

João Paulo Sinnecker  
Alexandre Carlos Tort  
Raul Rapp

Física 3A







Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

## Física 3A

Volume 1 - Módulo 1

João Paulo Sinnecker

Alexandre Carlos Tort

Raul Rapp



SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério  
da Educação



Apoio:



Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo  
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001

Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

## Presidente

Masako Oya Masuda

## Vice-presidente

Mirian Crapez

## Coordenação do Curso de Física

Luiz Felipe Canto

## Material Didático

### ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

João Paulo Sinnecker  
Alexandre Carlos Tort  
Raul Rapp

### COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

### DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Ana Tereza de Andrade  
Carmen Irene Correia de Oliveira  
Leonardo Villela  
José Meyohas

### COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM

Maria Angélica Alves

## Departamento de Produção

### EDITORA

Tereza Queiroz

### COORDENAÇÃO EDITORIAL

Jane Castellani

### REVISÃO TIPOGRÁFICA

Equipe Cederj

### COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

### PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

### ILUSTRAÇÃO

Fabiana Rocha  
Fabio Muniz

### CAPA

Eduardo Bordoni  
Sami Souza

### PRODUÇÃO GRÁFICA

Patricia Seabra

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

S617f

Sinnecker, João Paulo.

Física 3A. v.1 / João Paulo Sinnecker. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

194 p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-206-1

1. Eletrostática. 2. Lei de Coulomb. 3. Campo elétrico. 4. Lei de Gauss. 5. Potencial elétrico. I. Tort, Alexandre Carlos. II. Rapp, Raul. III. Título.

CDD: 530.1

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**  
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia**  
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO  
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**  
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Vieiralves

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**  
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitora: Malvina Tania Tuttman



**SUMÁRIO**

<b>Aula 1</b> – A interação eletrostática: a Lei de Coulomb _____	<b>7</b>
<i>João Paulo Sinnecker / Alexandre Carlos Tort / Raul Rapp</i>	
<b>Aula 2</b> – O campo elétrico: distribuições discretas de cargas _____	<b>31</b>
<i>João Paulo Sinnecker / Alexandre Carlos Tort / Raul Rapp</i>	
<b>Aula 3</b> – O campo elétrico: linhas de campo e dinâmica de partículas no campo elétrico _____	<b>47</b>
<i>João Paulo Sinnecker / Alexandre Carlos Tort / Raul Rapp</i>	
<b>Aula 4</b> – O campo elétrico: distribuições contínuas de cargas _____	<b>61</b>
<i>João Paulo Sinnecker / Alexandre Carlos Tort / Raul Rapp</i>	
<b>Aula 5</b> – A Lei de Gauss _____	<b>83</b>
<i>João Paulo Sinnecker / Alexandre Carlos Tort / Raul Rapp</i>	
<b>Aula 6</b> – O potencial elétrico e sua aplicação às distribuições discretas de carga _____	<b>107</b>
<i>João Paulo Sinnecker / Alexandre Carlos Tort / Raul Rapp</i>	
<b>Aula 7</b> – A energia eletrostática de distribuições discretas de carga _____	<b>121</b>
<i>João Paulo Sinnecker / Alexandre Carlos Tort / Raul Rapp</i>	
<b>Aula 8</b> – A energia eletrostática e o potencial elétrico de distribuições contínuas _____	<b>133</b>
<i>João Paulo Sinnecker / Alexandre Carlos Tort / Raul Rapp</i>	
<b>Aula 9</b> – Condutores e capacitores _____	<b>149</b>
<i>João Paulo Sinnecker / Alexandre Carlos Tort / Raul Rapp</i>	
<b>Aula 10</b> – Prática - Atividades experimentais _____	<b>169</b>
<i>João Paulo Sinnecker / Alexandre Carlos Tort / Raul Rapp</i>	



# Aula 1 – A interação eletrostática: a Lei de Coulomb

## Meta da aula

Apresentar a Lei de Coulomb.

## Objetivos

Ao final do estudo desta aula, você deverá ser capaz de:

- Entender que as bases da eletrostática são fundamentalmente empíricas; em particular, perceber que a Lei de Coulomb é uma síntese de fatos experimentais acumulados ao longo de muitos anos.
- Compreender que a carga elétrica é uma propriedade da matéria.
- Aplicar a Lei de Coulomb e o Princípio da Superposição aos exercícios e problemas propostos ao longo do texto e ao final da aula.

## Pré-requisitos

Seria proveitoso se, antes de prosseguir com a leitura e o estudo desta aula, você revisasse a Aula 1 – Interação Eletrostática I e o Complemento 1 – História da Eletricidade, Volume 4, Módulo 4.

## Introdução

Nesta aula iniciaremos o estudo da eletrostática, ramo da Física que trata da interação elétrica gerada por cargas em repouso. Nem tudo será novidade, pois você já deve ter travado contato com este assunto no Ensino Médio e na disciplina Introdução às Ciências Físicas.

## História da eletricidade

A humanidade convive há bastante tempo com os fenômenos elétricos e magnéticos, como a eletrização por fricção, os relâmpagos e as bússolas naturais. O fenômeno da eletricidade estática produzida por fricção era familiar aos antigos, que também conheciam as propriedades de certos peixes capazes de gerar descargas elétricas (**peixes-elétricos**).

Os **peixes-elétricos** podem armazenar eletricidade e utilizar essa carga armazenada para se defender e até mesmo atacar suas presas. No Brasil, o mais conhecido é o peixe da região amazônica *Electrophorus electricus*, conhecido popularmente por poraquê.

