverter a ordem das derivadas espaciais e temporal de  $\vec{E}$  para obter

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}) = 0. \quad (1.20)$$

Compare cuidadosamente esse resultado com a Lei de Ampère, Equação (1.5) – agora você já está preparado para fazer a modificação necessária dessa lei! Lembre que o lado esquerdo da Equação (1.5) tem divergente nulo. Vamos, então, substituir o lado direito por uma expressão que também tenha divergente nulo: a expressão entre parênteses na Equação (1.20), que acabamos de obter! A Lei de Ampère modificada fica, então, assim:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}. \quad (1.21)$$

Qual é a diferença entre esse resultado e a Lei de Ampère original? Para facilitar a comparação, podemos escrever a Equação (1.21) na forma

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_d). \quad (1.22)$$

onde

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \quad (1.23)$$

é a densidade de “corrente” de deslocamento. Ela não é a rigor uma densidade de corrente, no sentido original de transporte de cargas, e sim uma função simples da derivada temporal do campo elétrico. Entretanto,  $\vec{J}_d$  tem a mesma dimensão física que a densidade de corrente propriamente dita  $\vec{J}$  e, portanto, é medida em A/m<sup>2</sup> no Sistema Internacional de Unidades. Uma forma fácil de contar para um colega (experimente!) como a Lei de Ampère foi modificada por Maxwell seria assim: “tome a Lei de Ampère original” (neste momento, mostre a Equação (1.5)) “e some à densidade de corrente  $\vec{J}$  a densidade de corrente de deslocamento  $\vec{J}_d$  dada pela Equação (1.23)”.

**Exercício 1.6**

Examine novamente o sistema descrito no Exercício 1.4, em que um capacitor está sendo carregado. Suponha que a corrente que sai da segunda placa seja igual a que chega à primeira. No item (a) deste exercício, você vai refazer um problema já estudado na disciplina Física 3A (campo elétrico entre as placas de um capacitor, Aula 9). Se não conseguir, use a resposta fornecida abaixo e passe diretamente para o item (b).

a) Mostre que o campo elétrico (uniforme) vale

$$\vec{E} = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 A} \hat{z}$$

entre as placas do capacitor e é nulo na região externa.  $Q(t)$  é a carga da primeira placa (em destaque na **Figura 1.7**).

Sugestão: use a Lei de Gauss na forma integral, primeiro, quando há apenas uma placa. Em seguida, some vetorialmente os campos das duas placas (princípio da superposição).

b) Calcule o fluxo da densidade de corrente de deslocamento  $\vec{J}_d$  através da superfície fechada  $S$  da **Figura 1.7**.

c) Usando o resultado do Exercício 1.4, mostre que

$$\oint_S (\vec{J} + \vec{J}_d) \cdot \vec{dA} = 0.$$

Você poderia obter esse resultado de forma bem mais rápida, diretamente da Equação (1.22)! Para isto, use o Teorema da Divergência no lado esquerdo dessa equação e o fato de que o divergente do rotacional é nulo (como você mostrou no Exercício 1.2).

O que acontece no caso estático, em que nenhuma grandeza depende do tempo? Como a corrente de deslocamento é proporcional à derivada temporal de  $\vec{E}$ , ela se anula nesse caso, e então recuperamos a Lei de Ampère original. Nós já estávamos prevenidos de que ela só valeria no caso estático!

## As Equações de Maxwell na forma diferencial

Na parte final desta aula, vamos rever e discutir o conjunto das quatro Equações de Maxwell. Já discutimos aqui a Lei de Gauss, da eletrostática,



que relaciona o divergente do campo elétrico  $\vec{E}$  com a densidade de carga elétrica. O análogo a esta lei para o campo magnético  $\vec{B}$  é a equação

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.24)$$

Comparando-a com a Equação (1.18), poderíamos imaginar que, em seu lado direito, teríamos a densidade de “carga magnética”, em analogia à densidade de carga elétrica  $\rho(\vec{r}, t)$ . A carga magnética estaria relacionada à existência de monopólos magnéticos. Até os dias atuais, não foi encontrada nenhuma evidência experimental para a existência dos monopólos, e, por isso, tomamos o valor nulo no lado direito da Equação (1.24).

Para completar o conjunto das quatro equações de Maxwell, vamos relembrar a Lei de Faraday-Lenz:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left( \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} \right). \quad (1.25)$$

No lado esquerdo desta equação, a integral de linha do campo elétrico representa a força eletromotriz *induzida* pela variação temporal do fluxo magnético através da superfície  $S$ , cujo contorno é o caminho fechado  $C$ .

Podemos obter a forma diferencial ou local da Lei de Faraday-Lenz usando o Teorema do Rotacional no lado esquerdo da equação anterior. Vamos supor que a variação temporal do fluxo magnético se deva exclusivamente à dependência temporal do campo magnético  $\vec{B}$  (e não, por exemplo, a uma variação da superfície  $S$  de integração). Neste caso, podemos passar o símbolo de derivação para dentro da integral no lado direito da Equação (1.25), e obter:

$$\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B}) \cdot d\vec{A} = 0. \quad (1.26)$$

Como este resultado vale para qualquer superfície  $S$ , o integrando deve ser nulo:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}. \quad (1.27)$$

Esta é a Lei de Faraday-Lenz na forma local.

Talvez você esteja pensando em aplicar o mesmo “teste” que fizemos com a Lei de Ampère no início da aula: tomar o divergente de ambos os lados desta equação. Como o divergente de um rotacional é nulo, obtemos

que o divergente do campo magnético  $\vec{B}$  é nulo, que é a lei expressando a ausência de monopólos magnéticos, Equação (1.24). Isso mostra que a Lei de Faraday-Lenz seria modificada por um termo de “densidade de corrente de monopólos magnéticos”, caso esses existissem.

Vamos agora reunir as quatro Equações de Maxwell num único quadro:

### Equações de Maxwell

1) Lei de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.28)$$

2) Inexistência de monopólos magnéticos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.29)$$

3) Lei de Faraday-Lenz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}. \quad (1.30)$$

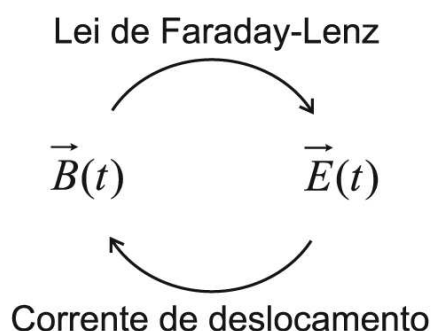
4) Lei de Ampère com corrente de deslocamento:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}. \quad (1.31)$$

Duas destas equações envolvem as *fontes* do eletromagnetismo: a densidade de carga elétrica  $\rho(\vec{r}, t)$ , na Lei de Gauss, Equação (1.28), e a densidade de corrente elétrica  $\vec{J}(\vec{r}, t)$ , na Lei de Ampère modificada, Equação (1.31). As outras duas equações, (1.29) e (1.30), não envolvem os termos de fonte.

As equações de Maxwell possuem soluções não-nulas dependentes do tempo, mesmo nas regiões do espaço sem cargas ou correntes (isto é, com  $\rho = 0$  e  $\vec{J} = \vec{0}$ ). Essa importante propriedade decorre do efeito de *indução* associado à Lei de Faraday-Lenz e do termo de corrente de deslocamento introduzido por Maxwell. Pela Equação (1.30), quando um campo magnético varia no tempo, *induz* o surgimento de um campo elétrico. Esse campo também depende do tempo e, portanto, faz aparecer uma corrente de deslocamento  $\vec{J}_d$ , que é a segunda parcela no lado direito da Equação (1.31). Essa “corrente” gera, por sua vez, um campo magnético dependente do tempo,

que gera um campo elétrico induzido, e assim sucessivamente. Temos então um efeito “dominó”, típico de propagação de ondas, que você já conhece, do estudo de ondas mecânicas, tais quais, por exemplo, as ondas numa corda vibrante. No eletromagnetismo, o efeito “dominó” está associado à indução mútua entre os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , que representamos de forma esquemática na **Figura 1.9**. Em consequência, uma determinada perturbação eletromagnética pode se propagar como uma onda através de regiões do espaço completamente vazias (vácuo). Isto explica por que é possível observar a luz emitida por estrelas tão distantes!



**Figura 1.9:** Esquema da indução mútua entre os campos elétrico e magnético dependentes do tempo.

A princípio, poderíamos resolver as Equações de Maxwell para obter os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , uma vez conhecidas as densidades de carga  $\rho(\vec{r}, t)$  e corrente  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  em todo o espaço e para todos os tempos. Entretanto, o problema do eletromagnetismo é, em geral, mais complicado, porque a forma como as cargas estão distribuídas espacialmente também depende dos campos elétrico e magnético, já que estes exercem força sobre as cargas. Portanto, tipicamente  $\rho(\vec{r}, t)$  e  $\vec{J}(\vec{r}, t)$  não são conhecidos a priori. Por exemplo, quando analisamos os fenômenos eletromagnéticos na presença de um *meio material*, o campo elétrico aplicado *polariza* o meio material, provocando um rearranjo da distribuição espacial das cargas nos átomos ou moléculas que constituem o meio. Assim, a densidade de carga  $\rho(\vec{r}, t)$  no interior do meio material certamente não é dada a priori, mas depende do valor do próprio campo elétrico. O mesmo tipo de efeito pode ocorrer para a densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r}, t)$ , que é modificada pela magnetização do meio material gerada pelo campo magnético.

Felizmente, podemos contornar essa dificuldade de uma forma muito simples na maioria das situações de interesse. A contribuição da polarização

do meio pode ser tratada de uma forma efetiva, se trocarmos a permissividade elétrica do vácuo  $\epsilon_0$  pela permissividade elétrica do meio material  $\epsilon$ . De forma análoga, o efeito da magnetização pode, em muitos casos, ser tratado pela simples troca da permeabilidade magnética do vácuo  $\mu_0$  pela permeabilidade magnética do meio material  $\mu$ .  $\epsilon$  e  $\mu$  dependem das propriedades do meio material considerado. Por exemplo, se o meio é um gás,  $\epsilon$  é proporcional à densidade de moléculas ou átomos que constituem o gás, além de depender de parâmetros que caracterizam a intensidade da interação entre as moléculas (ou átomos) e o campo elétrico. Estamos supondo aqui que o meio seja homogêneo, isto é, que suas propriedades (tais como a densidade) não variam de ponto a ponto do espaço. Neste caso, a permissividade  $\epsilon$  e a permeabilidade  $\mu$  são constantes, e as equações de Maxwell ficam com a mesma forma das Equações (1.28)–(1.31), com as constantes universais  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  substituídas pelas constantes  $\epsilon$  e  $\mu$ , que são características do meio material analisado.

Uma vez que a densidade de carga associada à polarização já é levada em conta pela troca de  $\epsilon_0$  por  $\epsilon$ , ela precisa ser excluída da densidade de carga total  $\rho$  que aparece no lado direito da Equação (1.28) (Lei de Gauss). Portanto, vamos trocar  $\rho$  pela densidade de cargas *livres*  $\rho_{\text{livre}}$ , que representa a diferença entre a densidade de carga total  $\rho$  e a densidade de carga associada à polarização do meio. Enquanto a densidade de carga de polarização se origina de rearranjos das posições médias dos elétrons presos em átomos ou moléculas,  $\rho_{\text{livre}}$  está tipicamente associada a elétrons que podem circular quase livremente pelo meio material. De forma análoga, é preciso trocar a densidade de corrente total  $\vec{J}$  pela densidade de corrente de cargas livres  $\vec{J}_{\text{livre}}$  na Equação (1.31). Assim, as quatro Equações de Maxwell para um meio material são da seguinte forma:

**Equações de Maxwell para um meio material**

1) Lei de Gauss:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{livre}}}{\epsilon}. \quad (1.32)$$

2) Inexistência de monopólos magnéticos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.33)$$

3) Lei de Faraday-Lenz:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}. \quad (1.34)$$

4) Lei de Ampère com corrente de deslocamento:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu \vec{J}_{\text{livre}} + \mu \epsilon \partial_t \vec{E}. \quad (1.35)$$

**Conclusão**

Nesta aula, você teve um primeiro contato com o conjunto completo das equações de Maxwell, que é a base fundamental do eletromagnetismo. Esse conjunto inclui dois resultados que você já conhecia das disciplinas de Física 3: a Lei de Gauss, da eletrostática, e a Lei de Faraday-Lenz. Aqui, apresentamos essas duas leis na forma *local*: elas contêm informações sobre as derivadas dos campos elétrico e magnético localmente, num ponto arbitrário do espaço  $\vec{r}$  e num tempo arbitrário  $t$ .

Você também já conhecia a Lei de Ampère. Mostramos, nesta aula, a necessidade de modificá-la, de forma a torná-la consistente com as situações envolvendo variações (ao longo do tempo) da carga elétrica numa determinada região. Este foi o passo fundamental para que Maxwell unificasse a eletricidade, o magnetismo e a ótica num único formalismo teórico, a teoria do eletromagnetismo.

**E ao longo das próximas aulas...**

... veremos várias aplicações das Equações de Maxwell para um meio material. Você vai descobrir que elas de fato possuem soluções ondulatórias. A velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas será obtida em termos das duas constantes características do meio material em que elas se

propagam: a permissividade elétrica  $\epsilon$  e a permeabilidade magnética  $\mu$ . Você também vai descobrir que as ondas eletromagnéticas podem se propagar mesmo nas regiões do espaço desprovidas de qualquer meio material (vácuo), e, neste caso, a velocidade de propagação depende apenas das duas constantes físicas universais que aparecem nas Equações (1.28) e (1.31): a permissividade elétrica  $\epsilon_0$  e a permeabilidade magnética  $\mu_0$  do vácuo.

## Atividades finais

1. Explique com palavras a Lei de Conservação de Carga e escreva a equação correspondente.
2. Apresente um exemplo de sistema físico para ilustrar a necessidade de modificar a Lei de Ampère com o termo de corrente de deslocamento.
3. Explique por que o efeito “dominó” de indução mútua entre os campos elétrico e magnético não ocorreria na ausência do termo de corrente de deslocamento introduzido por Maxwell. Ao fazê-lo, você vai mostrar que essa modificação da Lei de Ampère introduzida por Maxwell foi essencial para obter as ondas eletromagnéticas a partir do formalismo teórico.
4. Escreva as quatro equações de Maxwell para um meio material e discuta o significado físico de cada uma delas.

## Resumo

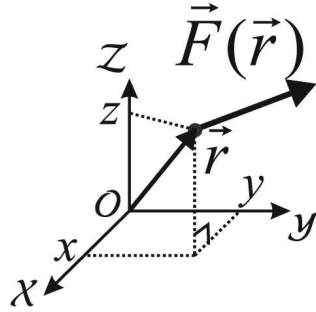
A Lei de Ampère pode ser escrita na forma diferencial ou local, em termos da densidade de corrente  $\vec{J}(\vec{r})$ , que representa a corrente elétrica por unidade de área na vizinhança do ponto  $\vec{r}$ . A Lei de Conservação de Carga relaciona o divergente de  $\vec{J}(\vec{r})$  com a derivada temporal da densidade de carga elétrica. Quando esta derivada é não-nula, é necessário modificar a Lei de Ampère, introduzindo o termo de corrente de deslocamento. Com isso, completamos o conjunto das quatro Equações de Maxwell, que é a base da teoria eletromagnética.

## Apêndice: Teoremas da Divergência e do Rotacional

Um campo vetorial associa um determinado vetor a cada ponto espacial de coordenadas  $(x, y, z)$ , como ilustra a **Figura 1.10**. Cada vetor é definido por suas três componentes cartesianas:

$$\vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z)\hat{x} + F_y(x, y, z)\hat{y} + F_z(x, y, z)\hat{z},$$

onde  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$  são os vetores unitários (isto é, de módulo igual à unidade) ao longo de cada um dos três eixos cartesianos.



**Figura 1.10:** Campo vetorial  $\vec{F}(\vec{r})$ .

A divergência do campo vetorial  $\vec{F}$  é, para cada ponto de coordenadas  $(x, y, z)$  do espaço, um número (ou escalar) dado por:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z},$$

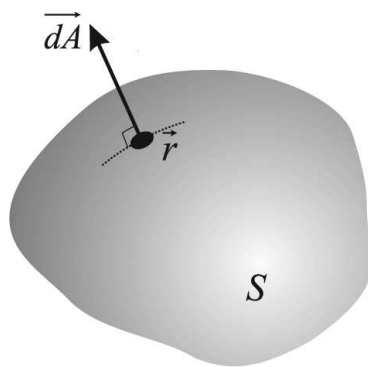
O rotacional de  $\vec{F}$  é o campo vetorial dado por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{z}.$$

O Teorema da Divergência relaciona a integral da divergência de  $\vec{F}$  sobre um volume  $V$  com o fluxo de  $\vec{F}$  através da superfície fechada  $S$  que envolve o volume  $V$ :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{F} d^3r = \oint_S \vec{F} \cdot \vec{dA}.$$

Nesta equação, o vetor  $\vec{dA}$  aponta para fora do volume  $V$ , como mostra a **Figura 1.11**.



**Figura 1.11:** Superfície fechada  $S$ .

O Teorema do Rotacional relaciona o fluxo do rotacional de  $\vec{F}$  através de uma superfície arbitrária  $S$  com a integral de linha de  $\vec{F}$  sobre o caminho  $C$ , que contorna  $S$  (as **Figuras 1.1** e **1.2** ilustram essas definições):

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{F} dA = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{d\ell} .$$



## Aula 2 – Introdução às ondas eletromagnéticas

### Meta da Aula

Derivar soluções ondulatórias das Equações de Maxwell em meios dielétricos transparentes e discutir algumas de suas propriedades.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Explicar o que é uma onda eletromagnética.
- Determinar a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética em um meio dielétrico.
- Descrever como estão relacionados entre si os campos elétrico e magnético associados a uma onda eletromagnética.
- Explicar por que as ondas eletromagnéticas em meios dielétricos transparentes são ditas transversais.

### Pré-requisitos

Para melhor compreensão desta aula, sugerimos que você reveja os conceitos de:

- Ondas, Aula 2 de Física 2B.
- Equações de Maxwell, Aula 1 de Física 4A.

### Introdução

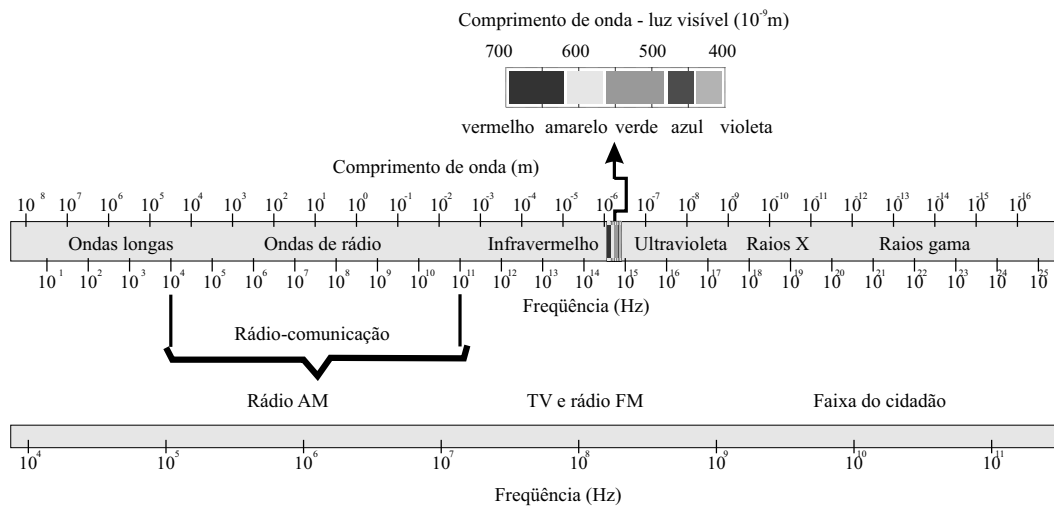
Nesta aula, veremos que as Equações de Maxwell na forma diferencial possuem soluções ondulatórias para os campos elétrico e magnético, que podem se propagar até mesmo no espaço vazio, e derivaremos algumas características fundamentais dessas soluções. Veremos também que a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas, em um dado meio, é determinada apenas pela constante dielétrica  $\epsilon$  e pela permeabilidade magnética  $\mu$  do meio e que, no vácuo, essas ondas propagam-se a uma velocidade idêntica

à da luz. Esse fato levou Maxwell a concluir que a luz é um exemplo de onda eletromagnética.

As ondas eletromagnéticas são campos eletromagnéticos propagantes. Isto significa que qualquer variação nos valores dos campos elétrico e magnético em um dado ponto do espaço se repetirá mais tarde em um outro ponto do espaço, e assim sucessivamente. As ondas eletromagnéticas são muito semelhantes a qualquer outro tipo de onda, e as equações que as descrevem também são muito parecidas. Elas possuem várias características comuns às ondas em cordas vibrantes, ondas na água e ondas de som, por exemplo. Entretanto, as ondas eletromagnéticas têm uma característica que as distinguem das outras. Elas são ondas que não necessitam de um meio de propagação. Por exemplo, o som precisa do ar ou da água ou de algum outro meio material para se propagar. No vácuo, não poderíamos ouvir sons. Entretanto, recebemos diariamente uma quantidade enorme de radiação eletromagnética vinda do espaço, inclusive a luz do sol, passando por regiões imensas vazias, viajando através do vácuo.

De fato, o que chamamos de luz corresponde apenas a uma parte ínfima do espectro de ondas eletromagnéticas. Outros tipos de ondas eletromagnéticas levam nomes especiais, como as microondas, ondas de rádio, raios X, raios gama, infravermelho, ultravioleta etc. Contudo, a única diferença entre elas é o comprimento de onda. Esta diferença, no entanto, é muito importante, pois é ela que determina as propriedades da interação das ondas com os objetos.

Veja, na **Figura 2.1**, uma representação de algumas regiões interessantes do espectro eletromagnético, ou seja, os nomes especiais que algumas faixas de comprimentos de onda recebem. Na parte de cima da **Figura 2.1**, temos os comprimentos de onda e, na parte de baixo, as frequências correspondentes.



**Figura 2.1:** Representação esquemática do espectro eletromagnético ressaltando as regiões de comprimento de onda mais importantes para o ser humano, tais como a luz visível e as ondas de rádio.

## Soluções ondulatórias das Equações de Maxwell

Como vimos na aula anterior, as Equações de Maxwell são as equações que descrevem o campo eletromagnético em qualquer situação. No fundo, quando dizemos que as equações descrevem os campos, estamos nos referindo às relações matemáticas entre os valores dos campos elétrico e magnético, suas fontes, tais como cargas elétricas e correntes e eventuais objetos com os quais interajam. Vamos retornar às Equações de Maxwell e mostrar que elas prevêem a existência de ondas eletromagnéticas que podem se propagar no espaço vazio.

Analisemos a situação especial em que nos encontramos numa região do espaço onde não existam cargas livres nem correntes elétricas. Essa região poderia ser o vácuo ou o interior de algum meio dielétrico transparente, na situação em que as fontes que deram origem aos campos elétrico e magnético existentes se encontram muito distantes. Nesse caso, as Equações de Maxwell, que descrevem o comportamento do campo eletromagnético nessa região, podem ser escritas como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0; \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

onde  $\epsilon$  e  $\mu$  são, respectivamente, a constante dielétrica e a permissividade magnética do meio.

Para que possamos nos concentrar nos fenômenos físicos mais importantes, sem precisar fazer uso de um aparato matemático pesado, procuraremos soluções das Equações de Maxwell que sejam tão simples quanto possível, dependendo apenas de uma coordenada espacial e do tempo. Isso significa que, se escolhermos essa coordenada espacial como sendo  $z$ , procuraremos soluções do tipo  $\vec{E} = \vec{E}(z, t)$  e  $\vec{B} = \vec{B}(z, t)$ . Note que isso não significa que os vetores campo elétrico  $\vec{E}$  e magnético  $\vec{B}$  não possuam componentes nas direções  $x$  e  $y$ . Apenas estamos supondo que os valores assumidos por todas as componentes desses vetores dependam *somente* da coordenada espacial  $z$  e do tempo  $t$ .

Vejam, agora, como essa suposição acerca da dependência espaço-temporal dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  simplifica nossos cálculos. Suponha que tenhamos um vetor  $\vec{F}$  qualquer que dependa apenas da coordenada espacial  $z$  e do tempo  $t$ . A representação do vetor  $\vec{F}$ , no sistema de coordenadas cartesianas, será, então:

$$\vec{F}(z, t) = F_x(z, t) \hat{x} + F_y(z, t) \hat{y} + F_z(z, t) \hat{z},$$

onde deixamos explícita a dependência espaço-temporal de  $\vec{F}$ . Como todas as componentes do vetor  $\vec{F}$  dependem apenas da coordenada espacial  $z$ , se calcularmos o divergente e o rotacional de  $\vec{F}$  em coordenadas cartesianas, teremos:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_z}{\partial z}; \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -\frac{\partial F_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \hat{y}. \quad (2.6)$$

Note como as expressões para o divergente e o rotacional do vetor  $\vec{F}$  tornam-se muito mais simples se comparadas com as expressões para um vetor que

dependa de todas as coordenadas espaciais. Note também que o vetor  $\vec{\nabla} \times \vec{F}$  não possui componente na direção do eixo  $z$ .

### Exercício 2.1

Demonstre as Expressões 2.5 e 2.6. Sugestão: utilize as representações dos operadores divergência e rotacional em coordenadas cartesianas e o fato de que as componentes de  $\vec{F}$  dependem somente da coordenada espacial  $z$ .

Tendo em mente que as relações 2.5 e 2.6 valem para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , voltemos às Equações de Maxwell e as escrevamos na representação de coordenadas cartesianas. Neste caso, teremos:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0; \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0; \quad (2.8)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial E_x}{\partial z} \hat{y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \hat{x} - \frac{\partial B_y}{\partial t} \hat{y} - \frac{\partial B_z}{\partial t} \hat{z}; \quad (2.9)$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \hat{y} = \mu\epsilon \left( \frac{\partial E_x}{\partial t} \hat{x} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{y} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{z} \right). \quad (2.10)$$

Lembre-se agora de que dois vetores quaisquer  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  só são iguais se suas componentes correspondentes forem idênticas, ou seja,  $A_x = B_x$ ,  $A_y = B_y$  e  $A_z = B_z$ . Analisemos agora as Equações (2.9) e (2.10). Em cada uma dessas equações, o vetor do lado esquerdo não tem componente na direção  $z$ . Logo, para que a igualdade seja válida, a componente na direção  $z$  do vetor do lado direito de cada uma dessas equações deve ser nula. Podemos concluir, portanto, que  $\partial B_z / \partial t = 0$  e  $\partial E_z / \partial t = 0$ . Combinando esses resultados com as Equações (2.7) e (2.8), podemos escrever:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0; \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0. \quad (2.12)$$

Essas equações nos dizem que  $E_z$  e  $B_z$  não dependem nem da coordenada  $z$  nem do tempo  $t$ . Isso significa que essas grandezas são constantes. Quais devem ser os valores dessas constantes? Note que se as componentes  $E_z$  e  $B_z$  não forem nulas, ou seja, se assumirem um valor constante *diferente* de zero, terão esses mesmos valores em todos pontos do espaço e em todos instantes de

tempo. Esse tipo de solução não nos interessa aqui, pois não está associada à *propagação* de uma onda de uma região do espaço para outra. Por essa razão, escolheremos os valores dessas constantes iguais a zero. Com isso, chegamos ao primeiro resultado importante:  $E_z = B_z = 0$ . Os campos elétrico e magnético,  $\vec{E}(z, t)$  e  $\vec{B}(z, t)$ , associados a soluções puramente ondulatórias, não possuem componente na direção  $z$ .

De posse dos resultados obtidos até agora, voltemos novamente às Equações de Maxwell (2.1)-(2.4). Primeiro, apliquemos o operador rotacional aos dois lados da Equação (2.3):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Olhe agora para o lado direito desta equação e note que podemos trocar a ordem em que os operadores de derivada temporal e o rotacional (derivadas espaciais) são aplicados ao campo magnético. Dizemos que estes operadores comutam, pois a ordem em que são aplicados não altera o resultado final. Assim, ficamos com:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t}. \quad (2.14)$$

Podemos agora substituir  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ , nessa equação, pelo lado direito da última Equação de Maxwell (2.4). Isso nos fornecerá:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Veja que, dessa forma, chegamos a uma equação independente para o campo elétrico, ou seja, uma equação em que apenas o campo  $\vec{E}$  aparece. É muito fácil obter também uma equação independente para o campo magnético  $\vec{B}$ . Para isso, basta repetir os procedimentos acima na Equação de Maxwell (2.4). Primeiro, apliquemos o rotacional aos dois lados dessa equação e troquemos a ordem em que os operadores de derivada temporal e o rotacional são aplicados ao campo elétrico:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Agora basta substituir  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ , nessa equação, pelo lado direito da Equação (2.3), para obter a equação desejada:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (2.17)$$

Estamos quase prontos. Precisamos apenas de analisar o resultado da aplicação do operador rotacional duas vezes em sucessão aos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , nos lados esquerdos das Equações (2.15) e (2.17). Lembre-se de que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  dependem apenas da coordenada espacial  $z$  e do tempo  $t$ . Já calculamos, na Expressão (2.6), o resultado do operador rotacional aplicado a um vetor genérico  $\vec{F}$  que tenha a mesma dependência espaço-temporal dos vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . Para chegarmos ao resultado procurado, basta então aplicarmos o rotacional aos dois lados da Expressão (2.6). É fácil ver que o resultado será:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \hat{x} - \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \hat{y}. \quad (2.18)$$

### Exercício 2.2

Demonstre a Expressão (2.18). Sugestão: utilize a representação do operador rotacional em coordenadas cartesianas e aplique-a à Expressão (2.6), levando em conta o fato de que as componentes de  $\vec{F}$  dependem somente da coordenada espacial  $z$  e do tempo  $t$ .

Aplicando esses resultados aos vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , podemos escrever as Equações (2.15) e (2.17) na forma:

$$-\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \hat{x} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \hat{y} = -\mu\epsilon \left( \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \hat{x} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \hat{y} \right); \quad (2.19)$$

$$-\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} \hat{x} - \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \hat{y} = -\mu\epsilon \left( \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} \hat{x} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} \hat{y} \right). \quad (2.20)$$

Note que, ao escrevermos essas equações, decompomos os vetores do lado direito em suas componentes cartesianas. Além disso, usamos o fato de que os campos elétrico e magnético não possuem componentes na direção do eixo  $z$ . Igualando as componentes correspondentes nos dois lados dessas equações, chegamos finalmente às equações que governam o comportamento de cada componente dos campos elétrico e magnético, independentemente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Pronto. Com isto, chegamos aonde queríamos. Note uma coisa muito interessante: todas as componentes não nulas dos campos elétrico e magnético satisfazem exatamente a mesma equação diferencial! Essa equação diferencial é muito conhecida, e você já a encontrou no curso de Física IIB: é a equação de onda. Lá, você aprendeu que qualquer função  $f$  que satisfaça a equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (2.22)$$

com  $v$  constante descreve uma onda que se propaga ao longo da direção  $z$  com velocidade  $v$ . As Equações (2.21), portanto, afirmam a existência de ondas eletromagnéticas, ou seja, nos dizem que qualquer perturbação do campo eletromagnético, em um dado ponto do espaço, se propagará para outras regiões do espaço com uma velocidade bem definida. Como os campos elétrico e magnético associados às soluções ondulatórias (2.21) não possuem componente na direção  $z$ , eles são, a todo instante, ortogonais à sua direção de propagação (direção  $z$ ). Isso significa que as ondas eletromagnéticas que se propagam em um meio dielétrico perfeitamente transparente são sempre *transversais*. Se compararmos as Equações (2.21) com a Equação (2.22), veremos que a velocidade  $v$  de propagação das ondas eletromagnéticas em um dado meio dielétrico depende apenas da constante dielétrica  $\epsilon$  e permissividade  $\mu$  desse meio:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (2.23)$$

As constantes  $\mu$  e  $\epsilon$  podem ser facilmente medidas. Na época de Maxwell, essas constantes haviam sido medidas para vários meios, inclusive o vácuo. Ao substituir os valores conhecidos dessas constantes para o vácuo na Expressão (2.23), Maxwell teve uma grande surpresa: o valor obtido era muito próximo ao valor conhecido para a velocidade da luz no vácuo. Baseado nesse resultado, que corroborava algumas evidências observadas anteriormente por Faraday, Maxwell concluiu que a luz era uma onda eletromagnética. Essa suposição foi confirmada posteriormente por inúmeros experimentos. A velocidade  $c$  da luz no vácuo é hoje conhecida com extrema precisão. Esse valor está em perfeita concordância com o valor previsto pela teoria eletromagnética:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (2.24)$$

Embora tenha sido utilizada inicialmente apenas para representar a velocidade de propagação da luz visível no vácuo, a constante  $c$  é atualmente usada para representar-se a velocidade de qualquer onda eletromagnética no vácuo.



Antes de continuarmos e examinarmos mais de perto algumas características importantes das ondas eletromagnéticas, vamos relembrar uma propriedade muito importante das soluções da equação de onda (2.22), que você já viu na Aula 2, do Módulo 2, do curso de Física 2B. Dada uma função qualquer  $f(z, t)$ , para que ela seja solução da equação de onda (2.22), basta que dependa das variáveis  $z$  e  $t$  da maneira  $f(z, t) = F(z \pm vt)$  e seja duplamente diferenciável com respeito a  $z$  e  $t$ . Note que a forma específica da função  $F$  não importa, basta que a dependência de  $f(z, t)$  em relação às variáveis  $z$  e  $t$  seja da forma indicada. Essa é, portanto, uma propriedade muito geral da equação de ondas em uma dimensão.

### Exercício 2.3

Mostre que qualquer função  $f(z, t) = F(z \pm vt)$ , duplamente diferenciável com respeito a  $z$  e  $t$ , é solução da equação de ondas (2.22).

Solução: vamos, simplesmente, substituir a função  $f(z, t)$  na equação de ondas (2.22) e mostrar que essa equação é satisfeita identicamente. Seja  $f(z, t) = F(z \pm vt) = F(\phi)$ , onde  $\phi \equiv z \pm vt$ . Ao derivarmos a função  $f$  com relação a  $z$  e  $t$ , podemos aplicar a regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

onde se subentende que os operadores diferenciais são aplicados à função  $f$ . É muito fácil ver que  $\partial \phi / \partial z = 1$  e  $\partial \phi / \partial t = \pm v$ . Logo,

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \pm v \frac{\partial}{\partial \phi}; \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (2.26)$$

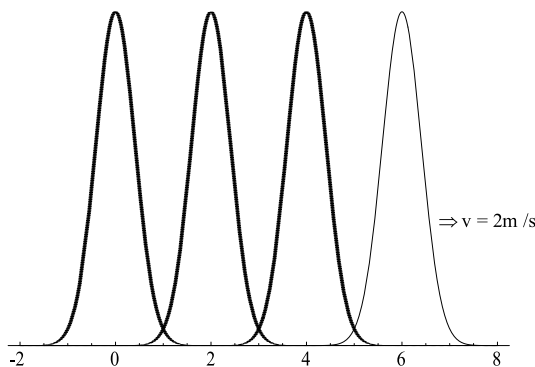
Se usarmos os resultados acima ao substituirmos a função  $f(z, t)$  na equação de ondas (2.22), obteremos:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \frac{1}{v^2} v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = 0, \quad (2.27)$$

que é satisfeita por *qualquer* função  $F$  duplamente diferenciável com respeito a  $z$  e  $t$ . Com isso, demonstramos o que foi pedido.

O fato de a dependência espaço-temporal das soluções da equação de onda unidimensional ser necessariamente da forma  $f(z, t) = F(z \pm vt)$  é que determina a característica mais fundamental das ondas: o poder de propagarem-se de um ponto do espaço para o outro. Note que é a quantidade  $\phi = z \pm vt$ , chamada *fase* da onda, que determina completamente o valor da função  $f$ , pois, independentemente dos valores isolados de  $z$  e  $t$ , um dado valor de  $\phi$  determina completamente o valor de  $f$ .

Imagine, agora, que, num dado instante de tempo  $t_0$  e numa dada posição  $z_0$ , a fase  $\phi$  tenha um valor bem determinado  $\phi_0 = z_0 \pm vt_0$ . É claro que, num instante de tempo posterior  $t$ , a fase não terá mais o valor  $\phi_0$  na posição  $z_0$ . Em que nova posição  $z$  a fase terá novamente o valor  $\phi_0$ , no instante de tempo posterior  $t$ ? É fácil ver que essa posição deverá satisfazer a relação  $z \pm vt = \phi_0 = z_0 \pm vt_0$ . Isso significa que  $z$  será determinado pela equação  $z = z_0 \mp v(t - t_0)$ . Essa equação é sua velha conhecida - é a equação horária do movimento retilíneo uniforme. Ela está nos dizendo que a nova posição  $z$  desloca-se para a direita, se a dependência espaço-temporal de  $f$  for  $f(z, t) = F(z - vt)$ , ou para a esquerda, se  $f(z, t) = F(z + vt)$ , com velocidade constante  $v$ . Isso significa que o valor assumido pela função  $f$  numa dada posição desloca-se continuamente para a direita ou para a esquerda com velocidade constante  $v$ . Nisso consiste o fenômeno de propagação de uma onda. A **Figura 2.2** nos dá um exemplo desse comportamento. Nesse caso,  $f(z, t) = e^{-\alpha(z-2t)^2}$ , descrevendo uma onda que se desloca para a direita com velocidade  $v = 2$  m/s. Note que a forma da onda é uma gaussiana, dada pela função  $F(\phi) = e^{-\alpha\phi^2}$ . É o fato de as variáveis  $z$  e  $t$  só aparecerem juntas em  $F$ , na forma  $z - vt$ , que faz com que a gaussiana se desloque como um todo para a direita, com velocidade  $v$ . As ondas, em geral, assumem as mais variadas formas.



**Figura 2.2:** Onda de formato gaussiano propagando-se no sentido positivo do eixo  $z$ , com velocidade  $v = 2$  m/s.

Voltemos agora às soluções ondulatórias (2.21) para os campos elétrico e magnético. À primeira vista, parece que elas dizem que os campos elétrico e magnético associados a uma onda eletromagnética são completamente independentes um do outro, já que as componentes desses campos obedecem a equações independentes. Isso, no entanto, não pode ser verdade. A existência do termo de corrente de deslocamento, ou seja, a introdução por Maxwell do efeito “recíproco” à lei de indução de Faraday, é essencial para a geração de ondas eletromagnéticas: um campo magnético variável no tempo leva ao surgimento de um campo elétrico. Esse campo elétrico também será variável no tempo e produzirá, por sua vez, um campo magnético variável no tempo, e assim sucessivamente. Os dois componentes da onda – o campo elétrico e o campo magnético – alimentam-se mutuamente, e isso faz com que a onda se propague. Os campos elétrico e magnético associados a uma onda eletromagnética devem, portanto, estar intimamente relacionados. Na verdade, como veremos a seguir, um campo determina completamente o outro.

Conforme nossa discussão anterior, as soluções gerais das Equações (2.21) deverão ser da forma:

$$\vec{E}(z, t) = E_x(z \pm vt)\hat{x} + E_y(z \pm vt)\hat{y};$$

$$\vec{B}(z, t) = B_x(z \pm vt)\hat{x} + B_y(z \pm vt)\hat{y}.$$

Sem perda de generalidade, vamos analisar as soluções que representam ondas propagando-se na direção positiva do eixo  $z$ . Isso significa que vamos usar apenas o sinal menos na frente de  $v$ , nas equações acima. Entretanto, o mesmo raciocínio se aplicará às soluções que representam ondas propagando-se no sentido negativo do eixo  $x$ . Com essas soluções, voltemos à Equação de Maxwell (2.10), escrita na representação de coordenadas cartesianas. Igualando as componentes  $x$  e  $y$  do vetor do lado esquerdo às componentes correspondentes do vetor do lado direito daquela equação, obteremos:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} = -\mu\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial E_x}{\partial t}; \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (2.29)$$

onde usamos o fato de que  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ . Fazendo uso da fase  $\phi = z - vt$  e utilizando a regra da cadeia (3.3) nas diferenciações, podemos reescrever as equações acima nas formas:

$$\frac{\partial B_y}{\partial \phi} = \frac{1}{v} \frac{\partial E_x}{\partial \phi}, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial \phi} = -\frac{1}{v} \frac{\partial E_y}{\partial \phi}. \quad (2.31)$$

## Exercício 2.4

Demonstre as Expressões (2.30) e (2.31).

Como a fase  $\phi$  determina completamente o valor das soluções ondulatórias, a Equação (2.30) nos diz que as componentes  $B_y$  e  $E_x$  passam seus valores máximos e mínimos exatamente na mesma posição e no mesmo instante de tempo. Dizemos, então, que elas estão sempre *em fase*. Da mesma maneira, a Equação (2.31) nos diz que as componentes  $B_x$  e  $E_y$  também passam por seus valores extremos na mesma posição e no mesmo instante de tempo. Só que, quando uma delas está passando por um máximo, a outra está passando por um mínimo. Dizemos, então, que essas componentes estão sempre em *oposição de fase*. Note que podemos facilmente integrar as equações acima:

$$B_y(\phi) = \frac{1}{v} E_x(\phi) + c_1; \quad (2.32)$$

$$B_x(\phi) = -\frac{1}{v} E_y(\phi) + c_2, \quad (2.33)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração. Como  $B_x$  e  $B_y$  são soluções ondulatórias, as constantes  $c_1$  e  $c_2$  devem ser necessariamente nulas. Caso contrário,  $B_x$  e  $B_y$  nunca poderiam, por exemplo, representar um pulso propagante, já que seriam diferentes de zero ao longo de todo o eixo  $z$ . Esse fato nos leva à seguinte relação entre as componentes de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ :

$$B_y(z, t) = \frac{1}{v} E_x(z, t); \quad (2.34)$$

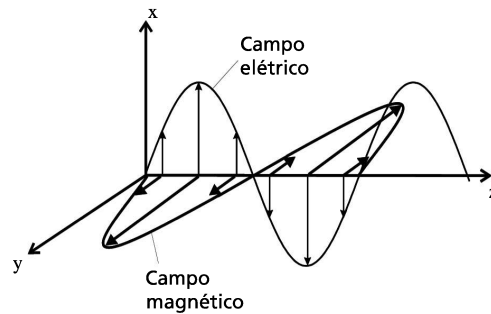
$$B_x(z, t) = -\frac{1}{v} E_y(z, t), \quad (2.35)$$

onde retornamos às variáveis originais  $z$  e  $t$ . Se usarmos as regras do produto vetorial, podemos reescrever essas relações em uma única relação vetorial:

$$\vec{B}(z, t) = \frac{1}{v} \hat{z} \times \vec{E}(z, t). \quad (2.36)$$

Esta equação nos mostra o que já esperávamos: os campos elétrico e magnético associados a uma onda eletromagnética estão intimamente relacionados. Dado o campo elétrico  $\vec{E}$ , o campo magnético  $\vec{B}$  estará completamente determinado, e vice-versa. Por essa razão, costuma-se descrever uma onda eletromagnética apenas por meio de seu campo elétrico  $\vec{E}$  associado. Como o produto vetorial de dois vetores é sempre ortogonal a eles, essa equação também

nos diz que os campos elétrico  $\vec{E}$  e magnético  $\vec{B}$  são sempre ortogonais entre si e à direção de propagação da onda. O fato de os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  serem campos vetoriais implica que, para que uma onda eletromagnética seja completamente determinada, precisamos descrever, a cada instante, a *direção* desses vetores no plano ortogonal à direção de propagação da onda. Essa descrição corresponde ao conceito de polarização da onda eletromagnética, que você aprenderá daqui a pouco.



**Figura 2.3:** Representação esquemática de uma onda eletromagnética propagando-se no sentido positivo do eixo  $z$ .

A **Figura 2.3** mostra, em uma representação esquemática, um exemplo de onda eletromagnética propagando-se ao longo do eixo  $z$  do sistema de coordenadas. O que se vê é a configuração da onda em um dado instante de tempo. Note que os campos elétrico e magnético são ortogonais à direção de propagação da onda. O campo magnético anda junto com o campo elétrico (estão em fase), mas, enquanto o campo elétrico está sempre alinhado ao eixo  $x$ , o campo magnético fica sempre alinhado ao eixo  $y$  (são ortogonais entre si). Se examinássemos a configuração dos campos em um instante posterior, veríamos a mesma imagem em outra posição do eixo  $z$ .

Na realidade, o caso da **Figura 2.3** é um caso particular, muito importante, de onda eletromagnética. Trata-se de uma onda plana monocromática e com polarização linear. Até o final deste módulo, teremos discutido o significado de cada um destes termos.

## Conclusão

Nesta aula, obtivemos soluções ondulatórias das Equações de Maxwell em um meio dielétrico transparente. Essas soluções descrevem ondas eletromagnéticas que podem propagar-se até no espaço vazio. Vimos também que

a velocidade de propagação dessas ondas é determinada apenas pela permissividade  $\epsilon$  e pela permeabilidade  $\mu$  do meio dielétrico e que tal velocidade é igual à velocidade de propagação da luz nesse meio. Além disso, mostramos que os campos elétrico e magnético numa onda eletromagnética estão intimamente relacionados. Em particular, em um meio dielétrico transparente, esses campos são ortogonais entre si e à direção de propagação da onda. A onda é dita, então, transversal.

### Atividades finais

1. Faça a experiência de explicar a um(a) colega o que é uma onda eletromagnética.
2. Que grandezas determinam a velocidade de propagação de uma onda eletromagnética?
3. Como estão relacionados entre si os campos elétrico  $\vec{E}$  e magnético  $\vec{B}$  associados a uma onda eletromagnética?
4. Agora tente explicar a seu colega por que as ondas eletromagnéticas em meios dielétricos transparentes são ditas transversais.

### Resumo

Nesta aula, são derivadas soluções ondulatórias das Equações de Maxwell em situações especiais que levam a soluções simples. A propagação dessas soluções em um meio dielétrico transparente é estudada, e a velocidade de propagação é explicitamente calculada. Além disso, mostramos que relações os campos elétrico e magnético associados a uma onda eletromagnética devem manter entre si.

### E ao longo da próxima aula...

...introduziremos o conceito de onda plana. Você verá que existem ondas planas especiais, chamadas ondas planas monocromáticas, que podem ser usadas para descrever qualquer tipo de onda. Além disso, veremos que as ondas eletromagnéticas transportam energia e momento linear.

## Referências

Se você quiser se aprofundar no tema desta aula, sugerimos a leitura do livro *Física básica 4*, de H. Moysés Nussenzveig, editora Edgar Blücher.





## Aula 3 – Representação e propriedades das ondas eletromagnéticas

### Metas da aula

Apresentar as ondas eletromagnéticas planas e derivar algumas de suas propriedades.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Explicar o que é uma onda eletromagnética plana.
- Escrever o campo elétrico associado a uma onda plana monocromática propagando-se ao longo de uma dada direção.
- Calcular o vetor de Poynting associado a uma onda eletromagnética.
- Calcular a pressão de radiação exercida por uma onda eletromagnética sobre uma superfície normal à sua direção de propagação.

### Ondas planas monocromáticas

Na aula anterior, derivamos soluções ondulatórias das Equações de Maxwell na situação particular em que a variação espacial dos campos elétrico e magnético era determinada somente pela variável  $z$ . Nessas condições, você viu que todas as componentes não nulas do campo eletromagnético satisfazem as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_x}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} &= 0.\end{aligned}$$

Todas essas equações são exemplos da equação de onda unidimensional, e suas soluções gerais são da forma  $\vec{E}(z, t) = \vec{E}(z \pm vt)$  e  $\vec{B}(z, t) = \vec{B}(z \pm vt)$ .

Essas soluções representam ondas eletromagnéticas deslocando-se ao longo do eixo  $z$  com velocidade  $v$ . Você viu também que o valor da fase  $\phi = z \pm vt$  determina completamente o valor dos campos elétrico e magnético em qualquer posição espacial, num dado instante de tempo. Se fixarmos este instante de tempo, digamos  $t = t_0$ , podemos fazer uma “foto” da onda, ou seja, podemos saber os valores assumidos pelos campos elétrico e magnético em todos os pontos do espaço naquele dado instante de tempo. Como seria a “foto”?

Para saber isso, você deve notar que o campo elétrico será o mesmo em todos os pontos do espaço para os quais a fase  $\phi = z \pm vt_0$  assume o *mesmo* valor. A mesma coisa também acontecerá com o campo magnético. À superfície formada por esses pontos, nos quais a fase tem o mesmo valor, dá-se o nome de *frente de onda*. No nosso caso, é muito fácil descobrir quais são essas superfícies. Elas são geradas pelos conjuntos de pontos espaciais para os quais a fase  $\phi = z \pm vt_0$  assume um valor constante. Esses pontos são dados pela expressão  $z = \phi_0 \mp vt_0$ , onde  $\phi_0$  é o valor constante assumido pela fase. Essa expressão nos diz que as frentes de ondas são planos ortogonais ao eixo  $z$ . Na nossa foto, “veríamos”, então, uma infinidade de planos ortogonais ao eixo  $z$ , onde, em cada um deles, os campos elétrico e magnético assumem um valor fixo. Quando o tempo passa, todos esses planos deslocam-se, ao longo do eixo  $z$ , para a direita ou para a esquerda, com velocidade constante  $v$ . Por esse motivo, chamamos ondas eletromagnéticas *planas* aquelas descritas pelo campo elétrico  $\vec{E}(z, t) = \vec{E}(z \pm vt)$ . Isso significa que as soluções ondulatórias das Equações de Maxwell, obtidas sob as condições especiais discutidas na aula anterior, representam ondas eletromagnéticas planas transversais propagando-se ao longo do eixo  $z$ .

Ao derivarmos tais soluções, supomos que a variação espacial dos campos elétrico e magnético era determinada somente pela variável espacial  $z$ . No entanto, como o espaço é isotrópico e nenhuma direção nele é especial, poderíamos muito bem ter escolhido o eixo  $z$  em qualquer outra direção arbitrária. Podemos concluir, portanto, que, em situações mais gerais, devem existir soluções das Equações de Maxwell representando ondas planas transversais deslocando-se ao longo de uma direção qualquer, representada pelo vetor unitário  $\hat{k}$ . Como deve ser a representação dessas ondas?