O termo **c.** também pode ser encontrado na forma “circa de”. É uma referência temporal e significa “por volta de”, ou “aproximadamente”.

O **âmbar** é uma substância resinosa, resultante do processo de polimerização da seiva de árvores pré-históricas. É muito usado na fabricação de jóias e peças ornamentais.

**William Gilbert**, ou Gilberd, como ele mesmo escrevia, nasceu em 1544 em Colchester, Essex, Inglaterra. As primeiras investigações científicas de Gilbert foram centradas quase que exclusivamente em Química. Gilbert foi um dos primeiros a descrever com sucesso, após exaustivos experimentos feitos com uma paciência exemplar, fenômenos elétricos e magnéticos. Seus resultados foram publicados durante o ano de 1600 sob o título *De Magnete magneticisque corporibus, et de magno magnete tellure; Physiologia nova, plurimis et argumentis et experimentis demonstrata*.

Tales de Mileto (c. 600 a.C.), Teófrasto (c. 321 a.C.) e Plínio (c. 70 d.C.) fizeram referência a uma substância resinosa que, após ser friccionada, adquiria capacidade de atrair objetos. Imagina-se que eles estivessem falando do **âmbar**.

No século XVI, Girolamo Cardano (1501-1576) foi capaz de estabelecer a diferença entre o âmbar e a magnetita. As propriedades elétricas da matéria foram também estudadas por **William Gilbert** (1544-1603), médico da rainha Elizabeth I da Inglaterra, que resumiu dezoito anos de experiências com a magnetita, com os ímãs e os materiais elétricos em seu livro *De magnete*. Nesse trabalho, é possível encontrar a primeira distinção entre materiais elétricos e não-elétricos, ou *dielétricos*; a relação entre a umidade e a eletrização; a demonstração de que a eletrização afeta os metais, os líquidos e a fumaça; a observação de que os materiais elétricos comportam-se como agentes atrativos, entre outras propriedades. Foi Gilbert quem descreveu essas propriedades como *elétricas*, do grego *ηλεκτρον* (*elektron*), que significa âmbar. Ele chamava a atração elétrica de *vis electrica*, ou força elétrica. Em 1729, o inglês Stephen Gray realizou experimentos que lhe permitiram estabelecer diferenças entre materiais *condutores* e materiais *isolantes*. Um pouco depois, em 1733, o francês Charles François du Fay, superintendente dos jardins reais, fez três descobertas de importância vital para o desenvolvimento da eletricidade, e descobriu que:

- (i) havia dois tipos de eletricidade;
- (ii) os tipos semelhantes de eletricidade repelem um ao outro;
- (iii) os tipos opostos atraem um ao outro.

Esses dois tipos de eletricidade foram posteriormente denominados *positiva* e *negativa* por **Benjamin Franklin** (1706-1790). Tal nomenclatura perdura até hoje, mas você deve ter percebido que positivo e negativo são apenas termos arbitrários para denotar os dois tipos de eletricidade; alfa e beta seriam palavras igualmente válidas.

Entretanto, a questão transcende aos aspectos experimentais e convencionais. De fato, a Física teórica moderna mostra que, na verdade, temos apenas um tipo de carga, que pode adquirir valores reais, isto é, valores positivos e negativos. Uma evidência disso é o fato de que *a mesma lei de força* dá conta das interações entre cargas positivas e negativas; outra evidência é a conservação da carga elétrica, que discutiremos mais adiante.

### Experimento 1: o pente eletrizado

Vamos realizar um simples experimento que, apesar de não fornecer resultados quantitativos, apresenta resultados qualitativos interessantes. Esse experimento depende um pouco das condições de umidade do meio ambiente no momento de sua realização. Você vai necessitar dos seguintes materiais:

- Um pente de plástico simples.
- Papel cortado em pedaços bem pequenos.

Coloque os pedacinhos de papel sobre uma mesa ou tábua. Em seguida, aproxime o pente dos pedacinhos. O que você observa? Anote esse resultado.

Esfregue agora o pente no cabelo (seu ou de um colega). O ato de pentear o cabelo várias vezes já é suficiente. Aproxime novamente o pente dos pedacinhos de papel. O que você observa? Houve alguma alteração em relação ao procedimento anterior? Anote o novo resultado.

Os resultados que você deve ter observado estão relacionados à ausência ou presença de cargas elétricas no pente e nos papéis. Mais adiante você já terá condições de fazer uma análise mais detalhada desses resultados e entendê-los melhor. Por enquanto, apenas faça as anotações, observando cada detalhe.

Vejamos, agora, como a lei fundamental de interação entre cargas elétricas, a Lei de Coulomb, foi finalmente estabelecida.

## A força entre duas cargas puntiformes: a Lei de Coulomb

Foi um cientista raramente mencionado nos livros didáticos da área (a bibliografia está no final do módulo), de nome **Franz Maria Ulrich Theodosius Aepinus** (1724-1802), quem sugeriu pela primeira vez que a força entre cargas elétricas estáticas deveria diminuir, por um lado, com o

Cargas puntiformes são cargas associadas a um ponto no espaço, e portanto não têm dimensão.