Em situações gerais, pode-se mostrar que todas as componentes dos campos elétrico e magnético satisfazem uma equação de onda tridimensional:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} &= 0, \quad i = x, y, z; \\ \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_i}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 B_i}{\partial t^2} &= 0, \quad i = x, y, z.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Seja  $f(x, y, z, t)$  qualquer uma das componentes dos campos elétrico ou magnético. Mostremos que qualquer função  $f(x, y, z, t) = F(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt)$ , onde  $\hat{k}$  é um vetor unitário e  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ , satisfaz a equação de onda tridimensional:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (3.2)$$

Para isso, basta suirmos o procedimento empregado no exercício 2.3 da aula anterior, onde usamos a equação de onda unidimensional. Seja  $f(x, y, z, t) = F(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt) = F(\phi)$ , onde  $\phi \equiv \hat{k} \cdot \vec{r} - vt$ . Ao derivarmos a função  $f$  com relação a  $x, y, z$  e  $t$ , podemos aplicar a regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

onde se subentende que os operadores diferenciais são aplicados à função  $f$ . Não é difícil ver que  $\partial \phi / \partial x = \hat{k}_x$ ,  $\partial \phi / \partial y = \hat{k}_y$ ,  $\partial \phi / \partial z = \hat{k}_z$  e  $\partial \phi / \partial t = -v$ , onde  $\hat{k}_x$ ,  $\hat{k}_y$  e  $\hat{k}_z$  são as componentes cartesianas do vetor unitário  $\hat{k}$ . Logo:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \hat{k}_x \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \hat{k}_y \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \hat{k}_z \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -v \frac{\partial}{\partial \phi}; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \hat{k}_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \hat{k}_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \hat{k}_z^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.4)$$

Se usarmos os resultados acima ao substituirmos a função  $f(x, y, z, t)$  na equação de ondas (3.2), obteremos:

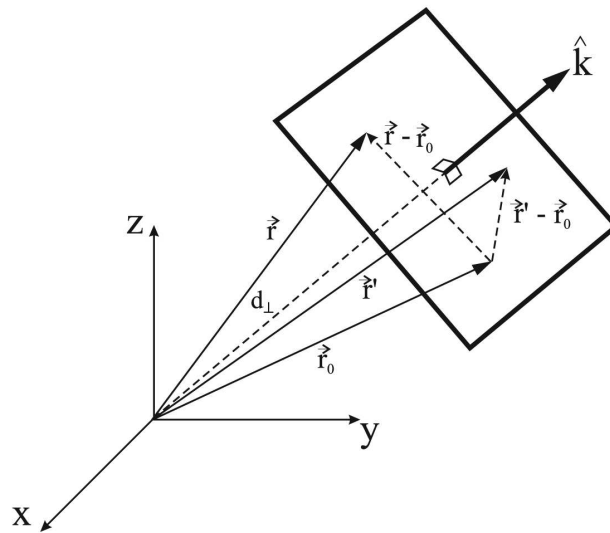
$$\left( \hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 + \hat{k}_z^2 \right) \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \frac{1}{v^2} \left( v^2 \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} \right) = 0. \quad (3.5)$$

Agora, como  $\hat{k}$  é um vetor unitário,  $\hat{k}_x^2 + \hat{k}_y^2 + \hat{k}_z^2 = |\hat{k}|^2 = 1$ , e a equação acima se reduz a:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2} = 0, \quad (3.6)$$

que é satisfeita por *qualquer* função  $F$  duplamente diferenciável com respeito a  $x, y, z$  e  $t$ . Com isso, demonstramos o que queríamos.

Examinemos agora que superfícies representam as frentes de onda das ondas descritas por  $f(x, y, z, t) = F(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt)$ . Para isso, basta fixarmos o instante de tempo, digamos  $t = t_0$ , e descobriremos para quais pontos do espaço, descritos pelo vetor posição  $\vec{r}$ , a fase  $\phi = \hat{k} \cdot \vec{r} - vt_0$  assume um valor constante  $\phi_0$ . Observe que esses pontos satisfazem a equação  $\hat{k} \cdot \vec{r} = \phi_0 + vt_0$ . Essa, no entanto, é a equação de um plano ortogonal ao vetor  $\hat{k}$ , cuja distância  $d_\perp$  à origem do sistema de coordenadas, no tempo  $t_0$ , é dada por  $d_\perp(t_0) = \phi_0 + vt_0$ . Note que em um instante de tempo posterior,  $t = t_0 + \Delta t$ , a distância desse plano à origem de coordenadas mudará para  $d_\perp(t_0 + \Delta t) = \phi_0 + v(t_0 + \Delta t) = d_\perp(t_0) + v\Delta t$ . Isso nos mostra que, quando o tempo passa, os planos que representam as frentes de onda deslocam-se ao longo da direção positiva do vetor  $\hat{k}$ , com velocidade constante  $v$ .



**Figura 3.1:** Construção de um plano perpendicular ao vetor  $\hat{k}$  e contendo o ponto representado pelo vetor posição  $\vec{r}_0$ . Os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{r}'$  representam pontos genéricos do plano.

**Exercício 3.1**

Mostre que os pontos descritos pelo vetor posição  $\vec{r}$  que satisfaz a equação  $\hat{k} \cdot \vec{r} = C$ , onde  $C$  é uma constante e  $\hat{k}$  é um vetor unitário, geram um plano perpendicular ao vetor  $\hat{k}$ , cuja distância à origem é dada por  $C$ .

Solução: seja  $\vec{r}_0$  o vetor posição de um ponto particular de uma superfície  $S$  e seja  $\vec{r}$  o vetor posição de um ponto genérico dessa superfície (veja a **Figura 3.1**). Então, a cada ponto da superfície, podemos associar um vetor  $\vec{r} - \vec{r}_0$ . Se cada um desses vetores satisfizer a equação  $\hat{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ , cada um desses vetores será ortogonal ao vetor  $\hat{k}$ , já que seus produtos internos com o vetor  $\hat{k}$  são todos nulos. Isso significa, no entanto, que todos os vetores  $\vec{r} - \vec{r}_0$  estão em um mesmo plano, que é ortogonal ao vetor  $\hat{k}$ . Olhando para a **Figura 3.1**, é fácil ver que, neste caso, os pontos representados pelo vetor posição  $\vec{r}_0$  e todos os vetores posição  $\vec{r}$  geram um plano perpendicular ao vetor  $\hat{k}$ . Portanto, os pontos representados pelo vetor posição  $\vec{r}$ , que satisfaz a equação  $\hat{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ , que pode ser reescrita como  $\hat{k} \cdot \vec{r} = \hat{k} \cdot \vec{r}_0 = C$ , geram um plano perpendicular ao vetor  $\hat{k}$ . Da **Figura 3.1**, também podemos concluir que  $C = \hat{k} \cdot \vec{r}_0$  é a distância do plano à origem do sistema de coordenadas.

Note que um plano é a superfície formada por todos os pontos, cujos vetores posição têm a mesma projeção ao longo de uma dada direção, e isso é o que nos diz a equação  $\hat{k} \cdot \vec{r} = C$ .

A onda descrita por  $f(x, y, z, t) = F(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt)$  é, portanto, uma onda *plana* deslocando-se ao longo da direção representada pelo vetor unitário  $\hat{k}$  com velocidade constante  $v$ . Se escolhermos o vetor  $\hat{k}$  como  $\hat{k} = \hat{z}$ , teremos a situação particular, discutida na aula anterior, de uma onda propagando-se na direção positiva do eixo  $z$ , com velocidade  $v$ , já que  $\hat{z} \cdot \vec{r} = z$ . Se escolhermos  $\hat{k} = -\hat{z}$ , teremos uma onda propagando-se na direção oposta.

Com isso, respondemos à pergunta acerca da representação de uma onda plana propagando-se ao longo de uma direção qualquer e também mostramos que, mesmo em situações mais gerais do que aquelas descritas na aula anterior, existem soluções ondulatórias das Equações de Maxwell que representam ondas eletromagnéticas planas propagando-se ao longo de uma direção arbitrária  $\hat{k}$ . Essas ondas são descritas por campos elétricos da forma:

$$\vec{E}(x, y, z, t) \equiv \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt). \quad (3.7)$$

Note que essas ondas ainda devem ter as mesmas propriedades que as ondas planas deslocando-se ao longo do eixo  $z$ : os campos elétrico e magnético ainda devem ser ortogonais entre si e à direção de propagação da onda. Isso significa que o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e o campo magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  ainda estão relacionados um ao outro pela equação:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (3.8)$$

onde  $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ .

É importante salientar que, em contraposição à equação de onda unidimensional, cujas soluções gerais são necessariamente ondas planas, a equação de onda tridimensional admite várias classes de soluções, sendo as soluções de ondas planas apenas uma dessas classes. Como exemplos de outras classes de soluções, podemos citar as ondas esféricas e as ondas cilíndricas.

Você deve estar se perguntando por que estamos dando tanta ênfase às ondas planas. De fato, as ondas eletromagnéticas podem ser muito complicadas em sua distribuição espacial, evolução temporal e propriedades de interação. Atualmente, as técnicas matemáticas do eletromagnetismo clássico (não quântico) são tão poderosas, que é possível descrever, com grande qualidade, fenômenos eletromagnéticos muito complicados, tais como o espalhamento de luz por partículas dielétricas de formato arbitrário e a interação de luz laser com cristais não-lineares.

Para simplificar problemas tão complicados, normalmente decomponemos as ondas eletromagnéticas em somatórios de ondas muito mais simples. Desta forma, podemos analisar o comportamento de cada uma destas ondas mais simples independentemente e, depois, podemos somar novamente estas componentes. Com isso, obtemos o resultado final de um problema complicado como uma soma de soluções de problemas mais simples. Esta é uma estratégia muito utilizada em matemática e física, não apenas no eletromagnetismo. Por exemplo, a luz gerada por um laser pode ser decomposta em ondas planas. Em muitas situações podemos aproximar o feixe de luz laser por uma única onda plana na região do espaço próxima do centro do feixe.

O interessante é que tais ondas simples são, geralmente, tipos especiais de ondas planas, chamadas ondas planas harmônicas ou ondas planas monocromáticas. Daí o nosso interesse pelas ondas planas. Mas o que são ondas planas harmônicas? Note que, até o momento, na expressão da onda plana  $f(\vec{r}, t) = F(\hat{k} \cdot \vec{r} - vt)$ , nós não especificamos a função  $F$ , que pode ser

completamente arbitrária. As ondas planas harmônicas, ou monocromáticas, são aquelas para as quais a função  $F$  mostra uma dependência senoidal com a fase  $\phi = \hat{k} \cdot \vec{r} - vt$ . Em outras palavras, as ondas planas harmônicas são aquelas que podem ser escritas como:

$$f(\vec{r}, t) = A \cos \left[ k \left( \hat{k} \cdot \vec{r} - vt \right) + \phi_0 \right], \quad (3.9)$$

onde a constante  $k$  é chamada de número de onda, e  $A$  e  $\phi_0$  também são constantes. Você já encontrou esse tipo de onda, no caso em que  $\hat{k} = \hat{x}$ , no curso de Física 2B. Mais especificamente, na Aula 2 do Módulo 2 daquele curso. Lá essas ondas foram chamadas *ondas progressivas harmônicas*. Nós sugerimos a você que retorne àquela aula e relembre os conceitos relacionados às ondas harmônicas, como frequência, período temporal, comprimento de onda, número de onda etc.. Frequentemente, as ondas planas harmônicas são escritas de uma forma ligeiramente diferente da expressão acima:

$$f(\vec{r}, t) = A \cos \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0 \right), \quad (3.10)$$

onde  $\vec{k} = k \hat{k}$  é chamado vetor de onda,  $\omega = kv$  é a frequência angular da onda, e  $\phi_0$  é chamado constante de fase. É o fato de essa onda ter uma frequência  $\nu = \omega/2\pi$  bem definida que lhe confere a denominação de monocromática. De fato, nosso sentido da visão associa cores a uma certa faixa de frequências das ondas eletromagnéticas que atingem nossos olhos. Por exemplo, associamos a cor azul a ondas eletromagnéticas de frequência em torno de  $\nu = 6,7 \times 10^{14} Hz$ , que corresponde a um comprimento de onda  $\lambda = 450 nm$  (veja a **Figura 2.1** da aula anterior). Lembre que  $A$  representa a amplitude da onda e  $\lambda = 2\pi/k$  seu comprimento de onda. As ondas eletromagnéticas elementares que discutiremos neste curso serão ondas eletromagnéticas planas monocromáticas. Os campos elétricos e magnéticos associados a uma classe importante dessas ondas serão, por exemplo, descritos por:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \cos \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0 \right), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 \cos \left( \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0 \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $\vec{E}_0$  e  $\vec{B}_0$  são vetores constantes e relacionados entre si através da expressão  $\vec{B}_0 = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E}_0$ . Veremos, na próxima aula, que os campos acima descrevem uma onda eletromagnética plana, monocromática e linearmente polarizada.

## Vetor de Poynting

Quando uma onda eletromagnética se propaga, transporta energia e pode transferir esta energia para os corpos com os quais eventualmente interaja. Em nossa vida diária, temos várias experiências que comprovam esta afirmação. Um exemplo é a radiação que vem do sol. Quando as ondas eletromagnéticas que vêm do sol interagem com o corpo humano, sentimos imediatamente o calor provocado principalmente pela parcela de infravermelho e de microondas presentes na radiação solar. Além disto, a exposição ao sol provoca o bronzeamento, principalmente devido ao ultravioleta. Todos estes efeitos envolvem transferência de energia da onda eletromagnética para o corpo humano. A transferência da energia da onda para um objeto depende muito das propriedades do material de que o objeto é constituído. Nesta seção, estudaremos a relação entre a energia transportada por uma onda e seus campos elétrico e magnético associados.

Uma onda eletromagnética existe dentro de alguma região do espaço. Como sabemos que os campos elétrico e magnético podem armazenar energia, podemos nos perguntar qual é a densidade de energia eletromagnética (energia por unidade de volume) na região ocupada pela onda. Pode-se mostrar que a densidade de energia  $u_E$  associada ao campo elétrico  $\vec{E}$  e a densidade de energia  $u_B$  associada ao campo magnético  $\vec{B}$ , em um determinado ponto do espaço, são dadas por:

$$u_E = \frac{\epsilon}{2} \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon}{2} E^2 \quad ; \quad u_B = \frac{1}{2\mu} \vec{B} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2\mu} B^2. \quad (3.12)$$

Logo, a densidade de energia total  $u$  armazenada na região ocupada pela onda eletromagnética é  $u = u_E + u_B$ . Agora, numa onda eletromagnética, sabemos que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  estão intimamente relacionados. Em particular, para uma onda plana, sabemos que essa relação é dada por:

$$\vec{B} = \frac{1}{v} \hat{k} \times \vec{E} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{k} \times \vec{E}. \quad (3.13)$$

Dado que  $\hat{k}$  é um vetor de módulo unitário, a relação acima nos diz que  $B = E/v = \sqrt{\mu\epsilon}E$ . Se substituirmos essa expressão na equação (3.12) para a densidade de energia  $u_B$ , teremos:

$$u_B = \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{\mu\epsilon}{2\mu} E^2 = \frac{\epsilon}{2} E^2 = u_E. \quad (3.14)$$

Veja que interessante! Em uma onda eletromagnética plana, a cada instante, metade da energia está armazenada na forma de energia elétrica e metade na forma de energia magnética!



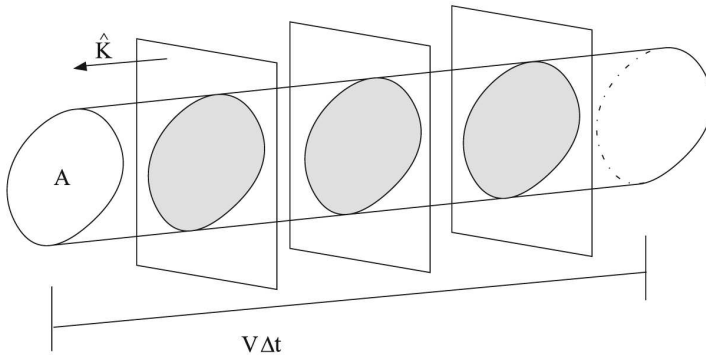
Agora, que sabemos qual é a densidade de energia armazenada em qualquer ponto dentro de uma região ocupada por uma onda eletromagnética, podemos nos perguntar como ocorre o transporte dessa energia de um lugar para outro, quando a onda eletromagnética se propaga. Chamemos  $S$  o fluxo de energia por unidade de tempo, através de uma área unitária que está sendo atravessada por uma onda eletromagnética. Como podemos calcular o valor de  $S$ ? A **Figura 3.2** mostra uma representação esquemática de uma onda eletromagnética viajando com velocidade  $v$  e atravessando uma certa área  $A$ . Durante um intervalo de tempo muito curto  $\Delta t$ , apenas a energia contida no volume  $v \Delta t A$  atravessará a área  $A$ . Essa energia será dada por  $\Delta U = u (v \Delta t A)$ . Assim, o valor de  $S$  será:

$$S = \frac{\Delta U}{\Delta t A} = \frac{u v \Delta t A}{\Delta t A} = u v. \quad (3.15)$$

Podemos modificar a forma da expressão anterior se lembrarmos que  $u = u_E + u_B = 2u_B$ , dado que  $u_E = u_B$ . Lembrando ainda que  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ , podemos escrever:

$$S = 2u_B v = 2 \times \frac{1}{2\mu} B^2 \times \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\mu\sqrt{\mu\epsilon}} B B = \frac{1}{\mu} E B, \quad (3.16)$$

onde usamos o fato de que  $B = \sqrt{\mu\epsilon} E$ .



**Figura 3.2:** Representação esquemática do fluxo de energia eletromagnética através de uma área  $A$ .

Agora, nós vamos supor que a energia eletromagnética flua ao longo da direção de propagação da onda e introduzir um vetor associado a esse fluxo, pela equação:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}. \quad (3.17)$$

O vetor  $\vec{S}$  é chamado vetor de **Poynting**, e seu módulo é igual à grandeza  $S$ , definida na equação (3.15). Além disso, a direção de  $\vec{S}$  define a direção



**John Henry Poynting** nasceu em Manchester, Inglaterra, em 1852. Em 1884, publicou o trabalho sobre o transporte de energia eletromagnética, definindo o que hoje é conhecido como vetor de Poynting. Também é conhecido por ter medido a constante da gravitação universal em 1891, e por ter previsto o efeito de arraste de partículas de poeira no Sistema Solar em direção ao Sol (efeito Poynting-Robertson).

do fluxo de energia eletromagnética, já que a direção desse vetor coincide com a direção  $\hat{k}$  de propagação da onda eletromagnética. De fato, usando a relação  $\vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon} \hat{k} \times \vec{E}$ , podemos escrever:

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E} \times (\hat{k} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\vec{E} \cdot \vec{E}) \hat{k} - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\vec{E} \cdot \hat{k}) \vec{E}, \quad (3.18)$$

onde usamos a identidade vetorial  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$ . Como nas situações tratadas neste curso, as ondas eletromagnéticas são transversais, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são ortogonais à direção de propagação das ondas. Assim,  $\vec{E} \cdot \hat{k} = 0$ , e o último termo da equação (3.18) se anula, fornecendo:

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \hat{k} = \frac{1}{\mu v} E^2 \hat{k} = u v \hat{k}, \quad (3.19)$$

o que mostra que  $\vec{S}$  é paralelo à direção de propagação da onda. Note que o vetor de Poynting  $\vec{S}$  tem o mesmo papel com relação à energia eletromagnética que o vetor densidade de corrente  $\vec{J}$  tem em relação à corrente elétrica. Ele representa a densidade de corrente de energia eletromagnética.

## Intensidade de uma onda eletromagnética

No caso particular de uma onda plana monocromática para a qual  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)$ , o vetor de Poynting será dado por:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu v} E_0^2 \cos^2(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0) \hat{k} = \frac{1}{2\mu v} E_0^2 \left(1 + \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\omega t + 2\phi_0)\right) \hat{k},$$

de modo que o fluxo instantâneo de energia por unidade de tempo por unidade de área oscila com o dobro da frequência da onda. A luz visível tem frequência de oscilação da ordem de  $10^{15}$  Hz. Para ondas eletromagnéticas com essas frequências, o fluxo instantâneo de energia oscila muito rapidamente, tornando impraticável uma medida direta de seu valor. Os instrumentos rotineiros em laboratórios costumam apenas medir o valor médio  $\langle \vec{S} \rangle$  dessa grandeza, onde a média temporal é tomada sobre vários períodos de sua oscilação. Por esse motivo, é vantajoso introduzir o conceito de intensidade  $I$  de uma onda eletromagnética, que é dada pelo valor médio do vetor de Poynting ao longo da direção de propagação da onda:

$$I = \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{k}. \quad (3.20)$$

A intensidade é uma quantidade escalar. Assim como o módulo do vetor de Poynting representa o fluxo de energia por unidade de tempo e de

área, a intensidade representa o *fluxo médio* de energia por unidade de tempo e de área, considerando vários períodos de oscilação da onda.

Para uma onda plana monocromática, a intensidade será dada por:

$$I = \frac{1}{2\mu v} E_0^2 \left( 1 + \left\langle \cos(2\vec{k} \cdot \vec{r} - 2\omega t + 2\phi_0) \right\rangle \right). \quad (3.21)$$

Os símbolos  $\langle \rangle$  indicam que o valor médio da grandeza deve ser calculado. O valor médio do cosseno, durante um ciclo completo, é nulo, pois essa função assume valores positivos e negativos que se cancelam mutuamente ao final de um ciclo. Assim, ficamos com:

$$I = \frac{1}{\mu v} \frac{1}{2} E_0^2 = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2. \quad (3.22)$$

Noutras palavras, a intensidade é proporcional ao quadrado do módulo da amplitude do campo elétrico.

### Exercício 3.2

Escreva a intensidade da onda eletromagnética como uma função da densidade de energia  $u_E$  armazenada no campo elétrico e também como uma função da densidade de energia  $u_B$  armazenada no campo magnético.

## Exercício 3.3

O feixe de luz produzido por um laser tem uma potência de  $P = 1\text{mW}$  e se propaga no espaço vazio. A intensidade  $I$  do feixe é aproximadamente uniforme na seção reta circular (perpendicular à direção de propagação) de raio  $R = 1\text{mm}$ , como mostra a **Figura 3.3**. Na região do espaço ocupada pelo feixe, aproxime-o por uma onda plana para poder utilizar os resultados obtidos nesta aula. Pode-se mostrar que essa abordagem é válida quando o raio  $R$  é muito maior que o comprimento de onda do feixe.

- Determine o valor da intensidade  $I$  do feixe.
- Determine a densidade de energia eletromagnética (soma das parcelas elétrica e magnética) num ponto no interior da seção reta do feixe.
- Determine o módulo do vetor campo elétrico  $|\vec{E}|$  em Vs/m num ponto no interior da seção reta do feixe. Use o valor

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{C}^2/(\text{m J})$$

para a permissividade elétrica do vácuo (lembre que  $1\text{V} = 1\text{J/C}$ ).

Solução:

- A área da seção reta do feixe vale

$$A = \pi R^2 = 3,14 \times 10^{-6} \text{m}^2. \quad (3.23)$$

A intensidade representa a potência por unidade de área:  $I = P/A$ . Usando o resultado da Equação (3.23)

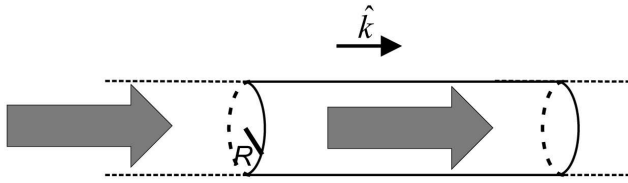
$$I = \frac{10^{-3} \text{W}}{3,14 \times 10^{-6} \text{m}^2} = 318 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \quad (3.24)$$

- A densidade de energia eletromagnética vale (note que  $1\text{W} = 1\text{J/s}$ )

$$u = \frac{I}{c} = \frac{318 \text{W/m}^2}{3,0 \times 10^8 \text{m/s}} = 1,1 \times 10^{-6} \text{J/m}^3. \quad (3.25)$$

- A intensidade está relacionada ao módulo do campo elétrico pela equação  $I = \epsilon_0 c |\vec{E}|^2$ . Temos então:

$$|\vec{E}| = \sqrt{\frac{I}{\epsilon_0 c}} = 346 \frac{\text{J}}{\text{C m}} = 346 \frac{\text{V}}{\text{m}} \quad (3.26)$$



**Figura 3.3:** Feixe de luz laser de raio  $R$ .

## Pressão de Radiação

Como você viu, uma onda eletromagnética carrega energia. Na nossa experiência diária, percebemos vários efeitos dos diferentes tipos de radiação sobre os objetos. Uma pergunta interessante seria se a luz é capaz de exercer uma força sobre os objetos. A resposta é afirmativa, porque as ondas eletromagnéticas também transportam *momento linear*, além de energia. O momento linear transportado por uma onda eletromagnética plana, através de uma área  $A$ , normal à sua direção de propagação, é dado por:

$$\vec{\Delta p} = \frac{\Delta U}{c} \hat{k}, \quad (3.27)$$

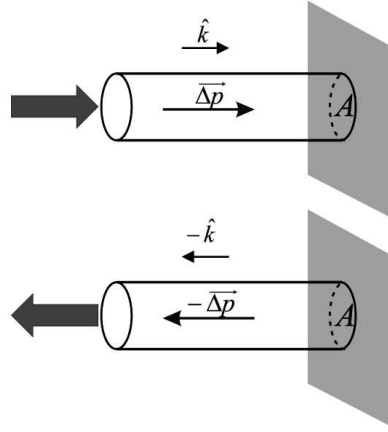
onde  $\Delta U$  é a quantidade de energia transportada pela onda, que atravessa a área  $A$ . Note que o momento linear, que é uma grandeza vetorial, tem a direção e o sentido da propagação da onda. Uma forma de visualizar o transporte de momento linear seria imaginar que a luz é feita de minúsculas bolinhas e que cada bolinha, ao colidir com um certo corpo, transferiria momento linear para ele, empurrando-o no sentido da propagação do feixe de luz. Obviamente, a teoria eletromagnética não prevê que a luz seja composta por bolinhas, mas sim uma onda contínua. Mesmo assim, pode-se mostrar que um feixe de luz transfere, sim, momento linear para um corpo, exercendo pressão sobre ele como se fosse, por exemplo, um jato de água.

Vamos, inicialmente, calcular o momento linear transferido por uma onda eletromagnética, no caso em que toda a fração de energia da onda que incide sobre o corpo é absorvida por ele. Aqui faremos um tratamento unidimensional, ou seja, vamos supor que todas as grandezas que são vetoriais sejam paralelas a uma mesma direção. Nesse caso, como toda a energia eletromagnética que incide sobre o corpo é absorvida por ele, a mesma coisa acontecerá com o momento linear associado a essa energia.

Pela equação (3.27), o momento linear transferido ao corpo será:

$$\Delta p = \frac{\Delta U}{c}, \quad (3.28)$$

onde  $\Delta U$  é a quantidade de energia absorvida pelo corpo. Note que o momento transferido ao corpo aponta no sentido de propagação da onda.



**Figura 3.4:** Representação esquemática da incidência, suida pela reflexão total, de um feixe de luz laser sobre a face plana de um corpo.

Qual seria o momento transferido se o corpo, em vez de absorver toda a energia da onda que incide sobre ele, a refletisse completamente? Este seria, por exemplo, o caso se o corpo sobre o qual a onda incide, fosse perfeitamente espelhado. Examinemos a situação mais simples, em que a onda incide sobre a face plana de um corpo, estando essa face orientada ao longo da direção normal à direção de propagação da onda (veja a **Figura 3.4**). Como a onda é completamente refletida, ou seja, nenhuma fração da energia incidente sobre o corpo é absorvida, ela retornará, propagando-se no sentido inverso, transportando o mesmo momento linear que transportava antes. O vetor momento linear, no entanto, aponta no sentido oposto ao sentido anterior. A variação do momento linear transportado pela onda antes e depois da reflexão será, portanto,  $\Delta p = -2\Delta U/c$ , onde  $\Delta U/c$  é o momento transportado pela onda até o corpo. Como o momento linear total do sistema formado pelo corpo e pela onda deve ser conservado, a variação, no momento linear do corpo, deve corresponder, exatamente, ao oposto da variação do momento da onda. O momento linear transferido ao corpo será, portanto:

$$\Delta p = 2\frac{\Delta U}{c}. \quad (3.29)$$

Observe que, neste caso, o momento linear transferido da onda para o corpo é o dobro do momento transferido no caso de absorção total da onda pelo corpo.

Se, ao incidir sobre um corpo, a onda causa uma mudança no momento linear do corpo, a onda exerce uma força sobre o corpo. Podemos determinar o valor médio dessa força calculando a quantidade de momento linear  $\overrightarrow{\Delta p}$  transferido da onda ao corpo durante um intervalo de tempo muito curto  $\Delta t$ :

$$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{\Delta p}}{\Delta t}. \quad (3.30)$$

Essa força, naturalmente, dependerá da área do corpo, sobre a qual a onda incide, pois, quanto maior essa área, maior a quantidade de energia que incide sobre o corpo. Existe uma grandeza intimamente ligada a essa força, mas que apresenta a vantagem de ser independente da área do corpo. Essa grandeza se chama *pressão de radiação* e é igual à força média exercida pela onda por unidade de área normal à direção de propagação da onda:

$$p_r = \frac{F}{A}, \quad (3.31)$$

onde  $A$  é a área do corpo, normal à direção de propagação da onda. Note que estamos usando o símbolo  $p_r$  para pressão de radiação e  $p$  para o momento. Calculemos, agora, a pressão de radiação sobre o corpo, nos casos discutidos há pouco, em que a onda é completamente absorvida ou completamente refletida pelo corpo. No primeiro caso, teremos:

$$p_r = \frac{\bar{F}}{A} = \frac{\Delta p}{A\Delta t} = \frac{\Delta U}{cA\Delta t}, \quad (3.32)$$

onde usamos as equações (3.30) e (3.28). Podemos relacionar a energia  $\Delta U$  transportada através de uma área  $A$ , durante um certo intervalo de tempo  $\Delta t$ , com a intensidade  $I$  da onda:

$$\Delta U = IA\Delta t. \quad (3.33)$$

Substituindo a expressão anterior na equação (3.32), obtemos, para o caso de absorção total:

$$p_r = \frac{I}{c}. \quad (3.34)$$

Como o momento linear transferido ao corpo pela onda, no caso de reflexão total da onda, corresponde ao dobro do momento transferido na

absorção total, é fácil ver que, nesse caso, a pressão de radiação será dada por:

$$p_r = 2 \frac{I}{c}. \quad (3.35)$$

#### Exercício 3.4

Suponha que o feixe de luz laser considerado no exercício 3.3 incida sobre um espelho plano, de área muito maior que a área da seção reta do feixe, ao longo da direção normal ao espelho. Toda a potência incidente é refletida pelo espelho. Calcule a pressão de radiação e a força exercidas pelo feixe de luz.

Solução:

A pressão de radiação é dada por

$$p_r = \frac{I}{c} = 1.1 \times 10^{-6} \text{N/m}^2. \quad (3.36)$$

Esta pressão atua sobre a área iluminada pelo feixe, que é igual à área  $A$  da sua seção reta. Então, o módulo da força vale (lembre que  $1 \text{pN} = 10^{-12} \text{N}$ ):

$$|\vec{F}| = p_r \times A = 3.33 \text{pN}, \quad (3.37)$$

e a sua direção e sentido coincidem com a direção e sentido de propagação do feixe.

Desta forma, podemos ver que um feixe de luz, ou uma onda eletromagnética qualquer, exerce uma pressão sobre o corpo, no qual ela incide. Esta pressão é proporcional à intensidade da onda, como já poderíamos intuir. Experimentos foram feitos demonstrando a pressão de radiação, e hoje em dia esta idéia é tão bem aceita, que existem até projetos de naves espaciais que utilizam as chamadas *velas solares*. São naves equipadas com enormes superfícies refletoras. Ao incidir sobre estas superfícies, a luz do sol exerceria pressão de radiação sobre as superfícies, impulsionando a nave no sentido de propagação da luz solar. Esta força seria pequena se comparada com os poderosos propulsores a combustão. Entretanto, como no espaço não há atrito e como a força atua o tempo todo, o efeito acumulado deste tipo de propulsão poderia levar uma nave a velocidades altíssimas após algum tempo.



**Exercício 3.5**

Um veleiro solar possui um espelho plano de área  $A = 400\text{m}^2$ . A intensidade da radiação solar no topo da atmosfera terrestre vale  $I = 1.4\text{kW/m}^2$ . Calcule a força exercida pela radiação sobre o veleiro, quando o seu espelho é perpendicular à direção de propagação da radiação.

Solução:

O módulo da força é o produto da pressão de radiação pela área do veleiro:

$$|\vec{F}| = \frac{I}{c} A = 1.9 \times 10^{-3}\text{N}. \quad (3.38)$$

A direção e o sentido de  $\vec{F}$  coincidem com a direção e o sentido da propagação da radiação.

**Conclusão**

Nesta aula, obtivemos soluções ondulatórias das Equações de Maxwell mais gerais que as soluções obtidas na aula anterior. Essas soluções são chamadas ondas planas. Além disso, você viu que existe uma classe de ondas planas muito importante, chamadas de ondas planas monocromáticas. Também vimos que as ondas eletromagnéticas transportam energia e momento linear. A cada instante, a energia transportada por uma onda plana está igualmente dividida em energia elétrica e energia magnética. Introduzimos o vetor de Poynting  $\vec{S}$ , que tem o mesmo papel com relação à energia eletromagnética que o vetor densidade de corrente  $\vec{J}$  tem em relação à corrente elétrica. Também introduzimos o conceito de intensidade de uma onda eletromagnética. Além disso, você observou que uma onda, ao incidir sobre um corpo, exerce uma pressão sobre ele, chamada pressão de radiação, e aprendeu a calcular essa pressão em algumas situações simples.

**Atividades Finais**

1. Faça a experiência de explicar a um(a) colega o que é uma onda plana monocromática. Deixe claro qual propriedade da onda está relacionada ao caráter de onda plana e qual propriedade está relacionada ao caráter de onda monocromática.

2. Defina o vetor de Poynting associado a uma onda eletromagnética e descreva qual a relação desse vetor com o transporte de energia eletromagnética pela onda.
3. Qual é a relação entre o vetor de Poynting e a densidade de energia dos campos elétrico e magnético?
4. O que é a intensidade de uma onda eletromagnética?
5. Qual a relação entre a intensidade de um feixe de luz e a pressão exercida por ele sobre um corpo absorvedor e sobre um corpo refletor.

## Resumo

Uma onda plana é uma onda, cujas frentes de onda são planos ortogonais à direção de propagação da onda. Existem classes de soluções das Equações de Maxwell que podem ser representadas por ondas planas propagando-se ao longo de uma direção qualquer do espaço. Uma onda eletromagnética, ao propagar-se, transporta energia e momento linear. O transporte de momento linear pela onda dá origem à pressão de radiação, que é proporcional à intensidade da onda.

## E ao longo da próxima aula...

...você aprenderá o que é a polarização de uma onda e verá que existem vários tipos de polarização possíveis. Além disso, você irá analisar a interação da luz com vários instrumentos sensíveis à polarização.

## Aula 4 – Polarização

### Meta da aula

Introduzir o conceito de polarização de uma onda eletromagnética.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Explicar o que é polarização de uma onda eletromagnética.
- Definir os estados de polarização mais comuns.
- Determinar, por meio da análise de duas componentes ortogonais do campo elétrico de uma onda, o estado de polarização da mesma.

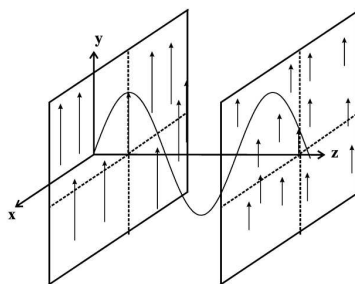
### Estados de polarização

No final da Aula 2, você viu que, em meios transparentes, as ondas eletromagnéticas são transversais. Isso significa que, a cada instante, os campos elétrico e magnético associados a uma tal onda devem ser ortogonais à direção de propagação da mesma. Note que essa condição exige apenas que os campos elétrico e magnético estejam, a cada instante, em um plano ortogonal à direção de propagação da onda. No entanto, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são vetores e podem apontar, a cada instante, ao longo de qualquer direção contida nesse plano. Por esse motivo, para que uma onda eletromagnética seja completamente determinada, precisamos descrever, a cada instante, não só o módulo, mas também a *direção* desses vetores nos planos ortogonais à direção de propagação da onda. Essa descrição está intimamente relacionada ao conceito de polarização da onda eletromagnética, que nós discutiremos a partir de agora.

Lembre-se de que os campos elétrico e magnético associados a uma onda eletromagnética estão intimamente relacionados. Dado o campo elétrico  $\vec{E}$ , o campo magnético  $\vec{B}$  estará completamente determinado, e vice-versa. Por essa razão, para descrever uma onda eletromagnética, basta descrever apenas um desses campos. Costuma-se usar o campo elétrico  $\vec{E}$  para descrever a onda. Foi isso o que fizemos, ao discutirmos alguns aspectos relacionados às ondas eletromagnéticas, tais como o transporte de energia e o vetor de

Poynting, bem como a capacidade de uma onda eletromagnética de transferir momento linear aos corpos sobre os quais ela incide.

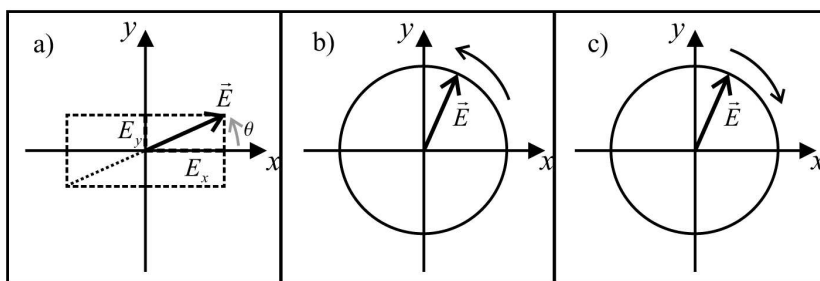
Existe uma razão técnica, pela qual preferimos a descrição pelo campo elétrico: numa ampla faixa do espectro eletromagnético, o campo elétrico tem um papel mais importante do que o campo magnético nas interações com a matéria. Portanto, discutiremos a polarização da luz em termos do campo elétrico. Além disso, vamos trabalhar com as ondas planas monocromáticas, que nos permitem ter uma visão mais simples do que é a polarização e qual é o seu papel na propagação da luz e em suas interações com a matéria.



**Figura 4.1:** Representação esquemática de uma onda plana propagando-se ao longo do eixo  $z$ . Os dois planos representam frentes de onda. Em cada um deles, as setas representam o vetor campo elétrico. Note que os tamanhos das setas (amplitude do campo) variam de um plano a outro, mas não dentro do mesmo plano.

Veja a **Figura 4.1**. Essa figura mostra uma representação esquemática de uma onda plana, propagando-se ao longo do eixo  $z$ . São mostradas duas frentes de onda, que, nesse caso, são planos ortogonais ao eixo  $z$ . Como você viu na aula anterior, em uma tal onda, o campo elétrico  $\vec{E}$  pode variar com o tempo e com a posição  $z$ , mas, em cada frente de onda, no nosso caso, em cada plano ortogonal ao eixo  $z$ , o campo elétrico  $\vec{E}$  deve ser constante. Além disso, como a onda é transversal, o vetor campo elétrico deve estar contido nesses planos, ou seja, não possuir componente ao longo do eixo  $z$ . Desta forma, em cada posição  $z$  e para cada instante de tempo  $t$ , o campo elétrico da onda é completamente determinado por suas componentes  $E_x(z, t)$  e  $E_y(z, t)$ , ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. Em particular, o ângulo  $\theta$  entre o vetor campo elétrico  $\vec{E}$  e o eixo  $x$  é tal que  $\tan(\theta) = E_y(z, t)/E_x(z, t)$ . À medida que a onda se propaga, o valor de cada uma dessas componentes, numa dada posição  $z$ , varia no tempo. Com isso, a direção do vetor campo elétrico  $\vec{E}$ , na posição  $z$ , que pode ser medida através do ângulo  $\theta$ , também pode variar no tempo.

A polarização da luz (ou de qualquer onda eletromagnética) é determinada pelo comportamento temporal da orientação do vetor campo elétrico em qualquer plano ortogonal à direção de propagação da onda. Assim, se em uma dada posição  $z$ , apenas o módulo e o sentido do vetor campo elétrico mudam no tempo, permanecendo sua *direção* constante, dizemos que a onda é *linearmente* polarizada. A *direção* da polarização é dada, nesse caso, pelo ângulo  $\theta$  entre o vetor campo elétrico e o eixo  $x$  (veja a **Figura 4.2.a**). Também podemos ter a situação onde, em uma dada posição  $z$ , o *módulo* do campo elétrico é constante no tempo, mas sua direção varia periodicamente. Nesse caso, a extremidade do vetor campo elétrico descreve um círculo no plano  $xy$ . Dizemos, então, que a onda é *circularmente* polarizada. O sentido de rotação do vetor campo elétrico pode ser tanto anti-horário quanto horário. Para distinguir esses dois sentidos de rotação, no primeiro caso dizemos que a onda é circularmente polarizada à direita (**Figura 4.2.b**) no segundo caso, dizemos que ela é circularmente polarizada à esquerda (**Figura 4.2.c**). Em geral, tanto o módulo quanto a direção do campo elétrico variam no tempo, em uma dada posição. Nesses casos, a extremidade do vetor campo elétrico descreve uma elipse no plano  $xy$ . Dizemos, então, que a onda é *elípticamente* polarizada.



**Figura 4.2:** Representação esquemática do comportamento temporal do vetor campo elétrico em uma onda polarizada: a) polarização linear; b) polarização circular à esquerda; c) polarização circular à direita.

Muitos materiais, inclusive o sistema visual de alguns animais, são sensíveis à polarização das ondas eletromagnéticas. Além disso, como você verá adiante, muitos efeitos ópticos dependem da polarização da luz.

Vejamos como deve ser a expressão do campo elétrico, para ondas de diferentes polarizações. Para esse fim, introduziremos uma nova representação, chamada complexa, para os campos elétrico e magnético de uma onda plana monocromática, que facilitará a identificação do tipo de polarização da onda.

Algumas vezes, no decorrer de cálculos mais longos, observamos que é trabalhoso tratar com as funções seno e cosseno que descrevem as ondas harmônicas. Nesses casos, é vantajoso usar uma representação dessas funções em termos de números complexos. Por meio dessa representação, as funções trigonométricas são substituídas por funções exponenciais, que são muito mais simples de serem tratadas. Com a ajuda da fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (4.1)$$

podemos escrever uma representação complexa dos campos elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  de uma onda plana monocromática, na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)} e^{-i\omega t} \\ \vec{B}^{(+)}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \phi_0)} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde  $\vec{E}_0$  e  $\vec{B}_0$  são vetores reais. Note que  $\vec{E}^{(+)}$  e  $\vec{B}^{(+)}$  são grandezas complexas e, como tais, não podem ser diretamente identificadas com grandezas físicas mensuráveis, como os campos elétrico e magnético, que são necessariamente reais. Portanto, durante os cálculos, usamos os campos complexos a fim de tirar vantagem da facilidade com que podemos tratar funções exponenciais. No entanto, terminados os cálculos, se quisermos saber o valor, de fato, de qualquer grandeza física mensurável, devemos tomar a parte real das expressões resultantes. Nos casos em que um campo é multiplicado por outro ou por si mesmo, devemos ter muito cuidado ao usarmos a representação complexa dos mesmos. Quando isso ocorrer, chamaremos sua atenção para as devidas precauções a serem tomadas.

Se quisermos, por exemplo, saber quais os campos físicos representados pelos campos complexos das equações (4.2), basta tomarmos a parte real daquelas expressões:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t)] = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)}] = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0), \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \text{Re}[\vec{B}^{(+)}(\vec{r}, t)] = \text{Re}[\vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0)}] = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_0). \end{aligned}$$

Voltemos à nossa onda plana monocromática, propagando-se ao longo do eixo  $z$ . A representação complexa do campo elétrico de uma tal onda pode ser escrita como

$$\vec{E}^{(+)}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(z) e^{-i\omega t}, \quad (4.3)$$

onde  $\vec{E}_0(z)$  é um vetor complexo, sem componente ao longo do eixo  $z$ . Note que não é possível, a priori, dizer qual é o tipo de polarização da onda plana

representada, pois as componentes do vetor campo elétrico ao longo do eixo  $x$  e do eixo  $y$  não foram explicitamente especificadas. Devemos, então, especificar estas componentes de tal forma que a identificação do estado de polarização da onda seja imediata:

$$\begin{aligned}\vec{E}^{(+)}(x, y, z, t) &= (E_x(z) \hat{x} + E_y(z) \hat{y}) e^{-i\omega t} \\ &= (E_{0x} e^{i\phi_x} \hat{x} + E_{0y} e^{i\phi_y} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)},\end{aligned}\quad (4.4)$$

onde as componentes complexas  $E_x(z)$  e  $E_y(z)$  foram escritas nas formas:

$$E_x(z) = E_{0x} e^{i(kz + \phi_x)} \quad \text{e} \quad E_y(z) = E_{0y} e^{i(kz + \phi_y)}, \quad (4.5)$$

com  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  sendo constantes reais. Podemos também fatorar o termo  $e^{i\phi_x}$ , na Equação (4.4), ficando com

$$\begin{aligned}\vec{E}^{(+)}(x, y, z, t) &= [E_{0x} \hat{x} + E_{0y} e^{i(\phi_y - \phi_x)} \hat{y}] e^{i(kz - \omega t + \phi_x)} \\ &= [E_{0x} \hat{x} + E_{0y} e^{i\delta} \hat{y}] e^{i(kz - \omega t + \phi_x)}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Na passagem da primeira para a segunda linha da Equação (4.6), definimos  $\delta = \phi_y - \phi_x$ , a *diferença de fase* entre as componentes  $E_y$  e  $E_x$  do campo elétrico. Note, também, que podemos sempre escolher nossa origem de tempo de tal maneira que a constante de fase  $\phi_x$  se anule. Você já verá que a diferença de fase  $\delta$  entre as componentes  $E_y$  e  $E_x$  do campo elétrico tem um papel fundamental no estado de polarização de uma onda eletromagnética que se propague ao longo do eixo  $z$ . Para esse fim, tomemos a parte real do campo complexo da Equação (4.6), já que é a parte real daquele campo que corresponde ao campo elétrico físico:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \text{Re}[\vec{E}^{(+)}(x, y, z, t)] = \text{Re}[(E_{0x} \hat{x} + E_{0y} e^{i\delta} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)}]. \quad (4.7)$$

Após multiplicar, separadamente, cada componente do campo elétrico complexo pelo termo exponencial, podemos reescrever o último termo da equação anterior, para obter

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \text{Re}[E_{0x} e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} + E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \delta)} \hat{y}] \\ &= E_{0x} \cos(kz - \omega t) \hat{x} + E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{y}.\end{aligned}\quad (4.8)$$

Analisemos a última linha da Equação (4.8). Ela nos diz que o vetor campo elétrico tem componentes ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , que variam da mesma maneira com a fase  $\phi = kz - \omega t$  (lembre-se de que  $k$  é o número de onda, e  $\omega$ , a frequência angular da onda monocromática). Note que existem

duas diferenças entre essas componentes. A primeira é a diferença de fase  $\delta$  entre elas. A segunda está nas amplitudes  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  de cada componente. Analisemos, agora, alguns casos concretos:

- Situação em que  $\delta = 2n\pi$ , com  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Nesse caso, como  $\cos(\theta + 2n\pi) = \cos(\theta)$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y}) \cos(kz - \omega t) \\ &= \vec{E}_0 \cos(kz - \omega t),\end{aligned}\quad (4.9)$$

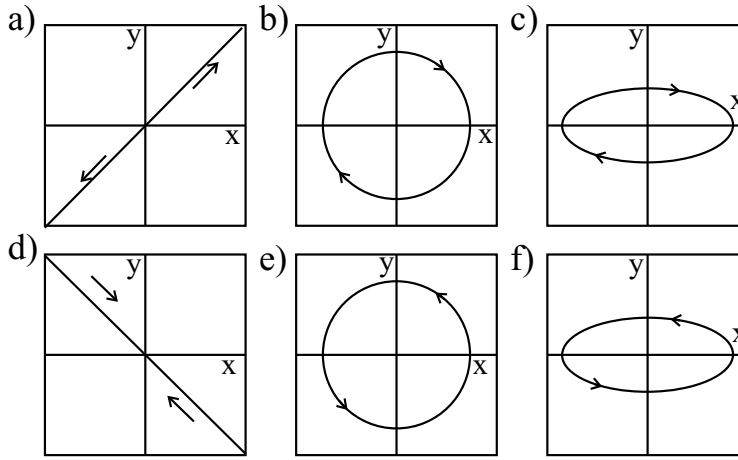
onde  $\vec{E}_0$  é um vetor constante. Observe que o campo elétrico é dado por um vetor constante, multiplicado por uma função escalar, periódica, de  $z$  e  $t$ . Sabemos que a multiplicação de um vetor por um número resulta em um vetor paralelo ao vetor original. Logo, a direção do vetor campo elétrico na Equação (4.9) é constante. Apenas seu módulo e seu sentido variam periodicamente. Com isso, podemos concluir que, quando  $\delta = 2n\pi$ , o campo elétrico (4.8) representa uma onda *linearmente* polarizada. Note também que, nesse caso, a direção  $\theta$  da polarização da onda é dada por  $\theta = \tan^{-1}(E_{0y}/E_{0x})$ . Como  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  são constantes positivas, o campo elétrico oscila ao longo de uma linha localizada nos quadrantes 1 e 3. O caso especial em que  $E_{0x} = E_{0y}$ , ou seja, as amplitudes das componentes  $E_x$  e  $E_y$  do campo elétrico são iguais, é mostrado na **Figura 4.3.a**. Essa figura mostra a trajetória seguida pela extremidade do vetor campo elétrico em um plano arbitrário  $z = z_0$ . É fácil ver que quando  $E_{0x} = E_{0y}$ , a direção de polarização é  $\theta = 45^\circ$ . Além disso, quando  $E_{0y}$  é nulo, a onda está linearmente polarizada na direção  $x$ ; quando  $E_{0x}$  é nulo, a onda está linearmente polarizada na direção  $y$ , não importando valor de  $\delta$ .

- Situação em que  $\delta = (2n + 1)\pi$ , com  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Nesse caso, como  $\cos[\theta + (2n + 1)\pi] = -\cos(\theta)$ , teremos

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= (E_{0x} \hat{x} - E_{0y} \hat{y}) \cos(kz - \omega t) \\ &= \vec{E}'_0 \cos(kz - \omega t),\end{aligned}\quad (4.10)$$

onde  $\vec{E}'_0$  também é um vetor constante. Essa situação é bastante similar à situação anterior. A onda é linearmente polarizada. A única diferença é que, agora, a direção de polarização é dada por  $\theta = \tan^{-1}(-E_{0y}/E_{0x})$ . Por isso, o campo elétrico oscila ao longo de uma linha localizada nos quadrantes 2 e 4. O caso especial em que  $E_{0x} = E_{0y}$  é mostrado na **Figura 4.3.d**. Agora, a direção de polarização é  $\theta = 135^\circ$ .





**Figura 4.3:** Representação de alguns estados de polarização: a) polarização linear a  $45^\circ$ , com  $\delta = 0$ ; b) polarização circular à direita, com  $\delta = \frac{3\pi}{2}$ ; c) polarização elíptica, com  $\delta = \frac{3\pi}{2}$ ; d) polarização linear a  $-45^\circ$ , com  $\delta = \pi$ ; e) polarização circular à esquerda, com  $\delta = \frac{\pi}{2}$ ; f) polarização elíptica, com  $\delta = \frac{\pi}{2}$ .

- Situação em que  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$  e  $\delta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ , com  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Nesse caso, como  $\cos(\theta + \frac{\pi}{2} + 2n\pi) = -\sin(\theta)$ , podemos escrever, usando novamente a Equação (4.8):

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 [\cos(kz - \omega t) \hat{x} - \sin(kz - \omega t) \hat{y}]. \quad (4.11)$$

Note que, agora, o módulo do vetor campo elétrico será

$$E = \sqrt{E_0^2 [\cos^2(kz - \omega t) + \sin^2(kz - \omega t)]} = E_0. \quad (4.12)$$

Portanto, nesse caso, o módulo do vetor campo elétrico será constante; apenas sua direção poderá variar. Vejamos como a direção do vetor campo elétrico se comporta temporalmente. Para isso, sem perda de generalidade, analisemos a situação no plano  $z = 0$ . Sabemos que a direção  $\theta$  do vetor campo elétrico, em relação ao eixo  $x$ , é dada por  $\tan(\theta) = E_y/E_x$ . Levando em conta que  $z = 0$ , teremos, então, usando a Equação (4.11):

$$\tan(\theta) = \frac{E_y}{E_x} = \frac{-E_0 \sin(-\omega t)}{E_0 \cos(\omega t)} = \tan(\omega t). \quad (4.13)$$

Resolvendo para  $\theta$ , obtemos o comportamento temporal da direção do vetor campo elétrico, em relação ao eixo  $x$ :

$$\theta(t) = \omega t + n\pi. \quad (4.14)$$

Essa equação nos diz que o ângulo  $\theta$  aumenta continuamente, com velocidade angular constante  $\omega$ . Estando de frente para a onda, “veríamos”

o vetor campo elétrico girar no sentido anti-horário, com velocidade angular  $\omega$ , mantendo seu módulo constante. Conforme nossa discussão anterior, a onda descrita pelo campo elétrico (4.11) é, então, uma onda *circularmente polarizada à esquerda*. A **Figura 4.3.e** mostra, para esse caso, a trajetória descrita pela extremidade do vetor campo elétrico em um plano arbitrário  $z = z_0$ .

- Situação em que  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$  e  $\delta = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ , com  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Nesse caso, como  $\cos(\theta + \frac{3\pi}{2} + 2n\pi) = \sin(\theta)$ , teremos

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 [\cos(kz - \omega t) \hat{x} + \sin(kz - \omega t) \hat{y}]. \quad (4.15)$$

Essa situação é bastante similar à situação anterior. O módulo do vetor campo elétrico continuará sendo constante e dado por

$$E = \sqrt{E_0^2 [\cos^2(kz - \omega t) + \sin^2(kz - \omega t)]} = E_0. \quad (4.16)$$

Se fizermos uma análise semelhante à feita no caso anterior, veremos que a única diferença entre essas duas situações é que, agora, o comportamento temporal da direção do vetor campo elétrico, em relação ao eixo  $x$ , será

$$\theta(t) = -\omega t + n\pi. \quad (4.17)$$

Isso nos diz que, agora, o ângulo  $\theta$  *diminui* continuamente, com velocidade angular constante  $\omega$ . De frente para a onda, “veríamos”, agora, o vetor campo elétrico girar no sentido horário, com velocidade angular  $\omega$ , mantendo seu módulo constante. Essa onda, portanto, é *circularmente polarizada à direita*. A **Figura 4.3.b** mostra a trajetória descrita pela extremidade do vetor campo elétrico, para esse caso.

- Demais casos: Para valores de  $\delta$ ,  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  diferentes dos discutidos até agora, pode-se mostrar que a onda será *elípticamente polarizada*. Por exemplo, para  $\delta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$  e  $E_{0x} \neq E_{0y}$ , o vetor campo elétrico será dado por

$$\vec{E}(x, y, z, t) = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \hat{x} - E_{0y} \sin(kz - \omega t) \hat{y}. \quad (4.18)$$

Dado que

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \hat{x} \quad \text{e} \quad E_y = -E_{0y} \sin(kz - \omega t) \hat{y},$$

é fácil ver que

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 = \cos^2(kz - \omega t) + \sin^2(kz - \omega t) = 1. \quad (4.19)$$

Essa equação nos diz que a trajetória descrita pela extremidade do vetor campo elétrico, em um plano arbitrário  $z = z_0$ , é uma elipse de semi-eixos  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$ , orientados ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente. É, também, fácil observar que a trajetória será percorrida no sentido anti-horário. A **Figura 4.3.f** mostra um exemplo de trajetória para esse caso. A mesma coisa acontecerá para  $\delta = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ . Nesse caso, no entanto, a elipse será percorrida no sentido horário.

Agora você já sabe qual é a expressão do campo elétrico de uma onda plana monocromática de polarização arbitrária. E isso, tanto na representação complexa quanto na representação real do campo elétrico.

#### Exercício 4.1

Qual é a polarização das ondas descritas pelos campos elétricos a seguir? No caso em que se aplique, diga qual é a direção de polarização.

- $\vec{E}(x, y, z, t) = E_0 (\hat{x} + \sqrt{3} \hat{y}) \cos(kz - \omega t)$ .
- $\vec{E}^{(+)}(x, y, z, t) = E_0 \left( \hat{x} + e^{i\frac{5}{2}\pi} \hat{y} \right) e^{i(kz - \omega t)}$ .

**Sugestão:** Primeiro, verifique qual é a diferença de fase entre as componentes  $E_x$  e  $E_y$  do vetor campo elétrico. Depois, qual é a relação entre as amplitudes  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  dessas componentes. Reveja a discussão anterior e analise em que caso os exemplos anteriores se encaixam. Lembre-se de que, no caso de polarização linear, a direção de polarização é  $\theta = \tan^{-1}(E_{0y}/E_{0x})$ .

Antes de continuarmos, gostaríamos de chamar sua atenção para um fato muito importante, que você, talvez, não tenha percebido. Se voltarmos à Equação (4.8), que descreve o campo elétrico de uma onda de polarização arbitrária em suas representações complexa e real, podemos dizer que aquele campo é a soma de dois campos. Um campo  $\vec{E}_x$ , de uma onda linearmente polarizada na direção  $x$ , dado por

$$\vec{E}_x(x, y, z, t) = \text{Re} [E_{0x} e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}] = E_{0x} \cos(kz - \omega t) \hat{x}$$

e um campo  $\vec{E}_y$ , de uma onda linearmente polarizada na direção  $y$ , dado por

$$\vec{E}_y(x, y, z, t) = \text{Re} [E_{0y} e^{i(kz - \omega t + \delta)} \hat{y}] = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \delta) \hat{y}.$$

Isso significa que a superposição de duas ondas planas monocromáticas de mesma frequência e com polarizações lineares em direções ortogonais pode dar origem a uma onda com qualquer polarização. Para isso, é bastante que os coeficientes dessa superposição sejam adequadamente escolhidos. Diz-se, por esse motivo, que dois estados de polarização linear ortogonais entre si formam uma base para os estados de polarização da luz, ou seja, qualquer estado de polarização pode ser gerado por uma combinação adequada desses dois estados. Assim, podemos chamar os vetores unitários  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  de vetores de polarização linear. Além disso, qualquer combinação desses dois vetores gera um outro vetor de polarização (não necessariamente linear).

#### Exercício 4.2

Mostre que os vetores

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y}) \quad (4.20)$$

e

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - \hat{y})$$

também formam uma base para os estados de polarização de uma onda plana monocromática, propagando-se ao longo do eixo  $z$ . Isso significa que qualquer estado de polarização também pode ser escrito em termos desses dois vetores.

**Sugestão:** Mostre que os vetores  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$  têm as mesmas propriedades dos vetores  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ : eles são unitários e ortogonais entre si. Isso é suficiente para que esses vetores formem uma base para os estados de polarização. Lembre-se de que dois vetores são ortogonais se seu produto escalar é nulo. Para ser completo, escreva as representações dos vetores de polarização  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  em termos dos vetores  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ .

**Exercício 4.3**

Qual é a polarização das ondas descritas pelos seguintes campos elétricos?

- $\vec{E}^{(+)}(x, y, z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{e}_1$
- $\vec{E}^{(+)}(x, y, z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)} \hat{e}_2$

onde  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$  foram definidos no Exercício 4.2.

**Sugestão:** Proceda da mesma maneira que na resolução do Exercício 4.1.

Para simplificar o entendimento da polarização, restringimo-nos a ondas propagando-se ao longo do eixo  $z$ . É muito simples, agora que você entendeu o que é a polarização da onda, estender a discussão a ondas propagando-se ao longo de uma direção arbitrária  $\hat{k}$ . Dado o caráter transversal das ondas eletromagnéticas que nos interessam, o vetor campo elétrico, a cada instante, tem, necessariamente, de estar em um plano ortogonal ao vetor  $\hat{k}$ . Se, nesse plano, escolhermos duas direções ortogonais entre si e representadas pelos vetores unitários  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ , qualquer onda plana monocromática de polarização arbitrária poderá ser representada como uma superposição de duas ondas, linearmente polarizadas nas direções  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$ . No caso de uma onda propagando-se ao longo do eixo  $z$ , os vetores  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$  terão, exatamente, o mesmo papel para a polarização que os vetores  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  têm tudo o que dissemos sobre o estado de polarização de uma onda continua válido, se trocarmos  $\hat{x}$  por  $\hat{e}_1$  e  $\hat{y}$  por  $\hat{e}_2$ .

## Conclusão

Nesta aula, você viu que, devido ao caráter vetorial dos campos que se propagam em uma onda eletromagnética, uma descrição completa da mesma exige que se descreva, a cada instante, não só o módulo, mas também a direção desses vetores nos planos ortogonais à direção de propagação da onda. Viu, também, que o conceito de polarização está intimamente ligado a essa descrição. Definimos a polarização de uma onda eletromagnética e estudamos os estados mais comuns de polarização. Aprendemos a descrever um estado qualquer de polarização em termos de superposições de dois estados de polarização linear ortogonais entre si. Para facilitar tal descrição, nós também introduzimos a representação complexa dos campos associados a uma onda eletromagnética plana e monocromática.

## Atividades Finais

1. Faça a experiência de explicar a um(a) colega o que é a polarização de uma onda eletromagnética.
2. Quais são os estados de polarização mais comuns e qual trajetória é descrita pela extremidade do vetor campo elétrico em cada um deles?
3. Escreva a expressão para o campo elétrico de uma onda circularmente polarizada à esquerda, em termos de suas componentes ao longo de duas direções ortogonais entre si.

## E, ao longo da próxima aula...

...você estudará a interação da luz com alguns instrumentos sensíveis à polarização da mesma.

## Resumo

O estado de polarização da luz está associado ao comportamento temporal do vetor campo elétrico em um plano ortogonal à direção de propagação da mesma. A diferença de fase entre duas componentes ortogonais do campo elétrico, juntamente com a razão entre suas amplitudes, definem univocamente o estado de polarização. Há três tipos de estados de polarização: linear, circular e elíptica.

## Aula 5 – Polarizadores e placas birrefringentes

### Metas da aula

Apresentar meios polarizadores e birrefringentes, e discutir seus efeitos sobre a luz polarizada.

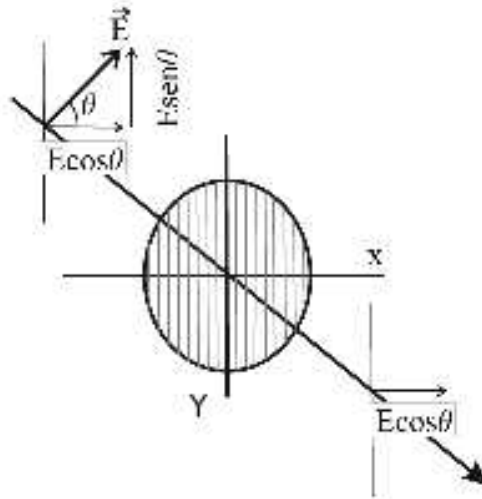
### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Explicar o que é um polarizador e qual o seu efeito sobre a luz que incide sobre ele.
- Definir luz não polarizada.
- Descrever as ações de uma placa de meia onda e de uma placa de um quarto de onda sobre a luz que as atravessa.

### Interação da luz polarizada com polarizadores e polaróides

O fato de que uma onda luminosa pode ter seu campo elétrico oscilando ao longo de uma única direção ou realizando trajetórias circulares e elípticas, em um plano perpendicular à sua direção de propagação, tem importantes consequências sobre a maneira como a luz interage com os objetos. Alguns objetos especiais são chamados polaróides e polarizadores, por causa da sua ação sobre a luz polarizada. Um exemplo deste tipo de material são os polaróides de polímeros, muito usados em associação com técnicas fotográficas. Estes polaróides são compostos por longas moléculas que se alinham em uma determinada direção. As componentes do campo elétrico da luz nesta direção serão absorvidas quando a mesma incidir sobre este material. Já as componentes do campo elétrico na direção ortogonal serão transmitidas. Veja a **Figura 5.1** que mostra uma ilustração esquemática deste tipo de situação.



**Figura 5.1:** Representação de uma onda plana polarizada linearmente, incidindo sobre um polaróide que absorve as componentes do campo elétrico orientadas ao longo da direção vertical da figura.

O objeto circular é um polaróide e as linhas verticais (direção  $\hat{y}$ ) representam a direção de alinhamento médio de suas moléculas. As componentes do campo elétrico nesta direção serão, portanto, absorvidas, enquanto as componentes na direção ortogonal serão transmitidas. Por convenção, o *eixo* do polaróide define a direção de transmissão (direção  $\hat{x}$ , na figura). Nesta mesma figura está representado o campo elétrico de uma onda luminosa, polarizada linearmente ao longo da direção que forma um ângulo  $\theta$  com o eixo do polaróide. A onda incide, em um ângulo normal, sobre o polaróide. Sabemos que parte do campo elétrico da onda será absorvida e parte, transmitida. Qual será a expressão do campo elétrico da onda, após atravessar o polaróide e que fração da intensidade incidente será transmitida? Para descobrir isso, expressemos o campo elétrico incidente em termos de suas componentes ao longo da direção paralela ( $\hat{x}$ ) e da direção ortogonal ( $\hat{y}$ ) ao eixo do polaróide:

$$\vec{E} = (E_0 \cos \theta \hat{x} + E_0 \sin \theta \hat{y}) \cos(kz - \omega t), \quad (5.1)$$

onde  $E_0$  é a amplitude do campo incidente. Note que, segundo a Equação (3.22), da Aula 3, a intensidade da onda incidente é:

$$I_0 = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2, \quad (5.2)$$

onde  $\epsilon$  é a constante dielétrica do meio onde a onda se propaga e  $v$  sua velocidade nesse meio. Como a componente do campo ortogonal ao eixo do polaróide será totalmente absorvida, o campo elétrico da luz transmitida será dado por:

$$\vec{E} = E_0 \cos \theta \cos(kz - \omega t) \hat{x}, \quad (5.3)$$



sendo, portanto, paralelo ao eixo do polaróide. Por sua vez, a intensidade da luz transmitida será:

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v (E_0 \cos \theta)^2.$$

Comparando com a Equação (5.2), obtemos:

$$I = I_0 \cos^2 \theta.$$

Assim, você pode observar que, quando luz linearmente polarizada incide sobre um polaróide, e o ângulo entre o eixo do polaróide e a direção de polarização da luz é  $\theta$ , a razão entre a intensidade da luz transmitida e a intensidade da luz incidente é dada pelo cosseno ao quadrado do ângulo  $\theta$ :

$$\frac{I}{I_0} = \cos^2 \theta. \quad (5.4)$$

Esta relação é conhecida como a lei de Malus. É importante ressaltar que, independente da polarização da luz incidente, a fração da onda luminosa que atravessa o polaróide será *linearmente polarizada* na direção em que o campo elétrico não é absorvido, ou seja, na direção do eixo do polaróide. Outros materiais têm o mesmo efeito ao interagir com um feixe de luz polarizada e por isso são chamados de *polarizadores*.

Aqui, fizemos uma distinção de caráter técnico entre os polaróides e os polarizadores. Os polarizadores são cristais que possuem índices de refração especiais e por isso são capazes de realizar o mesmo tipo de operação que os polaróides. A principal diferença entre eles é que o polarizador não absorve a componente de polarização que não é transmitida, mas sim, a reflete. Isto é um detalhe técnico que pode se tornar importante, quando por exemplo a luz incidente é proveniente de um laser de alta potência. Se uma componente de polarização for absorvida, devido à alta intensidade, o polaróide poderá não ser capaz de dissipar o calor gerado e se queimará. Já o polarizador, como não absorve luz idealmente (na prática todo material absorve um pouco de luz) não estará sujeito a danos devidos à alta potência da luz incidente. De agora em diante, entretanto, não faremos mais esta distinção e chamaremos de polarizador qualquer objeto que transmita apenas a componente do campo elétrico incidente, paralela a uma dada direção.

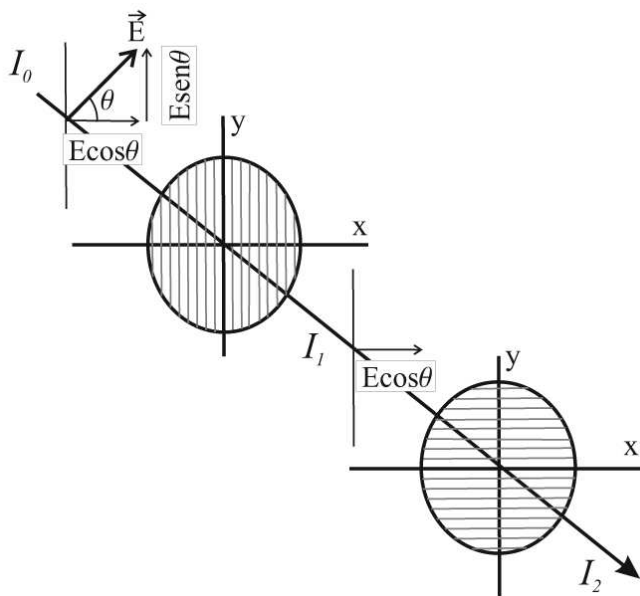


**Etienne Louis Malus** nasceu em Paris, França, no ano de 1775. Suas principais contribuições para a ciência ocorreram no campo da óptica. Em particular, no estudo da propagação da luz em cristais birrefringentes. Em 1809 estabeleceu a lei que leva seu nome. Também em 1809 descobriu a polarização por reflexão.

## Exercício 5.1

Luz linearmente polarizada incide, em um ângulo normal, sobre um conjunto de dois polarizadores, paralelos entre si e com seus eixos alinhados em direções ortogonais. Se o ângulo entre o eixo do primeiro polarizador e a direção de polarização da luz incidente é  $\theta$ , calcule a fração de intensidade da luz incidente que é transmitida pelo conjunto de polarizadores.

**Solução:** como o ângulo entre a direção de polarização da luz incidente e o eixo do primeiro polarizador é  $\theta$ , a luz que atravessa o primeiro polarizador terá uma intensidade  $I_1 = I_0 \cos^2(\theta)$ , onde  $I_0$  é a intensidade da luz incidente. Mais importante ainda, a luz que atravessa o primeiro polarizador estará *linearmente polarizada* na direção do eixo desse polarizador (veja a **Figura 5.3**). Portanto, ao incidir sobre o segundo polarizador, o ângulo entre a direção de polarização da luz e o eixo do mesmo será  $\theta = 90^\circ$ . Assim, após atravessar o segundo polarizador, a luz terá uma intensidade  $I_2 = I_1 \cos^2(90^\circ) = 0$ . O conjunto de dois polarizadores, com os eixos ortogonais, não deixa passar nenhuma fração de luz. **Note que isso independe da polarização da luz incidente.**

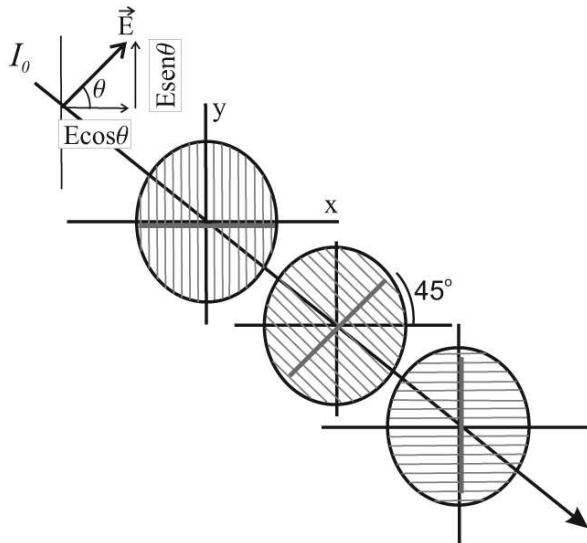


**Figura 5.2:** Luz linearmente polarizada incide sobre um conjunto de dois polarizadores, cujos eixos são ortogonais entre si.

**Exercício 5.2**

O que acontecerá se, entre os dois polarizadores do problema anterior, for introduzido um terceiro polarizador, com seu eixo fazendo um ângulo  $\theta = 45^\circ$  com os eixos de cada um dos polarizadores? Esta situação é ilustrada pela **Figura 5.3**, onde indicamos os eixos dos polarizadores por segmentos de reta de cor cinza.

**Sugestão:** proceda da mesma maneira que na resolução do problema anterior, analisando o que acontece com a luz, ao passar por cada um dos polarizadores. Você descobrirá algo muito interessante: a introdução de mais um objeto na trajetória da luz, que pareceria dificultar ainda mais a passagem da mesma pelo sistema, permite que parte da luz incidente, agora, atravesse o conjunto de polarizadores!



**Figura 5.3:** Luz linearmente polarizada incide sobre um conjunto de três polarizadores.

Pelo que discutimos até agora, uma onda eletromagnética deveria ser sempre polarizada, não importa se linearmente, circularmente ou elipticamente. No entanto, dizemos que a luz natural, que vem do Sol, é *não polarizada*. Em geral, a luz emitida por qualquer fonte térmica – como uma lâmpada incandescente, as estrelas, corpos muito quentes etc. – é não polarizada. Você deve estar se perguntando como isso pode acontecer, se, afinal de contas, o vetor campo elétrico de qualquer onda eletromagnética descreve

uma trajetória bem determinada, em cada plano ortogonal à direção de propagação da onda. Isso está relacionado com a maneira pela qual esse tipo de luz é gerado. Nas fontes térmicas de luz, a mesma é gerada por um número extremamente grande de átomos e moléculas. Cada um emitindo, de maneira completamente independente, sua luz. Além disso, cada átomo leva, em média,  $10^{-8}$ seg para emitir luz. Precisando, depois disso, ser novamente excitado, para iniciar um novo processo de emissão. Em cada processo de emissão, a luz emitida por cada átomo tem uma polarização bem definida. No entanto, na próxima emissão, o átomo emitirá luz de polarização completamente independente da polarização do processo anterior. Você pode imaginar, então, o que acontece. A cada instante, existe um conjunto muito grande de átomos emitindo luz. Durante esse processo de emissão, que dura, em média,  $10^{-8}$ seg, a luz resultante tem uma polarização bem definida. Logo após esse tempo muito curto, um outro conjunto de átomos começa a emitir luz, com uma polarização completamente independente da polarização anterior. Como resultado, a polarização da luz emitida por essas fontes muda constantemente, de maneira completamente aleatória, a cada intervalo médio de tempo de  $10^{-8}$ seg. Esse tempo é muito curto para que se possa medir qualquer efeito devido à polarização da luz. Se a polarização muda mais rapidamente do que o tempo que precisamos para detectá-la, é como se não houvesse polarização alguma. Por isso, dizemos que essa luz é não polarizada.

A geração de uma onda de rádio por uma antena emissora, por exemplo, é um processo completamente diferente. Em uma antena, um número muito grande de elétrons é forçado a oscilar *conjuntamente* ao longo da mesma. Como todas essas cargas oscilam na mesma direção, o campo elétrico da onda resultante oscilará ao longo de uma direção bem determinada. As ondas de rádio são, por isso, linearmente polarizadas.

Vejamos, agora, o que acontece, quando luz não polarizada incide sobre um polarizador. Nesse caso, podemos imaginar que a luz incidente é linearmente polarizada em alguma direção. Só que, a direção de polarização muda constantemente a cada intervalo de tempo muito curto. Além disso, como tal processo é completamente aleatório, cada direção de polarização tem a mesma probabilidade de ocorrer. Para uma direção de polarização fazendo um ângulo  $\theta$  com o eixo do polarizador, a intensidade transmitida será  $I(\theta) = I_0 \cos^2(\theta)$ , onde  $I_0$  é a intensidade da luz incidente. Como o ângulo  $\theta$  muda rapidamente no tempo, detectaremos apenas o efeito médio de todas essas direções de polarização:

$$I = I_0 \langle \cos^2(\theta) \rangle, \quad (5.5)$$

onde  $I$  é a intensidade média transmitida pelo polarizador e  $\langle \dots \rangle$  significa que devemos tomar a média de  $\cos^2(\theta)$ , sobre todos os ângulos  $\theta$ , entre 0 e  $2\pi$ , considerados igualmente prováveis. Como  $\langle \cos^2(\theta) \rangle = \frac{1}{2}$ , obtemos:

$$I = \frac{1}{2} I_0.$$

Portanto, se luz não polarizada incide sobre um polarizador, metade da intensidade incidente será transmitida, independentemente da orientação do eixo do mesmo. Esse fato nos permite descobrir se uma dada onda luminosa é polarizada, ou não. Basta fazê-la incidir sobre um polarizador e girar o eixo do mesmo. Se a intensidade transmitida não variar, há duas possibilidades: ou a luz é não polarizada ou ela é circularmente polarizada (discutiremos essa situação no exercício a seguir). Note que, após atravessar o polarizador, a luz incidente não polarizada será linearmente polarizada na direção do eixo do polarizador. Daí o nome desse instrumento.

## Exercício 5.3

Luz polarizada circularmente à esquerda e com intensidade  $I_0$  incide sobre um polarizador. Mostre que não é possível distinguir essa situação daquela onde luz não polarizada e de intensidade  $I_0$  incide sobre o mesmo polarizador.

**Solução:** você viu que o vetor campo elétrico de uma onda circularmente polarizada à esquerda mantém seu módulo constante, enquanto gira com velocidade angular  $\omega$ , num plano ortogonal à direção de propagação da onda. Se tal onda incide sobre um polarizador, a intensidade transmitida, no tempo  $t$ , será:

$$I(t) = I_0 \cos^2 \theta(t) = I_0 \cos^2 (\omega t + \theta_0), \quad (5.6)$$

onde  $\theta_0$  depende da orientação do eixo do polarizador. Aqui, fizemos uso da Equação (4.13). A intensidade transmitida irá, portanto, oscilar entre  $I_0$  e 0, com a frequência  $\omega$ . Para a luz visível,  $\omega$  é da ordem de  $10^{15}$  rad/s. Isso significa que a intensidade transmitida irá oscilar com uma frequência tão alta, que nenhum aparelho será capaz de medir seu valor instantâneo. Apenas seu valor médio, tomado sobre vários períodos de oscilação, será medido. Esse valor será dado por:

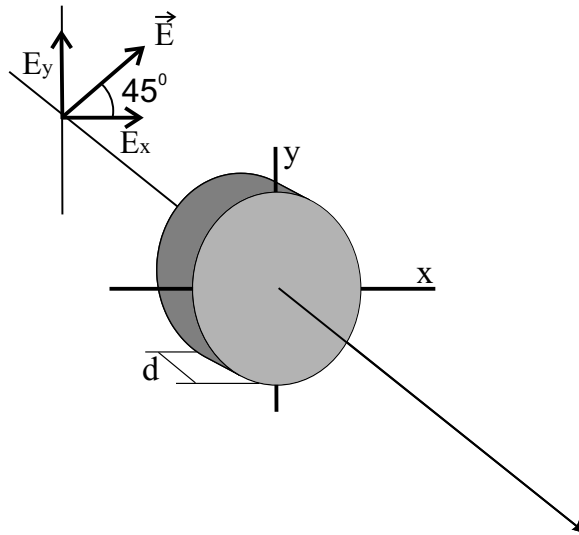
$$I = I_0 \langle \cos^2 (\omega t + \theta_0) \rangle = \frac{1}{2} I_0, \quad (5.7)$$

onde usamos, novamente, o resultado  $\langle \cos^2 (\omega t + \theta_0) \rangle = \frac{1}{2}$ . Perceba que a intensidade média transmitida é independente da orientação do eixo do polarizador. Esse resultado é idêntico ao da incidência de luz não polarizada.

## Placas de meia onda e um quarto de onda

Discutimos, até agora, o caso em que um feixe de luz polarizada interage com certos materiais, de tal maneira que apenas a componente do campo elétrico em uma certa direção é transmitida e a componente ortogonal não. Vamos discutir agora casos em que ambas as componentes são transmitidas, mas devido à mudança de velocidade da luz, ao se propagar dentro do material, o estado de polarização se altera.

Veja a **Figura 5.4**:



**Figura 5.4:** Representação de uma onda plana polarizada linearmente, na direção  $+45^\circ$ , incidindo sobre uma placa de onda em que a componente do campo na direção  $x$  se propaga com uma velocidade diferente da componente na direção  $y$ .

Suponha que uma onda plana polarizada linearmente ao longo da direção que faz  $45$  graus com o eixo vertical  $y$  atravesse o material de espessura  $d$ . Vamos representar o campo elétrico da onda incidente por:

$$\vec{E}^{(+)}(x, y, z, t) = E(\hat{x} + \hat{y})e^{i(kz - \omega t)}, \quad (5.8)$$

onde  $E$  representa a amplitude do campo. Para o cálculo que iremos fazer, o termo de oscilação temporal não desempenhará nenhum papel e, portanto, podemos deixar de representá-lo, para aliviar a notação.

O efeito que desejamos discutir agora está ligado ao fato de que alguns materiais podem possuir índices de refração diferentes para direções de polarização ortogonais entre si. Tais materiais são ditos *birrefringentes*. Suponhamos que tais direções sejam as direções  $x$  e  $y$ . Assim, ao penetrar no material, as componentes do campo elétrico nessas duas direções verão índices de refração diferentes. A mudança no índice de refração faz com que a velocidade de propagação da luz, dentro do material, mude. Dessa maneira, as componentes da onda, polarizadas nas direções  $x$  e  $y$ , se propagarão com velocidades diferentes. Isso levará ao atraso de uma componente em relação à outra, introduzindo, assim, uma diferença de fase entre elas.

A maneira mais simples de levar em conta este aspecto da propagação da onda dentro do material é tratar separadamente a propagação espacial,

que é feita pelo termo  $e^{ikz}$ , para cada direção de polarização. Se lembramos que, num meio de índice de refração  $n$ , o número de onda  $k$ , de uma onda monocromática, é  $k = nk_0$ , onde  $k_0$  é o número de onda no vácuo, podemos designar um número de onda diferente para as polarizações  $x$  e  $y$  da onda. Escreveremos  $k_1 = n_x k_0$  e  $k_2 = n_y k_0$  para designar esses números de onda, onde  $n_x$  e  $n_y$  são os índices de refração do material para cada polarização. Com isso, o campo dentro do material, após percorrer a distância  $d$  e prestes a sair para propagação livre, pode ser escrito como:

$$\vec{E}^{(+)}(x, y, z_0 + d) = E e^{ikz_0} (e^{ik_1 d} \hat{x} + e^{ik_2 d} \hat{y}), \quad (5.9)$$

onde  $z_0$  é a coordenada da face do material sobre a qual a onda incide.

Podemos, agora, fatorar o termo  $e^{ik_1 d}$  e reescrever o campo elétrico como:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(+)}(x, y, z_0 + d) &= E e^{i(kz_0 + k_1 d)} (\hat{x} + e^{i\delta} \hat{y}) \\ &= E' (\hat{x} + e^{i\delta} \hat{y}), \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde  $\delta = (k_y - k_x)d = (n_y - n_x)k_0 d$ . Note que o termo exponencial, comum às duas componentes do campo elétrico, foi englobado em  $E' = E e^{i(kz_0 + k_1 d)}$ . Esse termo não é importante, pois uma fase global (ou seja, uma exponencial complexa que multiplica todo o campo) não altera o estado de polarização da onda, nem sua intensidade.

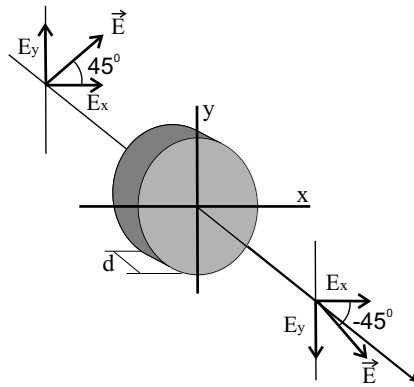
A Equação (5.10) nos diz, como já havíamos previsto, que o efeito da propagação da luz através do material birrefringente é a introdução de uma diferença de fase adicional entre as componentes  $x$  e  $y$  do campo elétrico. É importante salientar que essa defasagem adicional aparecerá, independente da polarização da onda incidente. Não é, portanto, necessário que a onda incidente seja linearmente polarizada a  $45^\circ$ , como no nosso exemplo.

Dependendo do valor da defasagem adicional  $\delta$ , podemos ter qualquer estado de polarização na saída do material. Um dos casos mais importantes é aquele em que  $\delta = \pi$ . Neste caso, se o campo incidente for linearmente polarizado a  $45^\circ$ , o campo na saída do material será:

$$\vec{E}^{(+)}(x, y, z_0 + d) = E' (\hat{x} - \hat{y}), \quad (5.11)$$

pois  $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$ . A passagem pelo material inverte o sinal da componente do campo na direção  $y$  e mantém o sinal da componente na direção  $x$  inalterado. Com isto, a polarização sofre uma rotação em torno do eixo  $z$ , passando de  $+45^\circ$  para  $-45^\circ$ . Veja a **Figura 5.5**, que ilustra este efeito.





**Figura 5.5:** Representação de uma onda plana polarizada linearmente na direção  $+45^\circ$  incidindo sobre uma placa de meia onda. A polarização gira em torno do eixo  $y$  e passa a ser de  $-45^\circ$ .

Chamamos os objetos que produzem uma defasagem  $\delta = \pi$  de placas de meia onda (ou meio comprimento de onda), pois uma fase  $\pi$  corresponde à metade de um ciclo completo de  $2\pi$ , de oscilação da onda eletromagnética.

Nos laboratórios de pesquisas e aplicações de ótica, freqüentemente utilizamos as placas de meia onda para manipular a polarização de um feixe de luz. Elas são fabricadas a partir de materiais especiais, com espessura  $d$  específica para um determinado comprimento de onda da luz incidente.

## Exercício 5.4

Luz circularmente polarizada à esquerda incide sobre uma placa de meia onda, como aquela mostrada na **Figura 5.5**. Qual é o estado de polarização da luz, após atravessar a placa?

**Solução:** como a onda luminosa, ao chegar à placa de meia onda, é circularmente polarizada à esquerda, seu campo elétrico pode ser escrito como:

$$\vec{E}^+(x, y, z, t) = E_0 (\hat{x} + i \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)}.$$

Após atravessar a placa, a componente  $y$  do vetor campo elétrico da onda terá adquirido uma defasagem  $\delta = \pi$  em relação à componente  $x$ . Logo, após atravessar a placa, o campo elétrico da onda será dado por:

$$\vec{E}^+(x, y, z + d, t) = E'_0 (\hat{x} + ie^{i\pi} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)} = E'_0 (\hat{x} - i \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)},$$

uma vez que  $e^{i\pi} = -1$ . Esse campo, no entanto, descreve uma onda circularmente polarizada à *direita*. A placa de meia onda, assim, transforma a polarização circular à esquerda, da luz incidente, em polarização circular à direita!

## Exercício 5.5

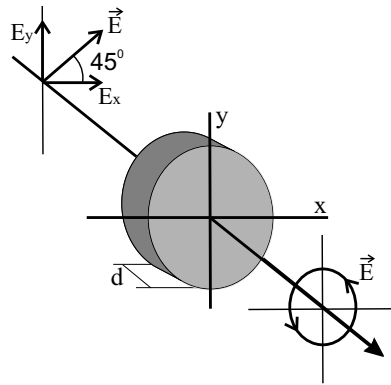
Luz linearmente polarizada ao longo do eixo  $x$  da **Figura 5.5** incide sobre uma placa de meia onda, como aquela mostrada na mesma figura. Qual é o estado de polarização da luz, após atravessar a placa?

**Sugestão:** proceda como na resolução do exercício anterior.

Um outro caso muito importante é aquele em que  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Para esta defasagem, se o campo incidente for linearmente polarizado a  $45^\circ$ , o campo na saída do material será:

$$\vec{E}^{(+)}(x, y, z + d) = E'(\hat{x} + i \hat{y}), \quad (5.12)$$

pois  $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$ . Isto significa que a luz deixa o material circularmente polarizada à esquerda. Veja a ilustração na **Figura 5.6**.



**Figura 5.6:** Representação de uma onda plana polarizada linearmente na direção  $+45^\circ$ , incidindo sobre uma placa de um quarto de onda. Após a placa, a polarização fica circular à direita.

Os objetos que produzem estas defasagens são chamados de placas de um quarto de onda. De fato, a fase  $\frac{\pi}{2}$  representa uma evolução correspondente a um quarto de um ciclo completo de  $2\pi$ , portanto, em termos das oscilações de uma onda, representa um quarto do comprimento de onda. As placas de um quarto de onda são também muito importantes nos laboratórios de óptica e também são fabricadas de acordo com o comprimento de onda específico utilizado.

## Exercício 5.6

Luz circularmente polarizada à direita incide sobre uma placa de um quarto de onda, como aquela mostrada na **Figura 5.6**. Qual é o estado de polarização da luz, após atravessar a placa?

**Solução:** como a onda luminosa, ao chegar à placa de meia onda, é circularmente polarizada à direita, seu campo elétrico pode ser escrito como:

$$\vec{E}^+(x, y, z, t) = E_0 (\hat{x} - i \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)}$$

Após atravessar a placa, a componente  $y$  do vetor campo elétrico da onda terá adquirido uma defasagem  $\delta = \pi/2$  em relação à componente  $x$ . Logo, após atravessar a placa, o campo elétrico da onda será dado por:

$$\vec{E}^+(x, y, z + d, t) = E'_0 (\hat{x} - ie^{i\frac{\pi}{2}} \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)} = E'_0 (\hat{x} + \hat{y}) e^{i(kz - \omega t)},$$

uma vez que  $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$  e  $(-i) \cdot i = 1$ . O campo elétrico acima descreve uma onda linearmente polarizada a  $45^\circ$ . A placa de um quarto de onda, portanto, transforma a polarização circular à direita, da luz incidente, em polarização linear a  $45^\circ$ !

## Exercício 5.7

Luz linearmente polarizada ao longo da direção que faz um ângulo  $\theta = 30^\circ$  com o eixo  $x$  da **Figura 5.6** incide sobre uma placa de um quarto de onda, também mostrada nessa figura. Qual é o estado de polarização da luz, após atravessar a placa?

**Sugestão:** proceda como na resolução do exercício anterior.

**Exercício 5.8**

Você viu, no Exercício 5.3, que não é possível distinguir entre luz não polarizada e luz circularmente polarizada, usando apenas um polarizador. Mostre que o conjunto formado por uma placa de um quarto de onda e um polarizador pode fazer essa distinção.

**Solução:** vejamos, primeiro, qual é o efeito da placa de um quarto de onda sobre a luz não polarizada. Sabemos que a placa introduz uma defasagem de  $\delta = \frac{\pi}{2}$  entre as componentes  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  do vetor campo elétrico da luz incidente. Como na luz não polarizada o valor dessas componentes está variando continuamente de uma maneira aleatória, a introdução de uma defasagem  $\delta$  entre elas não terá nenhum efeito mensurável. Portanto, a luz continuará não polarizada após atravessar a placa de um quarto de onda. Já a luz circularmente polarizada será transformada em luz linearmente polarizada, ao atravessar a placa de um quarto de onda. Isso foi mostrado no Exercício 5.6 para a luz circularmente polarizada à esquerda (mostre que isso também vale para a luz circularmente polarizada à direita). Assim, se colocarmos a placa de um quarto de onda na frente do polarizador, poderemos distinguir entre a luz não polarizada e a luz circularmente polarizada: a primeira ainda chegará não polarizada ao polarizador, enquanto a segunda chegará linearmente polarizada. Basta girarmos o eixo do polarizador para distinguir uma da outra.

## Conclusão

Nesta aula, discutimos alguns objetos, cuja interação com a luz depende fortemente do estado de polarização da mesma. Nesse contexto, introduzimos objetos chamados de polarizadores e estudamos o que acontece quando luz polarizada incide sobre os mesmos. Você viu que apenas a componente do campo elétrico incidente, paralela ao eixo do polarizador, será transmitida. Isso faz com que a luz que atravessa o polarizador seja linearmente polarizada na direção do seu eixo. Também discutimos o que é a luz não polarizada e o que acontece quando tal luz incide sobre um polarizador. Finalmente, analisamos a propagação da luz em meios birrefringentes, que são meios que apresentam índices de refração diferentes para duas direções de polarização da luz incidente. Vimos que esses meios são capazes de mudar a polarização da luz que se propaga nos mesmos e apresentamos instrumentos ópticos, que fazem uso de tal efeito.

## Atividades Finais

1. Faça a experiência de explicar a um(a) colega o que é luz não polarizada.
2. O que é um polarizador e como ele atua sobre o campo elétrico de uma onda incidente?
3. O que é a lei de Malus e qual a sua expressão matemática?
4. O que é uma placa de meia onda?
5. O que é uma placa de um quarto de onda?

## E ao longo da próxima aula...

...você estudará o papel da polarização da luz nos processos de reflexão e refração.

## Resumo

Polarizadores são dispositivos que transmitem apenas a componente do campo elétrico paralela a uma direção característica. Após atravessar um polarizador, a luz fica linearmente polarizada na direção do eixo do polarizador. A fração de intensidade transmitida pelo polarizador é dada pela Lei de

Malus. Materiais birrefringentes são aqueles que possuem diferentes índices de refração em duas direções ortogonais entre si. Dispositivos feitos com tais materiais podem ser usados para introduzir uma defasagem extra entre duas componentes ortogonais do campo elétrico da luz que os atravessa.





## Aula 6 – Papel da polarização nos processos de reflexão e refração

### Metas da aula

Apresentar uma abordagem ondulatória dos processos de reflexão e refração da luz, e discutir o papel da polarização nesses processos.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

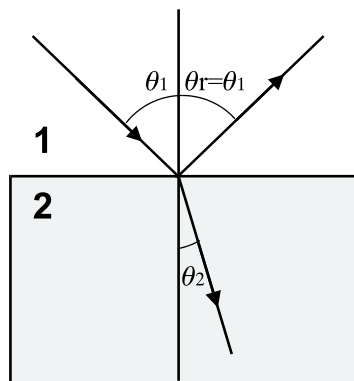
- Explicar como as leis de reflexão e refração da luz podem ser derivadas a partir de um tratamento ondulatório da luz.
- Definir amplitude de reflexão e refletividade.
- Explicar o que é o ângulo de Brewster para uma dada interface entre dois meios dielétricos.
- Determinar a polarização da luz refletida na interface entre dois meios dados, sabendo o ângulo de incidência e a polarização da luz incidente.
- Determinar o ângulo crítico para reflexão interna total em uma dada interface entre dois meios dielétricos.

Quando uma onda eletromagnética atinge a interface entre dois meios dielétricos diferentes, como acontece quando a luz, propagando-se no ar, atinge a superfície de um lago, parte é refletida e parte é transmitida (refratada). Esses efeitos estão intimamente ligados ao fato de que os campos elétrico e magnético associados à onda devem satisfazer certas condições de contorno na interface que separa os dois meios. Isso significa que os campos em um lado da interface devem estar relacionados aos campos no outro lado por relações fixas, que valem em todos os instantes de tempo e em qualquer ponto da interface. As propriedades das ondas refletidas e refratadas podem ser divididas em duas classes: propriedades cinemáticas e propriedades dinâmicas. As primeiras, relacionadas às direções de propagação das ondas refletidas e refratadas, são consequências imediatas do fenômeno ondulatório e do fato de que existem condições de contorno a serem satisfeitas. No entanto, *não dependem* de que condições de contorno, especificamente, devem

ser satisfeitas, nem da natureza da onda. Valem, portanto, para qualquer fenômeno ondulatório. Essas propriedades estão reunidas na lei de reflexão e na Lei de Snell para a refração. As propriedades dinâmicas estão relacionadas às mudanças de polarização e fase das ondas refletidas e refratadas, bem como à intensidade dessas ondas. Essas propriedades são conseqüências diretas da natureza dos campos elétrico e magnético da onda, bem como da natureza específica das condições de contorno que esses campos devem satisfazer. Nesta aula, você estudará os processos de reflexão e refração, levando em conta o caráter ondulatório da luz. Em particular, discutiremos os efeitos desses processos sobre polarização da luz.

## Lei de Snell

No curso de Introdução às Ciências Físicas, você foi apresentado às leis de reflexão e refração da luz na interface entre dois meios de índices de refração diferentes. Lá, isso foi tratado no âmbito da ótica geométrica, e essas leis foram apresentadas como evidências experimentais. Relembremos a Lei de Snell, que relaciona as direções de propagação dos feixes de luz incidente, refletido e refratado em uma interface entre dois meios com índices de refração diferentes (veja a **Figura 6.1**):



**Figura 6.1:** Representação esquemática de um feixe de luz que muda de meio de propagação respeitando a lei de Snell.

As direções de propagação da luz incidente e da luz refratada (transmitida) estão relacionadas por:

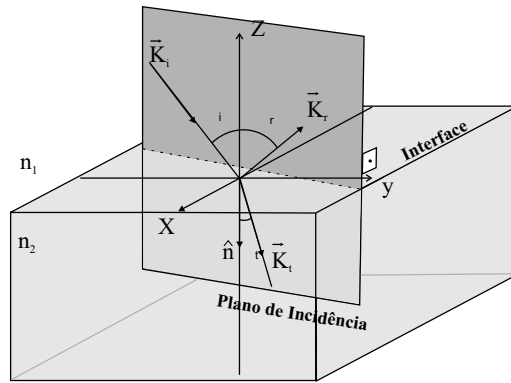
$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2, \quad (6.1)$$

onde  $n_1$  é o índice de refração do meio de onde vem o feixe incidente, e  $n_2$  é o índice de refração do meio para o qual o feixe é transmitido. O ângulo

$\theta_1$  define a direção de propagação do feixe incidente com relação à normal à interface, que, na nossa figura, é a linha vertical. O ângulo  $\theta_2$  é o ângulo de refração, que define a direção de propagação do feixe no meio 2 e também é medido com relação à normal.

Além disso, a Lei de Snell nos diz que o feixe refletido emerge na direção definida pelo ângulo  $\theta_r$ , de tal maneira que  $\theta_r = \theta_1$ , ou seja, o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência.

Vejamos como essa lei pode ser derivada apenas do fato de que a luz é uma onda e de que alguma condição de contorno deve ser satisfeita pelos campos associados à onda na interface entre os dois meios.



**Figura 6.2:** Representação esquemática das direções de propagação das ondas incidente, refletida e refratada. O plano de incidência, gerado pela normal à interface e a direção de propagação da onda incidente, também é mostrado.

Considere a situação mostrada esquematicamente na **Figura 6.2**, onde uma onda eletromagnética plana, propagando-se ao longo da direção  $\hat{k}_i$  em um meio dielétrico de índice de refração  $n_1$ , encontra a interface plana que separa esse meio de um outro meio dielétrico de índice de refração  $n_2$ . Para simplificar, localizamos a interface plana no plano  $z = 0$ . Ao atingir a interface, parte da onda incidente é refletida, propagando-se no meio 1 ao longo da direção  $\hat{k}_r$ , e parte da onda é transmitida para o meio 2 e propaga-se ao longo da direção  $\hat{k}_t$ .

Suponhamos que a onda plana incidente seja monocromática, com frequência angular  $\omega_i$ , e linearmente polarizada ao longo de uma direção arbitrária. O campo elétrico associado a essa onda pode, então, ser escrito como:

$$\vec{E}_i(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0i} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t), \quad (6.2)$$

onde  $\vec{E}_{0i}$  é um vetor constante, paralelo à direção de polarização da onda, e  $\vec{k}_i$ , seu vetor de onda. Sem fazer qualquer suposição sobre as direções de propagação, amplitudes e frequências das ondas refletida e transmitida, podemos escrever os campos elétricos associados a elas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\vec{E}_r(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t) \\ \vec{E}_t(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t),\end{aligned}\quad (6.3)$$

onde  $\vec{E}_r$  é o campo elétrico associado à onda refletida, e  $\omega_r$ , sua frequência angular. Da mesma maneira,  $\vec{E}_t$  e  $\omega_t$  estão associados à onda transmitida. Os vetores  $\vec{E}_{0r}$  e  $\vec{E}_{0t}$  são vetores constantes paralelos, respectivamente, às direções de polarização da onda refletida e da onda transmitida.