**Franz Aepinus** escreveu o primeiro livro aplicando a Matemática à eletricidade e ao magnetismo. O livro, *Tentamen theoriae electricitatis et magnetismi*, foi publicado em 1759.

aumento da distância entre elas e, por outro lado, deveria aumentar com a diminuição dessa distância. Entretanto, Aepinus não sugeriu como a força entre cargas estáticas dependia da distância, isto é, a lei de força. Em 1753, o inglês Henry Cavendish (1731-1810), talvez mais conhecido dos estudantes pela determinação experimental da constante universal de gravitação  $G$ , realizou experiências com distribuições de cargas estáticas. Essas experiências o levaram a concluir que a intensidade da força entre duas cargas elétricas é da forma

$$\|\vec{F}\| \sim \frac{1}{r^x},$$

onde  $r$  é a distância entre as cargas e  $x$  é um número real positivo.

Em 1785, **Charles Agustin Coulomb** (1736-1806) publicou o primeiro dos sete trabalhos que escreveu sobre eletricidade e magnetismo. Dois anos depois, em 1787, publicou o segundo.

Nesses dois trabalhos, Coulomb apresentou os aspectos mais relevantes da lei de força que rege as interações eletrostáticas. Embora controversas – e, para muitos, inconclusivas, as experiências de Coulomb consolidaram o modelo gravitacional do inverso do quadrado no contexto eletrostático. Coulomb utilizou balanças de torção para verificar fenômenos elétricos repulsivos e atrativos.

Escrita em notação matemática vetorial moderna, a Lei de Coulomb no **vácuo** se lê:

$$\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (1.1)$$

onde  $\vec{F}_{12}$  é a força que a carga puntiforme  $q_1$  exerce sobre a carga puntiforme  $q_2$ ,

$$\hat{r}_{12} := \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|},$$

é o vetor unitário cuja direção é dada pelo segmento de reta que une as cargas  $q_1$  e  $q_2$  com o sentido de  $q_1$  para  $q_2$ ;  $r_{12} := \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$  é a distância entre as duas cargas. A **Figura 1.1** ilustra a representação vetorial da Lei de Coulomb. Como essa lei obedece à Terceira Lei de Newton, a força que  $q_2$  exerce sobre  $q_1$  tem a mesma intensidade, a mesma direção e sentido oposto ao da força que  $q_1$  exerce sobre  $q_2$ , isto é:  $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ . Nunca é demais lembrar que o par ação e reação atua sobre corpos distintos. A constante  $K_e$  depende do sistema de unidades utilizado. No Sistema Internacional, a força é dada em

**Charles Agustin Coulomb** nasceu em 14 de junho de 1736 em Angoulême, no sul da França, em uma família de posição social elevada. Coulomb seguiu a carreira de engenheiro militar. Era grande conhecedor da teoria e prática da balança de torção, que utilizou no estudo da eletrostática.

O **vácuo** clássico é o espaço livre de matéria e energia. No cotidiano, usamos o termo vácuo para designar o espaço com uma densidade de matéria muito baixa. O termo vácuo é usual em tecnologia para referir-se a um espaço ocupado por um gás sob pressão inferior à ambiente. As técnicas de obtenção de vácuo são de grande importância em pesquisas, tais como partículas elementares. O vácuo pode ser obtido usando equipamentos especiais, chamados de bombas de vácuo.

newtons, a distância em metros e as cargas em coulomb. Portanto, a unidade de  $K_e$  é

$$\frac{\text{newton metro}^2}{\text{coulomb}^2} \quad (1.2)$$

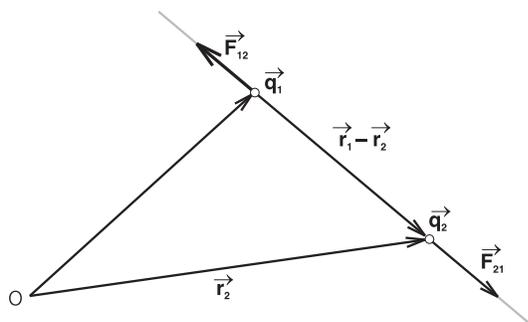


Figura 1.1: Representação vetorial da Lei de Coulomb.

### Continuação do experimento do pente eletrizado

Pegue suas anotações, referentes ao experimento que você realizou com o pente. O que ocorreu quando o pente, recém-esfregado no cabelo, foi aproximado dos pedacinhos de papel? A interação ocorrida foi do tipo atrativa ou repulsiva? Supondo que existam cargas elétricas no pente e nos pedacinhos de papel, o que podemos afirmar com relação ao tipo de carga em cada um deles?

#### Exercício 1.1

Para a constituição dos átomos e moléculas, a força de Coulomb é muito mais importante que a força gravitacional. Considere, por exemplo, um átomo de hidrogênio, que é uma estrutura formada por um elétron e um próton. Calcule a razão entre o módulo da força gravitacional  $\|\vec{F}_g\|$  e o da força eletrostática  $\|\vec{F}_e\|$  entre o elétron e o próton e mostre que

$$\frac{\|\vec{F}_g\|}{\|\vec{F}_e\|} \approx 2,3 \times 10^{-39}.$$

As constantes de que você necessita estão na **Tabela I** no final do módulo.

A lei empírica, descoberta por Coulomb, resume o acervo de fatos experimentais sobre a eletrostática, acumulados, analisados e discutidos por gerações de pesquisadores.