A teoria eletromagnética leva a certas condições que devem ser satisfeitas pelos campos elétrico e magnético dos dois lados da interface. Essas condições são chamadas de *condições de contorno*. Especificamente, na situação descrita pela **Figura 6.2**, uma dessas condições exige que a componente do campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  que é tangencial à interface seja contínua. Isso significa que a componente tangencial do campo elétrico *total*  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  em um lado da interface deve ser igual à componente correspondente do outro lado da interface. É importante salientar que essa igualdade deve ser válida em *qualquer* ponto da interface e em *qualquer* instante de tempo.

Como já dissemos anteriormente, a lei de Snell resulta apenas do fato de que a condição de contorno deve ser satisfeita em todos os instantes de tempo e em qualquer ponto da interface, não importando a natureza específica da condição de contorno. No entanto, no intuito de facilitar a compreensão dos argumentos utilizados na derivação dessa lei, usaremos a seguir explicitamente a condição de continuidade da componente tangencial do campo elétrico.

Em termos dos campos elétricos incidente, refletido e transmitido, a condição de continuidade da componente tangencial do campo elétrico total pode ser escrita como:

$$\vec{E}_i^{\parallel}(\vec{r}, t) + \vec{E}_r^{\parallel}(\vec{r}, t) = \vec{E}_t^{\parallel}(\vec{r}, t), \quad (6.4)$$

onde  $\vec{E}_i^{\parallel}$ ,  $\vec{E}_r^{\parallel}$  e  $\vec{E}_t^{\parallel}$  são, respectivamente, as projeções de  $\vec{E}_i$ ,  $\vec{E}_r$  e  $\vec{E}_t$  sobre a interface que separa os dois meios. Aqui, fica subentendido que essa igualdade só vale nos pontos  $\vec{r}$  que estão na interface. No nosso exemplo particular, isso significa que a igualdade só vale para pontos pertencentes ao plano  $z = 0$ . Se usarmos as equações (6.2) e (6.3), a relação acima se torna:

$$\vec{E}_{0i}^{\parallel} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) + \vec{E}_{0r}^{\parallel} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t) = \vec{E}_{0t}^{\parallel} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t). \quad (6.5)$$

Note que a única maneira de essa relação ser satisfeita em *todos* os pontos  $\vec{r}$  da interface e em *qualquer* instante de tempo  $t$  é que os campos elétricos envolvidos tenham a mesma dependência espaço-temporal, já que  $\vec{E}_{0i}^{\parallel}$ ,  $\vec{E}_{0r}^{\parallel}$  e  $\vec{E}_{0t}^{\parallel}$  são vetores constantes. Temos, então:

$$\cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega_i t) = \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega_r t) = \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega_t t). \quad (6.6)$$

Como a origem  $\vec{r} = 0$  está no plano  $z = 0$ , a Equação (6.6) deve valer também nesse ponto. Isso leva a:

$$\cos(\omega_i t) = \cos(\omega_r t) = \cos(\omega_t t). \quad (6.7)$$

No entanto, essa relação deve valer para qualquer instante de tempo  $t$ . Isso só é possível se:

$$\omega_i = \omega_r = \omega_t. \quad (6.8)$$

Potanto, a onda refletida e a onda transmitida têm a frequência angular que a onda incidente!

Como a Equação (6.6) deve valer para qualquer instante de tempo  $t$ , ela deve valer, em particular, para  $t = 0$ . Logo:

$$\cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r}) = \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r}) = \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r}). \quad (6.9)$$

Essa relação implica:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}. \quad (6.10)$$

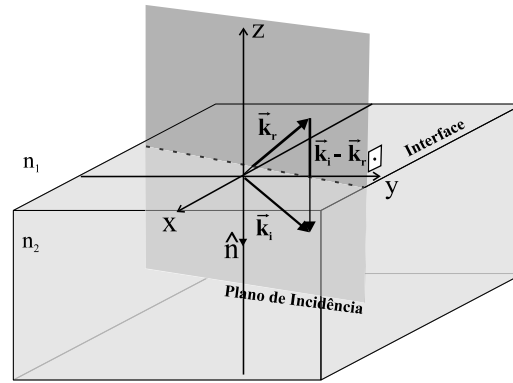
Utilizando o primeiro e o segundo termo da equação anterior, podemos escrever:

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r} = 0. \quad (6.11)$$

Como foi mostrado no Exercício 3.1, da Aula 3, a equação anterior nos diz que os pontos representados pelo vetor posição  $\vec{r}$  formam um plano perpendicular ao vetor  $\vec{k}_i - \vec{k}_r$ . No entanto, na Equação 6.11, os pontos representados pelo vetor posição  $\vec{r}$  são pontos da interface plana entre os dois meios. Logo, podemos concluir que o vetor  $\vec{k}_i - \vec{k}_r$  é *perpendicular* à interface que separa os dois meios. Isso significa que o vetor  $\vec{k}_i - \vec{k}_r$  é *paralelo* ao vetor unitário  $\hat{n}$ , normal à interface (veja a **Figura 6.2**). Lembrando que o *produto vetorial* entre dois vetores paralelos é nulo, podemos representar a condição de paralelismo desses vetores da seguinte forma:

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \times \hat{n} = 0. \quad (6.12)$$

A primeira consequência do paralelismo dos vetores  $\vec{k}_i - \vec{k}_r$  e  $\hat{n}$  é que os vetores  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$  e  $\hat{n}$  devem estar localizados em um mesmo plano (veja a **Figura 6.3**). Esse plano, chamado *plano de incidência*, é o plano gerado pelos vetores  $\vec{k}_i$  e  $\hat{n}$ .



**Figura 6.3:** Disposição espacial dos vetores  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$ ,  $\vec{k}_i - \vec{k}_r$  e  $\hat{n}$ .

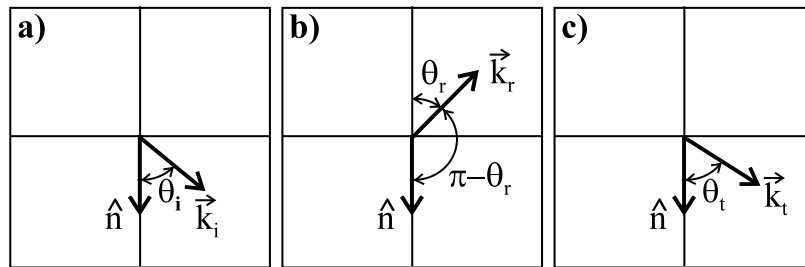
Podemos reescrever a Equação (6.12) como:

$$\vec{k}_i \times \hat{n} = \vec{k}_r \times \hat{n}. \quad (6.13)$$

Dado que o módulo do produto vetorial entre dois vetores quaisquer é dado pelo produto dos módulos dos vetores pelo seno do ângulo entre eles, a Equação (6.13) permite escrever (veja a **Figura 6.4**):

$$k_i \sin \theta_i = k_r \sin (\pi - \theta_r) = k_r \sin \theta_r, \quad (6.14)$$

onde usamos o fato de que  $\hat{n}$  é um vetor unitário.



**Figura 6.4:** Representação dos vetores  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$ ,  $\vec{k}_t$  e  $\hat{n}$ .

Como, num meio de índice de refração  $n$ , o número de onda  $k$ , de uma onda monocromática de frequência  $\omega$ , é  $k = n\omega/c$ , segue da Equação (6.14) que:

$$n_1 \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_i = n_1 \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_r, \quad (6.15)$$

dado que a onda incidente e a onda refletida se propagam no mesmo meio (meio 1) com a mesma frequência angular  $\omega_i$ . Após simplificação, a equação acima nos fornece a lei de reflexão:

$$\theta_i = \theta_r, \quad (6.16)$$

que nos diz que o ângulo de reflexão, em relação à normal à interface, é igual ao ângulo de incidência.

Voltando à Equação (6.10) e utilizando o primeiro e o terceiro termo, podemos escrever

$$(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r} = 0. \quad (6.17)$$

Através dos mesmos argumentos utilizados anteriormente, vemos que o vetor  $\vec{k}_i - \vec{k}_t$  também é ortogonal à interface entre os dois meios. Com isso, concluímos que o vetor  $\vec{k}_t$  também está localizado no plano de incidência, juntamente com os vetores  $\vec{k}_i$  e  $\vec{k}_r$ . Da mesma maneira, a Equação (6.17) nos permite escrever:

$$k_i \sin \theta_i = k_t \sin \theta_t. \quad (6.18)$$

Levando em conta que  $k_t = n_2 \omega_i / c$ , já que a onda transmitida propaga-se no meio 2 com a mesma frequência angular da onda incidente, temos que:

$$n_1 \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_i = n_2 \frac{\omega_i}{c} \sin \theta_t. \quad (6.19)$$

Após simplificação da equação anterior, obtemos a Lei de Snell:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t, \quad (6.20)$$

relacionando o ângulo de refração ao ângulo de incidência, através da razão entre os índices de refração dos dois meios.

Com isso, concluímos a derivação da Lei de Snell a partir de um tratamento ondulatório da luz. Embora tenhamos usado explicitamente uma condição de contorno particular para o campo elétrico na interface entre os dois meios, a natureza específica dessa condição de contorno não foi essencial à derivação dos resultados obtidos. Essencial foi a exigência de que essa condição de contorno fosse válida em *qualquer* ponto da interface e em *qualquer* instante de tempo.

Note, também, que os resultados independem da direção de polarização da luz incidente. Isso significa que eles são válidos para *qualquer* polarização da luz incidente, já que qualquer estado de polarização da luz pode ser escrito como a combinação de dois estados de polarização linear, ortogonais entre si.

Mais ainda, as leis de reflexão e refração valem para outros tipos de onda, tais como as ondas sonoras, justamente porque elas não dependem do tipo específico de condição de contorno na interface. Por outro lado, as propriedades dinâmicas discutidas a seguir são características das ondas eletromagnéticas e envolvem as propriedades de polarização de forma essencial.

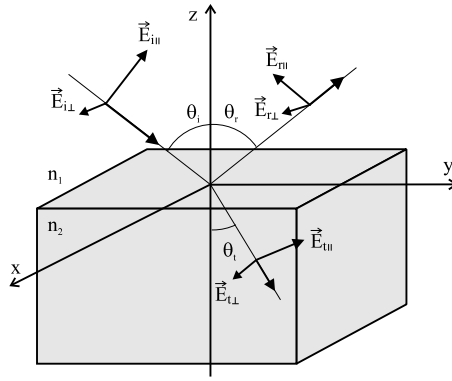
## Propriedades dinâmicas dos processos de reflexão e refração

Voltemo-nos, agora, para outras propriedades das ondas refletida e refratada, além de suas frequências e direções de propagação. Gostaríamos de saber, por exemplo, como as frações de intensidade refletida e refratada dependem do ângulo de incidência da luz, bem como dos índices de refração dos dois meios. Também gostaríamos de saber se, e como, essas grandezas dependem da polarização da luz incidente. Essas propriedades são chamadas propriedades dinâmicas dos processos de reflexão e refração.

Como dissemos no início desta aula, essas propriedades dependem explicitamente das condições de contorno específicas que devem ser satisfeitas pelos campos elétrico e magnético associados à onda luminosa. Ao derivarmos a Lei de Snell, já usamos uma dessas condições de contorno, ao exigir que a componente tangencial do campo elétrico total  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , de um lado da interface entre os dois meios, fosse igual à componente correspondente do outro lado da interface. Para responder às perguntas apresentadas no parágrafo anterior, precisamos, também, fazer uso de alguma condição de contorno para o campo magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . Podemos, por exemplo, usar a condição de continuidade da componente tangencial do campo  $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}, t)/\mu$  através da interface de separação entre os dois meios. Similarmente à condição para o campo elétrico, essa condição de contorno nos diz que a componente tangencial do campo  $\vec{B}/\mu$ , de um lado da interface, deve ser igual à componente correspondente do outro lado da interface. Essas duas condições de contorno são suficientes para a determinação das relações entre as amplitudes dos campos incidente, refletido e refratado, em função da polarização do campo incidente, do ângulo de incidência e dos índices de refração dos dois meios.

Como já discutimos na Aula 4, qualquer estado de polarização da luz pode ser escrito como uma superposição de dois estados linearmente polarizados em direções ortogonais. Portanto, qualquer que seja a polarização dos campos incidente, refletido e refratado, poderemos sempre escrevê-los como uma superposição de um campo linearmente polarizado em uma direção *paralela* ao plano de incidência e um campo linearmente polarizado em uma direção *perpendicular* ao plano de incidência (veja a **Figura 6.5**). Esse fato nos permite investigar as relações procuradas, tratando cada uma dessas polarizações independentemente. Se conhecermos as relações entre as amplitudes dos campos incidente, refletido e refratado, para cada uma dessas polarizações, podemos determinar essas relações para qualquer estado de polarização da luz.





**Figura 6.5:** Decomposição dos campos incidente, refletido e refratado em suas componentes perpendiculares ( $\perp$ ) e paralelas ( $\parallel$ ) ao plano de incidência.

Agora, escreveremos os campos incidente, refletido e refratado, que são linearmente polarizados em uma direção paralela ao plano de incidência, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{i\parallel}(\vec{r}, t) &= E_{0i\parallel} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{e}_{i\parallel} \\ \vec{E}_{r\parallel}(\vec{r}, t) &= E_{0r\parallel} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{e}_{r\parallel} \\ \vec{E}_{t\parallel}(\vec{r}, t) &= E_{0t\parallel} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{e}_{t\parallel},\end{aligned}\quad (6.21)$$

onde  $E_{0i\parallel}$ ,  $E_{0r\parallel}$  e  $E_{0t\parallel}$  são, respectivamente, as amplitudes dos campos incidente, refletido e refratado, e  $\hat{e}_{i\parallel}$ ,  $\hat{e}_{r\parallel}$  e  $\hat{e}_{t\parallel}$  são vetores de polarização paralelos ao plano de incidência. Da mesma maneira, escreveremos os campos que são linearmente polarizados em uma direção perpendicular ao plano de incidência como:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{i\perp}(\vec{r}, t) &= E_{0i\perp} \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{e}_{i\perp} \\ \vec{E}_{r\perp}(\vec{r}, t) &= E_{0r\perp} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{e}_{r\perp} \\ \vec{E}_{t\perp}(\vec{r}, t) &= E_{0t\perp} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{e}_{t\perp},\end{aligned}\quad (6.22)$$

onde  $\hat{e}_{i\perp}$ ,  $\hat{e}_{r\perp}$  e  $\hat{e}_{t\perp}$  são vetores de polarização perpendiculares ao plano de incidência.

Nesse ponto, para obtermos as relações entre as amplitudes dos campos incidente, refletido e refratado, em cada uma das duas situações anteriores, deveríamos utilizar as condições de contorno para os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}/\mu$ , de uma maneira similar àquela utilizada na derivação da Lei de Snell. Embora não sejam especialmente complicados, os cálculos são bastante longos. Por esse motivo, não os realizaremos explicitamente e apresentaremos apenas os resultados finais.

As grandezas que nos interessam são a razão  $r = E_{0r}/E_{0i}$  entre a amplitude do campo refletido e a amplitude do campo incidente e a razão  $t = E_{0t}/E_{0i}$  entre a amplitude do campo transmitido e a amplitude do campo incidente. A grandeza  $r$  é chamada *amplitude de reflexão*, enquanto a grandeza  $t$  é chamada *amplitude de transmissão*. Note que quanto maior  $r$ , maior a fração de luz incidente que é refletida. Da mesma maneira, quanto maior o valor de  $t$ , maior a fração de luz transmitida.

Para a luz polarizada perpendicularmente ao plano de incidência, as amplitudes de reflexão e de transmissão são dadas por (veja a **Figura 6.5**):

$$\begin{aligned} r_{\perp} &\equiv \frac{E_{0r\perp}}{E_{0i\perp}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \\ t_{\perp} &\equiv \frac{E_{0t\perp}}{E_{0i\perp}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

enquanto, para a luz polarizada paralelamente ao plano de incidência, temos:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &\equiv \frac{E_{0r\parallel}}{E_{0i\parallel}} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \\ t_{\parallel} &\equiv \frac{E_{0t\parallel}}{E_{0i\parallel}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Se utilizarmos a Lei de Snell, dada na Equação (6.20), podemos simplificar notacionalmente as expressões:

$$\begin{aligned} r_{\perp} &= -\frac{\sin(\theta_i - \theta_t)}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ r_{\parallel} &= \frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\perp} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t)} \\ t_{\parallel} &= \frac{2 \sin \theta_t \cos \theta_i}{\sin(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i - \theta_t)}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

As Equações (6.23) e (6.24), ou equivalentemente as Equações (6.25), são chamadas Equações de Fresnel e são válidas para quaisquer meios dielétricos homogêneos. Analisemos, agora, o comportamento dessas equações em função do ângulo de incidência e dos índices de refração dos dois meios.

Em primeiro lugar, note que os coeficientes  $r_{\perp}$  e  $r_{\parallel}$  podem ser negativos. Lembrando que esses coeficientes representam a razão entre a *amplitude* do campo refletido e a *amplitude* do campo incidente, que são grandezas reais

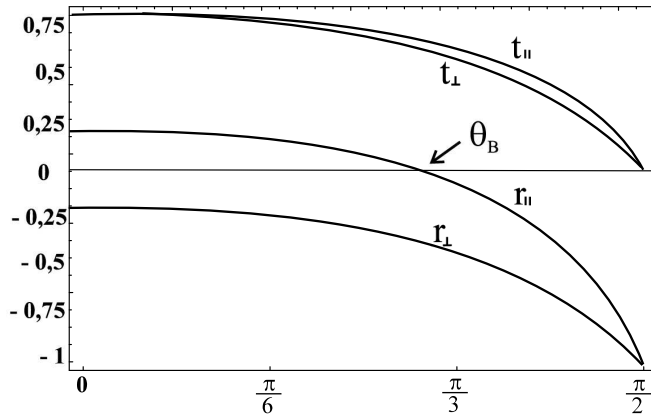
*positivas*, como devemos interpretar as situações em que eles se tornam negativos? Veja que, na **Figura 6.5**, nós escolhemos arbitrariamente os *sentidos* dos vetores  $\vec{E}_{r\perp}$ ,  $\vec{E}_{r\parallel}$ ,  $\vec{E}_{t\perp}$  e  $\vec{E}_{t\parallel}$ . Esses vetores poderiam muito bem estar apontando no sentido oposto ao escolhido por nós. Se invertermos o sentido de um desses vetores, o coeficiente correspondente trocará de sinal. Portanto, quando  $r_{\perp}$  ou  $r_{\parallel}$  se tornarem negativos, o sentido correto do vetor  $\vec{E}_{r\perp}$  ou do vetor  $\vec{E}_{r\parallel}$  será o inverso daquele escolhido na **Figura 6.5**. Mais especificamente, se, por exemplo,  $r_{\perp}$  for negativo, então, na interface entre os dois meios,  $\vec{E}_{i\perp}$  e  $\vec{E}_{r\perp}$  serão antiparalelos, e, portanto, haverá uma diferença de fase  $\delta = \pi$  entre eles (lembre-se que  $\cos(\phi + \pi) = -\cos \phi$ ). Dizemos, nesses casos, que há uma mudança de fase  $\delta = \pi$  no campo refletido em relação ao campo incidente.

Examinemos o comportamento das amplitudes de reflexão e transmissão, quando o ângulo de incidência  $\theta_i$  varia de 0 a  $\pi/2$ . Na incidência normal à interface ( $\theta_i = 0$ ), nós temos que  $\cos \theta_i = \cos \theta_t = 1$ . Nesse caso, as equações (6.23) e (6.24) nos fornecem:

$$r_{\parallel} = -r_{\perp} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \quad (6.26)$$

$$t_{\parallel} = t_{\perp} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}. \quad (6.27)$$

Isso significa que, na incidência normal, a fração de luz incidente, que é refletida ou refratada, não depende da polarização da luz. Depende apenas dos índices de refração dos dois meios.



**Figura 6.6:** Comportamento das amplitudes de reflexão e transmissão, em função do ângulo de incidência  $\theta_i$ , em uma interface ar-vidro.

Para outros valores de  $\theta_i$ , é vantajoso estudar separadamente os casos em que  $n_1 < n_2$  e  $n_1 > n_2$ .

**Situação I:**  $n_1 < n_2$ .

Essa é uma situação muito comum onde a luz, propagando-se no ar, incide, por exemplo, sobre água ou vidro. Como consequência da Lei de Snell, Equação (6.20), nesse caso, temos  $\theta_t < \theta_i$  para todos os valores de  $\theta_i$ . Utilizando as Equações (6.25), é fácil ver que  $r_\perp$  será negativo sempre, alcançando seu valor mínimo  $r_\perp = -1$  na incidência rasante ( $\theta_i = \pi/2$ ). Esse comportamento é ilustrado na **Figura 6.6** para uma interface ar-vidro, onde  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 1,5$ . Observe que o fato de  $r_\perp$  ser sempre negativo significa que, nessa situação, a luz polarizada perpendicularmente ao plano de incidência sofrerá uma mudança de fase  $\delta = \pi$  na reflexão, para qualquer valor do ângulo de incidência.

O comportamento de  $r_\parallel$  também pode ser estudado com a ajuda das Equações (6.25). Como  $\theta_t < \theta_i$ ,  $r_\parallel$  é inicialmente positivo e decresce monotonicamente com  $\theta_i$ . Quando  $\theta_i$  atinge o valor  $\theta_i = \pi/2 - \theta_t$ , o coeficiente  $r_\parallel$  se anula. Isso acontece por que  $\tan(\theta_i + \theta_t) = \tan \pi/2 = \infty$ . O valor particular do ângulo de incidência, para o qual isso ocorre, se denota  $\theta_B$  e é chamado ângulo de **Brewster** ou ângulo de polarização. A partir desse valor do ângulo de incidência,  $r_\parallel$  torna-se negativo e atinge seu valor mínimo  $r_\parallel = -1$  também na incidência rasante.



**Sir Davis Brewster** nasceu em Jedburgh, Escócia, em 1781. Seus talentos foram canalizados principalmente para o estudo da ótica e o desenvolvimento de instrumentos científicos. Deu contribuições fundamentais para o estabelecimento das leis de polarização por reflexão e refração. Em 1814, ele descobriu a lei que leva o seu nome.

Observe que, se a luz incidente for polarizada paralelamente ao plano de incidência, nas vizinhanças do ângulo de incidência  $\theta_B$  apenas uma fração ínfima de luz será refletida (o valor de  $r_\parallel$  é muito próximo de zero). Para  $\theta_i = \theta_B$  não haverá luz refletida. Toda a luz será transmitida! Isso significa que, se a luz incidente tiver uma polarização arbitrária, no ângulo de incidência  $\theta_B$  apenas sua componente de polarização perpendicular ao plano de incidência será refletida. Logo, a luz refletida será necessariamente polarizada perpendicularmente ao plano de incidência. Note que isso também vale para luz natural, não polarizada. É por esse motivo que  $\theta_B$  é também chamado ângulo de polarização. Não importa a polarização da luz incidente, a luz refletida será linearmente polarizada em uma direção perpendicular ao plano de incidência. Esse efeito é utilizado para várias aplicações práticas. Um exemplo é seu uso na fotografia. Afixando-se um polarizador na frente da lente de uma máquina fotográfica, pode-se eliminar reflexos indesejáveis de superfícies planas. Em torno do ângulo de Brewster, a maior parte da luz refletida está polarizada perpendicularmente ao plano de incidência. Se o eixo do polarizador for orientado perpendicularmente a essa direção, a maior parte da luz refletida não atingirá a lente da máquina.

Podemos obter o valor de  $\theta_B$ , para uma dada interface, usando a relação  $\theta_B + \theta_t = \pi/2$  e a Lei de Snell:

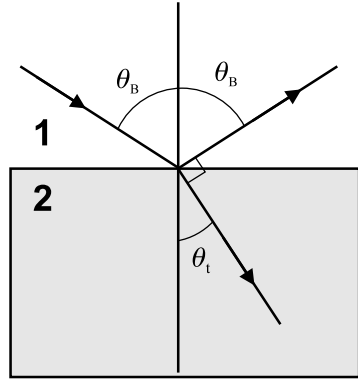
$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_t = n_2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta_B \right) = n_2 \cos \theta_B. \quad (6.28)$$

Isso nos fornece:

$$\theta_B = \arctan \left( \frac{n_2}{n_1} \right). \quad (6.29)$$

Em uma interface ar-vidro,  $\theta_B = \arctan(1,5) \approx 56,3^\circ$ .

Quando  $\theta_i = \theta_B$ , então, necessariamente,  $\theta_t + \theta_B = \pi/2$ . Se levarmos em conta que o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência, isso significa que, quando a luz incide sobre uma interface no ângulo de Brewster  $\theta_B$ , a luz refletida e a luz refratada propagam-se em direções ortogonais entre si (veja a **Figura 6.7**). Esse resultado é conhecido como Lei de Brewster, em homenagem a David Brewster, que o descobriu em 1815.



**Figura 6.7:** Relação entre as direções de propagação da luz refletida e da luz refratada, na situação em que a luz incide sobre a interface no ângulo de Brewster  $\theta_B$ .

É importante ressaltar que, mesmo que a luz incida sobre uma interface em um ângulo diferente do ângulo de Brewster, a luz refletida terá, em geral, uma polarização diferente da luz incidente. Para ver isso, lembre-se que o estado de polarização da luz é determinado pela razão entre as amplitudes, bem como pela diferença de fase, entre as componentes do campo elétrico em duas direções ortogonais entre si. Se usarmos a definição da amplitude de reflexão  $r$ , podemos facilmente obter a razão entre as amplitudes das componentes do campo elétrico paralela e ortogonal ao plano de incidência, na luz refletida, em função da razão entre essas grandezas na luz incidente:

$$\frac{E_{0r\perp}}{E_{0r\parallel}} = \frac{r_{\perp}}{r_{\parallel}} \frac{E_{0i\perp}}{E_{0i\parallel}}. \quad (6.30)$$

No entanto, como é ilustrado na **Figura 6.6**, a razão  $r_{\perp}/r_{\parallel}$  varia com o ângulo de incidência e só é unitária quando a incidência é rasante ou normal à interface. Isso mostra que a razão entre essas componentes do campo elétrico não é a mesma na luz refletida e na luz incidente. Além disso, existem valores do ângulo de incidência, para os quais  $r_{\perp}$  e  $r_{\parallel}$  têm sinais contrários, levando, também, a uma modificação da diferença de fase, na luz refletida, entre a componente do campo elétrico que é paralela ao plano de incidência e a componente que é ortogonal. Resumindo, a polarização da luz é, geralmente, modificada quando a luz é refletida na interface entre dois meios dielétricos.

**Exercício 6.1**

Se a luz linearmente polarizada incidir sobre a interface separando dois meios dielétricos, a luz refletida também será linearmente polarizada, embora sua direção de polarização seja, geralmente, diferente da direção de polarização da luz incidente. Se a direção de polarização da luz incidente fizer um ângulo  $\alpha_i$  com o plano de incidência, qual será o ângulo  $\alpha_r$  que a direção de polarização da luz refletida fará com o plano de incidência, para um dado ângulo de incidência  $\theta_i$ ? Os ângulos  $\alpha_i$  e  $\alpha_r$  são chamados *azimute de incidência* e *azimute de reflexão*, respectivamente. Do ponto de vista de quem está olhando de frente para a onda luminosa, os azimutes de incidência e reflexão são considerados positivos na direção anti-horária.

**Solução:** conforme nossa discussão dos estados de polarização, na Aula 4, o azimutes de incidência  $\alpha_i$  e reflexão  $\alpha_r$  são determinados pela razão entre as amplitudes da componente do campo elétrico perpendicular ao plano de incidência e da componente paralela ao plano de incidência, na luz incidente e na luz refletida. Especificamente:

$$\begin{aligned}\tan \alpha_i &= \frac{E_{0i\perp}}{E_{0i\parallel}} \\ \tan \alpha_r &= \frac{E_{0r\perp}}{E_{0r\parallel}}.\end{aligned}$$

Se usarmos a Equação (6.30), podemos escrever:

$$\tan \alpha_r = \frac{r_{\perp}}{r_{\parallel}} \tan \alpha_i. \quad (6.31)$$

Finalmente, com a ajuda das Equações (6.25), obtemos:

$$\tan \alpha_r = -\frac{\cos(\theta_i - \theta_t)}{\cos(\theta_i + \theta_t)} \tan \alpha_i. \quad (6.32)$$

A relação acima é geral e fornece a direção de polarização da luz refletida em função da direção de polarização da luz incidente e do ângulo de incidência.

Até agora, estivemos discutindo o comportamento da razão entre as *amplitudes* dos campos refletido e refratado e a *amplitude* do campo incidente. Seria interessante também, conhecer a fração da *intensidade* luminosa, incidente sobre uma dada área da interface, que é refletida e que é transmi-

tida. Essas quantidades são dadas, respectivamente, pela *refletividade*  $R$  e a *transmissividade*  $T$ . Usando a expressão para a intensidade de uma onda eletromagnética, dada na Aula 3, podemos obter o valor de  $R$ :

$$R = \frac{1/2\epsilon_1 v_1 E_{0i}^2}{1/2\epsilon_1 v_1 E_{0r}^2} = \frac{E_{0i}^2}{E_{0r}^2} = r^2, \quad (6.33)$$

onde usamos o fato de que as ondas incidente e refletida propagam-se no mesmo meio (o meio 1) com a mesma velocidade  $v_1$ . Como os meios que estamos considerando são transparentes, a fração da intensidade incidente que não é refletida deve ser, necessariamente, transmitida. Logo:

$$T = 1 - R = 1 - r^2. \quad (6.34)$$

Analisemos, agora, o comportamento da refletividade  $R$  em função do ângulo de incidência  $\theta_i$ . Novamente, faremos isso para a polarização ortogonal e a polarização paralela ao plano de incidência, separadamente. Com a ajuda das equações (6.25), podemos escrever:

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \frac{\sin^2(\theta_i - \theta_t)}{\sin^2(\theta_i + \theta_t)} \\ R_{\parallel} &= \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Na incidência normal à interface, as duas refletividades são iguais e dadas por:

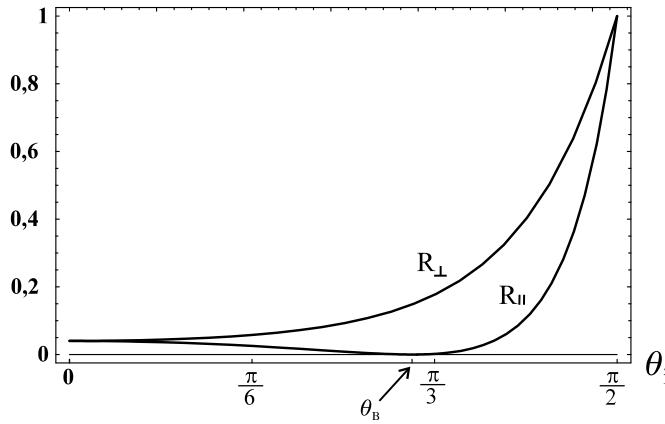
$$R_{\perp} = R_{\parallel} = \left( \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2, \quad (6.36)$$

onde usamos a Equação (6.26). Em uma interface ar-vidro, por exemplo, teremos, na incidência normal,  $R_{\perp} = R_{\parallel} = 0,04$ . Isso significa que, nessa situação, apenas 4% da luz incidente é refletida e a maior parte é transmitida. Note que, na incidência normal, a refletividade aumenta com a diferença entre os índices de refração dos dois meios. O diamante, por exemplo, tem um índice de refração  $n \approx 2,4$ . Assim, numa interface ar-diamante, aproximadamente 17% da luz é refletida na incidência normal.

As equações (6.35) mostram que  $R_{\perp}$  aumenta monotonicamente com o ângulo de incidência  $\theta_i$  e alcança seu valor máximo  $R_{\perp} = 1$  na incidência rasante ( $\theta_i = \pi/2$ ). Já  $R_{\parallel}$  decresce inicialmente com o aumento de  $\theta_i$  e se anula quando o ângulo de incidência é igual ao ângulo de Brewster  $\theta_B$ . Para esse ângulo de incidência, a luz refletida torna-se linearmente polarizada na direção ortogonal ao plano de incidência. A partir do ângulo de Brewster, o



valor de  $R_{\parallel}$  aumenta monotonicamente com  $\theta_i$  e alcança seu valor máximo  $R_{\parallel} = 1$  também na incidência rasante. A **Figura 6.8** ilustra esse comportamento para uma interface ar-vidro. Os comportamentos de  $R_{\perp}$  e  $R_{\parallel}$  explicam,



**Figura 6.8:** Comportamento das refletividades  $R_{\perp}$  e  $R_{\parallel}$ , em função do ângulo de incidência  $\theta_i$ , em uma interface ar-vidro.

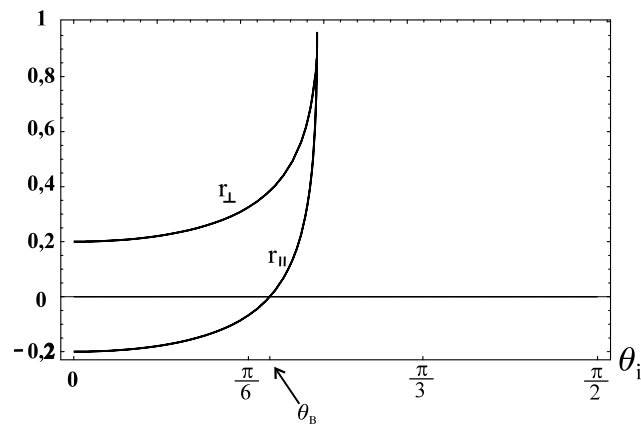
por exemplo, por que, estando à beira de uma piscina e olhando diretamente para baixo, podemos ver o fundo da piscina. Enquanto, ao olharmos para a outra extremidade da piscina, não podemos ver o fundo, pois a superfície da piscina funciona quase como um espelho. Na primeira situação, o ângulo de incidência está próximo da normal, e a refletividade é muito baixa. Por isso, a luz que vem do fundo da piscina e é transmitida na interface com o ar, não é perturbada pela luz que, propagando-se no ar, é refletida na interface com a água. Já na segunda situação, o ângulo de incidência da luz refletida que chega a nossos olhos está próximo da incidência rasante, e a refletividade é bastante alta. Essa luz, portanto, é muito mais intensa que a luz que vem do fundo da piscina e chega aos nossos olhos.

### Situação II: $n_1 > n_2$ .

Essa situação acontece, por exemplo, quando a luz, propagando-se no vidro ou na água, encontra uma interface com o ar. Agora, teremos  $\theta_t > \theta_i$  para todos os valores do ângulo de incidência  $\theta_i$ . Examinando as equações (6.25), vemos que, nesse caso,  $r_{\perp}$  é sempre positivo e aumenta monotonicamente com o ângulo de incidência  $\theta_i$ , em contraposição ao caso em que  $n_1 < n_2$ . Agora, no entanto,  $r_{\perp}$  atinge seu valor máximo a um ângulo de incidência  $\theta_c = \sin^{-1}(n_2/n_1)$ , chamado ângulo crítico, menor que o ângulo de incidência rasante  $\theta_i = \pi/2$ . Já  $r_{\parallel}$  é inicialmente negativo, crescendo monotonicamente com  $\theta_i$ . Agora, esse coeficiente faz o caminho inverso ao

daquele feito no caso em que  $n_1 < n_2$ , indo de valores negativos a valores positivos. Durante esse percurso, exatamente como no caso anterior, ele se anula no ângulo de Brewster  $\theta_B = \tan^{-1}(n_2/n_1)$ . Em uma interface vidro-ar, por exemplo, o valor desse ângulo é  $\theta_B \approx 33,7^\circ$ . A partir desse valor do ângulo de incidência,  $r_{\parallel}$  se torna positivo e alcança seu máximo  $r_{\parallel} = 1$  também no ângulo  $\theta_c$ . Esse comportamento é ilustrado, para uma interface vidro-ar, na **Figura 6.9**.

Note que, agora, é a polarização paralela ao plano de incidência que sofrerá uma mudança de fase  $\delta = \pi$  na reflexão, para valores do ângulo de incidência entre  $\theta_i = 0$  e  $\theta_1 = \theta_B$ , enquanto a polarização ortogonal ao plano de incidência manterá sua fase.



**Figura 6.9:** Comportamento das amplitudes de reflexão  $r_{\perp}$  e  $r_{\parallel}$ , em função do ângulo de incidência  $\theta_i$ , em uma interface vidro-ar.

**Exercício 6.2**

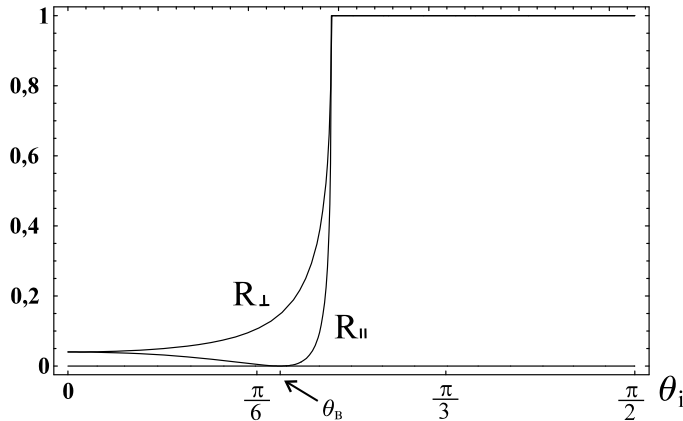
Mostre que o ângulo de Brewster  $\theta_B$ , para a luz propagando-se de um meio com índice de refração  $n_1$  para um meio com índice de refração  $n_2$ , é complementar ao ângulo de Brewster  $\theta'_B$  para a luz propagando-se do meio de índice de refração  $n_2$  para o meio de índice de refração  $n_1$ . Lembre-se de que dois ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são complementares se  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ .

**Solução:** usando a Equação (6.29), podemos escrever:

$$\begin{aligned}\tan \theta_B &= \frac{n_2}{n_1} \\ \tan \theta'_B &= \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{\tan \theta_B}.\end{aligned}$$

Como  $\tan(\pi/2 - \theta) = 1/\tan \theta$ , podemos concluir que  $\theta'_B = \pi/2 - \theta_B$ . Isso mostra que o ângulo de Brewster numa interface ar-vidro, por exemplo, é complementar ao ângulo de Brewster numa interface vidro-ar.

O que acontece quando o ângulo de incidência  $\theta_i$  fica maior que o ângulo crítico  $\theta_c$ ? Pode-se mostrar que, nesse caso, as amplitudes de reflexão  $r_\perp$  e  $r_\parallel$  tornam-se números complexos de módulo unitário. As refletividades  $R_\perp$  e  $R_\parallel$ , agora definidas como o quadrado dos módulos das amplitudes de reflexão, tornam-se então constantes e unitárias, como mostra a **Figura 6.10**, para uma interface vidro-ar.



**Figura 6.10:** Comportamento das refletividades  $R_\perp$  e  $R_\parallel$ , em função do ângulo de incidência  $\theta_i$ , em uma interface vidro-ar.

Nessa figura, podemos ver que, quando o ângulo da incidência  $\theta_i$  se aproxima do ângulo crítico  $\theta_c$ , as refletividades  $R_\perp$  e  $R_\parallel$  crescem rapidamente

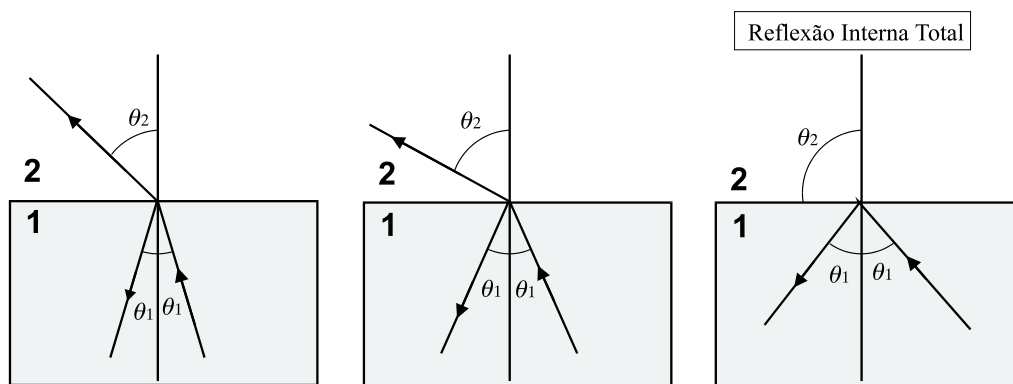
até atingirem um valor unitário exatamente no ângulo crítico. A partir desse ângulo, as refletividades se mantêm unitárias. Isso significa que, quando o ângulo de incidência se aproxima do ângulo crítico, a quase totalidade da luz incidente é refletida. A partir do ângulo crítico, nenhuma luz é transmitida, havendo 100% de reflexão. Esse fenômeno é conhecido como *reflexão interna total* e já foi apresentado a você na Aula 2, do Módulo 1, do curso de Introdução às Ciências Físicas.

É fácil derivar o valor do ângulo crítico  $\theta_c$ , para uma dada interface, usando a Lei de Snell:

$$\text{sen } \theta_i = \frac{n_2}{n_1} \text{sen } \theta_t. \quad (6.37)$$

Como  $n_2 > n_1$ , é fácil ver, na equação acima, que  $\theta_t > \theta_i$ . Assim, à medida que o ângulo de incidência  $\theta_i$  aumenta, o ângulo de transmissão  $\theta_t$  se aproxima de seu valor máximo  $\theta_t = \pi/2$  e o alcança antes de  $\theta_i$  atingir seu máximo valor permitido (veja a **Figura 6.11**). A partir desse ponto, toda a luz é refletida. O ângulo crítico  $\theta_c$  é o ângulo de incidência, para o qual  $\theta_t = \pi/2$ . Logo:

$$\text{sen } \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \text{sen } \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{n_2}{n_1}. \quad (6.38)$$



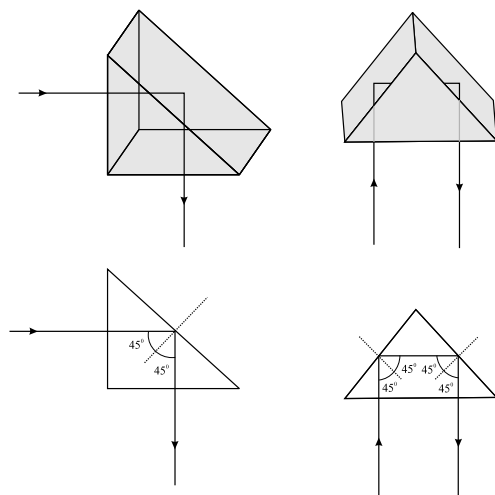
**Figura 6.11:** Representação esquemática da reflexão interna total.

**Exercício 6.3**

Suponha que um feixe de luz incida em uma interface como aquelas mostradas na **Figura 6.11**, vindo de uma região 1, onde o índice de refração  $n_1$  é maior do que o da região 2, que suporemos ser o ar ( $n_2 = 1$ ). Calcule o índice de refração  $n_1$  necessário para que se comece a ter reflexão interna total a partir do ângulo de incidência  $\theta_1 = 50^\circ$ .

**Sugestão:** use a Equação (6.38). Você deverá obter o valor  $n_1 = 1,3$ .

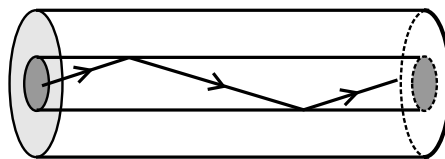
A reflexão interna total tem várias aplicações práticas. O vidro comum tem um índice de refração  $n = 1,5$ . Logo, em uma interface vidro-ar, o ângulo crítico é  $\theta_c = \sin^{-1}(2/3) = 41,8^\circ$ . Isso significa que, se a luz, propagando-se no vidro, incidir sobre uma interface com o ar a um ângulo acima de  $41,8^\circ$ , será totalmente refletida. O *prisma de reflexão total*, que é um prisma de vidro com ângulo de abertura de  $45^\circ$ , faz uso desse resultado para refletir a totalidade da luz incidente perpendicularmente a uma de suas faces (veja a **Figura 6.12**). Esse artefato substitui os espelhos metálicos em vários instrumentos óticos.



**Figura 6.12:** Luz sendo desviada por um prisma de reflexão total.

Outra aplicação tecnologicamente muito importante da reflexão interna total é a propagação da luz em *fibras óticas*. Uma fibra ótica é um cabo cilíndrico, que pode ser muito fino, cujo núcleo é algum material transparente, como plástico, quartzo ou sílica. Esse núcleo é envolvido por outro material transparente de índice de refração menor que o núcleo. A luz propaga-se

na fibra através de inúmeras reflexões totais na interface do núcleo com o material que o envolve (veja a **Figura 6.13**).



**Figura 6.13:** Propagação da luz em uma fibra ótica.

## Conclusão

Nesta aula, você estudou os processos de reflexão e refração da luz a partir de um tratamento ondulatório. Você viu que a lei de reflexão e a Lei de Snell resultam apenas do fato de que a luz é um fenômeno ondulatório e de que seus campos associados devem satisfazer *alguma* condição de contorno na interface que separa dois meios dielétricos. Já as relações entre as amplitudes da luz incidente, refletida e refratada, bem como possíveis mudanças de fase na luz refletida e na luz refratada, são conseqüências diretas das condições de contorno específicas que devem ser satisfeitas pelos campos elétrico e magnético na interface entre os dois meios. Essas relações dependem fortemente da polarização da luz incidente, levando, com isso, a uma modificação da polarização nos processos de reflexão e refração.

## Atividades Finais

1. Faça a experiência de explicar a um(a) colega por que, ao olharmos através de uma janela de vidro, com nossos olhos apontando em uma direção normal à superfície da janela, podemos facilmente ver o que está do outro lado, enquanto, se nossos olhos apontarem em uma direção próxima da tangente à superfície de vidro, esta funciona como um espelho quase perfeito, dificultando a visão do que está no outro lado da janela.
2. Em que situação pode ocorrer a reflexão interna total da luz? Dê um exemplo de uso prático desse fenômeno.
3. Descreva a alguém o que deve ser feito para que, através de uma única reflexão em uma interface, possamos transformar um feixe de luz não polarizado em luz linearmente polarizada.

## **E na próxima aula...**

...você fará experimentos com a polarização da luz.

## **Resumo**

A Lei da Reflexão e a Lei de Snell são conseqüências do fato de que a luz é uma onda e seus campos associados devem satisfazer alguma condição de contorno na interface de separação entre dois meios quaisquer. Por esse motivo, elas valem também para outros fenômenos ondulatórios como, por exemplo, o som. A fração da intensidade luminosa incidente que é refletida ou refratada na interface entre dois meios depende do ângulo de incidência e da polarização da luz. A polarização da luz é, geralmente, modificada quando ela é refletida ou refratada na interface entre dois meios dielétricos. Se o ângulo de incidência da luz for igual ao ângulo de Brewster para uma dada interface, a luz refletida será linearmente polarizada na direção ortogonal ao plano de incidência.





# Aula 7 – Experimentos com a polarização da luz

## Meta da aula

Introduzir experimentos de óptica, com medidas relacionadas à polarização da luz.

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Verificar experimentalmente a Lei de Malus para a polarização da luz.
- Medir o efeito de uma placa de onda sobre um feixe de luz com polarização linear.

## Pré-requisitos

Para realizar as atividades experimentais propostas nesta aula, você precisará dos conceitos apresentados nas Aulas 4 e 5.

## Introdução

Como você viu nas aulas anteriores, a direção ao longo da qual o campo elétrico da luz oscila é muito importante. É a direção de polarização. Podemos ter vários estados de polarização para uma onda eletromagnética: polarização linear, polarização circular e polarização elíptica. Vamos agora fazer experimentos em que a polarização tem um papel decisivo.

## Atividade experimental: Lei de Malus

### Procedimento

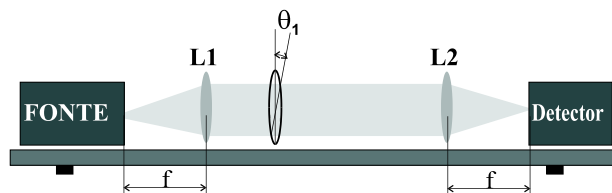
1. Comece posicionando a fonte de luz branca e as lentes L1 e L2 montadas sobre os suportes, de tal maneira que o feixe fique aproximadamente colimado (propagando-se sem divergência) entre as duas lentes e depois seja focalizado no detector. Isto pode ser obtido colocando-se a lente

L1 a uma distância da fonte aproximadamente igual à sua distância focal. Veja a **Figura 7.1**.



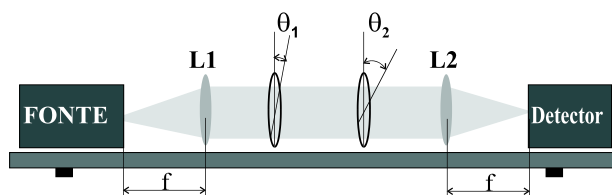
**Figura 7.1:** Representação esquemática da montagem experimental: posicionamento das lentes.

- Introduza o polarizador P1 na região do feixe entre as duas lentes. Varie  $\theta_1$ , o ângulo entre o eixo do polarizador e a vertical, e faça a leitura da intensidade detectada. Note que, neste caso, não há variação da intensidade (os detectores em geral medem a potência luminosa, que é proporcional à intensidade do feixe). Veja a **Figura 7.2**.



**Figura 7.2:** Representação esquemática da montagem experimental: polarizando a luz não polarizada.

- Introduza um segundo polaróide, P2, entre o polaróide P1 e a lente L2, que focaliza o feixe no detector. Veja a **Figura 7.3**.

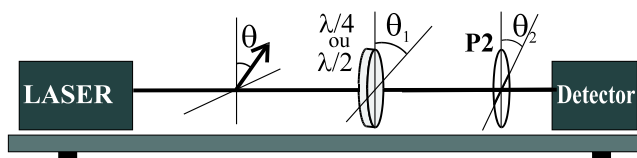


**Figura 7.3:** Representação esquemática da montagem experimental: medindo o estado de polarização.

- Mantendo  $\theta_1$  fixo, varie  $\theta_2$ , o ângulo entre o eixo do polarizador P2 e a vertical, em passos de  $10^\circ$ , de tal forma que uma rotação de, pelo menos,  $180^\circ$  seja realizada.
- Para cada posição angular  $\theta_2$ , anote o valor da intensidade medida.
- Gire o polarizador P1 de  $90^\circ$  e repita as medidas de intensidade em função do ângulo  $\theta_2$ .

## Atividade experimental: placas de onda

### Procedimento



**Figura 7.4:** Representação esquemática da montagem experimental para medidas de polarização da luz.

- A fonte de luz branca será substituída por um laser de diodo. Veja a **Figura 7.4**. Antes de colocar qualquer componente sobre o trilho, faça o alinhamento do feixe de laser com o detector, de modo que o valor da potência luminosa medida seja máximo.
- Insira agora o polarizador no feixe, próximo ao detector, e gire o polarizador até que um máximo de intensidade transmitida seja encontrado. Isto significa que a direção do eixo do polarizador está alinhada com a polarização linear produzida pelo laser. Na **Figura 7.4**, o ângulo da polarização inicial do laser com relação à vertical foi chamado  $\theta$ .
- Insira, entre o laser e o polarizador, uma placa de um quarto de onda ( $\lambda/4$ ). Gire a placa, até que um máximo de intensidade seja encontrado. Nesta posição, a placa não estará introduzindo nenhum atraso entre as

componentes verticais e horizontais da polarização e, portanto, a polarização linear incidente não será alterada pela placa. Vamos chamar esta posição angular  $\theta_1 = 0^0$ .

4. Varie  $\theta_2$ , o ângulo do eixo do polarizador em relação à vertical, em passos de 10 graus e faça medidas da intensidade transmitida em função do ângulo.
5. Gire a placa de onda para  $\theta_1 = +22,5^0$ . Vamos convencionar que o sentido positivo de rotação seja dado pela regra da mão direita: com o polegar apontando para o sentido da propagação da luz, os outros dedos indicam o sentido positivo de rotação. Refaça as medidas de intensidade versus ângulo do analisador  $\theta_2$ .
6. Ajuste a placa de onda para  $\theta_1 = +45^0$  e faça mais uma vez as medidas de intensidade versus ângulo do analisador  $\theta_2$ .
7. Substitua a placa de um quarto de onda ( $\lambda/4$ ) pela placa de meia onda ( $\lambda/2$ ). Gire a placa e encontre a direção em que a potência transmitida é maximizada, realizando o mesmo procedimento que foi realizado para a placa de um quarto de onda ( $\lambda/4$ ). De novo, chamaremos esta posição angular  $\theta_1 = 0^0$ .
8. Faça, também para a placa de meia onda, as medidas de intensidade transmitida em função do ângulo do analisador  $\theta_2$ , para as três posições angulares do eixo da placa de meia onda:  $0^0, +22,5^0$  e  $+45^0$ .

## Análise dos dados

### Lei de Malus

1. Qual é a equação que relaciona a intensidade  $I$  da luz transmitida por um polaróide cujo eixo está orientado ao longo da direção  $\theta_2$ , com a intensidade  $I_0$  de um feixe de luz polarizado linearmente ao longo da direção  $\theta_1$  que incide sobre ele?
2. Explique por que a intensidade não varia quando o polarizador P1 é girado.
3. Faça uma tabela contendo colunas para as seguintes grandezas:  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_2 - \theta_1$  e  $I$  (a intensidade medida).

4. Faça um gráfico da intensidade medida  $I$  em função de  $\theta_2$ , para cada uma das posições angulares de P2. Observe que são duas curvas, uma para cada um dos seus dois conjuntos de dados, mas elas devem ser traçadas no mesmo gráfico.
5. Qual é a razão para que as duas curvas sejam diferentes?

## Placas de onda

1. Faça duas tabelas para as suas medidas com as placas de onda, uma para as medidas com a placa de um quarto de onda e outra com a placa de meia onda. Estas tabelas devem conter colunas com as grandezas:  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $I$  (medido).
2. Faça um gráfico da intensidade medida  $I$  em função do ângulo do polaróide  $\theta_2$  com os resultados das medidas feitas com a placa de um quarto de onda. Será um gráfico com três curvas, sendo uma curva para cada valor de  $\theta_1$ .
3. Analisando o gráfico e sabendo que a polarização incidente era sempre linear, como podemos saber que tipo de estado de polarização foi obtido após a passagem pela placa de um quarto de onda?

**Sugestão:** defina o parâmetro visibilidade das curvas:

$$\nu = (I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min}),$$

onde  $I_{max}$  é o valor máximo da intensidade medida e  $I_{min}$ , o valor mínimo na mesma curva. Procure associar os valores deste parâmetro para cada curva, com possíveis estados de polarização, tais como polarização linear, circular e elíptica. Por exemplo, se o estado de polarização após a placa de onda for circular, ao medir a luz transmitida pelo polaróide em várias direções, o valor de intensidade transmitida será sempre o mesmo. Logo, a visibilidade será zero. Não saberemos, entretanto, se a polarização é circular à direita ou à esquerda.

4. Faça um gráfico da intensidade medida  $I$  em função do ângulo do polaróide  $\theta_2$  com os resultados das medidas feitas com a placa de meia onda. Será novamente um gráfico com três curvas, sendo uma curva para cada valor de  $\theta_1$ .

5. Analisando o gráfico, e sabendo que a polarização incidente era sempre linear, como podemos saber que tipo de estado de polarização foi obtido após a passagem de meia onda pela placa?

**Sugestão:** note que, desta vez, as visibilidades são iguais e as curvas apenas se deslocam.

6. Tendo em vista apenas os resultados obtidos em nosso experimento, quais são os tipos de estado de polarização que poderemos obter com uma placa de um quarto de onda se incidirmos sobre ela luz com polarização linear? E quais tipos de estado poderemos obter com a placa de meia onda?

### E ao longo da próxima aula...

...você iniciará o Módulo 2, onde estudará os processos de interferência e difração da luz.

## Módulo 2

# Interferência e difração

### Apresentação do módulo

Agora que você já está familiarizado com as ondas eletromagnéticas e sabe o que é uma onda plana monocromática, conhece a representação complexa dos campos e também o conceito de polarização da luz, vamos discutir os efeitos de interferência e difração.

Os fenômenos de interferência e difração são manifestações do caráter ondulatório da luz. Nas situações em que estes fenômenos ocorrem, podemos fazer uma analogia perfeita entre a luz e uma outra onda qualquer, tal como uma onda na água ou uma onda sonora, por exemplo. De fato, a descoberta do fenômeno de difração da luz e, mais tarde, a descoberta de que a luz também pode interferir em si mesma, como as ondas em geral, foram muito importantes para decidir uma longa e acalorada discussão sobre a natureza da luz.

A luz sempre foi muito importante para o ser humano e desde tempos remotos vem despertando a nossa curiosidade. Objetos ópticos, tais como espelhos feitos de metais polidos, foram encontrados em ruínas de pirâmides egípcias. Filósofos gregos, como Pitágoras, Demócrito, Empédocles, Platão, Aristóteles e outros, desenvolveram teorias sobre a natureza da luz.

Os modelos mais elaborados para descrever a luz começaram a ser desenvolvidos por volta do século XVI. Para descrever o fenômeno da refração, Descartes publicou um trabalho em 1637, tratando a luz como se fosse uma onda de pressão. Nesse mesmo século, outros pesquisadores, como Francesco Grimaldi e Robert Hooke, estiveram envolvidos em experimentos em que se observava a difração da luz, fenômeno que mostrava, pela primeira vez, que a luz não se propaga necessariamente de maneira retilínea. Entretanto, a discussão sobre a natureza ondulatória ou corpuscular da luz ganhou força com os experimentos de Isaac Newton, que tendia a preferir uma teoria corpuscular para a luz, ou seja, a luz seria composta de pequenas partículas. Entretanto, apesar da grande importância que a opinião de Newton tinha, sobretudo na comunidade científica da Inglaterra, Christiaan Huygens, na Holanda, desenvolvia a teoria ondulatória da luz, considerando inclusive a sua polarização.

Entre 1801 e 1803, Thomas Young realizou os primeiros experimentos que mostravam, de maneira convincente, que a luz devia ser um fenômeno ondulatório. Ele mostrou que, sob certas condições, dois feixes de luz podem interferir. Em outras palavras, a intensidade resultante da combinação de dois feixes não é igual à soma de suas intensidades individuais, pois ela pode ser maior que a soma das mesmas ou até nula. Essa, no entanto, é uma propriedade característica da superposição de ondas já conhecida na época por meio da observação de vários fenômenos ondulatórios. Thomas Young demonstrava, assim, uma propriedade da luz que era incompatível com a teoria corpuscular da mesma. De forma independente, o francês Jean Augustin Fresnel também havia verificado comportamentos ondulatórios na luz. Além disso, Young e Fresnel verificaram que estas ondas deveriam ser transversais, e não longitudinais como o som, por exemplo. Em 1818, Fresnel deu mais um passo importante para a consolidação da teoria ondulatória da luz, ao aplicar com sucesso essa teoria para explicar os fenômenos de difração.

O coroamento da teoria ondulatória da luz ocorreu várias décadas mais tarde, quando James Clerk Maxwell apresentou, em 1861, as equações que regem todo o eletromagnetismo. Estas equações previam a existência de ondas eletromagnéticas propagando-se com a velocidade da luz. Tal fato levou Maxwell a inferir que a luz era uma onda eletromagnética. Suas previsões foram verificadas nos experimentos realizados por Heinrich Rudolf Hertz, em 1888.

É interessante observar que a teoria corpuscular voltou à cena no início do século XX, com o surgimento da Mecânica Quântica. A teoria quântica mostra que, em algumas situações, a luz se comporta como um feixe de partículas de energia mínima e indivisível  $h\nu$ , onde  $h$  é a constante de Planck e  $\nu$  é a frequência da luz. Muito mais recentes foram as primeiras demonstrações experimentais do caráter quântico da luz, realizadas por Leonard Mandel em 1977 e 1978 e seguidas por vários outros. Atualmente, no contexto da Mecânica Quântica, é possível conciliar estes dois tipos de comportamento. A luz se comporta como onda ou como partícula, dependendo do tipo de experimento realizado.



## Aula 8 – Interferência

### Metas da aula

Apresentar o princípio da superposição e mostrar sua aplicação na determinação da intensidade da onda resultante da superposição de duas ondas luminosas. Analisar a experiência de dupla fenda de Young.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Enunciar o princípio da superposição e aplicá-lo na determinação da intensidade da onda resultante da superposição de duas ondas luminosas em uma dada região do espaço.
- Determinar em que situações a interferência entre duas ondas será construtiva ou destrutiva.
- A partir da análise das polarizações de duas ondas quaisquer, determinar se elas poderão, ou não, interferir.
- Justificar quantitativamente os resultados obtidos na experiência de Young.

O fenômeno de interferência entre ondas está intimamente ligado ao fato de que a equação que rege a propagação dessas ondas é linear. Na Aula 2 do Módulo 1, mostramos que as componentes dos vetores campo elétrico e magnético associados a uma onda eletromagnética satisfazem uma equação do tipo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0. \quad (8.1)$$

Como você já sabe, essa é a equação de onda tridimensional. Ela é uma equação diferencial linear e, como tal, possui uma propriedade muito interessante: se  $f_1(x, y, z, t)$ ,  $f_2(x, y, z, t)$ , ...,  $f_n(x, y, z, t)$  são suas soluções individuais, então qualquer combinação linear dessas soluções  $f(x, y, z, t) = \sum_i A_i f_i(x, y, z, t)$  em que os coeficientes  $A_i$  são constantes também será uma solução da equação. Essa propriedade, conhecida como *princípio da superposição*, garante que, se várias perturbações ondulatórias se superpõem em

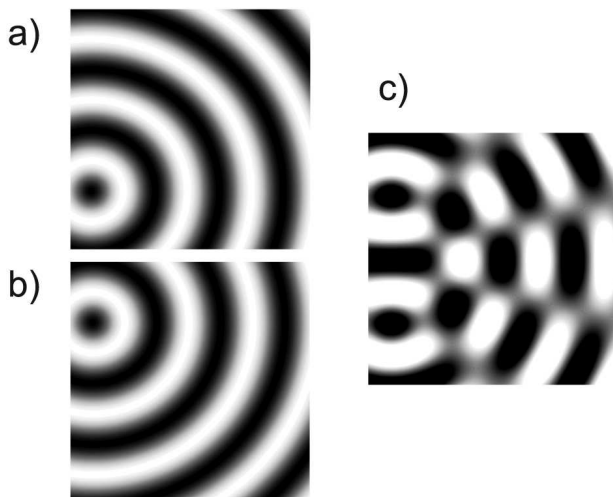
algum ponto, a perturbação resultante também será ondulatória e será dada pela soma algébrica das perturbações originais. Assim, se, por exemplo, duas ondas eletromagnéticas se superpõem em alguma região do espaço, nessa região, o campo elétrico associado à onda resultante será dado simplesmente pela soma dos campos elétricos associados às ondas originais. O princípio da superposição também garante que, fora da região onde ocorre a superposição, as ondas originais voltem a assumir sua forma anterior, como se nada houvesse acontecido.

**Exercício 8.1**

Mostre que se  $f_1(x, y, z, t)$  e  $f_2(x, y, z, t)$  são soluções individuais da Equação de ondas (8.1), então  $f(x, y, z, t) = f_1(x, y, z, t) + f_2(x, y, z, t)$  também é uma solução daquela equação.

**Sugestão:** substitua  $f(x, y, z, t)$  na Equação (8.1) e use o fato de que  $f_1(x, y, z, t)$  e  $f_2(x, y, z, t)$  satisfazem individualmente aquela equação.

Para ilustrar o princípio de superposição, analisaremos, agora, uma situação com a qual você está bastante familiarizado: a interferência de ondas na água, por exemplo, na superfície de um lago. Veja a **Figura 8.1**:



**Figura 8.1:** Simulação de padrões de interferência com ondas de água produzidas por dois agitadores. Nas **Figuras (a) e (b)**, apenas um dos agitadores está ligado. Na **Figura (c)**, os dois agitadores são ligados simultaneamente, produzindo o padrão de interferência.

Ela mostra a situação em que temos dois agitadores de água, que podem produzir ondas harmônicas de mesma frequência. Nas **Figuras 8.1.a e 8.1.b**, um dos agitadores está desligado. Nesse caso, observamos as ondas circulares produzidas individualmente pelo outro agitador. Na **Figura 8.1.c**, os dois agitadores atuam simultaneamente, de forma sincronizada, resultando num novo padrão ondulatório, associado à interferência das duas ondas produzidas por cada agitador, mostradas em **8.1.a e 8.1.b**.

Nessa situação física, o que se propaga como uma onda na água é a perturbação da superfície aquosa, causada pelos agitadores. Essa perturbação consiste no deslocamento da superfície da água para baixo e para cima. É esse deslocamento que se propaga pela água com uma dada velocidade. Segundo o princípio da superposição, quando as duas ondas se encontram num dado ponto, o deslocamento resultante da superfície da água será dado pela soma dos deslocamentos correspondentes a cada uma das ondas. Assim, se em um dado ponto os deslocamentos correspondentes a cada uma das ondas forem para cima, o deslocamento resultante da superfície da água será maior ainda e também dirigido para cima. Este é o caso dos centros das regiões escuras mostradas na **Figura 8.1.c**. A mesma coisa acontecerá se os deslocamentos correspondentes a cada uma das ondas forem para baixo — o deslocamento resultante será maior e dirigido para baixo (centro das regiões claras na **Figura 8.1.c**). Nestes dois casos, dizemos que as ondas interferiram construtivamente.

Contudo, também pode acontecer que os deslocamentos correspondentes às duas ondas sejam em sentidos diferentes. Nesse caso, o deslocamento resultante terá o mesmo sentido que o maior deles, mas será menor em módulo. Em particular, se os deslocamentos correspondentes às duas ondas forem da mesma altura, o deslocamento resultante será nulo. Neste caso, dizemos que houve interferência completamente destrutiva das duas ondas. As linhas cinza aproximadamente radiais na **Figura 8.1.c** correspondem a pontos do espaço onde a interferência entre as duas ondas é sempre completamente destrutiva. Ao longo dessas linhas, a superfície da água estará sempre em repouso.

Vejamos agora, de uma maneira mais quantitativa, o que acontece quando duas ondas luminosas se superpõem em alguma região do espaço. Considere duas ondas planas harmônicas, de mesma frequência  $\omega$  e linearmente polarizadas, descritas pelos campos elétricos  $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$  e  $\vec{E}_2(\vec{r}, t)$ . Se usarmos a representação complexa dos campos, apresentada na Aula 4 do Módulo 1, podemos escrever os campos associados a essas ondas como

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^{(+)}(\vec{r}, t) &= E_{01} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_1)} e^{-i\omega t} \hat{e}_1 \\ \vec{E}_2^{(+)}(\vec{r}, t) &= E_{02} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_2)} e^{-i\omega t} \hat{e}_2,\end{aligned}\quad (8.2)$$

em que  $\delta_1$  e  $\delta_2$  são constantes de fase e  $\hat{e}_1$  e  $\hat{e}_2$  são vetores de polarização linear. Para simplificar a notação nos cálculos a seguir, vamos representar a dependência espacial dos campos elétricos acima pelas funções complexas  $\Psi_1(\vec{r})$  e  $\Psi_2(\vec{r})$ , de modo que a Equação (8.2) possa ser reescrita como

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^{(+)}(\vec{r}, t) &= \Psi_1(\vec{r}) e^{-i\omega t} \hat{e}_1 \\ \vec{E}_2^{(+)}(\vec{r}, t) &= \Psi_2(\vec{r}) e^{-i\omega t} \hat{e}_2\end{aligned}\quad (8.3)$$

com

$$\begin{aligned}\Psi_1(\vec{r}) &= E_{01} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_1)} \\ \Psi_2(\vec{r}) &= E_{02} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_2)}.\end{aligned}\quad (8.4)$$

Suponha que as ondas luminosas, descritas pelos campos elétricos  $\vec{E}_1^{(+)}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{E}_2^{(+)}(\vec{r}, t)$ , se superpõem em alguma região do espaço. Então, segundo o princípio da superposição, o campo elétrico  $\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t)$ , associado à onda resultante, será dado por

$$\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1^{(+)}(\vec{r}, t) + \vec{E}_2^{(+)}(\vec{r}, t) = (\Psi_1(\vec{r}) \hat{e}_1 + \Psi_2(\vec{r}) \hat{e}_2) e^{-i\omega t}. \quad (8.5)$$

Como já discutimos, na Aula 3 do Módulo 1, os campos elétricos associados a uma onda luminosa oscilam com frequências extremamente altas. Por essa razão, a maioria dos instrumentos disponíveis possibilita apenas a medição da média temporal desses campos. No entanto, essa média temporal é nula, devido ao fator  $\cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$ , presente na expressão dos campos elétricos, cuja média temporal se anula. Devido a esse fato, na maioria das vezes estamos interessados na medição da *intensidade* da onda luminosa, que também é a grandeza detectada por nossos olhos. Como você já aprendeu, a intensidade de uma onda luminosa representa o fluxo médio de energia eletromagnética por unidade de tempo, através de uma área unitária normal à direção de propagação da onda.

Se usarmos a representação complexa dos campos, a intensidade de uma onda eletromagnética representada pelo campo elétrico  $\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t)$  é dada por

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v |\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t)|^2, \quad (8.6)$$

em que  $\epsilon$  é a permissividade elétrica do meio e  $v$  é a velocidade de propagação da onda (veja a discussão sobre a intensidade de uma onda eletromagnética, feita na Aula 3 do Módulo 1). Note que, como o vetor  $\vec{E}^{(+)}$  é complexo, o quadrado de seu módulo será dado por  $|\vec{E}^{(+)}|^2 = \vec{E}^{(+)} \cdot \vec{E}^{(-)}$ , em que  $\vec{E}^{(-)}$  é o vetor complexo conjugado de  $\vec{E}^{(+)}$ . Usando a Equação (8.5) para o campo elétrico associado à superposição das duas ondas, podemos ver que a intensidade luminosa na região de superposição das ondas será dada por

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v |\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t)|^2 = \frac{1}{2} \epsilon v |\Psi_1(\vec{r}) \hat{e}_1 + \Psi_2(\vec{r}) \hat{e}_2|^2. \quad (8.7)$$

Note que o termo  $e^{-i\omega t}$  tem módulo unitário e, por isso, sumiu da expressão anterior. Calculando explicitamente o módulo na Equação (8.7), teremos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \epsilon v (\Psi_1(\vec{r}) \hat{e}_1 + \Psi_2(\vec{r}) \hat{e}_2) \cdot (\Psi_1^*(\vec{r}) \hat{e}_1 + \Psi_2^*(\vec{r}) \hat{e}_2) \\ &= \frac{1}{2} \epsilon v [|\Psi_1(\vec{r})|^2 + |\Psi_2(\vec{r})|^2 + (\Psi_1^*(\vec{r}) \Psi_2(\vec{r}) + \Psi_1(\vec{r}) \Psi_2^*(\vec{r})) \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2]. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Se usarmos a representação exponencial de números complexos para  $\Psi_1(\vec{r})$  e  $\Psi_2(\vec{r})$ , podemos escrever essas grandezas como  $\Psi_{1,2}(\vec{r}) = |\Psi_{1,2}(\vec{r})| e^{i\phi_{1,2}}$ , resultando em

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v [|\Psi_1(\vec{r})|^2 + |\Psi_2(\vec{r})|^2 + |\Psi_1(\vec{r})| |\Psi_2(\vec{r})| (e^{i(\phi_2 - \phi_1)} + e^{-i(\phi_2 - \phi_1)}) \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2]. \quad (8.9)$$

Podemos, agora, usar o fato de que  $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ , para escrever finalmente

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v [|\Psi_1(\vec{r})|^2 + |\Psi_2(\vec{r})|^2 + 2 |\Psi_1(\vec{r})| |\Psi_2(\vec{r})| \cos(\phi_2 - \phi_1) \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2]. \quad (8.10)$$

O primeiro e o segundo termos da expressão acima correspondem, respectivamente, a  $I_1$  e  $I_2$ , as intensidades das ondas individuais. Além disso, com a ajuda da Equação (8.4), podemos ver que  $\phi_2 - \phi_1 = \delta_2 - \delta_1$ , sendo portanto igual à diferença de fase entre as duas ondas. Com isso, vemos que a intensidade da onda resultante da superposição de duas ondas luminosas de mesma frequência é dada por

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2, \quad (8.11)$$

em que  $\Delta = \delta_2 - \delta_1$  é a diferença de fase entre as duas ondas.

## Exercício 8.2

Faça explicitamente a passagem da Equação (8.10) para a Equação (8.11).

**Sugestão:** use a Equação (8.6) para determinar a intensidade das ondas associadas a  $\vec{E}_1^{(+)}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{E}_2^{(+)}(\vec{r}, t)$ .

O último termo da Equação (8.11) é chamado *termo de interferência*, e essa equação descreve, de forma condensada, a propriedade fundamental da interferência entre duas ondas luminosas. Ela mostra que a intensidade da onda resultante da superposição de duas ondas pode ser maior ou menor que a soma das intensidades individuais, dependendo da diferença de fase entre as ondas que estão interferindo. Se as ondas tiverem a mesma polarização, quando  $\Delta = 2n\pi$ , com  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , teremos  $\cos \Delta = 1$ , e a intensidade resultante será máxima. Nesse caso, dizemos que há interferência construtiva. Quando  $\Delta = (2n + 1)\pi$ , com  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , teremos  $\cos \Delta = -1$ , e a intensidade resultante será mínima. Dizemos, então, que há interferência destrutiva. Esquematizamos a seguir o que acontece nessas situações:

- Interferência construtiva:

$$\begin{aligned}\Delta &= 2n\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ I &= \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2\end{aligned}\quad (8.12)$$

- Interferência destrutiva:

$$\begin{aligned}\Delta &= (2n + 1)\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ I &= \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2\end{aligned}\quad (8.13)$$

Observe que, se as duas ondas possuem a mesma intensidade, ou seja,  $I_1 = I_2$ , o quadro acima nos diz que, no caso de interferência construtiva, a intensidade resultante será  $I = 4I_1$ , sendo, portanto, o *dobro da soma* das intensidades individuais. Quando a interferência for destrutiva, teremos  $I = 0$ , significando que luz sobre luz pode resultar em escuro completo.

Esses dois casos particulares mostram, de maneira extrema, como o fato de a luz poder interferir em si mesma está em aberta contradição com a teoria corpuscular da luz, que prevê que a intensidade resultante da superposição de dois feixes de luz é igual à soma das intensidades individuais.

Se olharmos para o termo de interferência na Equação (8.11), veremos que o mesmo depende do produto escalar  $\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2$  entre os vetores de polarização das duas ondas. Por isso, a contribuição desse termo para a intensidade resultante da superposição dessas ondas dependerá de suas polarizações. Seu módulo atingirá seu valor máximo,  $2\sqrt{I_1 I_2}$ , somente quando as ondas tiverem a mesma polarização. Se as ondas forem polarizadas em direções ortogonais entre si, o termo de interferência será nulo, e a intensidade resultante será, simplesmente a soma das intensidades individuais. Neste caso, dizemos que as ondas não interferem.

Vamos estudar, nesta aula, um exemplo importante de experiência de interferência com luz: a experiência de **Young**. Para podermos analisá-la de forma quantitativa, precisamos do princípio de Huygens para a propagação da luz, que aqui será usado para estudar a propagação através de um pequeno orifício.

## Princípio de Huygens

O princípio de Huygens estabelece um método para analisar a propagação da luz. A questão é a seguinte: dada uma certa frente de onda em uma determinada região do espaço e em um certo instante de tempo, como é possível prever as características desta frente de onda em um instante de tempo posterior? Esta questão parece simples, mas é, na verdade, fundamental para tudo que se faz em óptica, pois a luz está sempre se propagando, e sempre precisamos saber o que acontece com ela quando vai de um ponto a outro.

**Huygens**, com seu princípio, deu o primeiro passo para a solução dessa questão. O princípio de Huygens estabelece que cada ponto de uma frente de onda funciona como uma fonte secundária de ondículas esféricas que se propagam com a mesma velocidade da onda-mãe. Dada uma frente de onda inicial, a frente de onda, em um instante posterior, será dada pela envoltória das ondas esféricas secundárias, oriundas de pontos da frente de onda original não obstruídos por qualquer obstáculo. Note que a envoltória de uma família de superfícies é a superfície que em cada ponto é tangente a uma das



**Thomas Young** nasceu em Milverton, Inglaterra, em 1773. Contribuiu em várias áreas do conhecimento: Medicina (Young era médico), Arqueologia, Filologia, dentre outras. Na Física, introduziu métodos experimentais para a determinação das propriedades elásticas de meios materiais (módulo de Young) e contribuiu com experimentos que demonstravam a natureza ondulatória da luz, como no exemplo de interferência em fenda dupla discutido nesta aula.



**Christiaan Huygens** nasceu em 1629, em Haia, Holanda. É um dos mais importantes físicos do século XVII, pelo desenvolvimento da teoria ondulatória da luz. Contribuiu com resultados importantes na Mecânica (período de oscilação de um pêndulo, rotação de um corpo rígido, dentre outros). Também é conhecido por ter descrito e interpretado corretamente os anéis de Saturno.



**Augustin - Jean Fresnel** nasceu em 1788 em Broglie, França. Contribuiu com resultados teóricos e experimentais fundamentais para a Óptica, relacionados à polarização da luz (e seu papel na reflexão e refração) e à difração. Por meio deste conjunto de resultados, Fresnel visava a demonstrar que a luz era uma onda transversa, várias décadas antes da teoria eletromagnética de Maxwell, que confirmou este resultado essencial sobre a natureza da luz.

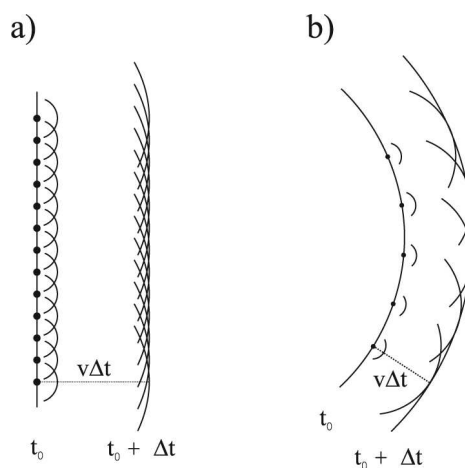


**Gustaf R. Kirchhoff** nasceu em 1824 em Königsberg, Prússia (atual Kaliningrado, Rússia). Em colaboração com o químico Robert Bunsen, seu colega docente na Universidade de Heidelberg, contribuiu de forma significativa para o desenvolvimento da espectroscopia, aplicando os seus resultados nesta área para a descoberta de novos elementos químicos. Também é muito conhecido por suas contribuições na teoria de circuitos elétricos e na teoria da radiação térmica.

superfícies da família.

Embora possua várias limitações, o princípio de Huygens permite a derivação correta das leis de reflexão, refração e também dá conta corretamente da propagação da luz no espaço livre. Posteriormente, **Fresnel** aperfeiçoou o princípio de Huygens, introduzindo a possibilidade de interferência entre as ondículas secundárias. Pouco tempo depois, **Kirchhoff** mostrou que esse novo princípio, conhecido como princípio de Huygens-Fresnel, é consequência direta da Equação de Onda, colocando-o sobre uma base matemática sólida.

As **Figuras 8.2.a** e **8.2.b** mostram a aplicação do princípio de Huygens para determinar, respectivamente, as propagações de uma onda plana e de uma onda esférica no espaço livre.



**Figura 8.2:** Representação esquemática do princípio de Huygens aplicado a: a) uma frente de onda plana; b) uma frente de onda esférica.

Na **Figura 8.2.a**, vemos que cada ponto da frente de onda de uma onda plana gerará ondas esféricas que se propagarão adiante com a mesma velocidade. Em um instante de tempo posterior, todas as ondas secundárias terão percorrido a mesma distância, de modo que sua envoltória será um plano situado à distância  $v\Delta t$  da frente de onda original. A **Figura 8.2.b** mostra o mesmo procedimento para a determinação da propagação de uma onda esférica.

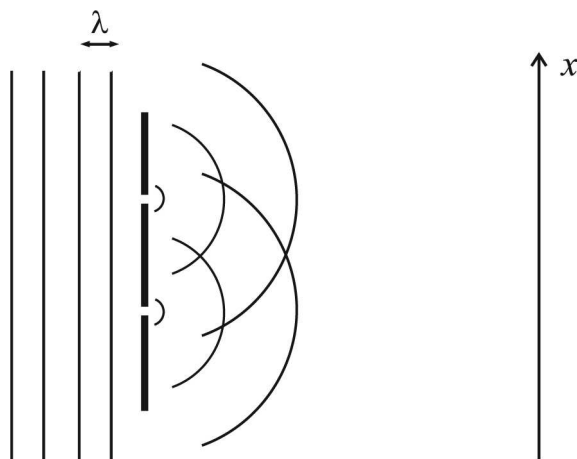
## Experiência de Young

Em 1801, Thomas Young realizou uma experiência que mostrou, de maneira inequívoca, que a luz pode interferir em si mesma. Young fez com que a luz proveniente de uma fonte puntiforme incidisse sobre um anteparo onde



havia dois pequenos orifícios muito próximos entre si. A luz que atravessava os orifícios incidia sobre um segundo anteparo colocado atrás do primeiro. Ao analisar a distribuição da intensidade luminosa sobre o segundo anteparo, Young viu que, em vez de ser simplesmente a soma das intensidades da luz proveniente de cada um dos orifícios, o padrão de luminosidade sobre o anteparo apresentava regiões claras e escuras, mostrando que a intensidade luminosa passava por máximos e mínimos. Usando uma analogia com a interferência de ondas na água, Young mostrou que a luminosidade observada podia ser explicada como resultado da interferência da luz proveniente dos dois orifícios.

A experiência de Young recria, para a luz, a mesma situação que aquela mostrada no início desta aula para ilustrar a interferência com ondas na água. Veja a **Figura 8.3**, que mostra uma representação esquemática do arranjo experimental:



**Figura 8.3:** Representação esquemática do experimento de Young, mostrando as frentes de onda geradas pelas aberturas.

A onda plana monocromática, proveniente da fonte, propaga-se livremente até encontrar o anteparo com dois pequenos orifícios. Segundo o princípio de Huygens, cada orifício funcionará como se fosse uma nova fonte de luz, emitindo ondas esféricas. As ondas luminosas provenientes de cada uma dessas novas fontes vão se sobrepor na região em que está o segundo anteparo, podendo interferir.

Com o que aprendemos até aqui sobre a interferência de ondas luminosas, estamos em condições de analisar quantitativamente o resultado dessa experiência. Antes de iniciarmos essa análise, vamos discutir brevemente o que é uma onda esférica. Conforme havíamos comentado na

Aula 3 do Módulo 1, a equação de onda tridimensional admite várias classes de soluções, sendo as ondas planas apenas uma dessas classes. Uma outra classe importante de soluções é formada pelas ondas esféricas. O campo elétrico associado a uma onda esférica harmônica, de frequência  $\omega$ , pode ser escrito como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{r} \cos(kr - \omega t) \hat{e}, \quad (8.14)$$

em que  $\hat{e}$  é um vetor de polarização. Supomos aqui que a fonte dessa onda está localizada na origem do sistema de coordenadas. Portanto,  $r$  representa a distância da fonte ao ponto de observação. Note, também, que a amplitude de uma onda esférica, em um dado ponto do espaço, decresce com a distância  $r$  desse ponto à fonte da onda, sendo inversamente proporcional a essa distância. Se usarmos a representação complexa dos campos, o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  será representado por

$$\vec{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{r} e^{i(kr - \omega t)} \hat{e}. \quad (8.15)$$

A fase da onda associada ao campo elétrico dado pela Equação (8.15) é  $\phi = kr - \omega t$ . Note uma diferença importante entre essa fase e a fase de uma onda plana. Para a onda plana, a fase depende do produto escalar  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  entre o vetor de onda e o vetor de posição, enquanto aqui aparece o produto dos *módulos* dessas grandezas. Como você já aprendeu, em um dado instante de tempo  $t$ , a frente de onda de uma onda qualquer é dada pela superfície formada por todos os pontos do espaço onde a fase  $\phi$  assume um mesmo valor. Logo, as frentes de onda de uma onda esférica são as superfícies formadas por todos os pontos do espaço para os quais  $kr - \omega t = \phi_0$ , em que  $\phi_0$  é o valor constante da fase. Esses pontos estão sobre a superfície gerada pelos pontos:

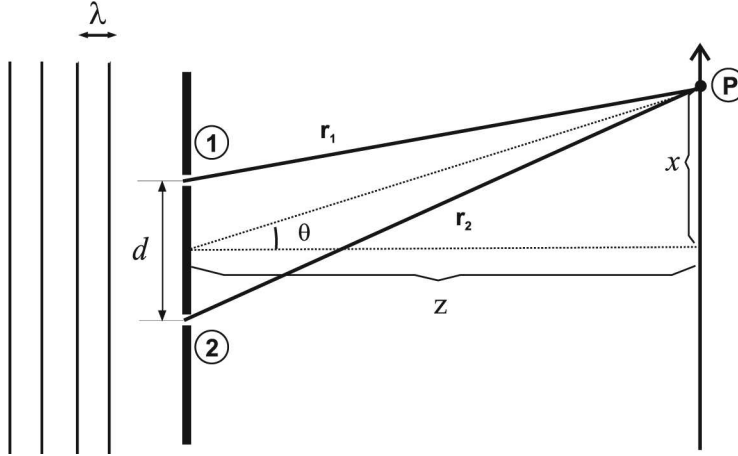
$$r = \frac{\phi_0}{k} + \frac{\omega}{k} t.$$

Esta é a equação, em coordenadas esféricas, de uma esfera de raio  $R = \phi_0/k + (\omega/k)t$  e centro na origem. Portanto, as frentes de onda de uma onda esférica são esferas com centro na posição ocupada pela fonte. Quando o tempo passa, essas esferas se expandem com uma velocidade  $v = \omega/k$ . Daí vem o nome dado a essas ondas. Quando uma fonte emite luz uniformemente em todas as direções, essa luz pode ser muito bem descrita por ondas esféricas. Essa é a situação quando temos uma fonte puntiforme.

Voltemos à análise do experimento de Young. As ondas esféricas provenientes dos dois orifícios irão se superpor sobre o segundo anteparo. Para determinarmos a intensidade luminosa resultante em um dado ponto  $P$  do

anteparo, precisamos apenas determinar os valores dos campos elétricos associados a cada uma das ondas e usar os resultados obtidos na discussão da interferência de duas ondas luminosas, feita anteriormente.

A **Figura 8.4** mostra uma representação esquemática do arranjo experimental, com todas as variáveis importantes para nossa análise:



**Figura 8.4:** Representação esquemática do experimento de Young, apresentando as variáveis utilizadas.

Dada a simetria do arranjo, uma frente de onda plana que se propaga da esquerda atinge simultaneamente os dois orifícios. Como ao longo de uma frente de onda o campo elétrico associado à onda tem o mesmo valor, as ondas esféricas secundárias que emanarão dos dois orifícios devem ter a mesma intensidade quando detectadas à mesma distância de cada um dos orifícios. Por isso, conforme a Equação (8.15), podemos escrever o valor do campo elétrico  $\vec{E}_1(P, t)$  associado à onda emitida pelo orifício 1 no ponto  $P$  do anteparo e o valor do campo elétrico  $\vec{E}_2(P, t)$  associado à onda proveniente do orifício 2 como

$$\begin{aligned}\vec{E}_1^{(+)}(P, t) &= \frac{E_0}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} \hat{e}, \\ \vec{E}_2^{(+)}(P, t) &= \frac{E_0}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)} \hat{e}.\end{aligned}\quad (8.16)$$

Note que quando  $r_1 = r_2$ , os campos acima terão a mesma amplitude e a mesma fase. Além disso, eles têm a mesma polarização. Tudo isso é consequência de as ondas esféricas secundárias terem sido originadas de uma mesma frente de onda.

Como fizemos anteriormente, podemos reescrever os campos como

$$\vec{E}_1^{(+)}(P, t) = \Psi_1(P) e^{-i\omega t} \hat{e} \quad ; \quad \vec{E}_2^{(+)}(P, t) = \Psi_2(P) e^{-i\omega t} \hat{e}, \quad (8.17)$$

em que

$$\Psi_1(P) = \frac{E_0}{r_1} e^{ikr_1} \quad ; \quad \Psi_2(P) = \frac{E_0}{r_2} e^{ikr_2}. \quad (8.18)$$

No experimento de Young, a distância  $d$  entre os orifícios é muito menor que a distância  $R$  entre o centro do primeiro anteparo, igualmente distanciado dos dois orifícios, e qualquer ponto  $P$  do segundo. Em geral,  $R$  é várias ordens de grandeza maior que  $d$ . Por isso, podemos supor que os raios  $r_1$  e  $r_2$ , na **Figura 8.4**, são aproximadamente paralelos ao raio  $R$ , fazendo, assim, o mesmo ângulo  $\theta$  com a horizontal. Com essa aproximação, podemos escrever  $r_1 = R - (d/2) \sin \theta$  e  $r_2 = R + (d/2) \sin \theta$ , conforme você mostrará no exercício a seguir.

### Exercício 8.3

Mostre, a partir da **Figura 8.4**, que, se superpusermos que  $r_1$ ,  $r_2$  e  $R$  são paralelos, então  $r_1 = R - (d/2) \sin \theta$  e  $r_2 = R + (d/2) \sin \theta$ . Observe que  $R$ ,  $r_1$  e  $r_2$  serão, de fato, aproximadamente paralelos quando  $R \gg d$ , na **Figura 8.4**.

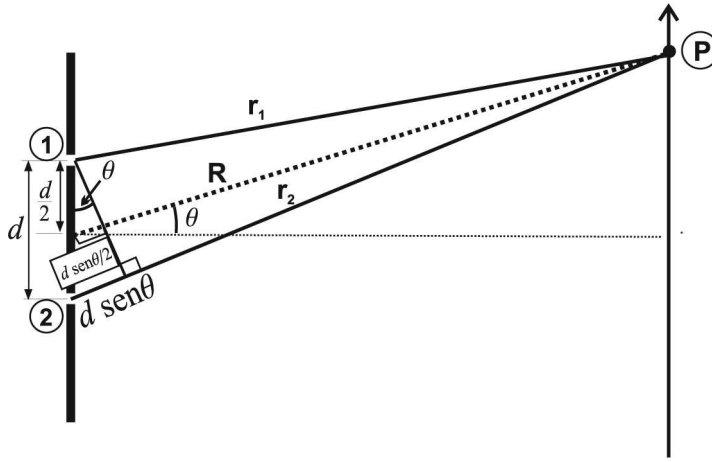
**Sugestão:** na **Figura 8.4**, primeiro trace uma reta do centro do orifício 1 até o raio  $R$ , de maneira que a reta encontre o raio  $R$  em um ângulo reto. A partir do triângulo retângulo resultante, mostre a relação entre  $r_1$  e  $R$ . Em seguida, prolongue este traço até que ele encontre o raio  $r_2$ . Como este raio é aproximadamente paralelo a  $R$ , o ângulo neste cruzamento também é reto. A partir deste segundo triângulo retângulo, obtenha a diferença  $r_2 - r_1$ . A sua figura deve ficar semelhante à **Figura 8.5**. Lembre-se de que estamos supondo que  $r_1$  e  $r_2$  também formam um ângulo  $\theta$  com a horizontal.

Como  $R \gg d$ , podemos desprezar  $d/2$  em relação  $R$  nos denominadores de  $\Psi_1(P)$  e  $\Psi_2(P)$ , na Equação (8.18), e escrever

$$\Psi_1(P) = \frac{E_0}{R} e^{ikr_1} \quad ; \quad \Psi_2(P) = \frac{E_0}{R} e^{ikr_2}. \quad (8.19)$$

Note que, com isso,  $|\Psi_1(P)| = |\Psi_2(P)|$ . Logo, a aproximação que fizemos consiste em considerar que, em qualquer ponto  $P$  do segundo anteparo, a luz proveniente do orifício 1 tem a mesma intensidade da luz proveniente do orifício 2, ou seja,  $I_1(P) = I_2(P)$ .

Você deve estar se perguntando: “Por que não substituímos  $r_1$  e  $r_2$  por  $R$  também nas fases de  $\Psi_1(P)$  e  $\Psi_2(P)$  (termos exponenciais na Equação (8.18))?”



**Figura 8.5:** Relação entre os comprimentos  $r_1$ ,  $r_2$  e  $R$ .

Note que, nos argumentos das funções exponenciais,  $r_1$  e  $r_2$  estão multiplicados pelo número de onda  $k$ . Como  $k = 2\pi/\lambda$ , em que  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz, se substituíssemos  $r_1$  e  $r_2$  por  $R$ , estaríamos desprezando termos da ordem de  $2\pi(d/\lambda)$ . Para a luz visível, teremos  $d/\lambda \gg 1$ , e o erro feito ao desprezarmos esse termo seria apreciável.

Como o campo elétrico  $\vec{E}^{(+)}(P, t)$  associado à onda resultante no segundo anteparo é dado pela soma dos campos associados às ondas emanadas de cada um dos orifícios, temos

$$\vec{E}^{(+)}(P, t) = \vec{E}_1^{(+)}(P, t) + \vec{E}_2^{(+)}(P, t) = (\Psi_1(P) + \Psi_2(P)) e^{-i\omega t} \hat{e}. \quad (8.20)$$

Agora, basta usarmos as Equações (8.7)–(8.11) para calcularmos a intensidade luminosa resultante no segundo anteparo. O resultado final será

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)} \cos \Delta, \quad (8.21)$$

em que, agora, a diferença de fase  $\Delta$  entre as duas ondas é dada por

$$\Delta = k(r_2 - r_1). \quad (8.22)$$

Note que, no experimento de Young, a diferença de fase entre as ondas provenientes dos dois orifícios, na região do segundo anteparo, é simplesmente proporcional à diferença de percurso de cada um dos orifícios até o ponto onde a luz está sendo detectada.

Como  $I_1(P) = I_2(P)$ , podemos reescrever a Equação (8.21) como

$$\begin{aligned} I(P) &= 2I_1(P) (1 + \cos \Delta) \\ &= 4I_1(P) \cos^2 \left( \frac{\Delta}{2} \right), \end{aligned} \quad (8.23)$$

em que usamos a identidade  $2 \cos^2 (\theta/2) = 1 + \cos (2\theta)$ .

Ao variarmos verticalmente a posição do ponto  $P$  no segundo anteparo, a diferença de fase  $\Delta$  entre as ondas luminosas provenientes dos dois orifícios mudará, e a intensidade resultante passará por máximos e mínimos várias vezes. A intensidade será máxima quando  $\cos^2 (\Delta/2)$  atingir seu valor máximo  $\cos^2 (\Delta/2) = 1$ . Isso acontecerá para  $\Delta = 2n\pi$ , com  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . A intensidade será mínima quando  $\cos^2 (\Delta/2) = 0$ . Isso acontecerá para  $\Delta = (2n + 1)\pi$ , com  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Essa situação pode ser resumida com a ajuda do quadro a seguir:

- Interferência construtiva:

$$\begin{aligned} \Delta &= 2n\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ I(P) &= 4I_1(P). \end{aligned} \quad (8.24)$$

- Interferência destrutiva:

$$\begin{aligned} \Delta &= (2n + 1)\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ I(P) &= 0. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Note, mais uma vez, que nas posições onde ocorre interferência construtiva, a intensidade resultante é o dobro da soma das intensidades individuais. Nas posições em que ocorre interferência destrutiva, a intensidade é nula, embora a intensidade de cada uma das ondas seja diferente de zero. À primeira vista, parece não haver conservação da energia luminosa proveniente das duas fontes, pois há pontos em que a intensidade resultante é *maior* que a soma das intensidades individuais. Você deve estar se perguntando de onde vem a energia em excesso. Observe, no entanto, que existem pontos em que a intensidade luminosa é *menor* que a soma das intensidades individuais. Portanto, o que acontece é que a interferência entre as duas ondas luminosas

redistribui a energia eletromagnética transportada pelas ondas ao longo do plano do segundo anteparo. Se calcularmos o valor médio da intensidade resultante, na Equação (8.23), ao longo de uma região do anteparo onde a diferença de fase  $\Delta$  entre as ondas individuais varie por vários múltiplos de  $2\pi$ , obteremos

$$\langle I \rangle = 2I_1(P). \quad (8.26)$$

Isso mostra que a intensidade média sobre uma região grande do anteparo ainda é igual à soma das intensidades individuais.

Podemos facilmente determinar as posições de máximos e mínimos da intensidade resultante, no segundo anteparo, em função do ângulo  $\theta$  entre o raio  $R$ , que vai do centro do primeiro anteparo até o ponto  $P$  do segundo anteparo, e a direção horizontal. Para isso, basta substituir os valores  $r_1 = R - (d/2)\sin\theta$  e  $r_2 = R + (d/2)\sin\theta$  na expressão para a diferença de fase  $\Delta$ :

$$\Delta = k(r_2 - r_1) = kd\sin\theta. \quad (8.27)$$

Se lembrarmos que  $k = 2\pi/\lambda$ , podemos escrever as condições para máximos e mínimos da intensidade como

- Máximos:

$$d\sin\theta = m\lambda \quad ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.28)$$

- Mínimos:

$$d\sin\theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.29)$$

Logo, o padrão da intensidade luminosa sobre o anteparo consiste em uma região central clara, correspondendo ao máximo de ordem zero, rodeada de regiões escuras e claras, intercaladas, correspondendo a mínimos e máximos de ordens maiores. A **Figura 8.6** mostra um exemplo de padrão de interferência típico para o experimento de dupla fenda de Young:



**Figura 8.6:** Simulação do padrão de interferência com fenda dupla: gráfico de tons de cinza que simula uma foto da figura de interferência e um gráfico de intensidade em função da posição sobre o anteparo.

Pelo resultado do Exercício 8.3, sabemos que o comprimento  $d \sin \theta$  representa a diferença entre as distâncias percorridas pela luz de cada orifício até o ponto  $P$  de observação:  $d = r_2 - r_1$  (reveja a **Figura 8.5**). Assim, as Equações (8.28) e (8.29) mostram que a intensidade resultante será máxima quando a diferença de percurso entre cada orifício e o ponto de observação  $P$  no anteparo for um múltiplo inteiro do comprimento de onda. Da mesma maneira, a intensidade resultante será mínima quando a diferença de percurso for um múltiplo ímpar da metade do comprimento de onda. Essa é uma situação bastante geral, que é válida não apenas na situação do experimento de Young: quando duas ondas, que inicialmente apresentam uma diferença de fase nula entre si, se superpõem após percorrerem trajetórias diferentes, de modo que a diferença de percurso seja um múltiplo inteiro do comprimento de onda, continuarão apresentando uma diferença de fase nula. Por isso, a interferência resultante será construtiva. No entanto, se a diferença de percurso for um múltiplo ímpar da metade do comprimento de onda, as ondas acumularão uma diferença de fase  $\Delta = \pi$ , fazendo com que sua interferência seja destrutiva. Na próxima aula, teremos a oportunidade de analisar outras situações em que isso acontece.

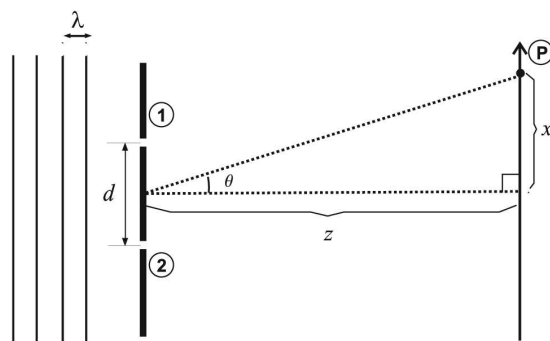


**Exercício 8.4**

Um feixe de luz de comprimento de onda  $\lambda = 632\text{nm}$  incide sobre uma fenda dupla, de separação  $d = 0,20\text{mm}$ . A intensidade é medida ao longo da direção  $x$  (paralela à direção que liga as duas fendas) de um anteparo que está a  $z = 2,0\text{m}$  do plano das fendas. Determine as posições dos quatro máximos e mínimos de intensidade mais próximos do máximo central ( $x = 0$ ).

**Sugestão:** calcule, inicialmente, as posições angulares dos máximos e mínimos, usando as Equações (8.28) e (8.29).

**Solução:** o máximo central, que corresponde à direção  $\theta = 0$ , é obtido tomando  $m = 0$  na Equação (8.28). Os quatro máximos mais próximos do máximo central são obtidos tomando  $m = \pm 1, \pm 2$  nesta mesma equação:  $\sin\theta = \pm 0,00316$ ;  $\sin\theta = \pm 0,00632$ . As posições dos máximos ao longo do eixo  $x$  no anteparo de observação são calculadas a partir do triângulo retângulo mostrado na **Figura 8.7**:  $x = z \tan\theta$ . Como os ângulos são muito pequenos, podemos aproximar os valores da função tangente pelos valores da função seno (você pode testar esta aproximação num computador ou numa boa máquina de calcular), para obter as posições dos dois máximos de cada lado do máximo central:  $x = \pm 6,32\text{mm}$  e  $x = \pm 12,6\text{mm}$ . As posições dos dois mínimos mais próximos de cada lado são obtidas de forma análoga, a partir da Equação (8.29):  $x = \pm 3,16\text{mm}$  e  $x = \pm 9,46\text{mm}$ . Observe que sempre há um mínimo entre dois máximos consecutivos (reveja a **Figura 8.6**).