### Exercício 1.2

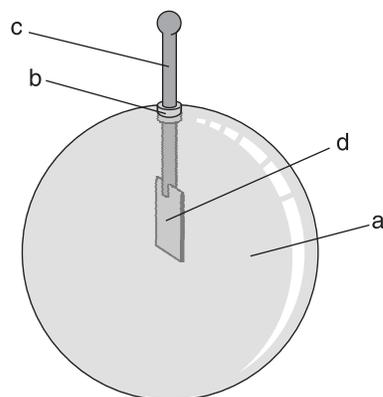
A força gravitacional entre duas massas puntiformes (a Lei da Gravitação Universal de Newton) e a força eletrostática entre duas cargas puntiformes (a Lei de Coulomb) guardam semelhanças entre si; mas, como podemos observar, guardam também diferenças. Mencione duas semelhanças e duas diferenças importantes entre essas duas leis fundamentais da Natureza. Quantos tipos de massa existem? Quantos tipos de carga existem?

*Resposta comentada: Em ambas as leis, a força de interação varia com o produto de massas ou cargas, e com o inverso do quadrado da distância. Só existe um tipo de massa, e dois tipos de carga. A força eletrostática é atrativa quando as cargas são opostas e é repulsiva quando as cargas são de mesmo tipo. Já na lei gravitacional, embora as massas sejam apenas de um tipo, a força é sempre atrativa.*

Existe um instrumento muito simples, chamado **eletroscópio**, esquematizado na **Figura 1.2**, que é capaz de evidenciar a existência de cargas elétricas e o efeito da interação entre elas.

O eletroscópio é uma ampola de vidro em cuja tampa está pendurada uma haste de cobre. Na extremidade da haste que está dentro da ampola, está pendurada uma fita de material metálico (papel-alumínio, por exemplo). A outra extremidade da haste fica para fora da ampola.

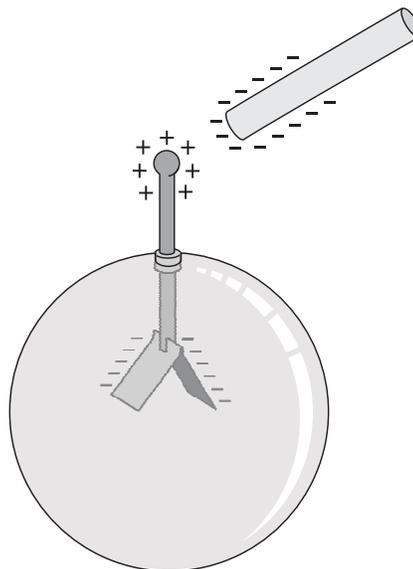
O **eletroscópio** foi inventado em 1748 por Jean-Antoine Nollet (1700-1770), padre francês, físico experimental e um dos líderes da Academia Parisiense de Ciências. Nollet foi o primeiro professor de Física Experimental da Universidade de Paris.



**Figura 1.2:** Esquemática de um eletroscópio: (a) ampola de vidro, (b) tampa, (c) haste metálica, (d) folha metálica.

Vamos supor que uma superfície carregada de cargas positivas, por exemplo uma haste de plástico, ou mesmo um pente, seja aproximada da ponta externa da haste. Veja a **Figura 1.3**. A presença das cargas positivas próximas à extremidade metálica da haste faz com que suas cargas negativas se reordenem, conforme mostra a **Figura 1.3**.

Tal processo é conhecido como indução de cargas e, por sua vez, também induz o aparecimento de cargas na fita metálica no interior da ampola, mas com sinal contrário. Como as cargas na fita metálica são de mesmo sinal, suas extremidades se repelem, e o que se observa é o afastamento entre elas. Note que a força elétrica de repulsão precisa vencer a força gravitacional que mantém as fitas na vertical. Uma maneira de garantir isso é utilizar fitas de pouca massa (fitas muito finas, por exemplo). Mas fitas com pouca massa podem sofrer influências externas, como movimentos devido a correntes de ar. Essa é uma das razões do uso da ampola. A ampola de vidro protege as fitas metálicas e garante o bom funcionamento do eletroscópio. A ampola também garante que a umidade ao redor das fitas não varia. O eletroscópio funciona em qualquer lugar, independentemente das condições de umidade do ambiente.



**Figura 1.3:** Indução de cargas elétricas por aproximação de uma superfície carregada.

### Experimento 2: O eletroscópio

Os pólos têm, à sua disposição, um eletroscópio simples. Com ele, você poderá realizar experimentos simples para verificar a existência de cargas elétricas.

Material necessário:

- eletroscópio;
- haste de **Teflon**<sup>®</sup> ou outro material plástico;
- haste metálica;
- flanela seca.

Siga as instruções:

1. Pegue a haste de Teflon<sup>®</sup>. Esfregue-a várias vezes com a flanela. Observe com cuidado a posição da fita no interior do eletroscópio. Aproxime a haste da extremidade externa do eletroscópio. Observe e anote o comportamento da fita no interior do mesmo.
2. Repita o procedimento anterior usando a haste metálica.

Observe cuidadosamente suas anotações e explique seus resultados com base no que você aprendeu, até aqui, a respeito das cargas elétricas.

**Teflon**<sup>®</sup>, aqui, refere-se ao material plástico e não ao revestimento usualmente encontrado em painéis antiaderentes.