**Figura 8.7:** Triângulo retângulo para o cálculo das posições de máximos e mínimos de interferência.

## Conclusão

Nesta aula, você estudou a interferência entre ondas luminosas, tendo como base a experiência de dupla fenda de Young. Essa experiência mostrou, pela primeira vez, de maneira inequívoca, que a luz é um fenômeno ondulatório. Mostramos que o fenômeno de interferência entre duas ondas está intimamente ligado ao princípio da superposição. Você viu também que a grandeza determinante para a interferência entre duas ondas luminosas é a *diferença de fase entre elas*. É o valor da diferença de fase que determinará se a interferência será construtiva ou destrutiva. Podemos mostrar que o padrão de luminosidade sobre o anteparo, na experiência de dupla fenda de Young, é resultado da diferença de caminho que cada onda luminosa tem de percorrer do orifício onde foi originada até o anteparo, resultando em uma diferença de fase variável entre as duas ondas.

## Atividades Finais

1. Faça a experiência de explicar a um colega por que a experiência de dupla fenda de Young está em contradição com a teoria corpuscular da luz.
2. Cite uma situação em que duas ondas eletromagnéticas se superpõem em uma dada região do espaço e, mesmo assim, não interferem. Isso significando que a intensidade resultante será dada simplesmente pela soma das intensidades das ondas individuais.
3. Descreva, de maneira detalhada, qual é a origem do padrão de luminosidade claro-escuro na experiência de Young.

## Resumo

O fenômeno de interferência entre ondas é consequência do princípio da superposição. Esse princípio garante que, se várias perturbações ondulatórias se superpuserem em algum ponto, a perturbação resultante também será ondulatória e será dada pela soma algébrica das perturbações originais. Ondas polarizadas em direções ortogonais entre si não interferem. A diferença de fase entre as ondas que se superpõem em alguma região do espaço determina se a interferência será construtiva ou destrutiva. A interferência será construtiva quando a diferença de fase for um múltiplo inteiro de  $2\pi$ ;

será destrutiva se a diferença de fase for um múltiplo ímpar de  $\pi$ . Quando a interferência é construtiva, a intensidade resultante pode ser maior que a soma das intensidades das ondas que interferem. Quando a interferência é destrutiva, a intensidade resultante pode ser nula, embora as intensidades individuais das ondas que interferem sejam diferentes de zero. O padrão de luminosidade claro-escuro, na experiência de dupla fenda de Young, é resultado da diferença de caminho que cada onda luminosa tem de percorrer do orifício onde foi originada até o anteparo, resultando em uma diferença de fase variável entre as duas ondas. Quando a diferença de caminho é um múltiplo do comprimento de onda, a intensidade luminosa no anteparo é máxima. Quando a diferença de caminho é um múltiplo ímpar da metade do comprimento de onda, a luminosidade no anteparo é nula.

### **E ao longo da próxima aula...**

...estudaremos a interferência da luz em películas delgadas. Essa interferência é reponsável pelas cores maravilhosas da plumagem de algumas aves, por exemplo.



## Aula 9 – Interferência em películas delgadas

### Metas da aula

Discutir a interferência da luz em lâminas delgadas de material transparente e analisar o interferômetro de Michelson.

### Objetivos

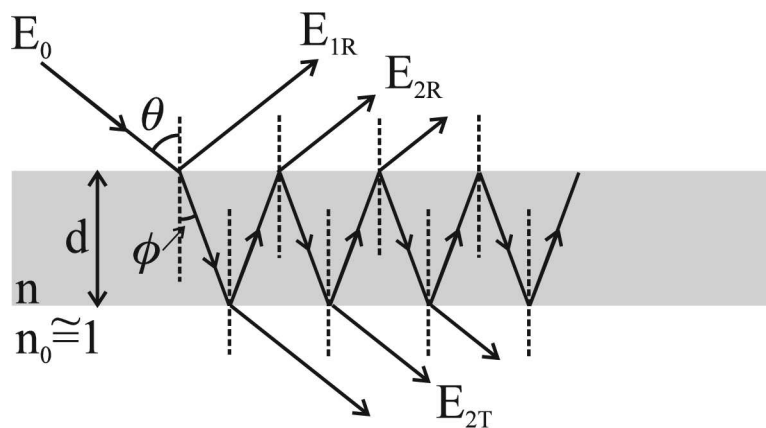
Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Explicar a diferença entre o percurso realizado pela luz em um dado meio e caminho óptico correspondente a esse percurso.
- Determinar as condições de máximos e mínimos de interferência na luz refletida e na luz transmitida por uma película delgada de material transparente.
- Explicar o que são os anéis de Newton.
- Mostrar quantitativamente como o interferômetro de Michelson pode ser usado para determinar o índice de refração de um material transparente colocado em um dos seus braços.

Na aula anterior, discutimos as condições gerais para a interferência da luz e analisamos o experimento de dupla fenda de Young. Esse experimento é, possivelmente, o exemplo mais importante de interferência da luz. Em parte por seu caráter histórico e em parte por ser bastante didático.

De fato, a interferência de ondas eletromagnéticas é um fenômeno bastante presente no nosso dia-a-dia, manifestando-se de várias maneiras. Nesta aula, estudaremos mais dois exemplos importantes de manifestação desse fenômeno. Primeiro, estudaremos o processo de interferência da luz, quando a mesma atravessa películas delgadas de materiais transparentes. Este tipo de interferência é responsável pela coloração de asas de borboletas e pequenos pássaros como o beija-flor, por exemplo. É também este fenômeno que leva ao aparecimento do padrão complexo de cores na superfície de bolhas de sabão e manchas de óleo.

Para entender esse fenômeno, considere uma película de espessura uniforme  $d$ , feita de um material de índice de refração  $n$ , como mostra a **Figura 9.1**.



**Figura 9.1:** Múltiplas reflexões em uma película delgada.

Considere, agora, a situação onde uma onda plana luminosa, cujo campo elétrico associado é representado por  $E_0$ , propagando-se no ar, atinge a face superior da película, no ângulo de incidência  $\theta$ . Conforme o que você aprendeu no Módulo 1, deste curso, parte da onda será refletida e parte será refratada, penetrando na película. Novamente, ao atingindo a face inferior da película, parte da onda que foi inicialmente refratada será refletida e parte, refratada. A parte refratada será transmitida para o ar e a parte refletida continuará propagando-se na película, até encontrar a face superior da mesma. Novamente, parte dessa onda será refratada, propagando-se no ar em uma direção paralela à primeira onda refletida, e parte será refletida de volta à película. Esse processo continuará indefinidamente, gerando as ondas refletidas  $E_{1R}, E_{2R}, \dots$  e as ondas transmitidas  $E_{1T}, E_{2T}, \dots$ . No entanto, se o ângulo de incidência  $\theta$  não for muito grande, na maioria dos materiais de que são feitas essas películas, a refletividade será muito baixa. Assim, a intensidade das ondas refletidas e transmitidas cai rapidamente a cada processo de reflexão/transmissão. Essa diminuição de intensidade é representada na **Figura 9.1** pela diminuição do tamanho das setas.

Para saber qual é o resultado final deste processo, do ponto de vista de um observador que veja a luz refletida pela película, teríamos de calcular o campo elétrico resultante no ponto de observação, considerando as contribuições de todos os campos refletidos,  $E_{1R}, E_{2R}, \dots$ . Entretanto, como as intensidades das ondas refletidas diminuem rapidamente, podemos ter uma boa idéia do que vai acontecer, usando apenas as contribuições de  $E_{1R}$  e  $E_{2R}$ . Como você viu na aula anterior, haverá interferência entre as ondas representadas pelos campos elétricos  $E_{1R}$  e  $E_{2R}$ , e a intensidade luminosa resultante dependerá da diferença de fase entre as duas ondas, no ponto de observação.

Aqui, de maneira análoga à experiência de Young, a diferença de fase entre as duas ondas resulta da diferença de percurso feito por cada onda, a partir do primeiro ponto de contato entre a onda incidente e a película, e o ponto de observação.

Na aula anterior, mostramos que a diferença de fase  $\Delta$  entre duas ondas, devido a uma diferença de percurso realizado por cada uma das ondas, ao se propagarem entre dois pontos do espaço, é dada por:

$$\Delta = k(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1), \quad (9.1)$$

onde  $r_2$  e  $r_1$  são as distâncias percorridas por cada uma das ondas, ao se propagarem de um ponto ao outro;  $k$  é seu número de onda e  $\lambda$  é seu comprimento de onda *no meio onde se propagam*. Com base nessa expressão, podemos afirmar que se a diferença de percurso  $r_2 - r_1$  fosse um múltiplo do comprimento de onda  $\lambda$ , a diferença de fase  $\Delta$  seria um múltiplo de  $2\pi$  e a interferência entre as duas ondas seria construtiva. Em contrapartida, se a diferença de percurso fosse um múltiplo *ímpar* de  $\lambda/2$ , então  $\Delta$  seria um múltiplo *ímpar* de  $\pi$  e a interferência entre as duas ondas seria destrutiva. Naquela ocasião, consideramos que as duas ondas estavam se propagando no ar, que tem um índice de refração  $n \approx 1$ . No entanto, existem situações, como agora, em que as ondas se propagam em meios de índice de refração  $n$  arbitrário. Nestes casos, devemos levar em conta que o comprimento de onda  $\lambda$  depende do índice de refração do meio:  $\lambda = \lambda_0/n$ , onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda no *vácuo*. Com isso em mente, podemos reescrever a Equação (9.1) como:

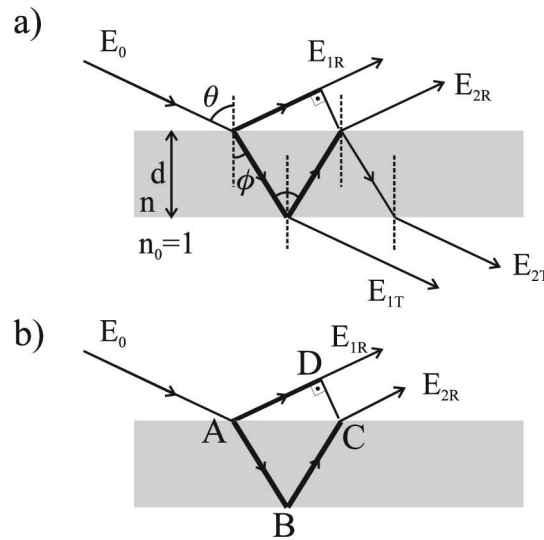
$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(r_2 - r_1). \quad (9.2)$$

As grandezas  $nr_2$  e  $nr_1$  são chamadas *caminho óptico* percorrido pelas ondas. Note que o caminho óptico é igual à *distância* percorrida pela onda, multiplicada pelo índice de refração do meio onde houve a propagação. No vácuo e, aproximadamente, no ar, o caminho óptico é igual ao percurso realizado pela onda.

A Equação (9.2) nos permite reformular as condições para interferência construtiva e destrutiva entre duas ondas que realizaram percursos diferentes entre dois pontos de um meio qualquer, da seguinte maneira: se a diferença de *caminho óptico*  $\Lambda = nr_2 - nr_1$  for um múltiplo do comprimento de onda  $\lambda_0$  *no vácuo*, a interferência será construtiva. Por outro lado, se a diferença de caminho óptico  $\Lambda = nr_2 - nr_1$  for um múltiplo ímpar de  $\lambda_0/2$ , a interferência será destrutiva. Essa condição é bastante geral e se aplica também quando as

duas ondas se propagam em meios com índices de refração diferentes. Nesse caso, a diferença de caminho óptico será  $\Lambda = n_2 r_2 - n_1 r_1$ , onde  $n_2$  e  $n_1$  são os índices de refração dos meios.

Aplicando o resultado anterior ao nosso problema concreto, vemos que a intensidade luminosa resultante da interferência entre as ondas refletidas  $E_{1R}$  e  $E_{2R}$  dependerá da diferença de caminho óptico percorrido pelas mesmas. A **Figura 9.2** mostra a geometria do problema em detalhe. Repare que, enquanto  $E_{1R}$  propaga-se apenas no ar,  $E_{2R}$  propaga-se também dentro da película.

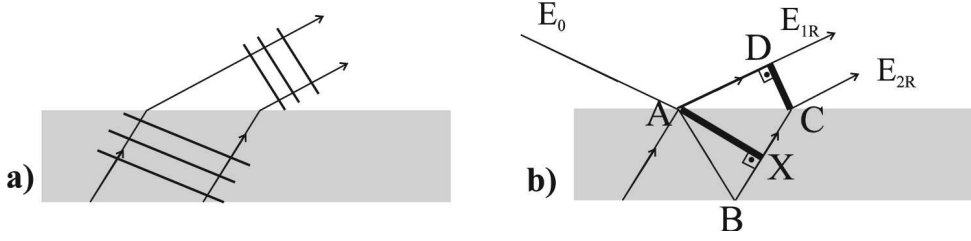


**Figura 9.2:** Reflexão em película delgada: detalhe do percurso realizado por cada uma das ondas.

A diferença de *percurso* entre as duas ondas é dada pela diferença entre trajeto realizado dentro da película pela onda que dará origem a  $E_{2R}$ , depois que a onda incidente  $E_0$  se divide, e o trajeto percorrido fora do material pela onda  $E_{1R}$ , até o ponto em que  $E_{1R}$  e  $E_{2R}$  se propagam juntas, em trajetórias paralelas e no ar. Estes dois trajetos estão marcados com as linhas reforçadas na **Figura 9.2.a**. Na **Figura 9.2.b**, desenhamos somente estes dois percursos, para mostrar de maneira clara que a diferença de percurso entre as ondas é dada por  $\overline{ABC} - \overline{AD}$ . Segundo nossa discussão anterior, a *diferença de caminho óptico* será, então, dada por  $\Lambda = n\overline{ABC} - \overline{AD}$ , pois o percurso  $\overline{ABC}$  é feito num meio de índice de refração  $n$  e o percurso  $\overline{AD}$  é feito no ar ( $n \approx 1$ ).

Nosso problema, agora, consiste em determinar o valor da diferença de caminho óptico  $\Lambda = n\overline{ABC} - \overline{AD}$ . A **Figura 9.3** nos ajudará a fazer esse cálculo. Veja o que acontece com uma onda plana propagando-se de dentro





**Figura 9.3:** Reflexão em película delgada: argumento para o cálculo da diferença de caminho óptico.

para fora do material do nosso problema, na **Figura 9.3.a**. Quando uma frente de onda plana chega na interface com ar, e a incidência não é normal, parte da onda é refratada e é transmitida para o ar, propagando-se em uma direção diferente da direção da onda incidente. Entretanto, uma parte da frente de onda chega mais cedo na interface do que a outra e experimenta uma variação na velocidade de propagação, devido à diferença entre os índices de refração do meio e do ar. A outra parte continua dentro do material e, portanto, ainda não sofreu mudança de velocidade. Sabemos que a refração não altera a forma da frente de onda e, portanto, se ela era plana dentro do material, deve continuar plana fora também.

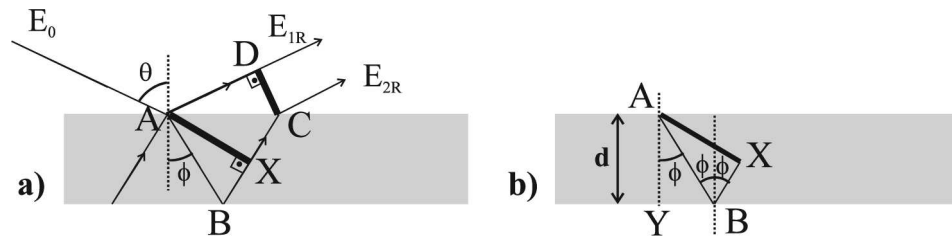
Sendo assim, o tempo que a parte da frente de onda original que se propaga no ar leva para realizar o percurso  $\overline{AD}$ , na **Figura 9.3**, deve ser igual ao tempo que a parte da frente de onda que ainda está se propagando dentro da película leva para realizar o percurso  $\overline{XC}$ . Se não fosse assim, a frente de onda se distorceria e deixaria de ser plana. No entanto, se uma onda realiza dois percursos quaisquer num mesmo intervalo de tempo, então os caminhos ópticos associados a esses percursos são necessariamente iguais. Podemos, então, concluir que  $\overline{AD} = n\overline{XC}$ , pois o percurso  $\overline{AD}$  é realizado no ar ( $n_{ar} \approx 1$ ) e o percurso  $\overline{XC}$  é realizado num meio de índice de refração  $n$ . Se substituirmos esse resultado na expressão para a diferença de caminho óptico  $\Lambda$ , teremos (veja a **Figura 9.3.b**):

$$\Lambda = n\overline{ABC} - \overline{AD} = n\overline{ABC} - n\overline{XC} = n(\overline{AB} + \overline{BX}). \quad (9.3)$$

**Exercício 9.1**

Mostre que, se uma onda luminosa leva o mesmo tempo para realizar dois percursos quaisquer em meios diferentes, então os caminhos ópticos associados a esses percursos são iguais.

**Sugestão:** use a definição de caminho óptico e o fato de que a velocidade  $v$  da luz em um meio de índice de refração  $n$  é dada por  $v = c/n$ , onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.



**Figura 9.4:** Reflexão em película delgada: cálculo da diferença de caminho óptico.

O problema, agora, se reduz a um problema de geometria. Veja na **Figura 9.4**, que  $\overline{AB}$  é o cateto adjacente ao ângulo  $\phi$  de refração, no triângulo retângulo  $AYB$ . Assim, podemos relacionar o comprimento  $\overline{AB}$  com a espessura da película  $d$ , por meio da relação:

$$\overline{AB} = \frac{d}{\cos \phi}. \quad (9.4)$$

Já  $\overline{BX}$  é o cateto adjacente ao ângulo  $2\phi$  do triângulo retângulo  $ABX$  e pode ser relacionado a  $\overline{AB}$  por:

$$\overline{BX} = \overline{AB} \cos 2\phi. \quad (9.5)$$

Calculando, finalmente, a diferença de caminho óptico  $\Lambda$ , obtemos:

$$\Lambda = n(\overline{AB} + \overline{BX}) = n \left( \frac{d}{\cos \phi} + \overline{AB} \cos 2\phi \right). \quad (9.6)$$

Substituindo o valor de  $\overline{AB}$ , obtemos finalmente:

$$\Lambda = \frac{nd}{\cos \phi} (1 + \cos 2\phi) = 2nd \cos \phi, \quad (9.7)$$

onde usamos o fato de que  $(1 + \cos 2\phi) = 2 \cos^2 \phi$ .

Embora tenhamos calculado adequadamente a diferença de caminho óptico, ainda não podemos estabelecer as condições de interferência construtiva e destrutiva. Falta ainda levar em conta possíveis mudanças de fase dos campos nas reflexões. Essa questão foi analisada detalhadamente na Aula 6, do Módulo 1, quando discutimos as propriedades dinâmicas dos processos de reflexão e refração. Sugerimos que, caso tenha alguma dificuldade para entender a discussão a seguir, você releia parte daquela aula.

Na Aula 6, do Módulo 1, você viu que podemos investigar as possíveis mudanças de fase na reflexão da luz, ao encontrar a interface que separa dois meios de índices de refração diferentes, discutindo separadamente as situações onde a luz incidente é polarizada paralelamente ou perpendicularmente ao plano de incidência. Relembremos brevemente os resultados lá obtidos:

- **Situação em que  $n_1 < n_2$ :** quando a luz, propagando-se em um meio de índice de refração  $n_1$ , é refletida na interface com um meio de índice de refração  $n_2 > n_1$ , a componente de polarização perpendicular ao plano de incidência *sofre* uma mudança de fase  $\delta = \pi$ , para qualquer ângulo de incidência. Já a componente de polarização paralela ao plano de incidência não sofre lá qualquer mudança de fase, se o ângulo de incidência for menor que o ângulo de Brewster. Nós nos restringiremos a ângulos de incidência menores que o ângulo de Brewster.
- **Situação em que  $n_1 > n_2$ :** quando a luz, propagando-se em um meio de índice de refração  $n_1$ , é refletida na interface com um meio de índice de refração  $n_2 < n_1$ , a situação se inverte. A componente de polarização perpendicular ao plano de incidência *não sofre* nenhuma mudança de fase, para qualquer ângulo de incidência. Já a componente de polarização paralela ao plano de incidência sofrerá uma mudança de fase  $\delta = \pi$ , se o ângulo de incidência for menor que o ângulo de Brewster.

Vejamos, então, o que acontece com os campos refletidos, em nosso problema concreto, mostrado na **Figura 9.2**. Suponhamos, primeiro, que a onda incidente  $E_0$  seja polarizada perpendicularmente ao plano de incidência. Neste caso, ao ocorrer a reflexão na primeira interface entre o ar e a película, a onda refletida  $E_{1R}$  sofrerá uma mudança de fase  $\delta = \pi$  em relação à onda incidente  $E_0$ , já a onda refratada, não sofrerá nenhuma mudança de fase. Ao atingir a segunda interface entre a película e o ar, essa onda estará vindo de um meio com índice de refração maior que o ar. Logo, ao ser refletida,

não sofrerá nenhuma mudança de fase. Essa onda se propagará de volta na película até ser refratada na primeira interface, dando origem à onda  $E_{2R}$ . Como na refração nunca há mudança de fase, a onda  $E_{2R}$  não terá sofrido nenhuma mudança de fase, *por reflexão*, em relação à onda incidente  $E_0$ , e, portanto, a onda  $E_{1R}$  terá sofrido uma mudança de fase  $\delta = \pi$  também em relação à onda  $E_{2R}$ , devido apenas à reflexão na primeira interface.

Suponhamos, agora, que a onda incidente  $E_0$  seja polarizada paralelamente ao plano de incidência. Nesse caso, ao ocorrer a reflexão na primeira interface entre o ar e a película, a onda refletida  $E_{1R}$  não sofrerá qualquer mudança de fase em relação à onda incidente  $E_0$ . A onda refratada se propagará na película até encontrar a segunda interface, onde será refletida. Como a onda está vindo de um meio com índice de refração maior que o ar, a parte refletida sofrerá uma mudança de fase  $\delta = \pi$  em relação à onda incidente  $E_0$ . A onda refletida se propagará de volta na película até encontrar a primeira interface, onde será refratada dando origem à onda  $E_{2R}$ . Lembrando que não há mudanças de fase na refração, as ondas  $E_{1R}$  e  $E_{2R}$  terão, novamente, uma diferença de fase  $\delta = \pi$  entre si.

Isso mostra que, não importa qual seja a polarização da onda incidente, as ondas refletidas  $E_{1R}$  e  $E_{2R}$  adquirem uma diferença de fase adicional  $\delta = \pi$ , devido às reflexões nas interfaces. Essa diferença de fase deve ser adicionada à diferença de fase gerada pela diferença de caminho óptico percorrido pelas duas ondas, ao determinarmos as condições para interferência construtiva e destrutiva. Como uma diferença de fase  $\delta = \pi$  equivale a uma diferença de caminho óptico igual a  $\pm\lambda_0$ , nós incorporaremos a diferença de fase  $\delta$  na diferença de caminho óptico  $\Lambda$ , resultando na diferença de caminho óptico efetivo  $\Lambda_T$ :

$$\Lambda_T = \Lambda - \frac{\lambda_0}{2} = 2nd \cos \phi - \frac{\lambda_0}{2}. \quad (9.8)$$

Podemos, agora, anunciar as condições de máximos e mínimos da intensidade luminosa resultante da interferência entre  $E_{1R}$  e  $E_{2R}$ , como:

- Máximos de intensidade:

$$\Lambda_T = m\lambda_0; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.9)$$

- Mínimos de intensidade:

$$\Lambda_T = \left(2m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.10)$$

Essas condições podem ser escritas na forma final:

- Máximos de intensidade:

$$2nd \cos \phi = \left(2m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.11)$$

- Mínimos de intensidade:

$$2nd \cos \phi = m \lambda_0; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.12)$$

Devido à conservação da energia luminosa, a luz transmitida através da película terá máximos e mínimos complementares à luz refletida, ou seja, quando a intensidade refletida for máxima, a intensidade transmitida deve ser mínima e vice-versa. Assim, as condições de interferência construtiva e destrutiva para a luz transmitida serão dadas por:

- Máximos de intensidade:

$$2nd \cos \phi = m \lambda_0; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.13)$$

- Mínimos de intensidade:

$$2nd \cos \phi = \left(2m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.14)$$

Observe que as condições de máximos e mínimos para a intensidade refletida e transmitida dependem do comprimento de onda  $\lambda_0$  da onda incidente; da espessura  $d$ ; do índice de refração  $n$  da película e do ângulo de incidência  $\theta$ , através do ângulo de refração  $\phi$ . Se, por exemplo, a luz incidente for monocromática e proveniente de uma fonte puntiforme, essas condições especificarão, para uma dada espessura  $d$  da película, em quais ângulos de observação  $\theta$  (lembre-se de que  $\theta$  e  $\phi$  estão relacionados pela lei de Snell) a

intensidade da luz refletida será máxima ou mínima. Veja que existem vários ângulos de observação (correspondendo a diferentes valores de  $m$ ) para os quais a intensidade é máxima ou mínima. Se a luz incidente não for monocromática, dependendo do ângulo de observação, tanto a luz refletida como a luz transmitida serão predominantemente de uma dada cor (correspondendo aos diferentes valores de  $\lambda_0$  que satisfazem as condições de máximos e mínimos).

Em contrapartida, se o ângulo de observação e a espessura  $d$  da película forem fixos, as condições para máximos e mínimos nos informarão para quais comprimentos de onda  $\lambda_0$  da luz incidente a intensidade da luz refletida ou transmitida será máxima ou mínima. Observe que existem vários comprimentos de onda  $\lambda_0$  que satisfazem a essas condições, correspondendo aos diferentes valores de  $m$ . A seguir, discutiremos algumas aplicações desses resultados:

### 1. Películas anti-refletoras

Analisemos mais detalhadamente as Equações (9.11)-(9.14). Em particular, a condição para interferência construtiva na luz refletida é dada por:

$$2nd \cos \phi = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0 \quad ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.15)$$

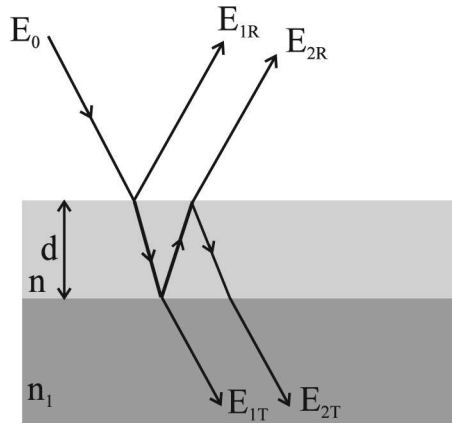
Podemos nos fazer a seguinte pergunta: quais são os valores de espessura  $d$  da película que produzirão interferências construtivas na luz refletida, para uma certa cor (ou seja, para um certo valor de  $\lambda_0$ )? Vamos partir de  $d = 0$  e aumentar gradativamente o seu valor. Para  $d = 0$ , sabemos que não há luz refletida, pois à medida que a espessura da película diminui, seu efeito deve se aproximar do que ocorre na sua ausência.

Ao aumentarmos lentamente  $d$ , o primeiro máximo que atingiremos corresponderá a  $m = 0$ . Vamos analisar o que ocorre para ângulos de observação próximos de zero,  $\theta \approx \phi \simeq 0$ , ou seja, quando o observador olha de frente para a película. Neste caso, o máximo de ordem zero acontecerá quando:

$$2nd = \frac{1}{2} \lambda_0 \quad \longrightarrow \quad d = \frac{\lambda_0}{4n}. \quad (9.16)$$

Isto é o que aconteceria se tivéssemos uma película solta no ar, ou seja, com ar dos dois lados. Mas, e se quisermos usar esta película para

alguma coisa, como, por exemplo, depositá-la em cima de um material transparente, como o vidro? Esta seria a situação apresentada pela **Figura 9.5**.



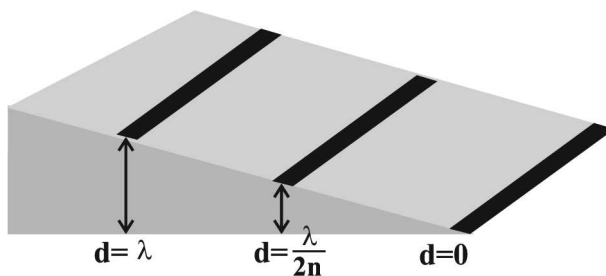
**Figura 9.5:** Reflexão em película delgada: presença de um segundo meio com  $n_1 > n > n_{ar}$ .

A película de índice de refração  $n$  está depositada em cima de um outro material transparente com um índice de refração  $n_1 > n$ . Temos, portanto, uma situação onde  $n_1 > n > n_{ar}$ . Neste caso, as condições de contorno para a reflexão na primeira interface são iguais às condições de contorno para a reflexão na segunda interface – nos dois casos a luz virá de um meio com índice de refração menor que o índice de refração do segundo meio. Logo, se  $E_{1R}$  ganhar uma fase adicional em relação a  $E_0$ , na primeira reflexão,  $E_{2R}$  ganhará a mesma fase devido à reflexão na segunda interface. Portanto, nunca haverá uma diferença de fase adicional entre  $E_{1R}$  e  $E_{2R}$ , devido às reflexões nas duas interfaces. Agora, a diferença de fase entre  $E_{1R}$  e  $E_{2R}$  será determinada somente pela diferença de caminho óptico percorrido pelas duas ondas. É fácil ver que, nessa situação, as relações que determinam os máximos e mínimos de interferência trocam seus papéis. A Equação (9.11) determinará, agora, as condições para os mínimos de intensidade na luz refletida e a Equação (9.11) determinará as condições para os máximos. Assim, quando tivermos uma película com espessura  $d = \lambda_0/4n$ , ao invés de termos uma interferência construtiva na luz refletida, passaremos a ter uma interferência destrutiva. Com isso a intensidade da luz refletida será mínima para o comprimento de onda  $\lambda_0$ , maximizando a transmissão da luz pela película.

A utilização de películas de espessura  $d = \lambda_0/4n$  é muito comum em lentes de óculos, lentes de máquinas fotográficas e, sobretudo, em lentes e outros dispositivos ópticos que são usados em laboratórios de pesquisa. Com estas películas, a reflexão fica drasticamente reduzida para certos comprimentos de onda (afinal, a espessura da camada depende de  $\lambda_0$ ), maximizando a transmissão de luz com esses comprimentos de onda. Quando aplicadas em óculos, câmeras fotográficas, filmadoras, etc. elas são também chamadas *películas anti-refletoras*. Você poderá verificar a existência deste tipo de película em objetos ópticos com os quais você tenha contato, notando que as superfícies que recebem este tipo de tratamento ficam azuladas, pois a transmissão é usualmente maximizada para o verde e o amarelo, que são comprimentos de onda centrais no espectro visível, fazendo com que a luz refletida tenha a predominância da cor complementar, de tom púrpura.

## 2. Franjas de igual espessura

Considere, agora, uma película delgada de índice de refração  $n$  e espessura variável, imersa no ar, como mostra a **Figura 9.6**.



**Figura 9.6:** Reflexão em película delgada: espessura variável – franjas de igual espessura.

Suponha que a luz incidente é monocromática, de comprimento de onda  $\lambda_0$ , e a observação da luz refletida seja feita em um ângulo  $\theta \approx \phi$  próximo de zero. Nesse caso, aplicando a condição para os mínimos de intensidade na luz refletida, dada pela Equação (9.12), veremos que a intensidade da luz refletida será mínima para as espessuras:

$$d = m \frac{\lambda_0}{2n} \quad ; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.17)$$

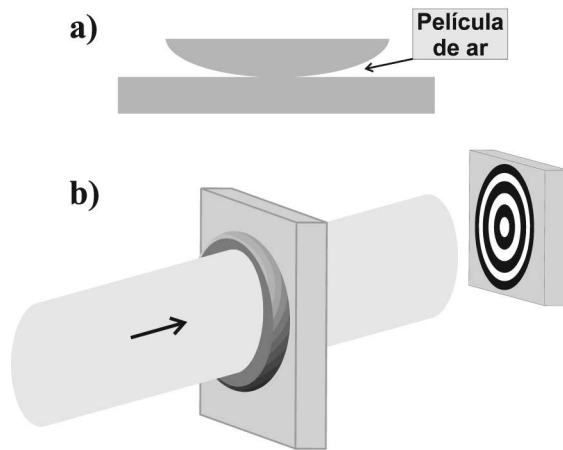
Assim, nas posições onde a lâmina atingir as espessuras  $d = 0$ ,  $d = \lambda_0/2n$ ,  $d = \lambda_0/n, \dots$  aparecerão franjas escuras na luz refletida, conhecidas como *franjas de igual espessura*. Elas recebem este nome porque



ao longo de cada franja escura, sabemos que a película tem sempre a mesma espessura, embora não saibamos eventualmente se esta espessura é  $d = \lambda/2n$  ou algum múltiplo deste valor. Note que, se você iluminar um material deste tipo com luz monocromática e de comprimento de onda conhecido (um laser por exemplo), você poderá determinar as regiões que têm espessuras que são múltiplos de  $\lambda_0/2n$ .

### 3. Anéis de Newton

Os anéis de Newton são franjas de igual espessura. Eles têm uma grande importância histórica e serviram como base para importantes discussões sobre a natureza da luz e também para a realização de medidas de comprimento de onda.



**Figura 9.7:** Transmissão em película delgada: (a) uma lente plano-convexa é colocada sobre uma superfície plana. (b) Simulação da passagem de um feixe de luz através do sistema lente + superfície plana, gerando os anéis de Newton.

Uma maneira de gerar os anéis de Newton, mostrada na **Figura 9.7**, é através da colocação de uma lente plano-convexa sobre uma placa plana transparente. Suponhamos que a lente e a placa transparente têm o mesmo índice de refração. Entre a lente e a placa, na região próxima ao ponto de contato da lente com a placa, forma-se uma película de ar com espessura variável. Veja a **Figura 9.7.a**. Neste caso, todo o tratamento matemático que fizemos anteriormente, continua valendo. O único detalhe é que a película neste caso tem o índice de refração menor do que o índice do *exterior*. Mesmo assim, as Equações (9.11)-(9.12) para reflexão e as Equações (9.13)-(9.14) para a transmissão continuam corretas. Na **Figura 9.7.b** representamos esquematicamente o que deveria acontecer com a luz transmitida através de um sistema lente +

placa plana. A distribuição de intensidades resultante, tem aparência de um alvo. As faixas claras representam as regiões de interferência construtiva na luz transmitida e as regiões escuras são os mínimos de interferência. Como os pontos de interferências construtivas na luz transmitida são dadas por  $2nd \cos \phi = m\lambda_0$ , na região frontal ( $\phi \simeq 0$ ) teremos um máximo para  $d = 0$ , que corresponde ao ponto de contato entre a lente e a placa plana. As outras regiões de igual espessura têm simetria circular, pelo fato de termos usado uma lente esférica.

### Exercício 9.2

As condições para máximos e mínimos de intensidade na luz refletida e transmitida, dadas, respectivamente, pelos conjuntos de Equações (9.11) - (9.12) e (9.13) - (9.14), foram derivadas para uma situação onde a película está entre dois meios, cujos índices de refração são menores que o índice de refração da película. Mostre que aquelas condições continuam válidas quando a película está entre dois meios, cujos índices de refração são *maiores* que o índice de refração da película.

**Sugestão:** com base na discussão apresentada sobre possíveis mudanças de fase na reflexão da luz ao encontrar uma interface separando dois meios de índices de refração diferentes, mostre que, também nessa situação, as ondas refletidas  $E_{1R}$  e  $E_{2R}$  adquirem uma diferença de fase  $\delta = \pi$ , devido às reflexões nas duas interfaces.

## 4. Outros efeitos

Em nosso dia-a-dia, podemos encontrar situações em que os efeitos da reflexão em película delgada são visíveis aos nossos olhos. Quando óleo é derramado em um piso molhado, às vezes temos a formação de uma fina película de óleo sobre a água. Neste caso a espessura da película pode variar muito ao longo de sua superfície, por isto a análise deste tipo de problema não é tão simples como os casos que discutimos anteriormente. Entretanto, sabemos que as cores que vemos refletidas pelas películas de óleo, estão relacionadas a máximos e mínimos de interferência. Muitas vezes, observamos faixas coloridas nestas películas. Estas faixas estão ligadas a franjas de igual espessura. Elas aparecem coloridas porque são resultado da reflexão de luz branca, contendo todas as cores do espectro visível. Quando temos uma franja de igual

espessura, uma das cores é suprimida por interferência destrutiva e a ausência de um certo comprimento de onda na luz branca, leva a cores chamadas *cores complementares*. Por exemplo, se partirmos da luz branca e filtrarmos os comprimentos de onda na região do azul, ficamos com uma luz amarela. Na reflexão pela película de óleo, são processos deste tipo que ocorrem e produzem as faixas coloridas.

As asas de borboletas e beija-flores também possuem cores que resultam de uma reflexão em película delgada. Na verdade as asas destes bichos são cobertas por uma película transparente de um material orgânico. A reflexão nesta película produz por interferência as cores observadas, que dependem do ângulo de observação.

### Exercício 9.3

Calcule a separação angular entre os dois máximos de interferência adjacentes correspondentes a  $m=1$  e  $m=2$ , para a reflexão em película delgada, em duas situações: a) Considere a espessura  $d = 2\mu m$ , o índice de refração  $n = 1,5$  e o comprimento de onda  $\lambda = 0,5\mu m$ .

b) Aumente a espessura para  $d = 20\mu m$  e mantenha todos os outros parâmetros do item a).

**Sugestão:** basta aplicar a Equação 9.11 para a condição de máximo.

### Exercício 9.4

Explique por que razão não observamos os efeitos de interferência em película delgada, em camadas espessas de material transparente.

**Sugestão:** apresente uma explicação com base na resolução angular necessária para se distinguir entre dois máximos adjacentes.

## Interferômetro de Michelson

Como acabamos de ver, o padrão de interferência entre duas ondas é sensível a variações mínimas da diferença de caminho óptico percorrido por elas. De fato, variações da diferença de caminho óptico da ordem do comprimento de onda  $\lambda_0$  dessas ondas, no vácuo, podem ser facilmente detectadas

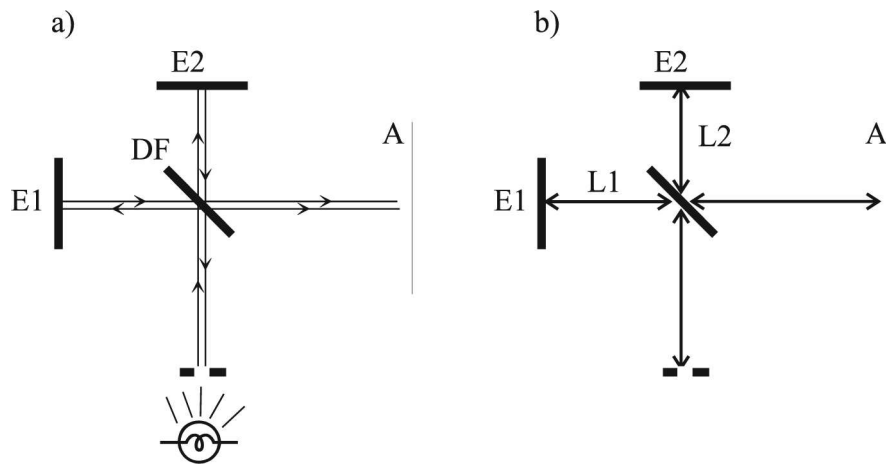
no padrão de interferência. Tal propriedade permite que se façam medidas extremamente sensíveis de pequenas variações de comprimentos e também de pequenos deslocamentos, fazendo uso da interferência entre ondas luminosas. Tais medidas são chamadas *medidas interferométricas* e os instrumentos usados para sua realização são chamados *interferômetros*.

Existem vários tipos de interferômetros. Cada um sendo mais adequado para um certo tipo de medida. Nós discutiremos aqui, brevemente, o *Interferômetro de Michelson*, dada sua importância histórica.

O interferômetro de Michelson foi concebido para testar a existência de um meio material de propagação para a luz. De fato, se todas as outras ondas conhecidas necessitavam de um meio de propagação, então, seria óbvio esperar que a luz também tivesse seu próprio meio. Este meio era chamado pelos cientistas da época de *Éter*. O *Éter* seria, então, o referencial especial onde valeriam as Equações de Maxwell, que prevêem que a velocidade da luz, no espaço vazio, tem módulo igual a  $c$  e é a mesma em todas direções.

Entretanto havia contradições ligadas à existência de um *Éter*, que não poderiam ser ignoradas. Por exemplo, todos sabiam que a luz se propagava no espaço interestelar, portanto, o *Éter* deveria, também, estar presente lá. Sabia-se também que um meio de baixa densidade seria incompatível com uma velocidade de propagação tão alta quanto a da luz, que já era conhecida. Se o *Éter* era denso, como os astros celestes se deslocavam livremente em suas respectivas órbitas?

Note que, se o *Éter* existisse como referencial privilegiado, seria possível detectar, por exemplo, o movimento da Terra em relação a ele, através de experiências de propagação da luz. Michelson projetou um experimento interferométrico com a luz, que permitiria detectar tal movimento, se o *Éter*, de fato, existisse.



**Figura 9.8:** (a) Desenho esquemático do interferômetro de Michelson. (b) Representação simplificada do interferômetro de Michelson mostrando as distâncias entre os espelhos, a fonte e o divisor de feixe.

Veja na **Figura 9.8.a** um desenho esquemático do interferômetro de Michelson. Um feixe de luz colimado é produzido pela fonte e enviado ao interferômetro. O feixe é separado em duas partes, através de um espelho semi-refletor (DF na **Figura 9.8**), ou seja, um espelho que reflete metade da luz incidente, transmite a outra metade e não absorve nada. Os dois novos feixes se propagam até os espelhos E1 e E2, respectivamente, e são refletidos de volta sobre si mesmos. Ao chegarem ao espelho semi-refletor fazendo o caminho de volta, os dois feixes se recombinaem e interferem. O padrão de interferência pode ser visto no anteparo A.

Repare que esse arranjo experimental tem características bastante similares à interferência em películas delgadas. Aqui também, uma onda luminosa inicial é dividida em duas outras que percorrem, cada uma, um percurso diferente até serem recombinadas e interferirem entre si.

As ondas que se propagam em cada um dos braços  $L1$  e  $L2$  do interferômetro são refletidas e transmitidas o mesmo número de vezes, durante todo seu percurso pelo interferômetro. Logo, não haverá uma diferença de fase entre elas devido às reflexões. Qualquer diferença de fase que possa existir entre as ondas, ao serem recombinadas, virá somente da diferença de caminho óptico percorrido por elas. Fazendo uso da **Figura 9.8.b**, é bastante simples determinar o caminho óptico percorrido por cada uma das ondas. Se o meio de propagação for o ar, o caminho óptico percorrido por cada onda será, simplesmente, dado pela distância percorrida por elas em cada braço do interferômetro. A distância percorrida pela onda que se propaga no braço

$L1$  é, simplesmente, o dobro do comprimento daquele braço, ou seja,  $2L1$ . Da mesma maneira, a distância percorrida pela outra onda é  $2L2$ . Portanto, a diferença de caminho óptico  $\Lambda$  percorrido pela duas ondas é dado por:

$$\Lambda = 2L1 - 2L2. \quad (9.18)$$

As condições de máximos e mínimos de intensidade serão, então:

- Máximos de intensidade:

$$2L1 - 2L2 = m\lambda_0; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.19)$$

- Mínimos de intensidade:

$$2L1 - 2L2 = \left(2m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.20)$$

onde  $\lambda_0$  é o comprimento de onda no vácuo da luz da fonte.

As Equações (9.19) e (9.20) mostram que o interferômetro de Michelson é capaz de detectar diferenças extremamente pequenas de caminho óptico entre os percursos feitos pela luz nos dois braços. A sensibilidade desse interferômetro pode ser avaliada, se você notar que a intensidade passa do seu valor máximo para zero, sempre que a diferença de caminho óptico fica igual à metade do comprimento de onda  $\lambda_0$ . Por exemplo, se o comprimento de onda da luz utilizada estiver na faixa do visível, entre 0,4 e 0,8  $\mu\text{m}$ , o interferômetro terá uma sensibilidade superior a meio micron. Isto, para medidas de deslocamento, já é considerado uma resolução muito boa.

Como é a diferença de caminho óptico que determina o valor da intensidade luminosa no anteparo, pode-se utilizar este interferômetro também para medir o índice de refração de gases. Se introduzirmos um recipiente de comprimento  $l$ , contendo um gás de índice de refração  $n$ , em um dos braços do interferômetro, digamos o braço  $L1$ , então o caminho óptico da luz que percorre esse braço será modificado. Lembre-se de que o caminho óptico da luz, ao percorrer uma certa distância em um meio de índice de refração  $n$ , é igual ao produto da distância percorrida pelo índice de refração do meio. Logo, o caminho óptico  $\Lambda_1$  percorrido pela luz no braço  $L1$  será modificado

para:  $\Lambda_1 = 2L_1 + 2l(n - 1)$ . Se compararmos o padrão de interferência da situação onde o recipiente com o gás foi inserido em uma dos braços do interferômetro com a situação sem o recipiente, poderemos determinar o valor do índice de refração  $n$  do gás.

Voltando ao problema da detecção do movimento da Terra em relação ao Éter, vejamos como Michelson usou seu interferômetro para tentar detectá-lo. A idéia é simples: neste interferômetro a trajetória do feixe de luz se divide em dois caminhos ortogonais, ou seja, cujas direções formam um ângulo de noventa graus entre si. Suponha que o planeta Terra se desloque em relação ao Éter, que preenche todo o universo, com velocidade  $\vec{V}$ . Como a velocidade da luz em relação ao Éter teria módulo  $c$  em qualquer direção, a velocidade luz medida no referencial da Terra dependeria do movimento relativo entre a Terra e o Éter. Suponha agora que a direção de  $\vec{V}$  seja paralela a um dos braços do interferômetro. Qualquer um deles serve, mas suponhamos que seja aquele que tem comprimento  $L_1$ . Se em seu percurso no braço  $L_1$ , ao se propagar em direção ao espelho  $E_1$ , a luz estiver se propagando no mesmo sentido de  $\vec{V}$ , sua velocidade em relação à Terra terá módulo  $c - V$ . Já em seu percurso de volta, sua velocidade em relação à Terra terá módulo  $c + V$ . Assim, a luz levará o tempo  $\Delta t_1 = 2L_1 c / (c^2 - V^2)$  para fazer o percurso de ida e volta no braço  $L_1$ .

Se a luz percorre uma certa distância em um meio de índice de refração arbitrário em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , o caminho óptico correspondente a esse percurso será dado por  $c\Delta t$ . Logo, o caminho óptico correspondente ao percurso da luz no braço  $L_1$  será  $\Lambda_1 = c\Delta t_1 = 2L_1 c^2 / (c^2 - V^2)$ .

No braço  $L_2$ , a luz se propaga em uma direção ortogonal a  $\vec{V}$ . Portanto, sua velocidade em relação à Terra será a mesma no percurso de ida e no percurso de volta, sendo igual a  $\sqrt{c^2 - V^2}$ . Por essa razão, o tempo de percurso nesse braço será  $\Delta t_2 = 2L_2 / \sqrt{c^2 - V^2}$ . Com isso, o caminho óptico da luz no braço  $L_2$  será  $\Lambda_2 = c\Delta t_2 = 2L_2 c / \sqrt{c^2 - V^2}$  e a diferença de caminho óptico  $\Lambda$  entre os feixes de luz que se propagam nos braços  $L_1$  e  $L_2$  será simplesmente  $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$ .

Suponha, agora, que o interferômetro, como um todo, seja girado de 90 graus. Nesse caso, os papéis dos braços  $L_1$  e  $L_2$  se inverterão. Agora  $L_2$  será paralelo à velocidade  $\vec{V}$  da Terra em relação ao Éter e  $L_1$  será perpendicular. Isso, no entanto, modificará o valor da diferença de caminho óptico  $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$ , levando a uma modificação no padrão de interferência no anteparo  $A$ . A comparação entre os padrões de interferência das duas configurações, permite, assim, detectar o movimento da Terra em relação ao Éter.

Essa experiência foi repetida muitas vezes, com diferentes orientações do interferômetro como um todo, por Michelson e depois, por Michelson e Morley, com certos aprimoramentos técnicos, e a presença do Éter não foi detectada. Além de refutar a existência de um meio de propagação para a luz, este experimento foi muito importante na elaboração da teoria da relatividade restrita. Isto será discutido no curso de Física 4B, ao estudarmos a teoria da relatividade.

## Conclusão

Nesta aula, você estudou a interferência da luz em películas delgadas de material transparente. Mostramos que, devido a múltiplas reflexões da luz nas interfaces que separam a película do meio que a rodeia, haverá interferência tanto na luz refletida como na luz transmitida pela película. Você viu que o padrão de interferência dependerá não só da diferença de caminho óptico entre os diversos feixes que constituem a luz refletida e a luz transmitida, como também de possíveis mudanças de fase da luz, ao ser refletida nas interfaces que separam a película de seu meio. Além disso, determinamos explicitamente o padrão de interferência da luz refletida e transmitida dependerá da espessura e do índice de refração da película, do comprimento de luz da luz incidente, do ângulo de incidência da luz e dos índices de refração dos meios que rodeiam a película. Você viu também algumas aplicações práticas desse fenômeno, como, por exemplo, o uso de filmes anti-refletores em óculos, lentes de máquinas fotográficas e outros sistemas ópticos. Finalmente, apresentamos e analisamos o interferômetro de Michelson e discutimos a sua utilização na comprovação da inexistência do Éter.