## A permissividade elétrica $\epsilon$

No Sistema Internacional (SI) de unidades que utilizaremos aqui, a constante material  $K_e$  se escreve:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon}, \quad (1.3)$$

onde a constante  $\epsilon$  – a **permissividade elétrica** do meio – caracteriza as propriedades elétricas do **meio homogêneo e isotrópico** em torno das duas cargas puntiformes. Futuramente faremos um estudo mais detalhado da permissividade elétrica, quando tratarmos de campos elétricos. No caso em que o meio é o vácuo clássico, temos:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.4)$$

onde

$$\epsilon_0 = 8,85418782 \times 10^{-12} \frac{\text{coulomb}^2}{\text{newton metro}^2}. \quad (1.5)$$

A constante  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo e seu valor é determinado experimentalmente.

Se o meio é o ar,  $K_{\text{ar}} \approx K_{\text{vácuo}}$ . Veremos posteriormente que, para os meios materiais mais comuns, a permissividade elétrica pode ser escrita na forma  $\epsilon = \epsilon_{\text{rel}}\epsilon_0$ , onde  $\epsilon_{\text{rel}}$  é a permissividade relativa. Para o vácuo,  $\epsilon_{\text{rel}} = 1$ .

**Meio homogêneo** é aquele em que as propriedades físicas são as mesmas em todos os pontos. **Meio isotrópico** é aquele em que as propriedades físicas são independentes da direção em que são observadas.

Para cálculo simples, o valor de  $\epsilon_0$  pode ser aproximado para  $\epsilon_0 \cong 8,9 \times 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2}$ .

## O Princípio da Superposição

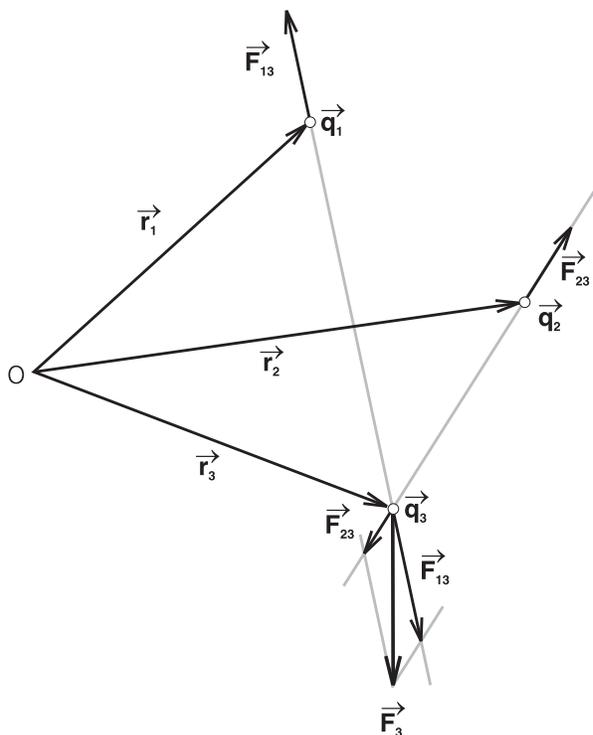
Consideremos três cargas puntiformes de valores iguais a  $q_1$ ,  $q_2$  e  $q_3$ , respectivamente, cujas distâncias relativas entre si permanecem fixas. Queremos calcular a força sobre a carga  $q_3$ . Como proceder? Uma solução é aplicar a Lei de Coulomb ao par formado por  $q_1$  e  $q_3$  e, em seguida, ao par formado por  $q_2$  e  $q_3$ , obtendo as forças  $\vec{F}_{13}$  e  $\vec{F}_{23}$  respectivamente. Finalmente, devemos somar os resultados individuais vetorialmente. Ou seja, a força resultante sobre  $q_3$ , devido às cargas  $q_1$  e  $q_2$ , seria a soma vetorial:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23},$$

ou ainda:

$$\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{r}_{23}.$$

Esse procedimento parece lógico e aparentemente simples. Observe a **Figura 1.4**, que o ilustra geometricamente.

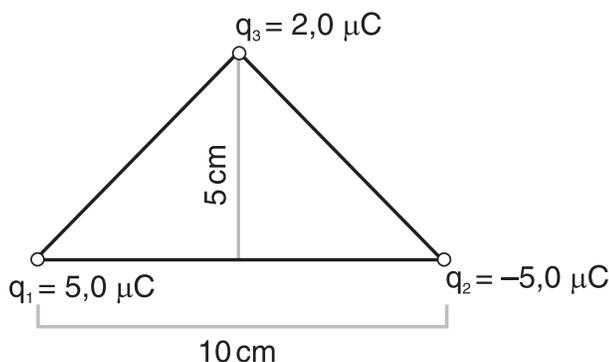


**Figura 1.4:** O Princípio da Superposição. A força resultante sobre  $q_3$  é a soma vetorial das forças exercidas por  $q_1$  e  $q_2$  separadamente.

Do ponto de vista matemático, ele está justificado pela álgebra linear. Entretanto, devemos refletir sobre ele. A reflexão nos levará à pergunta: tal procedimento corresponde a uma realidade experimental? A Natureza não tem obrigação de obedecer ao que por vezes, de modo ingênuo, chamamos lógica. Embora ela admita uma descrição matemática de muitos fenômenos, *a priori* essa descrição não tem por que ser linear. Felizmente, os experimentos mostram que o procedimento é correto. Esse modo de calcular a força eletrostática resultante, devido à interação eletrostática entre uma distribuição de cargas puntiformes e uma carga de teste, é chamado **Princípio da Superposição**. Nós o utilizaremos muitas e muitas vezes no decorrer do curso. Mas convém ter sempre em mente que os fundamentos da sua utilização são empíricos e não lógicos.

**Exemplo 1.1. Uma aplicação simples do Princípio da Superposição**

Duas cargas puntiformes  $q_1 = 5,0 \mu\text{C}$  e  $q_2 = -5,0 \mu\text{C}$  estão separadas por uma distância de 10cm. Queremos determinar a força sobre uma terceira carga  $q_3 = 2,0 \mu\text{C}$ , colocada sobre a mediatriz do segmento de reta que une  $q_1$  e  $q_2$ , a uma distância de 5cm do ponto médio desse segmento. A **Figura 1.5** ilustra a situação:



**Figura 1.5:** Uma aplicação simples do Princípio da Superposição.

*Solução.* Pelo Princípio da Superposição, podemos escrever:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}.$$

Por simetria, podemos escrever  $F_{13,\perp} = -F_{23,\perp}$ , onde o símbolo  $\perp$  denota componente perpendicular ao segmento de reta que une as cargas  $q_1$  e  $q_2$ ; por outro lado, temos  $F_{3,\parallel} = F_{13,\parallel} + F_{23,\parallel} = 2F_{13,\parallel}$ , onde o símbolo  $\parallel$  denota a componente paralela ao segmento de reta que une as cargas  $q_1$  e  $q_2$ . Podemos então escrever  $2F_{13,\parallel} = 2\|\vec{F}_{13}\| \cos \theta$ , ou ainda:

$$F_{3,\parallel} = 2 \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r^2} \cos \theta.$$

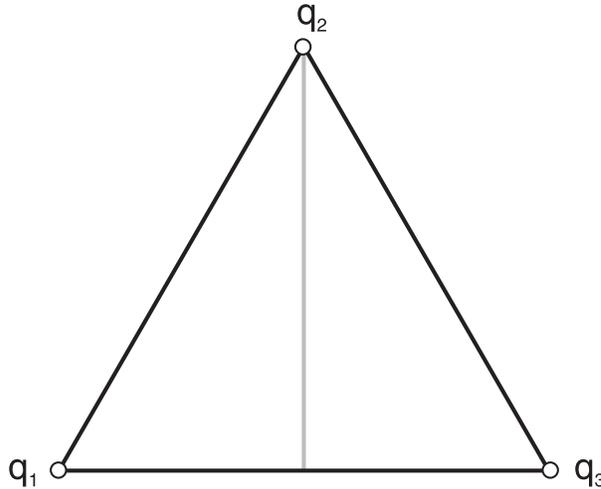
Como  $\theta = \pi/4$ , temos:

$$\begin{aligned} F_{3,\parallel} &= 2 \times 9 \times 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} (5 \times 10^{-6} \text{C})^2 \frac{\sqrt{2}/2}{(1 \times 10^{-2} \text{m})^2} \\ &\approx 3 \text{N}. \end{aligned}$$

### Exemplo 1.2. Outra aplicação simples do Princípio da Superposição.

Três cargas iguais de valor  $q_1 = q_2 = q_3 = e = 1,6 \times 10^{-19}\text{C}$  são colocadas nos vértices de um triângulo equilátero de lado igual a  $1,64\text{Å}$ . Queremos calcular a força eletrostática sobre uma das cargas.

*Solução.* Considere a carga indicada na **Figura 1.6**



**Figura 1.6:** A força resultante sobre  $q_3 = -e$  é a soma vetorial das forças exercidas por  $q_1 = -e$  e  $q_2 = -e$ .

A intensidade da força resultante sobre esta carga é:

$$\|\vec{F}_3\| = \sqrt{\|\vec{F}_{13}\|^2 + \|\vec{F}_{23}\|^2 + 2\|\vec{F}_{13}\|\|\vec{F}_{23}\|\cos\frac{\pi}{3}}.$$

Por simetria, temos  $\|\vec{F}_{13}\| = \|\vec{F}_{23}\|$ , logo:

$$\|\vec{F}_3\| = \sqrt{2\|\vec{F}_{13}\|^2\left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right)}.$$

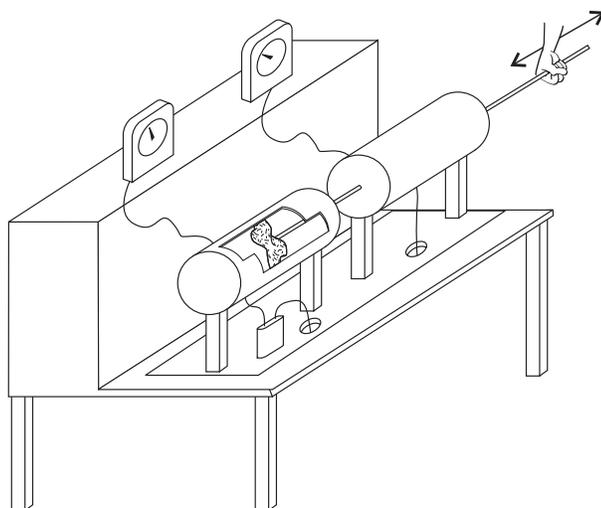
Lembrando que  $\cos\pi/3 = 1/2$ , obtemos:

$$\|\vec{F}_3\| = \sqrt{3}\|\vec{F}_{13}\| = \sqrt{3} \times 9,0 \times 10^9 \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{(1,64 \times 10^{-10})^2} \text{N} \approx 1,56 \times 10^{11} \text{N}.$$

A força resultante forma um ângulo de  $\pi/6$  radianos em relação à reta que une as cargas  $q_1$  e  $q_3$ .