## Atividades Finais

1. Pegue um pequeno aro e mergulhe-o em um recipiente contendo uma mistura de água e sabão. Retire o aro, tomando cuidado para que uma lâmina da mistura de água e sabão fique presa a ele, e sustente-o verticalmente à luz do Sol. Você verá um padrão complexo de cores refletido na lâmina de água. Note que, um pouco antes da lâmina estourar, a parte superior da mesma será recoberta por uma mancha preta. Explique por que isso acontece.
2. Determine a relação entre as distâncias percorridas pela luz em dois meios com índices de refração diferentes, para que os caminhos ópticos correspondentes a esses percursos sejam iguais.



3. Faça a experiência de explicar a um familiar, de maneira detalhada, a causa do aparecimento do padrão complexo de cores em manchas de óleo sobre o asfalto molhado.

## Resumo

As múltiplas reflexões da luz nas interfaces que separam uma película transparente do meio que a rodeia são responsáveis pela interferência resultante tanto na luz refletida como na luz transmitida pela película. As intensidades da luz refletida e da luz transmitida são determinadas não apenas pela diferença de caminho óptico entre os vários feixes luminosos refletidos e transmitidos, mas também por possíveis mudanças de fase da luz nas múltiplas reflexões. O padrão de interferência resultante é determinado pela espessura e pelo índice de refração da película, pelo comprimento da luz incidente, pelo ângulo de incidência da luz e pelos índices de refração dos meios que rodeiam a película. O padrão de interferência no interferômetro de Michelson é determinado pela diferença de caminho óptico entre os feixes de luz que se propagam nos dois braços do interferômetro. Esse instrumento permite detectar mudanças de diferença de caminhos ópticos da ordem do comprimento da luz utilizada.

## E ao longo da próxima aula...

...iniciaremos o estudo da difração da luz. Um fenômeno que está intimamente relacionado ao fenômeno de interferência.



# Aula 10 – Experimentos com o interferômetro de Michelson

## Metas da aula

Realizar o experimento de Michelson de interferência da luz e desenvolver aplicações.

## Objetivos

Ao final desta aula, você terá alcançado os seguintes objetivos:

- Observação experimental das franjas de interferência com o interferômetro de Michelson.
- Medir o comprimento de onda do laser, através da contagem de franjas.
- Medir o índice de refração do ar.

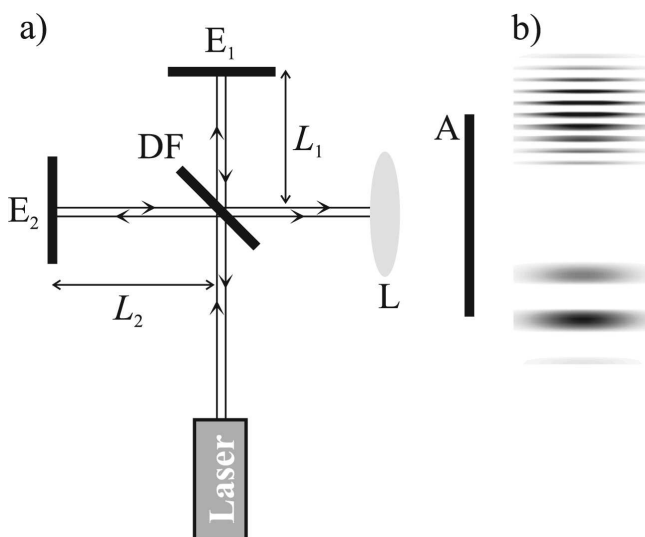
## Pré-requisitos

Para realizar as atividades experimentais propostas nesta aula, você precisará dos conceitos apresentados nas Aulas 8 e 9.

## Introdução

Como você aprendeu na Aula 9, o interferômetro de Michelson foi muito importante na discussão sobre a existência de um meio material para a propagação da luz. Além disto, ele acabou se tornando um instrumento para várias aplicações em Óptica. Esta grande utilidade está ligada à sua sensibilidade a pequenas variações de comprimentos e de índices de refração.

Na **Figura 10.1.a** temos uma representação esquemática de um interferômetro de Michelson.



**Figura 10.1:** Interferômetro de Michelson: (a) Esquema da montagem experimental; (b) padrões de interferência típicos, observados no anteparo A.

O feixe de laser se propaga até o divisor de feixe DF, que reflete metade da intensidade incidente em direção ao espelho  $E_2$ . A outra metade incide sobre o espelho  $E_1$ , que reflete o feixe incidente sobre si mesmo, assim como  $E_2$ .

Os dois feixes refletidos por  $E_1$  e  $E_2$  são recombinados pelo divisor de feixe DF, que nada mais é do que um espelho semitransparente. A recombinação dos feixes consiste apenas na superposição espacial deles. Entretanto, como são ondas eletromagnéticas, eles irão interferir e dar origem a franjas de interferência, mostradas na **Figura 10.1.b**, que dependem da diferença entre os caminhos  $L_1$  e  $L_2$  entre o divisor de feixes e os espelhos. A lente L é usada para ampliar o padrão de interferência observado no anteparo A.

A interferência será construtiva sempre que a diferença de caminho for igual a um número inteiro  $N$  de comprimentos de onda:

$$2L_2 - 2L_1 = N\lambda, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.1)$$

e será destrutiva quando a diferença de caminho for um múltiplo ímpar da metade do comprimento de onda:

$$2L_2 - 2L_1 = \frac{(2N + 1)\lambda}{2}, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.2)$$

Nestas duas equações,  $\lambda$  é o comprimento de onda no meio onde a luz se propaga. Ele está relacionado ao comprimento de onda no vácuo  $\lambda_0$  pela relação

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}, \quad (10.3)$$

onde  $n$  é o índice de refração do meio.

Podemos combinar as Equações (10.1) e (10.3) para escrever a condição para interferência construtiva na forma

$$2nL_2 - 2nL_1 = N\lambda_0, \quad N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.4)$$

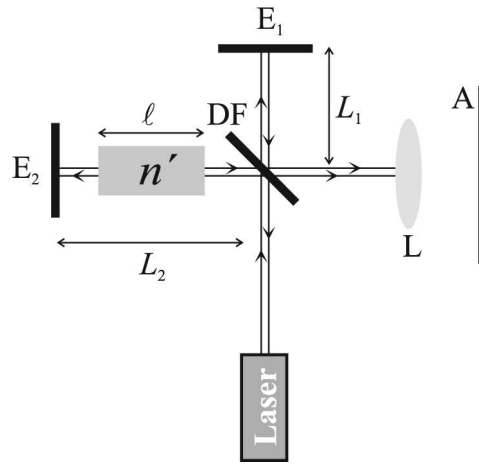
O produto do índice de refração pelo comprimento é chamado *caminho óptico*. A Equação (10.4) mostra que a interferência é construtiva quando a diferença entre os caminhos ópticos é um múltiplo inteiro do comprimento de onda no vácuo  $\lambda_0$ .

No experimento descrito pela **Figura 10.1.a**, o meio é o ar, cujo índice de refração  $n$  é muito próximo da unidade. Portanto, pela Equação (10.3), a diferença entre os valores de  $\lambda$  e  $\lambda_0$  é muito pequena e certamente menor do que o erro experimental. Assim, podemos desprezá-la ao fazer a análise dos experimentos desta aula.

## Medindo índices de refração

De acordo com a Equação (10.4), a condição de interferência construtiva depende do índice de refração do meio onde a luz se propaga em cada um dos dois braços do interferômetro. Podemos usar esta propriedade para medir o índice com ótima precisão.

Vamos analisar o seguinte arranjo experimental. Colocamos um objeto transparente de comprimento  $\ell$  e índice de refração  $n'$  em um dos braços do interferômetro, por exemplo no braço associado ao espelho  $E_2$ . No outro braço, em todo o percurso a luz se propaga no ar, cujo índice de refração  $n$  é muito próximo da unidade. Veja a **Figura 10.2**.



**Figura 10.2:** Medida do índice de refração com o interferômetro de Michelson.

Quanto vale o caminho óptico no braço associado ao espelho  $E_2$ ? Note que para o trecho em que a luz se propaga no interior do objeto, a contribuição para o caminho óptico vale  $2n'\ell$ . Para obter o caminho óptico total, somamos a este valor a contribuição da propagação no ar. Portanto, o caminho óptico vale  $2n'\ell + 2n(L_2 - \ell)$ . A interferência será construtiva quando a diferença entre os caminhos ópticos correspondentes a cada braço do interferômetro for um múltiplo inteiro de  $\lambda_0$  :

$$2n'\ell + 2n(L_2 - \ell) - 2nL_1 = N'\lambda_0, \quad N' = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10.5)$$

Suponha que comecemos com o arranjo da **Figura 10.1.a** (sem o objeto de índice  $n'$ ) numa situação em que tenhamos interferência construtiva, de forma que os comprimentos satisfaçam a Equação (10.4). Ao colocar o objeto transparente de índice  $n'$  num dos braços do interferômetro, como mostrado na **Figura 10.2**, alteramos o caminho óptico neste braço, e a condição para interferência construtiva passa a ser dada pela Equação (10.5). Suponha que esta condição também seja satisfeita. Assim, combinando as Equações (10.4) e (10.5), obtemos

$$2(n - n')\ell = (N - N')\lambda_0. \quad (10.6)$$

A diferença entre os números inteiros  $\Delta N = N' - N$  representa o número de franjas que passam na imagem obtida no anteparo (veja a **Figura 10.1.b**) ao inserirmos o objeto no braço do interferômetro. Vamos utilizar esta relação para medir o índice de refração do ar.

## Alinhamento do interferômetro

Comece direcionando o feixe que sai do laser para o espelho  $E_2$ . Ajuste o espelho para que o feixe volte sobre si mesmo. Em seguida, coloque o cubo divisor de feixes no caminho do feixe do laser, de tal maneira que a direção do feixe refletido forme um ângulo de cerca de 90 graus com o feixe incidente. Coloque então o espelho  $E_1$  fazendo com que ele reflita também o feixe refletido pelo cubo, de volta sobre si mesmo. Neste momento você verá os dois feixes que saem pela porta livre do divisor de feixes. Faça um ajuste inicial dos espelhos  $E_1$  e  $E_2$  para que os feixes se superponham, sem colocar a lente. Somente após este ajuste inicial, insira a lente para expandir o feixe e visualizar as franjas transversais.

Note que, na teoria, não consideramos as interferências transversais para este experimento, pois tratamos os feixes como se eles fossem ondas planas. Como, na prática, os feixes têm uma área finita, teremos franjas transversais como as mostradas na **Figura 10.1.b**. Elas nos ajudam com o alinhamento do interferômetro, pois quando a frequência espacial é alta, sabemos que o alinhamento está ruim. Quando as franjas se alargam, ou seja, as oscilações espaciais têm frequência espacial baixa, sabemos que o alinhamento está bom. Idealmente teríamos uma distribuição uniforme na saída do interferômetro, mas na prática, se visualizarmos cerca de duas franjas claras, estaremos bem próximos do alinhamento ótimo e já podemos trabalhar.

### Procedimento experimental: medida do comprimento de onda

1. Use o deslocador automático para movimentar o espelho  $E_1$  e veja que as franjas claras se tornam escuras e vice-versa. Para cada deslocamento  $\Delta x$  anote o número de franjas  $\Delta N$  que passam, ou seja, quantas vezes uma franja clara ficou escura e voltou a ser clara.

### Procedimento experimental: medida do índice de refração

1. Coloque a cubeta acoplada à bomba de vácuo manual em um dos braços do interferômetro. Realinhe o sistema, garantindo a visualização das franjas de interferência.

2. Com auxílio da bomba, reduza a pressão na cubeta, contando o número de franjas que passam  $\Delta N$ , para cada variação de pressão  $\Delta P$ .

### Análise dos dados

1. Escreva as equações que relacionam a diferença de caminho e o comprimento de onda, no interferômetro de Michelson.
2. Apresente os resultados das suas medidas de passagem de franjas em função do deslocamento do espelho, na forma de uma tabela contendo colunas para  $\Delta N$  e  $\Delta x$ .
3. Faça um gráfico de  $\Delta N$  em função de  $\Delta x$ . Além dos pontos experimentais, o seu gráfico deve incluir a reta que mais se aproxima dos pontos. A partir deste gráfico, obtenha o comprimento de onda do laser.
4. Apresente os resultados das suas medidas de passagem de franjas em função da pressão na cubeta, na forma de uma tabela contendo colunas para  $\Delta N$  e  $\Delta P$ .
5. Faça um gráfico de  $\Delta N$  em função de  $\Delta P$ . Além dos pontos experimentais, o seu gráfico deve conter a reta que mais se aproxima dos pontos. Obtenha, a partir desta reta, o valor de  $\Delta N$  para  $\Delta P = 900$  mmHg, que seria o número total de franjas que passariam se conseguíssemos fazer vácuo absoluto na cubeta.
6. Usando a Equação (10.6), mostre que o índice de refração do ar  $n$  pode ser obtido a partir do valor de  $\Delta N$  obtido no item anterior, do comprimento de onda  $\lambda \approx \lambda_0$ , do comprimento da cubeta  $\ell$  e do índice de refração do vácuo, através da relação:

$$n = \frac{\Delta N \lambda}{2\ell} + n' \quad (10.7)$$

7. Calcule o índice de refração do ar a partir dos seus dados e da Equação (10.7). Note que o índice de refração do vácuo vale, por definição,  $n' = 1$ .

### E na próxima aula...

...você irá iniciar o estudo do efeito de difração.



# Aula 11 – Difração de Fraunhofer

## Metas da aula

Apresentar o princípio de Huygens-Fresnel e a aproximação de Fraunhofer. Aplicar a difração de Fraunhofer ao problema da abertura retangular.

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Estabelecer os limites de validade da teoria de difração de Fraunhofer.
- Aplicar a teoria de difração de Fraunhofer para o caso de difração por uma abertura retangular.

## Pré-requisito

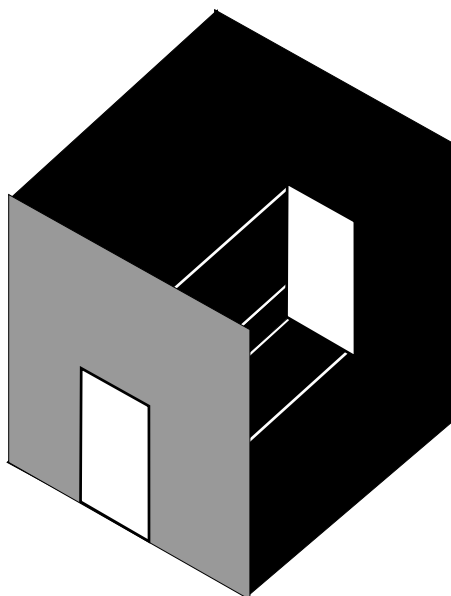
O pré-requisito para esta aula é ter lido e compreendido as quatro aulas anteriores, em que você estudou o efeito de interferência.

## Introdução

Do ponto de vista histórico, os conceitos de interferência e difração evoluíram paralelamente dentro do contexto da discussão sobre a natureza da luz e de suas propriedades de propagação e interação com a matéria. Pelo nosso curso, já ficamos conhecendo efeitos devidos à interferência da luz. Em nossos estudos sobre interferência, calculamos o campo elétrico de um feixe de luz em um ponto do espaço, como uma função de pelo menos outros dois campos iniciais, que se propagavam até o ponto de observação. Você viu também que o resultado final dependia das diferenças de fase entre os campos que interferiam e que estas diferenças de fase eram dadas essencialmente pela diferença de caminho entre as origens dos campos e o ponto de observação.

Para estudar a difração, adotaremos um procedimento semelhante, mas em vez de levar em conta a interferência de dois campos, consideraremos as contribuições de muitos campos para o resultado final. A motivação para o estudo da difração vem da observação de que quando a luz passa através de aberturas pequenas, após a propagação por uma distância suficientemente grande, a imagem formada em um anteparo não corresponde à forma da

abertura. Em nossa experiência diária, verificamos exatamente o oposto. Veja, por exemplo, a **Figura 11.1**.



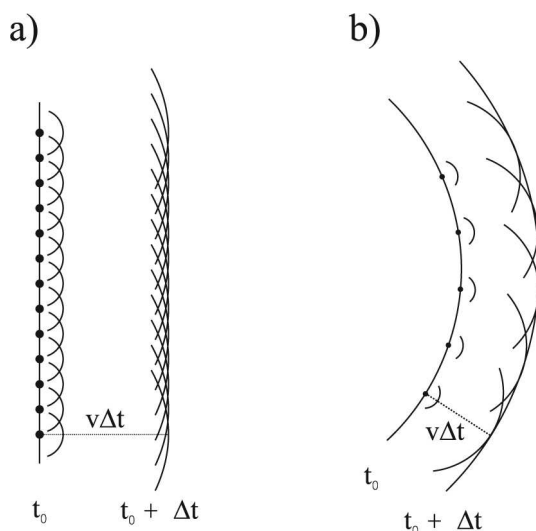
**Figura 11.1:** A luz atravessando uma porta aberta produz uma região clara, que tem a forma da porta, em um quarto escuro.

A luz que entra por uma porta aberta, para dentro de um quarto escuro, produz uma região iluminada que tem a forma da porta. Analisando este caso, que representa a maioria das nossas experiências do dia-a-dia, temos a tendência a acreditar que um feixe de luz tem apenas duas opções ao encontrar uma parede opaca com uma abertura: a luz é transmitida na parte aberta ou não é transmitida, sendo absorvida e/ou refletida na parte opaca.

Entretanto, ao analisar as situações em que a abertura é suficientemente pequena, da ordem de uma fração de milímetro ou menor, percebemos que a região iluminada no anteparo pode ter uma forma bem diferente da forma da abertura. Este efeito é conhecido como difração da luz, e a palavra difração está ligada à idéia de desvio. Ao observar uma figura de difração, ficamos com a impressão de que a luz sofreu desvios nas bordas da abertura. A seguir, você verá como este processo funciona.

## Princípio de Huygens-Fresnel

Já discutimos o princípio de Huygens na Aula 8. Como você viu, dada uma frente de onda em um certo plano do espaço, podemos prever a forma da frente de onda em um plano posterior por meio deste princípio. Veja a **Figura 11.2**:



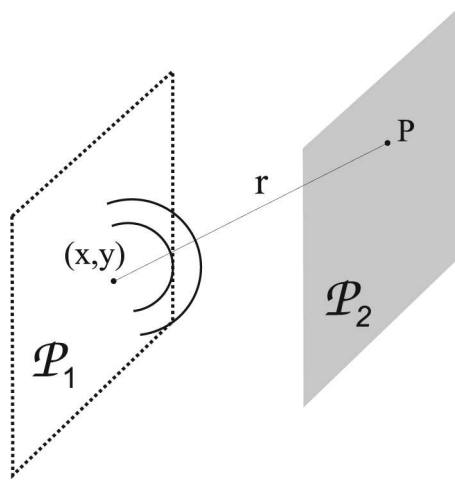
**Figura 11.2:** Ilustração esquemática da evolução de uma frente de onda (a) plana e (b) esférica, de acordo com o princípio de Huygens.

Para saber como a frente de onda se propaga, supomos que cada ponto dela dará origem a uma onda esférica secundária. A onda no plano posterior será dada pela envoltória associada ao conjunto das ondas secundárias, como ilustra a **Figura 11.2**.

Vamos expressar este princípio matematicamente, usando o conceito de *superposição* de ondas secundárias. Dessa forma, o efeito de propagação de ondas se torna semelhante ao problema de interferência que você estudou nas Aulas 8, 9 e 10. Ao incorporar o conceito de superposição, este princípio passa a se chamar princípio de Huygens-Fresnel, devido à importante contribuição de Augustin Fresnel.

Assim como no estudo da interferência, vamos desprezar os efeitos da polarização da luz. Portanto, o campo elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  associado à luz, de comprimento de onda  $\lambda$ , será representado por uma grandeza escalar  $\Psi(\vec{r})$ , que contém a dependência espacial de uma dada componente cartesiana de  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ . Vamos também omitir a dependência temporal, que é da forma  $e^{-i\omega t}$ .

Suponha, então, que  $\Psi(x, y)$  seja conhecido em todos os pontos  $(x, y)$  de um plano  $\mathcal{P}_1$  perpendicular ao eixo  $z$ . Cada ponto  $(x, y)$  deste plano é fonte de uma onda esférica cuja amplitude é proporcional a  $\Psi(x, y)$ , como ilustra a **Figura 11.3**:



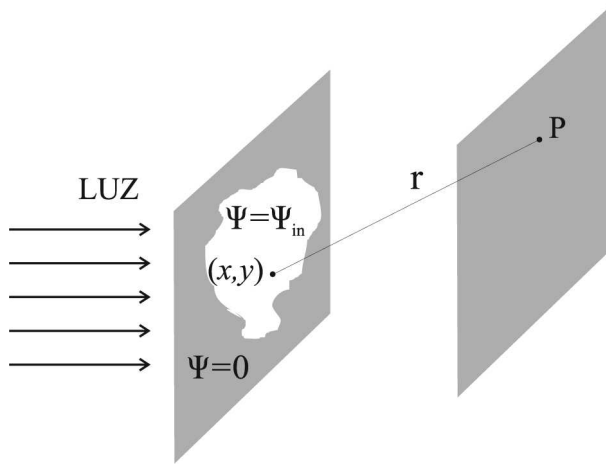
**Figura 11.3:** Plano  $\mathcal{P}_1$  das fontes de ondas esféricas e ponto P onde se pretende obter o valor do campo após a propagação.

Para obter o campo no ponto P de um plano posterior  $\mathcal{P}_2$ , basta somar (ou superpor) as contribuições das ondas esféricas provenientes de cada ponto do plano  $\mathcal{P}_1$ . Como as coordenadas dos pontos variam continuamente, esta soma (ou superposição) é, na verdade, dada pela seguinte integral sobre o plano  $\mathcal{P}_1$ :

$$\Psi(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \Psi(x, y) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (11.1)$$

onde  $r$  é a distância entre o ponto  $(x, y)$ , fonte da onda esférica, e o ponto de observação P, no plano posterior  $\mathcal{P}_2$ , como mostra a **Figura 11.3**. Observe que  $e^{ikr}/r$  representa o fator de propagação da onda esférica a partir do ponto  $(x, y)$  até o ponto P, onde  $k = 2\pi/\lambda$  é o número de onda.

Na situação física que nos interessa aqui, uma onda incide sobre um plano opaco contendo uma abertura, como mostra a **Figura 11.4**. Quando o comprimento de onda  $\lambda$  é muito menor do que as dimensões da abertura, podemos supor que o campo é *nulo* em todos os pontos ocupados pelo anteparo opaco, e igual ao campo incidente  $\Psi_{\text{in}}$  na região da abertura.



**Figura 11.4:** Difração por uma abertura na aproximação de Kirchhoff.

Esta é a chamada aproximação de Kirchhoff, que permite obter o campo difratado pela abertura a partir do princípio de Huygens-Fresnel, tomando, como o plano de fontes  $\mathcal{P}_1$ , o próprio plano que contém a abertura, que aparece na **Figura 11.4**. Para calcular a integral da Equação (11.1) nessa aproximação, basta substituir o valor do campo  $\Psi(x, y)$  pelo campo incidente  $\Psi_{\text{in}}(x, y)$  nos pontos da abertura, e por zero nos pontos do anteparo opaco. Com isto, obtemos

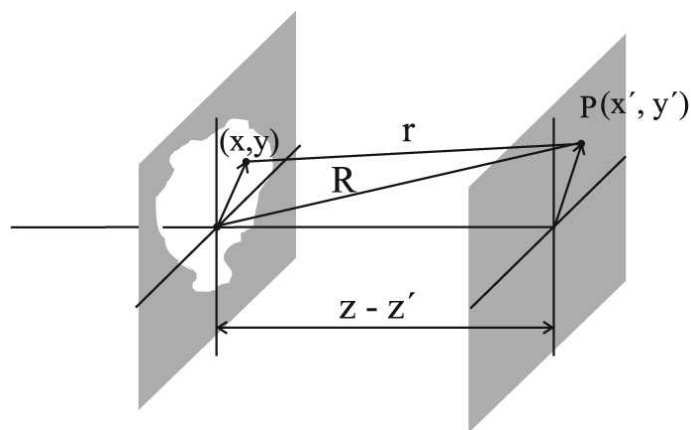
$$\Psi(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\text{abertura}} dx dy \Psi_{\text{in}}(x, y) \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (11.2)$$

onde agora a integral é apenas sobre a região da abertura, e não mais sobre todo o plano  $\mathcal{P}_1$ .

## Difração de Fraunhofer

Para calcular a integral na Equação (11.2), é conveniente definir dois sistemas de coordenadas, como mostrado na **Figura 11.5**: um sistema no plano da abertura com coordenadas  $(x, y)$  e outro sistema no plano de observação, onde o ponto P tem coordenadas  $(x', y')$ . A distância entre a origem do plano da abertura e o ponto de observação P é  $R$ .

Note que o integrando depende da distância  $r$  entre cada ponto na região da abertura e o ponto de observação, tanto através do termo de fase (a exponencial complexa) como através do denominador. O cálculo da integral é dificultado pela presença desta distância.



**Figura 11.5:** Plano da abertura e plano de observação contendo o ponto P onde se pretende obter o valor do campo na aproximação de Fraunhofer.



#### Joseph von Fraunhofer

nasceu no ano de 1787, em Straubing, Bavária (Alemanha). Seu interesse pela Ótica foi iniciado quando foi trabalhar numa fábrica em Munique. Descobriu novos métodos de fabricação de lentes, e trabalhou no desenvolvimento de telescópios, microscópios e outros instrumentos óticos, obtendo, para esse fim, importantes resultados teóricos. Também é muito conhecido pelas suas contribuições à área de Espectroscopia.

Esta dificuldade pode ser reduzida em determinadas situações, nas quais empregamos a aproximação de **Fraunhofer**. Nesta aproximação, fazemos o seguinte:

$$\text{substituímos } r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad (11.3)$$

por uma expressão aproximada mais simples:

$$r \approx R - x(x'/R) - y(y'/R), \quad (11.4)$$

Veja a seguir como e quando é possível fazer esta substituição.

Na difração de Fraunhofer, a abertura é muito pequena quando comparada com a distância entre o plano da abertura e o plano de observação. Isto significa que os valores assumidos por  $x$  e  $y$  no cálculo da integral na Equação (11.2) serão sempre muito menores do que  $R$ . Nestas condições, podemos usar a aproximação de Fraunhofer. Esta é mais uma aproximação, que será utilizada para calcular a integral da Equação (11.2), que, por sua vez, resultou da aproximação de Kirchhoff. É importante ressaltar o fato de que na maioria das situações em que a difração é importante, podemos usar simultaneamente as duas aproximações.

**Exercício 11.1**

Mostre que podemos escrever a distância  $r$  entre um ponto qualquer na fonte, com coordenadas  $(x, y)$  e o ponto  $P$  no plano posterior, com coordenadas  $(x', y')$ , da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \\ &= R \sqrt{1 + \frac{(x^2 - 2xx')}{R^2} + \frac{(y^2 - 2yy')}{R^2}}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

**Solução:** vamos partir da expressão

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}, \quad (11.6)$$

e efetuar os quadrados nas coordenadas  $x, x', y, y'$ :

$$r = \sqrt{(x^2 - 2xx' + x'^2) + (y^2 - 2yy' + y'^2) + (z - z')^2}.$$

Agora, vamos separar os termos em  $x'^2, y'^2$ :

$$r = \sqrt{(x^2 - 2xx') + (y^2 - 2yy') + x'^2 + y'^2 + (z - z')^2}.$$

Pela **Figura 11.5**, temos:  $R^2 = x'^2 + y'^2 + (z - z')^2$ ,

$$\Rightarrow r = \sqrt{(x^2 - 2xx') + (y^2 - 2yy') + R^2}.$$

Fatorando  $R$  nesta expressão, obtemos o resultado desejado.

É interessante escrever  $r$  na forma:

$$r = R \sqrt{1 + \frac{(x^2 - 2xx')}{R^2} + \frac{(y^2 - 2yy')}{R^2}}, \quad (11.7)$$

porque assim temos os ingredientes necessários para fazer uma expansão em série da raiz quadrada e truncar a série no segundo termo. Esta abordagem funciona desde que

$$\frac{(x^2 - 2xx')}{R^2} \ll 1 \text{ e } \frac{(y^2 - 2yy')}{R^2} \ll 1. \quad (11.8)$$

Como estes termos são muito menores do que a unidade, podemos usar o seguinte resultado para expansão em série de Taylor (teorema binomial):

$$\sqrt{1 + \delta} = (1 + \delta)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{8}\delta^2 + \dots \quad (11.9)$$

Na série da Equação (11.9), se  $\delta \ll 1$ , os termos em  $\delta^2$  e potências maiores serão insignificantes e, como uma ótima aproximação, podemos ficar apenas com os dois primeiros termos. Tomando

$$\delta = \frac{(x^2 - 2xx')}{R^2} + \frac{(y^2 - 2yy')}{R^2},$$

podemos aplicar este resultado para a nossa função  $r$  dada pela Equação (11.7):

$$\begin{aligned} r &= R \sqrt{1 + \frac{(x^2 - 2xx')}{R^2} + \frac{(y^2 - 2yy')}{R^2}}, \\ r &\approx R \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 2xx')}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{(y^2 - 2yy')}{R^2} \right), \\ r &\approx R + \frac{1}{2} \frac{(x^2 - 2xx')}{R} + \frac{1}{2} \frac{(y^2 - 2yy')}{R}, \\ r &\approx R + \frac{x^2}{2R} - \frac{xx'}{R} + \frac{y^2}{2R} - \frac{yy'}{R}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Agora, uma última consequência da nossa aproximação: os termos quadráticos  $x^2/2R$  e  $y^2/2R$  são muito pequenos e podem ser desprezados. Assim, ficamos apenas com:

$$r \approx R - x \frac{x'}{R} - y \frac{y'}{R}. \quad (11.11)$$



Vejamos como fica agora a nossa Equação (11.2), ao substituir esta nova expressão para  $r$ :

$$\Psi(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\text{abertura}} \Psi_{\text{in}}(x, y) \frac{e^{ikr}}{r} dx dy, \quad (11.12)$$

$$\Psi(P) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\text{abertura}} \Psi_{\text{in}}(x, y) \frac{e^{ik(R - x\frac{x'}{R} - y\frac{y'}{R})}}{R - x\frac{x'}{R} - y\frac{y'}{R}} dx dy,$$

o termo exponencial em  $R$  pode sair da integral:

$$\Psi(P) = \frac{e^{ikR}}{i\lambda} \int_{\text{abertura}} \Psi_{\text{in}}(x, y) \frac{e^{-ik(x\frac{x'}{R} + y\frac{y'}{R})}}{R - \frac{xx'}{R} - \frac{yy'}{R}} dx dy.$$

Fatorando  $R$  no denominador:

$$\Psi(P) = \frac{e^{ikR}}{i\lambda R} \int_{\text{abertura}} \Psi_{\text{in}}(x, y) \frac{e^{-ik(x\frac{x'}{R} + y\frac{y'}{R})}}{1 - \frac{xx'}{R^2} - \frac{yy'}{R^2}} dx dy. \quad (11.13)$$

As parcelas  $xx'/R^2$  e  $yy'/R^2$  que aparecem no denominador da Equação (11.13) são muito menores do que a unidade e, portanto, podem ser desprezadas. Por outro lado, o argumento da exponencial nesta mesma equação,  $-i(kxx' + kyy')/R$ , tem módulo da ordem da unidade e não pode ser aproximado por zero. Assim, obtemos a expressão final da difração de Fraunhofer:

$$\Psi(P) = \frac{e^{ikR}}{i\lambda R} \int_{\text{abertura}} \Psi_{\text{in}}(x, y) e^{-ik(x\frac{x'}{R} + y\frac{y'}{R})} dx dy, \quad (11.14)$$

### Exercício 11.2

Teste a validade da aproximação de Fraunhofer para os seguintes parâmetros: distância entre o plano da abertura e o plano de observação  $R = 1\text{m}$ , maior dimensão da abertura  $x_{\text{max}} = 0,5\text{mm}$ , maior dimensão no plano de observação  $x'_{\text{max}} = 5\text{cm}$ .

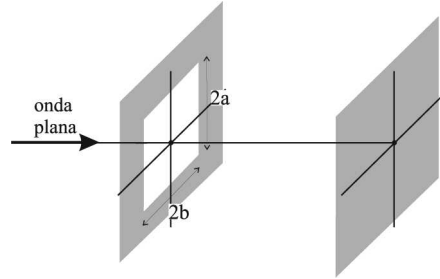
**Sugestão:** calcule os valores dos termos em  $\delta$ ,  $\delta^2$  e  $\delta^3$  da expansão em série dada pela Equação (11.9).

### Aplicações: difração por uma abertura retangular

Vamos agora utilizar o resultado da Equação (11.14) para o caso em que uma onda plana, dada por (omitindo a dependência temporal)

$$\Psi_{\text{in}}(x, y, z) = A_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} \quad (11.15)$$

incide sobre um plano opaco com uma abertura de forma retangular, com lados  $2a$  e  $2b$ . Veja a **Figura 11.6**:



**Figura 11.6:** Difração por uma abertura retangular de largura  $2b$  e altura  $2a$ .

Supondo que o plano da abertura tem coordenada  $z = 0$ , podemos calcular o valor do campo incidente no ponto  $(x, y)$  da abertura a partir da Equação (11.15):

$$\Psi_{\text{in}}(x, y) = A_0 e^{i(k_{0x}x + k_{0y}y)}, \quad (11.16)$$

onde  $k_{0x}$  e  $k_{0y}$  são as componentes cartesianas do vetor de onda  $\vec{k}_0$  da onda plana incidente.

Vamos calcular aqui a difração para o caso de incidência normal da onda plana. Você irá examinar o caso mais geral, de incidência oblíqua, na Atividade Final 9.

Para incidência normal, as componentes  $k_{0x}$  e  $k_{0y}$  serão nulas, e o campo na abertura será uniforme:  $\Psi(x, y) = A_0$ . Substituindo este valor na Equação (11.14), obtemos:

$$\Psi(P) = \frac{e^{ikR}}{i\lambda R} \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy A_0 e^{-ik(x\frac{x'}{R} + y\frac{y'}{R})}. \quad (11.17)$$

$A_0$  é constante e pode ser retirada da integral. Ficamos apenas com:

$$\Psi(P) = \frac{A_0 e^{ikR}}{i\lambda R} \int_{-a}^a dx e^{-ik\frac{x'}{R}x} \int_{-b}^b dy e^{-ik\frac{y'}{R}y}. \quad (11.18)$$

**Exercício 11.3**

Resolva a integral

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-i\beta x} dx \quad (11.19)$$

**Solução:**

$$I = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-i\beta x} dx = \left. \frac{e^{-i\beta x}}{-i\beta} \right|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{e^{-i\beta\alpha} - e^{+i\beta\alpha}}{-i\beta} = \frac{2\text{sen}\beta\alpha}{-i\beta}. \quad (11.20)$$

Temos duas integrais do mesmo tipo, cuja solução é dada pela Equação (11.20). Aplicando este resultado com  $\alpha = a$  e  $\beta = kx'/R$  na primeira e  $\alpha = b$  e  $\beta = ky'/R$  na segunda, obtemos:

$$\Psi(P) = A_0 \frac{e^{ikR}}{i\lambda R} \frac{2\text{sen}(\frac{kx'a}{R})}{-i(kx'/R)} \frac{2\text{sen}(\frac{ky'b}{R})}{-i(ky'/R)}. \quad (11.21)$$

Pronto! Está calculado o campo em um plano, depois que uma onda plana atravessa uma abertura retangular e sofre a difração de Fraunhofer. Você fará este experimento no pólo e verá como esta aproximação funciona bem. De qualquer modo, em um experimento com luz, não medimos a amplitude do campo, mas sim a intensidade luminosa. A intensidade é proporcional ao quadrado do campo. Em geral, nos experimentos de interferência e difração, estamos interessados nas variações da intensidade e não no seu valor absoluto. Portanto, basta calcular uma intensidade relativa, que é obtida dividindo o módulo quadrado do campo no plano de observação pelo módulo quadrado do campo no plano da abertura, que é simplesmente  $|A_0|^2$ :

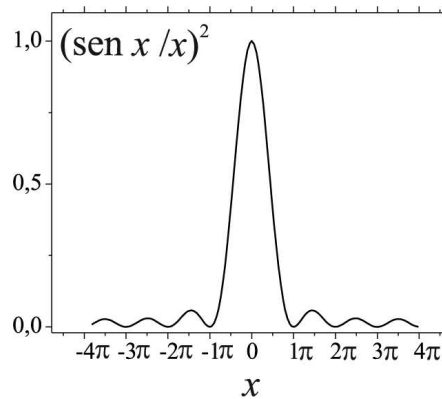
$$\frac{I(P)}{I_0} = \frac{|A_0|^2 |e^{ikR}|^2}{|A_0|^2 \lambda^2 |R|^2} \left| \frac{2\text{sen}(\frac{kx'a}{R})}{-i(kx'/R)} \frac{2\text{sen}(\frac{ky'b}{R})}{-i(ky'/R)} \right|^2. \quad (11.22)$$

Vamos fazer uma “limpeza” nesta equação. Os termos em  $|A_0|^2$  se cancelam, o módulo ao quadrado de uma exponencial complexa vale sempre 1:  $|e^{ikR}|^2 = 1$ , assim como o módulo ao quadrado de  $-i$ . Para auxiliar a análise das propriedades da função dada pela Equação (11.22), vamos multiplicar e dividir pelos comprimentos  $a$  e  $b$ , de tal forma que o argumento dos senos e os denominadores fiquem iguais. Veja:

$$\frac{I(P)}{I_0} = \frac{1}{\lambda^2 |R|^2} \left| \frac{2a \sin\left(\frac{kx'a}{R}\right)}{\left(\frac{kx'a}{R}\right)} \right|^2 \left| \frac{2b \sin\left(\frac{ky'b}{R}\right)}{\left(\frac{ky'b}{R}\right)} \right|^2, \quad (11.23)$$

onde o fator  $1/R^2$  mostra que à medida que nos afastamos do plano da abertura, a intensidade cai com o quadrado da distância.

Vamos agora fazer o gráfico destas funções, para saber como será a nossa figura de difração, quando fizermos a experiência. Como as variáveis de posição no plano da abertura são  $x'$  e  $y'$ , podemos ver por meio da Equação (11.23), que tanto ao longo do eixo  $x'$  quanto do eixo  $y'$ , teremos duas funções do tipo  $(\sin x/x)^2$ , cujo gráfico é mostrado na **Figura 11.7**:



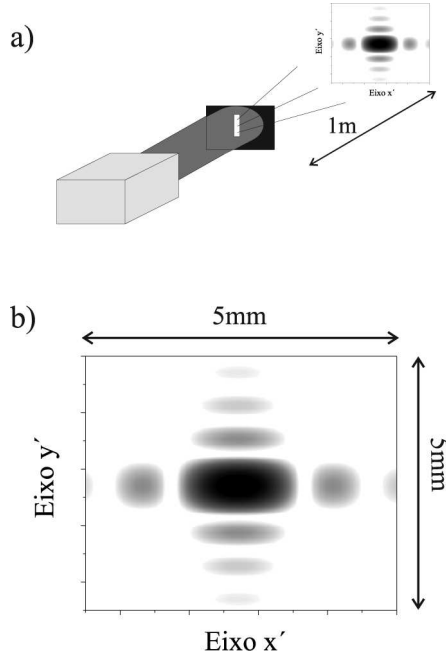
**Figura 11.7:** Gráfico da função  $(\sin x/x)^2$ .

Note que a função  $(\sin x/x)^2$  não estaria, a princípio, bem definida para  $x = 0$ . Entretanto, pode-se mostrar que o limite desta função quando  $x \rightarrow 0$  vale 1, o que está em acordo com o gráfico da **Figura 11.7**. Este é o valor máximo da função e, portanto, a intensidade difratada é máxima para  $x' = y' = 0$ , que corresponde ao centro da figura de difração (intersecção entre o eixo  $z$  e o anteparo de observação).

Para simular a figura de difração por uma abertura retangular, é preciso fazer um gráfico tridimensional. Veja, na **Figura 11.8.a**, como seria a situação experimental. Um *laser* de Hélio-Neônio, que tem um comprimento de onda de 632nm ( $1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$ ), incide sobre uma abertura retangular de  $2a = 1,0\text{mm}$  de altura por  $2b = 0,6\text{mm}$  de largura. Em um anteparo colocado a 1m de distância da abertura, veríamos a imagem mostrada na **Figura 11.8.b**. Embora a frente de onda de um *laser* não seja uma onda plana, se o diâmetro do feixe for muito maior do que a abertura, o modelo de onda plana é uma ótima aproximação para a situação experimental.

Veja também como ficaria a função dada pela Equação (11.23), quando substituíssemos os parâmetros numéricos, com todos os comprimentos em metros:  $a = 5 \times 10^{-4}\text{m}$ ,  $b = 3 \times 10^{-4}\text{m}$ ,  $R = 1\text{m}$ ,  $k = (2\pi/\lambda) \approx 10^7 \text{ m}^{-1}$  e

$$\frac{I(P)}{I_0} = 0,9 \left| \frac{\sin(5 \times 10^3 x t)}{(5 \times 10^3 x t)} \right|^2 \left| \frac{\sin(3 \times 10^3 y t)}{(3 \times 10^3 y t)} \right|^2. \quad (11.24)$$



**Figura 11.8:** Simulação de uma experiência de difração em abertura retangular.

(a) Situação experimental. (b) Padrão de difração.

Alguns comentários sobre a difração na abertura retangular:

1. Em primeiro lugar, ao contrário do que se pode esperar baseado na nossa experiência diária, a luz que atravessa uma abertura não reproduz, em um anteparo, a forma da abertura. A distribuição de intensidades observada no anteparo tem uma forma parecida com a abertura na região central, mas além disso aparecem franjas. Chamamos de franjas, as variações da intensidade luminosa que correspondem às “manchas” observadas na **Figura 11.8.b**.
2. Pela **Figura 11.7**, vemos que o máximo central da difração tem uma intensidade luminosa muito maior do que o primeiro máximo secundário. O primeiro máximo secundário tem uma intensidade que é apenas cerca de 5% da intensidade do máximo central, o segundo, cerca de 2%, o terceiro, cerca de 1%, e assim por diante. Esta é uma das razões pelas quais não vemos figuras de difração através de portas e janelas.

3. Pela **Figura 11.8**, podemos ver que na direção da abertura mais estreita, o padrão de difração é mais largo e na direção mais larga o padrão é mais estreito. Além disto, o primeiro máximo secundário fica mais separado do máximo central para a direção da fenda mais estreita. Isto pode parecer estranho, mas ajuda a explicar o fato de não vermos difração através de aberturas largas. Quanto maior a abertura, mais próximo do grande máximo central ficará o primeiro máximo secundário e teremos dificuldade de enxergá-lo por falta de contraste. Quando a abertura é pequena, o máximo secundário fica separado do central e assim fica mais fácil de enxergá-lo.
4. Um outro aspecto importante é que para ver um padrão de difração, precisamos de uma fonte de luz coerente e monocromática, assim como nos experimentos de interferência. Se usarmos uma fonte de luz multicromática, os máximos secundários das diferentes cores cairão em diferentes posições e irão borrar a figura de difração.

## Conclusão

Partindo do princípio de Huygens-Fresnel, derivamos, nesta aula, a teoria de difração de Fraunhofer. Este formalismo foi aplicado ao caso de uma abertura retangular. Discutimos em detalhe as características do padrão de difração obtido neste caso. O padrão é mais largo ao longo da direção em que a abertura é mais estreita, e mais estreito ao longo da direção em que ela é mais larga. De uma maneira geral, os efeitos de difração tendem a ficar pequenos e de difícil detecção quando a abertura tem dimensões muito grandes.

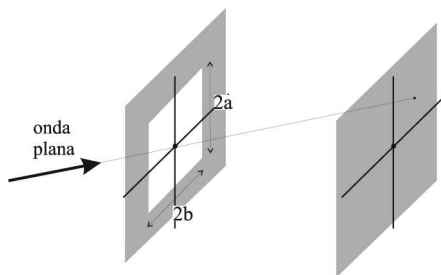
## Atividades Finais

1. Explique de forma qualitativa o princípio de Huygens para a propagação da luz.
2. Escreva a equação que estabelece matematicamente o princípio de Huygens-Fresnel.
3. Quais são os requisitos para que a aproximação de Fraunhofer seja válida?

4. Em uma expansão em série binomial, o que é necessário para que a série possa ser truncada no segundo termo?
5. Escreva novamente a equação de Huygens-Fresnel, já levando em conta as aproximações introduzidas por Fraunhofer.
6. Na difração por uma abertura retangular, em qual das direções o máximo secundário fica mais afastado do máximo central? Na direção correspondente à maior ou à menor dimensão da abertura?
7. Na difração por uma abertura retangular o primeiro máximo secundário é bem menos intenso do que o máximo central. Qual é, aproximadamente, a relação entre eles, em valores percentuais?
8. Escreva a expressão para a intensidade relativa da difração em abertura retangular, dada pela Equação (11.23), em termos dos ângulos de observação  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , formados entre a origem do sistema de referências do plano da abertura e os pontos  $x'$  e  $y'$  respectivamente no plano de observação.

**Sugestão:** note que  $\sin\theta_x = \frac{x'}{R}$  e  $\sin\theta_y = \frac{y'}{R}$ .

9. O que aconteceria se a onda plana não incidisse normalmente sobre o plano da abertura, mas formando um ângulo com a direção normal? Veja a **Figura 11.9**:



**Figura 11.9:** Padrão de intensidade observado na difração por uma abertura retangular (incidência fora da direção normal).

Calcule a nova distribuição de intensidades e faça o gráfico ilustrando o resultado.

**Solução:** neste caso, o produto escalar entre o vetor de onda da onda plana incidente  $\vec{k}_0$  e o vetor de posição no plano da abertura não seriam nulos. Por esta razão, a Equação (11.17) ficaria assim:

$$\Psi(P) = \frac{e^{ikR}}{i\lambda R} \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy A_0 e^{i(k_{0x}x + k_{0y}y)} e^{-ik(x\frac{x'}{R} + y\frac{y'}{R})}. \quad (11.25)$$

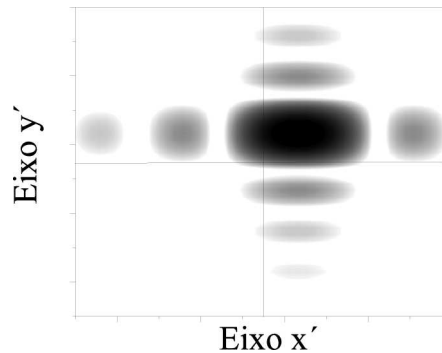
Estes termos em  $k_{0x}$  e  $k_{0y}$  podem ser facilmente incorporados aos fatores multiplicativos das variáveis de integração  $x$  e  $y$ :

$$\Psi(P) = \frac{e^{ikR}}{i\lambda R} \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy A_0 e^{-i[(k\frac{x'}{R} + k_{0x})x + (k\frac{y'}{R} + k_{0y})y]}. \quad (11.26)$$

Neste caso, a solução desta integral seria exatamente a mesma da Equação (11.23), com  $\frac{kx'}{R}$  substituído por  $k\frac{x'}{R} + k_{0x}$  e  $\frac{ky'}{R}$  substituído por  $k\frac{y'}{R} + k_{0y}$ .

$$\frac{I(P)}{I_0} = \frac{1}{\lambda^2 |R|^2} \left| \frac{2a \sin(k\frac{x'}{R} + k_{0x})a}{(k\frac{x'}{R} + k_{0x})a} \right|^2 \left| \frac{2b \sin(k\frac{y'}{R} + k_{0y})b}{(k\frac{y'}{R} + k_{0y})b} \right|^2. \quad (11.27)$$

Como as variáveis do plano de observação são  $x'$  e  $y'$ , ao somar os termos em  $k_{0x}$  e  $k_{0y}$ , estamos apenas deslocando o padrão de difração no plano de observação. Veja a **Figura 11.10**:



**Figura 11.10:** Padrão de intensidade observado na difração por uma abertura retangular (incidência fora da direção normal.)

Esta conclusão é bastante razoável, pois se iluminamos a abertura com um ângulo de incidência diferente de zero, é de se esperar que o máximo central se desloque (veja novamente a **Figura 11.9**).



## Resumo

A propagação de uma onda é analisada por meio do princípio de Huygens-Fresnel. A expressão matemática para esse princípio é simplificada ao utilizarmos a aproximação de Fraunhofer. Utilizando o princípio de Huygens-Fresnel na aproximação de Fraunhofer (difração de Fraunhofer), é calculado o padrão de intensidade resultante da difração de uma onda plana por uma abertura retangular.

## E na próxima aula...

...vamos apresentar mais três aplicações da teoria da difração de Fraunhofer.



## Aula 12 – Aplicações da difração de Fraunhofer

### Metas da aula

Utilizando a teoria da difração de Fraunhofer, calcular a distribuição de intensidade para a difração por uma abertura circular, por duas fendas e por uma rede de difração.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Calcular o padrão de difração por uma abertura circular e compará-lo ao padrão de difração por uma abertura retangular.
- Descrever o padrão de difração por duas fendas e compará-lo ao padrão de interferência com fenda dupla.
- Utilizar uma rede de difração para fazer espectroscopia.

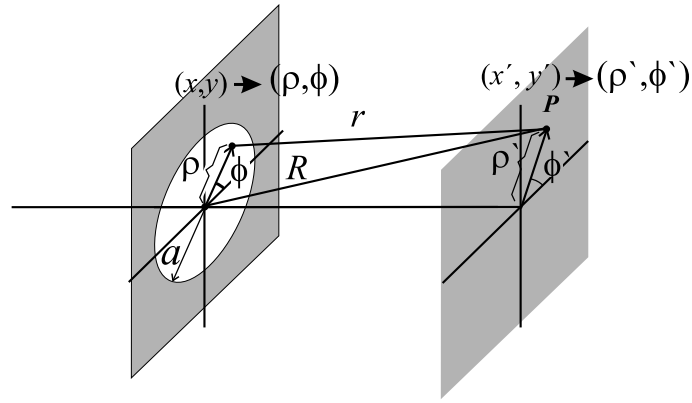
### Pré-requisitos

Para compreender esta aula, você precisa ter lido e compreendido a Aula 12 (Difração de Fraunhofer). Sugerimos também que você reveja a Aula 8 (Interferência).

### Difração por uma abertura circular

A difração por uma abertura circular é uma das aplicações mais importantes da difração de Fraunhofer, já que a maioria dos sistemas ópticos, tais como microscópios, telescópios, lunetas e outros possui aberturas com essa geometria.

Consideramos, como no caso da abertura retangular discutido na aula anterior, uma onda plana com incidência normal. Veja a **Figura 12.1**: o raio da abertura circular vale  $a$ .



**Figura 12.1:** Difração por uma abertura circular com incidência normal.

Vamos partir da equação de propagação na aproximação de Fraunhofer obtida na Aula 12, que fornece o campo elétrico no ponto  $P$ :

$$\Psi(P) = \frac{e^{ikR}}{i\lambda R} \int_{\text{disco}} A_0 e^{-ik(x\frac{x'}{R} + y\frac{y'}{R})} dx dy, \quad (12.1)$$

onde a integral é feita sobre o disco de raio  $a$  correspondente à abertura,  $A_0$  é a amplitude da onda plana incidente,  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $k = 2\pi/\lambda$ , o número de onda.

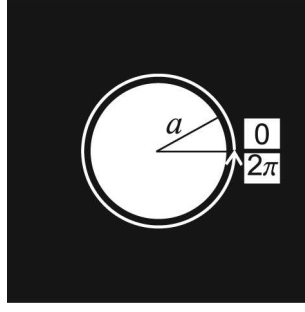
Nesta situação, torna-se conveniente utilizar o sistema de coordenadas cilíndricas para as nossas variáveis. O procedimento para o cálculo do padrão de difração para a abertura circular é simples: basta substituir as variáveis  $x, y, x', y'$  e o elemento de área diferencial  $dx dy$  pelas suas respectivas expressões em coordenadas cilíndricas (veja a **Figura 12.1** para a definição das coordenadas cilíndricas):

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi \text{ e } y = \rho \sin \phi; \\ x' &= \rho' \cos \phi' \text{ e } y' = \rho' \sin \phi'; \\ dx dy &= \rho d\rho d\phi. \end{aligned} \quad (12.2)$$

O disco correspondendo à região de integração é definido pelos seguintes limites de integração: a variável angular  $\phi$  varia de 0 até  $2\pi$ , varrendo toda a circunferência, e a variável radial  $\rho$  varia de 0 até  $a$ , como ilustra a **Figura 12.2**.

Desta forma, obtemos, a partir da Equação (12.1), a expressão

$$\Psi(P) = \frac{e^{ikR}}{i\lambda R} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho d\rho A_0 e^{-i\frac{k}{R}(\rho \cos \phi \rho' \cos \phi' + \rho \sin \phi \rho' \sin \phi')}. \quad (12.3)$$



**Figura 12.2:** Abertura circular de raio  $a$ .

Veja que o argumento da função exponencial pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
 -i\frac{k}{R}(\rho \cos\phi \rho' \cos\phi' + \rho \sin\phi \rho' \sin\phi') &= \\
 -i\frac{k}{R}(\rho \rho' \cos\phi \cos\phi' + \rho \rho' \sin\phi \sin\phi') &= \\
 -i\frac{k}{R}[\rho \rho' (\cos\phi \cos\phi' + \sin\phi \sin\phi')] &= \\
 -i\frac{k}{R}[\rho \rho' \cos(\phi - \phi')].
 \end{aligned} \tag{12.4}$$

Substituindo esta equação na integral da Equação (12.3), obtemos

$$\Psi(P) = A_0 \frac{e^{ikR}}{i\lambda R} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \rho d\rho e^{-i\frac{k}{R}[\rho \rho' \cos(\phi - \phi')]}. \tag{12.5}$$

Esta integral pode ser calculada, e o seu resultado pode ser expresso em termos de uma função especial chamada função de **Bessel** de ordem 1 ( $J_1$ ). Veja o resultado:

$$\Psi(P) = 2A_0 \frac{e^{ikR}}{i\lambda R} \frac{J_1(\frac{k}{R}a\rho')}{\frac{k}{R}a\rho'}. \tag{12.6}$$

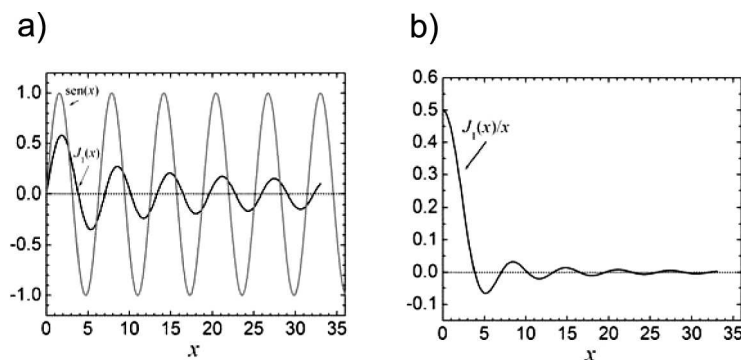
Observe que a amplitude do campo no ponto  $P$  não depende da coordenada angular  $\phi'$ , o que significa que ela não varia ao longo de uma circunferência em torno da origem.

A intensidade no ponto  $P$  será dada, então, por

$$I(P) = 4 \frac{A_0^2}{\lambda^2 R^2} \left[ \frac{J_1(\frac{k}{R}a\rho')}{\frac{k}{R}a\rho'} \right]^2. \tag{12.7}$$



**Friedrich Wilhelm Bessel** nasceu em 1784, em Minden, Brandenburg (Alemanha). Astrônomo, obteve vários resultados importantes a partir de medidas observacionais precisas das posições das estrelas. É conhecido pelo conjunto de funções especiais que leva o seu nome, desenvolvidas por ele no contexto do estudo do movimento dos planetas.

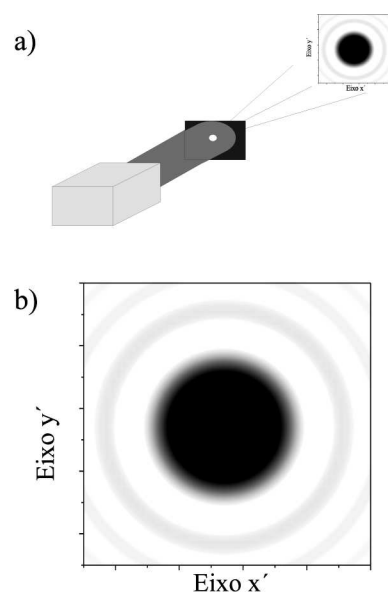


**Figura 12.3:** Gráfico para (a) comparação entre as funções  $\text{sen}(x)$  e Bessel de primeira ordem  $J_1(x)$  e (b) da função  $J_1(x)/x$ .

Embora a função de Bessel  $J_1(x)$  seja menos popular do que as nossas velhas conhecidas seno e cosseno, seus valores podem ser obtidos através de tabelas e cálculos numéricos. Muitos programas de computador possuem as funções de Bessel pré-programadas. Veja na **Figura 12.3.a** um gráfico da função de Bessel  $J_1(x)$  junto com um gráfico da função seno. Note que a função de Bessel também oscila, assim como a função seno; entretanto, suas oscilações não correspondem a um período regular. Observe, ainda, que a amplitude destas oscilações não é constante, ao contrário do que acontece com a função seno.

Como a intensidade do nosso padrão de difração por abertura circular, dada pela Equação (12.7), tem uma função de Bessel dividida pelo seu próprio argumento, sua amplitude deverá decair ainda mais rapidamente. Na **Figura 12.3.b**, mostramos um gráfico de  $J_1(x)/x$ . Na distribuição de intensidades  $I(P)$  dada pela Equação (12.7), a variável  $x$  do gráfico seria  $x = \frac{k}{R}a\rho t$ .

Observe que, embora a função  $J_1(x)$  se anule para  $x = 0$ , a razão  $J_1(x)/x$  tende a  $1/2$  no limite  $x \rightarrow 0$ , como mostra a **Figura 12.3.b**. Assim, a intensidade não é nula para  $\rho' = 0$  (que corresponde ao ponto do anteparo sobre o eixo  $z$ ). Pelo contrário, ela é máxima nesse ponto, conforme podemos concluir por meio desta figura.



**Figura 12.4:** Simulação de uma experiência de difração em abertura circular. (a) Situação experimental. (b) Padrão de difração.

Vamos, então, fazer um gráfico da distribuição de intensidades que veríamos em uma experiência do tipo da que está esquematizada na **Figura 12.4.a**, de difração em abertura circular, cujo resultado é previsto pela Equação (12.7). Veja o gráfico de distribuição de intensidades em função da posição no plano de observação, na **Figura 12.4.b**.

Para finalizar, é preciso destacar o fato de que a difração por uma abertura circular é semelhante à difração por uma abertura retangular. A diferença entre elas está obviamente na forma do máximo central e também na relação entre a intensidade do máximo central e os máximos secundários. Para se ter uma idéia quantitativa, o primeiro máximo secundário tem uma intensidade que vale cerca de 5% da intensidade do máximo central na difração por abertura retangular. Já na difração por abertura circular, o valor desta mesma relação é apenas 2%.

### Exercício 12.1

Escreva a expressão para a intensidade relativa da difração em abertura circular, dada pela Equação (12.7), em termos do ângulo de observação  $\theta$ , formado entre a origem do sistema de referências do plano da abertura e o ponto  $\rho'$  no plano de observação.

**Sugestão:** lembre-se da Atividade final 8 da Aula 12, em que se faz o mesmo para a abertura retangular.

## Exercício 12.2

Na difração por uma abertura circular, foram utilizadas aberturas com três diâmetros diferentes:  $a_1 = 0,20\text{mm}$ ,  $a_2 = 0,50\text{mm}$  e  $a_3 = 1,0\text{mm}$ . O comprimento de onda da luz utilizada foi  $\lambda = 657\text{nm}$  e o anteparo foi colocado a uma distância  $Z = 1,0\text{m}$  do plano da abertura. Calcule o diâmetro do máximo central da figura de difração, para as três aberturas. Use o valor  $x = 3,832$  para a menor raiz não-nula da função de Bessel  $J_1(x)$ .

**Solução:** o diâmetro do máximo central é igual a duas vezes o menor valor não-nulo do raio  $\rho'$ , na Equação (12.7), que anula a função  $J_1(x)$ , com  $x = k\rho'/R$ . Usando o valor fornecido para a menor raiz não-nula de  $J_1(x)$ , obtemos o primeiro mínimo de intensidade, dado por

$$\frac{k}{R}a\rho' = 3,832 \Rightarrow \rho' = \frac{3,832R}{ka} = \frac{3,832R\lambda}{2\pi a}. \quad (12.8)$$

Nesse ponto, bastaria inserir os valores numéricos, mas ainda temos um problema: quanto vale  $R$ ? Sabemos apenas que  $Z = 1\text{m}$ . Neste caso, o melhor é calcular primeiro a posição angular do mínimo  $\theta_{\min}$ :

$$\frac{\rho'}{R} = \sin\theta_{\min} = \frac{3,832\lambda}{2\pi a}. \quad (12.9)$$

Expressando os ângulos em radianos, encontramos, para cada valor do raio da abertura circular:  $\theta_{\min}(a_1) = 0,0020$ ,  $\theta_{\min}(a_2) = 0,00080$  e  $\theta_{\min}(a_3) = 0,00040$ .

A partir dos ângulos, podemos calcular os diâmetros dos máximos centrais:

$$d_1 = 2\rho' = 2Z \operatorname{tg}\theta_{\min}(a_1) = 4,0\text{mm} \quad (12.10)$$

$$d_2 = 2\rho' = 2Z \operatorname{tg}\theta_{\min}(a_2) = 1,6\text{mm}$$

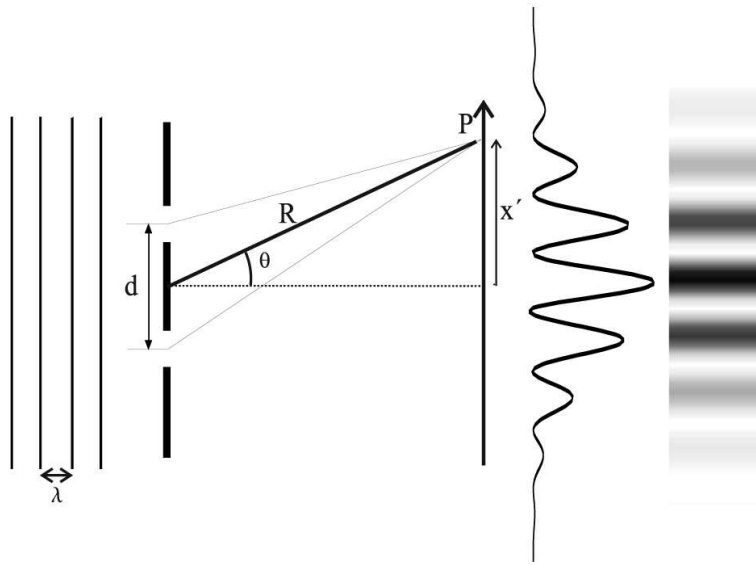
$$d_3 = 2\rho' = 2Z \operatorname{tg}\theta_{\min}(a_3) = 0,80\text{mm}$$

**Comentário e sugestão de atividade:** observe que poderíamos ter igualado os valores do seno, da tangente e do próprio ângulo (em radianos) neste problema, porque os valores dos ângulos são muito pequenos. Isto equivale a tomar a aproximação  $R \approx Z$ , o que permitiria obter a resposta final diretamente da Equação (12.8). Experimente fazer desta forma! Faça um desenho do triângulo retângulo de lados  $R$  (hipotenusa),  $Z$  e  $\rho'$ , indicando no desenho o ângulo  $\theta_{\min}$ , para entender por que podemos tomar essa aproximação.

**Site recomendado e mais uma atividade:** você encontrará uma tabela com as cinco menores raízes não-nulas da função de Bessel  $J_1(x)$  no site <http://mathworld.wolfram.com/BesselFunctionZeros.html>. A partir dessas raízes, você poderá obter os diâmetros dos anéis de difração mostrados na **Figura 12.4.b**.



## Difração por duas fendas



**Figura 12.5:** Interferência com fenda dupla.

No estudo que fizemos sobre interferência com fenda dupla na Aula 8, vimos que, para um esquema como o da **Figura 12.5**, a intensidade no plano do anteparo terá oscilações devido à interferência entre os campos que se originam em cada uma das fendas, dadas por

$$I(P) = 2A_0^2 [1 + \cos(k d \sin\theta)]; \quad (12.11)$$

$$\text{notando que } \sin\theta = \frac{x'}{R}, \quad (12.12)$$

$$I(P) = 2A_0^2 \left[ 1 + \cos \left( k d \frac{x'}{R} \right) \right]. \quad (12.13)$$

Portanto, a intensidade  $I(P)$  depende do comprimento de onda, através do número de onda  $k = 2\pi/\lambda$ , da separação entre as fendas  $d$  e do ângulo de observação  $\theta$ .

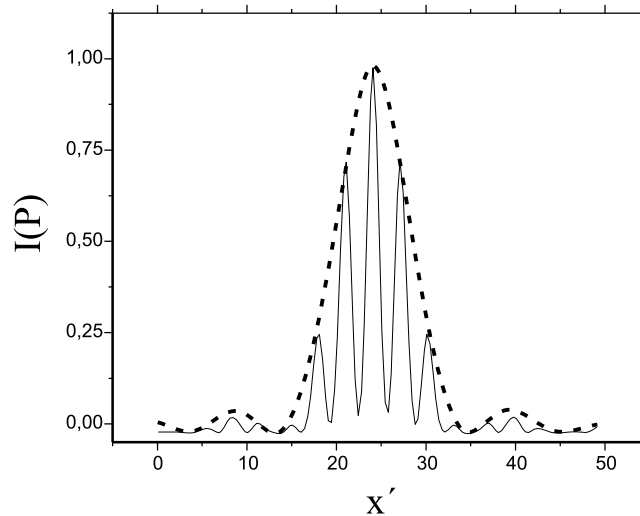
Pela Equação (12.11), a intensidade oscilaria, como função de  $x'$ , com amplitude constante entre  $-\infty$  e  $+\infty$ . Isto não ocorre na realidade! Na **Figura 12.5**, você pode notar que a amplitude de oscilação da intensidade diminui quando nos afastamos da direção frontal. Portanto, as franjas iluminadas (correspondendo à situação de interferência construtiva entre os campos transmitidos por cada fenda) que estão mais afastadas da posição central são

menos intensas. Esta diminuição de intensidade está relacionada ao padrão de difração através de cada uma das fendas, que não foi levado em conta na análise da Aula 8.

Vamos ver como fica a distribuição de intensidades em uma experiência de fenda dupla, quando levamos em conta também os efeitos da difração. A intensidade  $I(P)$  para o caso de uma abertura qualquer, seja com uma única fenda, duas fendas separadas etc., é dada pela integral da Equação (12.1), bastando substituir a região de integração pela região associada ao conjunto de fendas. Lembre-se de que esta integral foi obtida, na aproximação de Fraunhofer, para incidência normal de uma onda plana.

Não faremos este cálculo novamente, mas pode-se mostrar que o resultado será dado pelo produto da função que descreve a interferência pela função que descreve a difração. A primeira função é exatamente aquela obtida na Aula 8 e dada pela Equação (12.11). Note que ela depende da distância  $d$  entre as fendas, mas não da forma ou das dimensões de cada fenda. A segunda função, associada à difração, não depende de  $d$ , mas depende da geometria de cada fenda (ou abertura). Para o caso em que ambas as fendas são retângulos de lados iguais a  $2a$  e  $2b$ , temos

$$I(P) = \frac{4|A_0|^2}{\lambda^2 R^2} \left[ \frac{a \sin\left(\frac{kx'a}{R}\right)}{\left(\frac{kx'a}{R}\right)} \right]^2 \left[ \frac{b \sin\left(\frac{ky'b}{R}\right)}{\left(\frac{ky'b}{R}\right)} \right]^2 \left[ 1 + \cos\left(kd\frac{x'}{R}\right) \right]. \quad (12.14)$$



**Figura 12.6:** Interferência com fenda dupla: padrão levando em conta a difração.

A distribuição de intensidades correspondente é mostrada na **Figura 12.6** como um corte transversal ao longo da direção  $x'$ . Note que a função que descreve a difração em abertura retangular, representada pela curva pontilhada na **Figura 12.6**, funciona como uma envoltória para a função que descreve a interferência e fornece as oscilações internas.

Alguns detalhes da Equação (12.14) devem ser destacados. Em primeiro lugar, a função que descreve a difração em fenda retangular é exatamente a que obtemos para o caso de uma única fenda colocada na origem do sistema de coordenadas (confira a Equação (12.21) da aula anterior), apesar de termos aqui duas fendas, cada uma colocada a uma certa distância da origem. De fato, como as fendas são pequenas quando comparadas com a distância  $R$  até o ponto de observação, os padrões de cada uma das fendas caem praticamente “um em cima do outro” no anteparo. Portanto, nos dois casos temos praticamente o mesmo padrão de uma única fenda na origem. Outro aspecto importante é o fato de que a interferência aparece com relação à direção  $x$  definida pela linha que liga as duas fendas. Não há interferência ao longo da direção  $y$ .

## Exercício 12.3

Veja a situação experimental esquematizada na **Figura 12.7**. Utilizando a expressão completa para a interferência com fenda dupla, dada pela Equação (12.14), determine os quatro menores valores de  $\theta$  (tomando só valores tais que  $\theta > 0$ ) em que a intensidade se anula ao longo do eixo  $x'$ . Considere o comprimento de onda  $\lambda = 632\text{nm}$ , a largura da fenda  $2a = 0,1\text{mm}$  e a separação entre fendas  $d = 0,3\text{mm}$ .

**Solução:** note que a intensidade será nula sempre que um dos dois fatores na Equação (12.14),  $\sin(\frac{kx'a}{R})$  (associado à difração) e  $1 + \cos(kd\frac{x'}{R})$  (associado à interferência) se anular. Vejamos a condição para que o primeiro fator se anule:

$$\frac{kx'a}{R} = m\pi, \quad m \text{ inteiro}, \quad (12.15)$$

lembrando que  $m \neq 0$ , pois a função  $\sin(x)/x \rightarrow 1$  quando  $x \rightarrow 0$ .

O ângulo  $\theta$  está relacionado com a posição  $x'$  no anteparo pela equação  $\sin\theta = \frac{x'}{R}$ , logo a intensidade se anula para

$$kasen\theta = m\pi \Rightarrow \sin\theta = m\frac{\lambda}{2a}. \quad (12.16)$$

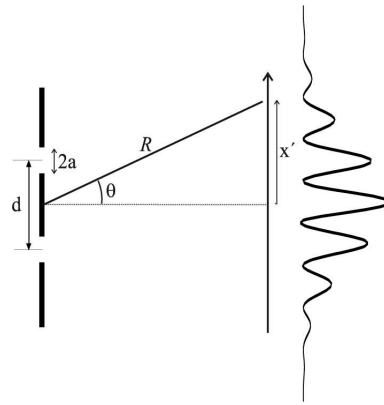
A condição para que o segundo fator se anule é:

$$\frac{kx'd}{R} = n\pi, \quad \text{onde } n \text{ deve ser um inteiro ímpar}. \quad (12.17)$$

Então, obtemos para este caso:

$$kdsen\theta = n\pi \Rightarrow \sin\theta = n\frac{\lambda}{2d}. \quad (12.18)$$

Assim, os menores valores para  $\sin\theta$  seriam  $\lambda/(2d)$ ,  $3\lambda/(2d)$ ,  $5\lambda/(2d)$  (mínimos do fator associado à interferência) e  $\lambda/(2a)$  (mínimo do fator associado à difração). Os valores dos ângulos em radianos são 0,0105; 0,0316; 0,0527 e 0,0632.

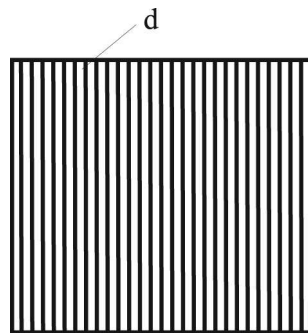


**Figura 12.7:** Interferência com fenda dupla: padrão levando em conta a difração.

## Rede de difração

O que acontece na difração por um número de fendas maior do que dois? O procedimento para o cálculo é sempre o mesmo: usamos a Equação (12.1), tomando como região de integração o conjunto das aberturas. Não vamos refazer todos estes cálculos. Vamos apresentar o resultado e discuti-lo.

Para simplificar esta análise, suporemos que as fendas são aberturas retangulares em que uma das dimensões, por exemplo ao longo do eixo  $y$ , é muito maior do que a outra ao longo do eixo  $x$ . Em consequência, os efeitos de difração só serão relevantes ao longo da direção deste segundo eixo. Assim, vamos desprezar a dependência da intensidade com  $y'$  e supor que ela só dependa de  $x'$ . Os objetos com muitas aberturas longas e estreitas são chamados redes de difração. Veja a **Figura 12.8**.



**Figura 12.8:** Rede de difração: o espaçamento entre linhas é  $d$ .

Para o caso da difração por um número  $N$  arbitrário de fendas, pode-se obter o seguinte resultado geral:

$$I(P) = I_0(x') \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{Nkx'd}{R}\right)}{\text{sen}\left(\frac{kx'd}{R}\right)} \right|^2, \quad (12.19)$$

onde  $d$  é a separação entre as fendas e  $I_0(x')$  é uma função que descreve os detalhes da difração por cada fenda. Por exemplo, quando  $N = 2$ , devemos reobter o resultado da fenda dupla a partir deste resultado:

$$\text{para } N = 2: \text{sen}^2\left(\frac{2kx'd}{R}\right) = 4\text{sen}^2\left(\frac{kx'd}{R}\right) \cos^2\left(\frac{kx'd}{R}\right), \quad (12.20)$$

$$\Rightarrow I(P) = I_0(x') 4\cos^2\left(\frac{kx'd}{R}\right),$$

$$\text{que pode ser escrito como: } I(P) = 2 I_0(x') \left[ 1 + \cos\left(\frac{kx'd}{R}\right) \right]. \quad (12.21)$$

Comparando este resultado com a Equação (12.14), podemos concluir que, para  $N = 2$ , temos

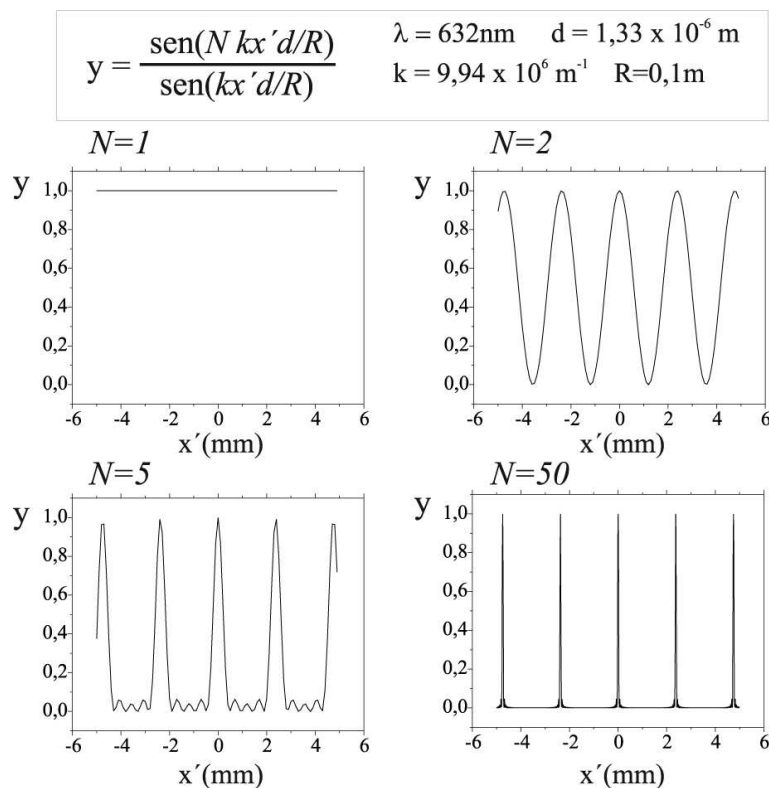
$$I_0(x') = \frac{2|A_0|^2}{\lambda^2 R^2} \left[ \frac{a \text{sen}\left(\frac{kx'a}{R}\right)}{\left(\frac{kx'a}{R}\right)} \right]^2. \quad (12.22)$$

Portanto, neste caso,  $I_0(x')$  corresponde ao padrão de difração para uma única fenda, associada à envoltória da **Figura 12.6**.

A situação de maior interesse corresponde ao limite oposto, em que  $N$  é muito grande. De fato, numa rede de difração temos um número imenso de fendas, tipicamente de 500 a 2000 linhas por mm, ao longo de cerca de 5cm. Na prática, iluminamos a rede com um feixe de luz (de um laser, por exemplo) que tem uma área transversal finita no plano  $xy$  perpendicular à direção de propagação. A área do feixe determina o número de linhas que, de fato, irá contribuir para a intensidade observada no ponto  $P$ . A função  $I_0(x')$  depende não só do efeito da difração através das fendas, mas também da variação da intensidade incidente no plano  $xy$ . Para simplificar nossa análise, vamos supor que este fator seja constante, pois, de fato, os aspectos mais importantes do padrão de intensidade transmitido através da rede de difração são descritos pelo segundo fator na Equação (12.19), que está diretamente relacionado ao efeito de interferência:

$$I(P) \propto \left| \frac{\text{sen}\left(\frac{Nkx'd}{R}\right)}{\text{sen}\left(\frac{kx'd}{R}\right)} \right|^2. \quad (12.23)$$

Na **Figura 12.9** mostramos o comportamento desta função para alguns valores de  $N$ . O que desejamos mostrar com esta figura é o efeito da interferência entre os campos provenientes de cada uma das fendas. Para o caso  $N = 1$ , é fácil ver que o numerador fica igual ao denominador e, portanto, a função vale 1 para qualquer posição  $x'$  no plano de observação. Para o caso  $N = 2$ , vemos as oscilações típicas da interferência com fenda dupla. Para o caso  $N = 5$ , vemos o efeito do aumento do número de fendas: as *posições* onde ocorre interferência construtiva continuam as mesmas, mas a *largura* dos picos diminui, tendo ao seu lado pequenos picos secundários. Para  $N = 50$ , os picos de interferência construtiva ficam muito finos e os pequenos picos secundários são tão pequenos que mal podemos vê-los na figura. No limite em que  $N \rightarrow \infty$ , as larguras dos picos tendem para zero, entretanto as posições continuam sendo sempre as mesmas dos máximos de interferência com a fenda dupla.



**Figura 12.9:** Função que descreve a difração por uma rede, para  $N = 1$ ,  $N = 2$ ,  $N = 5$  e  $N = 50$ .

## Espectroscopia

Uma aplicação muito importante da rede de difração é na espectroscopia, onde desejamos determinar os comprimentos de onda presentes em um feixe de luz. Portanto, precisamos de uma interação que nos permita separar um comprimento de onda do outro.

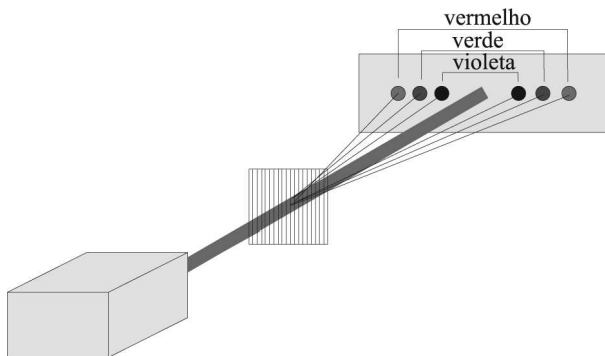
Para ver como a rede de difração pode ser usada nesta tarefa, basta analisar a condição que determina a posição dos máximos de interferência. Como a posição dos máximos não depende do valor de  $N$ , vamos pegar o caso mais simples, em que  $N = 2$ , dado pela Equação (12.21). Quando o argumento da função cosseno nesta equação,  $kx'd/R$ , for um múltiplo inteiro de  $2\pi$ , ela valerá  $+1$  e resultará no valor máximo da intensidade. Portanto, a condição que determina as posições dos máximos de interferência é:

$$\frac{kx'_{\max}d}{R} = m \, 2\pi \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi x'_{\max}d}{R\lambda} = m \, 2\pi \quad \text{com } m = 0, 1, 2, 3... \quad (12.24)$$

As posições dos máximos são dadas então por:

$$x'_{\max} = m\lambda \frac{R}{d}. \quad (12.25)$$

A condição obtida na Equação (12.25) nos mostra que as posições dos máximos de interferência dependem do comprimento de onda  $\lambda$ . Logo, se iluminarmos uma rede de difração com um feixe multicromático, ou seja, que contenha luz de vários comprimentos de onda diferentes, os máximos de interferência para as diferentes cores ou comprimentos de onda cairão em posições diferentes e, portanto, se separarão. Na **Figura 12.10**, esquematizamos uma experiência deste tipo.



**Figura 12.10:** Descrição esquemática de uma experiência de espectroscopia com rede de difração.



Supomos que o feixe de luz contenha três comprimentos de onda diferentes: 632nm (vermelho do laser de Hélio-Neônio), 532nm (verde do laser de Neodímio YAG dobrado) e 442nm (violeta do laser de Hélio-Cádmio). Após passarem pela rede, todos eles terão um máximo de interferência no centro, que corresponde a  $m = 0$  na Equação (12.25). Mas para  $m = 1$ , cada um deles tem um máximo em uma posição distinta, como mostra a **Figura 12.10**. O mesmo ocorre para os máximos de outras ordens:  $m = 2$ ,  $m = 3$  etc.

Em comparação com o caso de uma fenda dupla, o grande número de linhas  $N$  presente numa rede de difração faz com que os picos de intensidade sejam muito estreitos, conforme discutimos anteriormente. Esta propriedade é importante para as aplicações em espectroscopia, pois graças a ela é possível distinguir dois comprimentos de onda muito próximos.

#### Exercício 12.4

Calcule a separação  $\Delta x$  entre as posições dos máximos de ordem  $m = 1$  para os comprimentos de onda de 400nm e 500nm, na difração por uma rede de difração de  $N_\ell = 750$  linhas/mm em um plano de observação situado a  $z = 1\text{m}$  da rede de difração.

**Sugestão:** suponha que  $R \approx z$  possa ser considerado constante nesta situação. Mostre que  $d$  (a separação entre fendas) é igual ao inverso do número de linhas por unidade de comprimento:  $d = 1/N_\ell$ . Em seguida, utilize o valor de  $x_{\max}$  dado pela Equação (12.25) e calcule  $\Delta x = x_{\max}(400\text{nm}) - x_{\max}(500\text{nm})$ .

## Conclusão

Nesta aula, aplicamos a teoria de difração de Fraunhofer para três situações: abertura circular, fenda dupla retangular e rede de difração. Para o primeiro caso, a intensidade difratada é dada em termos de uma função especial, a função de Bessel de ordem 1.

No segundo caso, podemos escrever a intensidade transmitida em termos da função associada à difração por uma única fenda retangular, que você estudou na aula anterior, bastando multiplicá-la pela função associada à interferência, que você também já conhecia (Aula 8).

Mostramos que a intensidade transmitida por uma rede de difração possui picos muito estreitos, cujas posições dependem do comprimento de onda (exceto no caso do pico central). Devido a essa propriedade, as redes de difração são muito úteis em espectroscopia. Você terá a oportunidade de explorar essa aplicação no curso de Física 4B.

## Atividades Finais

1. Descreva qualitativamente a forma da figura de difração de Fraunhofer para uma abertura circular. Para uma distância fixa entre a abertura e o plano de observação, o que acontece com a figura quando diminuimos o diâmetro da abertura: o seu tamanho diminui ou aumenta?
2. As posições dos máximos da intensidade transmitida por uma fenda dupla dependem das larguras das fendas? E da distância entre as fendas?
3. Por que as redes de difração são úteis para a espectroscopia?

## E na próxima aula...

...você fará experimentos de difração e interferência com vários tipos de aberturas.

## Resumo

O padrão de difração de Fraunhofer gerado por uma abertura circular de raio  $a$  possui uma região de intensidade máxima central em forma de disco, cujo tamanho é proporcional a  $\lambda/a$  (onde  $\lambda$  é o comprimento de onda), e anéis concêntricos muito menos intensos.

A intensidade transmitida através de uma fenda dupla retangular é dada pelo produto da função associada à difração pela fenda, que não depende da distância entre as fendas, pela função associada à interferência entre os campos difratados por cada fenda, que não depende das dimensões da fenda.

Uma rede de difração é constituída de centenas ou milhares de linhas paralelas por milímetro. A intensidade transmitida pela rede possui picos muito estreitos localizados nas mesmas posições que teríamos no caso de uma fenda dupla de mesmo espaçamento. As redes de difração são muito úteis em espectroscopia, onde o objetivo é separar e medir os diferentes comprimentos de onda compreendidos num feixe de luz.

# Aula 13 – Experimentos com interferência e difração da luz

## Meta da aula

Realizar experimentos em que os processos de difração e interferência da luz desempenham um papel crucial.

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Verificar experimentalmente a difração da luz através de aberturas únicas com formato retangular e circular.
- Utilizar os padrões de difração para obter o comprimento de onda da luz, quando as características da abertura são conhecidas.
- Verificar experimentalmente a interferência da luz com uma fenda dupla.
- Utilizar os padrões de interferência para obter o comprimento de onda da luz quando as características da fenda dupla são conhecidas.
- Verificar experimentalmente a difração da luz através de uma rede de difração.
- Utilizar os padrões de difração para obter o comprimento de onda da luz, quando as características da rede de difração são conhecidas.

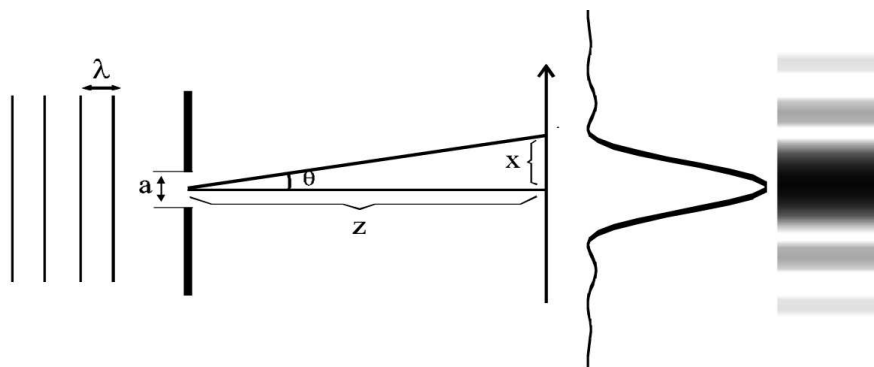
## Pré-requisitos

Para realizar as atividades experimentais propostas nesta aula, você precisará dos conceitos apresentados nas Aulas 8, 9, 10, 11, 12 e 13.

## Introdução: abertura única

Algumas das características mais marcantes do comportamento ondulatório da luz estão ligadas aos efeitos de difração e interferência. Como estes efeitos dependem do comprimento de onda, eles acabaram se tornando

uma maneira de se medir o comprimento de onda em várias faixas do espectro eletromagnético, sobretudo na região do visível. Veja o que acontece na difração através de uma abertura retangular (supomos que a difração é importante apenas em uma das direções, que corresponde à menor dimensão do retângulo), representada esquematicamente na **Figura 13.1**.



**Figura 13.1:** Difração em fenda simples. Representação esquemática, curva de intensidades e simulação do padrão de difração.

Como você viu em nosso curso, podemos calcular as posições dos mínimos de difração, para aberturas retangulares, através da equação:

$$\pm m \lambda = a \sin \theta_{min}^m, \quad (13.1)$$

onde  $m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) é um número inteiro diferente de zero que especifica tanto a ordem do mínimo de difração quanto o ângulo  $\theta_{min}^m = \arctg(x/z)$ . As posições dos máximos também podem ser calculadas por meio de uma expressão similar, se omitirmos o máximo central:

$$\pm(m + \frac{1}{2}) \lambda = a \sin \theta_{max}^m. \quad (13.2)$$

Da mesma forma, podemos calcular a posição do primeiro mínimo de intensidade para a difração em abertura circular:

$$\sin \theta_{min} = \frac{3,833 \lambda}{2\pi a}, \quad (13.3)$$

onde  $a$  é o raio da abertura.

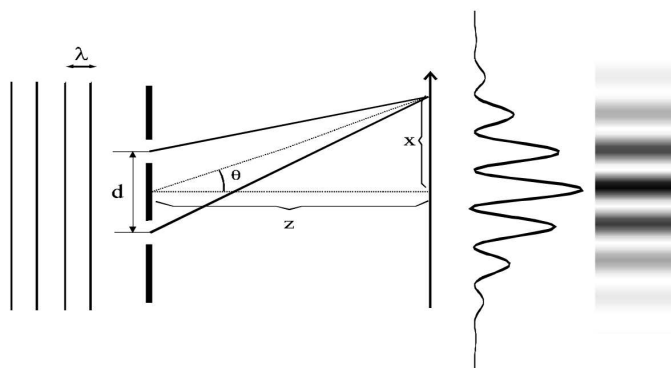
## Atividade experimental: abertura única

1. Ligue o laser e verifique a presença do feixe de luz vermelha, fazendo-o incidir em um anteparo, que pode ser uma folha de papel ou até mesmo a sua mão. **ATENÇÃO! Nunca olhe diretamente para o feixe de laser!**
2. Direcione o feixe de laser para um anteparo branco (a parede da sala pode servir de anteparo), de tal maneira que ele percorra uma distância de mais de um metro. Isto permitirá que o padrão de difração se expanda o suficiente para que a separação entre mínimos seja da ordem de milímetros.
3. Coloque a placa com as fendas calibradas em um suporte adequado e faça com que o feixe de laser atravesse uma das fendas, produzindo um padrão de difração no anteparo. Comece pela fenda com largura  $a = 0.1\text{mm}$ , por exemplo.
4. Para que a distância entre máximos adjacentes do padrão de difração seja grande o suficiente para ser medida com uma régua, é necessário que o feixe propague por uma distância compatível, que depende da largura da fenda. Em contrapartida, se a distância for muito grande, a densidade luminosa diminui e fica mais difícil visualizá-lo. Portanto, é preciso encontrar uma distância ótima. Após encontrar esta distância, meça-a (esta é a distância  $z$  da **Figura 13.1**).
5. Meça as posições dos três primeiros mínimos adjacentes ( $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ ), à direita e à esquerda do máximo central. Sugestão: atribua a coordenada  $x = 0$  à posição do máximo central.
6. Estime a incerteza em suas medidas de posição. Para isto, procure medir a largura da região de mínimo.
7. Repita as medidas para as fendas com  $a = 0.2\text{mm}$  e  $a = 0.4\text{mm}$ .
8. Substitua agora a máscara com as fendas, pela máscara com as aberturas circulares. Posicione a abertura que tem diâmetro  $d_1 = 0.2\text{mm}$ , para que o feixe de laser seja difratado por ela.
9. Meça a distância entre o plano da abertura e o plano do anteparo. Sugerimos que se trabalhe com uma distância superior a 1m.

10. Meça o diâmetro do máximo central. Atenção: dependendo da qualidade do modo transversal do laser, as franjas secundárias podem ficar deformadas. Para a realização do presente experimento, o importante é que o máximo central fique bem definido.
11. Repita a medida do diâmetro do máximo central, para a difração nas aberturas com diâmetros  $d_2 = 0,5\text{mm}$  e  $d_3 = 1\text{mm}$ .

### Introdução: fenda dupla

A experiência de difração com fenda dupla é muito parecida com a experiência de difração com fenda simples. Entretanto, você verá que o padrão de intensidades tem características diferentes e que facilitam a realização de medidas de comprimento de onda. Além do padrão diferente, a interpretação física das duas experiências também é diferente, sendo que no caso da fenda dupla, existem aspectos bastante profundos ligados aos princípios da Mecânica Quântica, como será visto, oportunamente.



**Figura 13.2:** Difração em fenda dupla. Representação esquemática, curva de intensidades e simulação do padrão de interferência.

Veja a **Figura 13.2**. A posição angular dos máximos de interferência é dada pela equação:

$$\sin\theta_{max}^m = \lambda \frac{m}{d} ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13.4)$$

em que  $m$  é um número inteiro que especifica a ordem do máximo de interferência. O máximo central em  $\theta = 0$ , corresponde a  $m = 0$ , o primeiro máximo adjacente à direita corresponde a  $m = +1$  e à esquerda  $m = -1$  e assim por diante. O ângulo  $\theta = \arctg(x/z)$  é usado para estimar a diferença de caminho entre as fendas e o ponto do anteparo. As posições dos mínimos

de interferência, que correspondem aos pontos do plano de observação em que a intensidade é nula, também podem ser calculadas:

$$\sin\theta_{min}^m = \lambda \frac{(m + \frac{1}{2})}{d} ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13.5)$$

### Atividade experimental: fenda dupla

1. Faça os mesmos ajustes da experiência com a fenda simples, no que diz respeito ao alinhamento do laser em direção a um anteparo.
2. Coloque a máscara com as fendas duplas no suporte adequado, de tal maneira que o laser incida sobre uma delas. Comece, por exemplo, com a fenda de  $d = 0.1\text{mm}$ .
3. Procure um plano situado a uma certa distância  $z$  das fendas, de tal forma que o padrão de interferência possa ser visto e que a separação entre os máximos de ordem mais baixa seja mensurável com uma régua (alguns milímetros). Observe que esta distância pode ser bem diferente daquela empregada no experimento com fenda simples e note também que ela depende da separação entre as fendas. Uma vez estabelecida esta distância, anote seu valor.

4. Meça as posições dos três primeiros máximos adjacentes, à direita e à esquerda do máximo central.

**Sugestão:** atribua a coordenada  $x = 0$  à posição do máximo central.

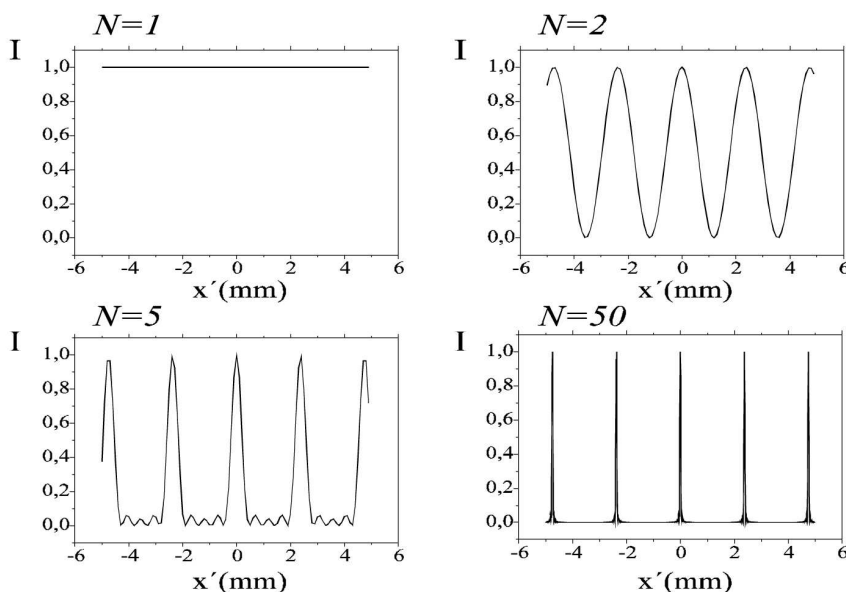
5. Estime a incerteza em suas medidas de posição. Para isto, procure medir a largura da região de máximo.
6. Repita as medidas para as fendas de  $0.2\text{mm}$  e  $0.5\text{mm}$ . Lembre-se de que você tem liberdade para alterar o valor de  $z$ , a distância da fenda até o anteparo, nestas novas medidas.

### Introdução: rede de difração

Uma rede de difração não é nada mais do que um sistema de fendas múltiplas. Sabemos que a passagem de um feixe de luz por uma fenda, produz uma distribuição de intensidades que tem máximos e mínimos e que a separação entre eles depende do comprimento de onda. Com fendas duplas temos o mesmo efeito, mas com uma diferença importante, a relação entre as

intensidades dos picos central e adjacentes é bem diferente da fenda simples, e isto facilita as medidas que podem servir para obter o valor comprimento de onda. O que acontece se usarmos três fendas, quatro, cinco e até milhares delas?

Na **Figura 13.3** são mostradas as funções que descrevem as oscilações de intensidade para os casos de vários números de fendas.



**Figura 13.3:** Oscilações das intensidades ( $I$ ) dos padrões de difração em fendas múltiplas, para vários valores de  $N$ , o número de fendas.

Note que à medida que o número de fendas aumenta, os máximos ficam mais estreitos e separados uns dos outros. Esta é justamente a grande virtude da rede de difração. Podemos usar estes picos estreitos e separados, para medir comprimentos de onda com grande precisão.

A posição dos máximos e mínimos é dada pelas mesmas Equações 13.4 e 13.5 que utilizamos para a fenda dupla. Todos os parâmetros são definidos da mesma maneira, sendo que  $d$  é a separação entre duas fendas adjacentes da rede, sendo assumido que este valor é igual para todas.



## Atividade experimental: rede de difração

1. Substitua as fendas das medidas anteriores por uma rede de difração. Veja escrito na rede, o número  $N$  de linhas/mm. Neste caso, calcule a separação  $d = 1/N$  entre duas linhas adjacentes.
2. Identifique o plano do anteparo, medindo a distância  $z$  correspondente. Note que agora a distância do plano da rede até o anteparo deve ser muito menor do que nos casos anteriores. Anote o valor de  $z$ .
3. Meça as posições dos três primeiros máximos adjacentes, à direita e à esquerda do máximo central. Sugestão: atribua a coordenada  $x = 0$  à posição do máximo central.
4. Estime a incerteza em suas medidas de posição. Para isto, procure medir a largura da região de máximo.

## Análise de dados

1. Quais são as equações que relacionam as dimensões da abertura retangular, fendas dupla e rede de difração, com a posição angular dos máximos de seus respectivos padrões de interferência e com o comprimento de onda  $\lambda$ ?
2. Qual é a equação que relaciona a posição angular do primeiro mínimo de difração em abertura circular, com o diâmetro dela e o comprimento de onda.
3. Faça uma tabela com todas as suas medidas. Lembre-se de colocar unidades nas grandezas dimensionais.

| Fenda simples |              |                            |              |                                      | Fenda dupla  |              |                            |              |                                      | Rede de difração |              |                            |              |                                      |
|---------------|--------------|----------------------------|--------------|--------------------------------------|--------------|--------------|----------------------------|--------------|--------------------------------------|------------------|--------------|----------------------------|--------------|--------------------------------------|
| $a(\lambda)$  | $m(\lambda)$ | $x(\lambda)$<br>$\Delta x$ | $z(\lambda)$ | $\theta(\lambda)$<br>$\Delta \theta$ | $a(\lambda)$ | $m(\lambda)$ | $x(\lambda)$<br>$\Delta x$ | $z(\lambda)$ | $\theta(\lambda)$<br>$\Delta \theta$ | $a(\lambda)$     | $m(\lambda)$ | $x(\lambda)$<br>$\Delta x$ | $z(\lambda)$ | $\theta(\lambda)$<br>$\Delta \theta$ |
|               |              |                            |              |                                      |              |              |                            |              |                                      |                  |              |                            |              |                                      |

**Figura 13.4:** Tabela de dados.

4. Faça um gráfico de  $\sin\theta$  versus  $m/a$  para as medidas com abertura retangular. Você pode plotar os pontos medidos com as fendas de diferentes larguras, no mesmo gráfico. Use símbolos diferentes para cada grupo de dados e inclua as barras de erro devidas à incerteza no ângulo  $\theta$ .
5. Obtenha o valor de  $\lambda$  do laser usado, a partir do seu gráfico.
6. Faça um gráfico de  $\sin\theta_{min}$  versus  $a^{-1}$  para as medidas com abertura circular.
7. Obtenha novamente o valor de  $\lambda$  do laser usado, a partir do seu gráfico.
8. Faça um gráfico de  $\sin\theta$  versus  $m/d$  para as medidas com fenda dupla. Você pode plotar os pontos medidos com as fendas de diferentes separações, no mesmo gráfico. Use símbolos diferentes para cada grupo de dados e inclua as barras de erro devidas à incerteza no ângulo  $\theta$ .
9. Obtenha mais uma vez o valor de  $\lambda$  do laser usado, a partir do seu gráfico.
10. Faça um gráfico de  $\sin\theta$  versus  $m/d$  para as medidas com a rede de difração e inclua as barras de erro devidas à incerteza no ângulo  $\theta$ .
11. Obtenha o valor de  $\lambda$  do laser usado, a partir do seu gráfico.



ISBN 85-7648-140-5



**UENF**  
Universidade Estadual  
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense



**GOVERNO DO  
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério  
da Educação