## A conservação da carga elétrica

Na Natureza, a carga elétrica total de um sistema isolado não é nunca criada ou destruída, mas sim conservada. Isso foi sugerido pela primeira vez por volta de 1746, por William Watson (1715-1789). Hoje em dia, esse aspecto importante da propriedade da matéria, que denominamos carga elétrica, está firmemente comprovado por muitas experiências. Descreveremos a seguir um experimento moderno, projetado por Wolfgang Rueckner, Douglass Goodale, Daniel Rosenberg e David Tavilla, da Universidade Harvard, capaz de demonstrar a conservação da carga elétrica. O experimento é ilustrado na **Figura 1.7**.



**Figura 1.7:** Esquemática da demonstração experimental da conservação da carga elétrica.

Se atritarmos uma pele de coelho em uma superfície de Teflon<sup>®</sup> haverá uma transferência de cargas negativas (elétrons) da pele de coelho para o Teflon<sup>®</sup>. Como resultado, o Teflon<sup>®</sup> fica negativamente carregado e a pele de coelho positivamente carregada. Entretanto, a quantidade de carga elétrica que encontramos em cada um desses materiais é, em valor absoluto, igual, embora os sinais algébricos sejam opostos.

O principal problema com experiências de eletrostática é medir as cargas antes que os corpos eletrizados percam a carga acumulada para a atmosfera ou para outros corpos. No laboratório, isso pode ser contornado do seguinte modo: conectamos dois cilindros de alumínio separadamente a dois eletrômetros, instrumentos capazes de medir carga elétrica. Um dos ci-

lindros é internamente revestido com Teflon<sup>®</sup>, o outro não. Os cilindros são alinhados de modo a formar quase um único cilindro, pois há uma pequena separação de um a dois centímetros entre eles; veja a **Figura 1.7**. É preciso também assegurar que os cilindros metálicos tenham a mesma capacidade de armazenar carga. Isso é possível conectando cada cilindro a um capacitor.

Agora fazemos deslizar a pele de coelho por dentro dos cilindros, puxando-a por meio de um fio não-condutor, primeiro pelo cilindro revestido de Teflon<sup>®</sup> e depois pelo cilindro metálico sem revestimento. A pele de coelho produzirá, por atrito, um excesso de cargas negativas no primeiro cilindro. Esse excesso de carga negativa aparecerá como uma indicação de carga negativa no eletrômetro. A seguir, puxamos a pele de coelho através do segundo cilindro de alumínio. A pele de coelho carregada entra em contato com a superfície do segundo cilindro, e há uma redistribuição das cargas elétricas. Se a Lei da Conservação da Carga for verdadeira, o segundo eletrômetro indicará uma carga elétrica positiva, igual em valor absoluto à indicada pelo eletrômetro conectado ao primeiro cilindro. Isso significará que a quantidade de carga negativa é igual à quantidade de carga positiva e que a carga total é conservada. *E é o que acontece com uma precisão de quase 100%!*, excelente, portanto, para uma experiência relativamente rudimentar. Antes de iniciarmos o experimento, a carga total na pele de coelho e nos cilindros era nula; ao final, continuamos com carga total nula.

### Exercício 1.3

Suponha que, no experimento sobre a conservação da carga elétrica descrito no texto, o segundo cilindro carregado seja conectado momentaneamente à Terra (neutralizado-se eletricamente) e, depois, conectado ao primeiro, o qual, lembre-se, ainda está carregado. Qual será a leitura nos eletrômetros?

*Resposta: A leitura será a mesma e indicará metade da carga que havia no primeiro cilindro, pois a carga irá se dividir entre eles.*

**Exercício 1.4**

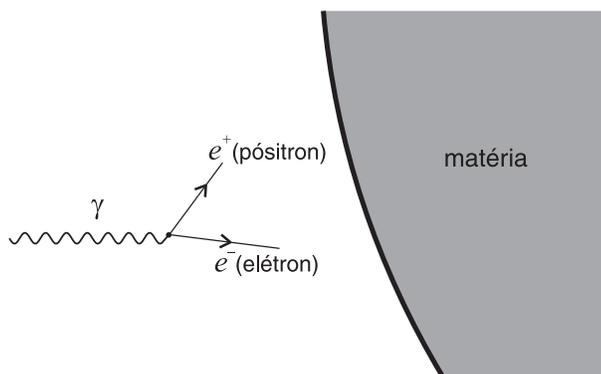
Suponha que, no experimento de Rueckner sobre a conservação da carga elétrica, os dois cilindros tenham adquirido uma carga igual em valor absoluto. Os dois cilindros são, então, ligados entre si. Qual será a leitura nos eletrômetros?

*Resposta: Zero*

São inúmeros os exemplos da manifestação da Lei da Conservação da Carga Elétrica total em um sistema isolado. Um dos mais espetaculares é o processo de criação de pares formados por uma partícula carregada e sua correspondente antipartícula. Sob certas condições, um fóton de altíssima energia dá origem a um par de cargas de mesmo valor absoluto, porém de sinais algébricos opostos, por exemplo, um elétron e um pósitron. O fóton ( $\gamma$ ) tem carga elétrica nula, o elétron ( $e^-$ ) tem uma unidade de carga elétrica fundamental negativa – veja a seção seguinte – e o pósitron ( $e^+$ ), uma unidade de carga elétrica fundamental positiva. O processo de decaimento é descrito pela fórmula

$$\gamma \rightarrow e^- + e^+.$$

Antes do decaimento, tínhamos carga total nula; depois, continuamos com carga total nula, já que a soma algébrica no lado direito da equação que descreve o decaimento é também nula.



**Figura 1.8:** Criação de pares.

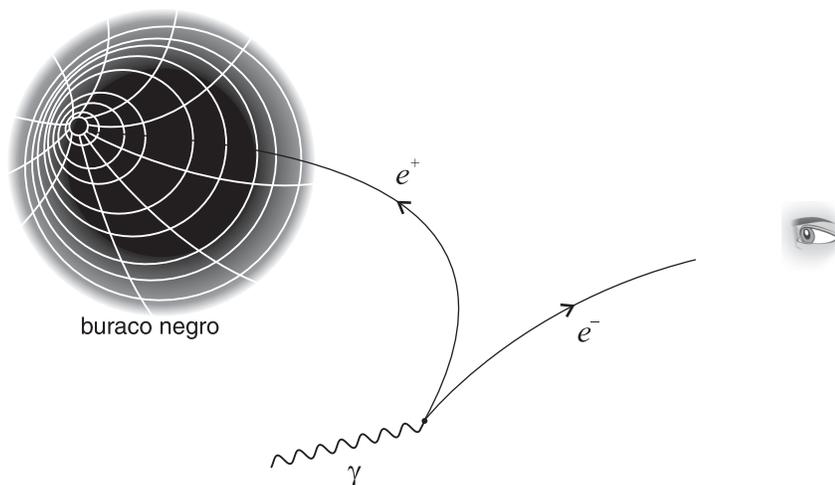
Nossa confiança na Lei de Conservação da Carga Elétrica é tanta que, em algumas situações, ela nos leva a prever fenômenos ainda não observados.

**Stephen Hawking** é um físico inglês, nascido em Oxford em 1942. Professor da Universidade de Cambridge, Inglaterra, onde ocupa a cadeira anteriormente ocupada por Newton, dedicou grande parte do seu trabalho aos estudos matemáticos sobre a origem do Universo, na teoria conhecida como *Big Bang*, e ao estudo de buracos negros. Publicou alguns livros de divulgação científica conhecidos tais como *Uma breve história do tempo* (1988), *Os buracos negros* (1992) e, mais recentemente, *O universo em uma casca de nóz* (2002).

Os **buracos negros** são corpos celestes cuja densidade de massa é infinitamente grande (uma massa muito grande contida em um volume muito pequeno). O campo gravitacional em torno desses corpos é colossalmente grande, e nem mesmo a luz pode escapar, por isso não podem ser vistos. A expressão “buraco negro” foi adotada pela primeira vez pelo cientista norte-americano John Wheeler, em 1969, para descrever uma idéia surgida 200 anos antes. Em 1783, o professor de Cambridge John Michell escreveu um trabalho, onde disse que poderia haver uma estrela compacta com massa suficiente para que nem a luz pudesse escapar de sua atração gravitacional. Alguns anos depois, Laplace fez a mesma proposição, de forma independente, mas só a incluiu nas duas primeiras edições de seu livro *O sistema do mundo*.

É o caso da radiação Hawking, sugerida teoricamente pelo físico britânico **Stephen Hawking**.

Perto de um **buraco negro** pode haver criação de pares de partículas elétron-positron, como na **Figura 1.9**. O que cria o par de partículas é o campo gravitacional muito intenso do buraco negro. Um dos componentes do par, digamos, o **positron**, é tragado pelo buraco negro; o outro, agora sem seu parceiro, torna-se observável como radiação Hawking, ao mesmo tempo que o buraco negro adquire carga elétrica.



**Figura 1.9:** Radiação Hawking.

## A quantização da carga elétrica

Na maior parte das vezes, é possível pensar na carga elétrica como uma propriedade da matéria que, do ponto de vista quantitativo, pode assumir valores reais continuamente, desde  $-\infty$  até  $+\infty$ . Por exemplo, para o engenheiro que projeta um circuito, é natural pensar na corrente elétrica – isto é, na carga elétrica em movimento – como um fluido carregado. Nós mesmos, em muitos momentos deste curso, imaginaremos os fenômenos elétricos como contínuos. A natureza granular da carga elétrica só pode ser percebida sob certas condições experimentais. Em nossa vida diária, a eletricidade se revela como uma propriedade contínua da matéria. Entretanto, hoje sabemos que a carga elétrica que um corpo material eventualmente possui não é contínua, mas é um múltiplo inteiro de uma unidade básica de carga. Experimental-

mente, o **valor da carga elétrica fundamental** é dado em unidades do Sistema Internacional por:

$$e = 1,60217733 \times 10^{-19} \text{C}.$$

Qualquer valor  $q$  para a carga elétrica de um corpo eletrizado é um múltiplo inteiro desse valor fundamental, isto é,

$$q = ne, \quad n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

A quantização da carga elétrica foi verificada experimentalmente pela primeira vez em 1909, em um experimento clássico, realizado por **Robert A. Millikan**. Analisaremos esse experimento mais adiante, quando estudarmos o movimento de partículas carregadas sob a ação de forças eletrostáticas.

Para os cálculos que você fará ao longo deste curso, podemos usar o valor aproximado:  $e \approx 1,60 \times 10^{-19} \text{C}$ . Essa aproximação implicará uma incerteza menor que 0,2%.

**Robert Andrews Millikan** (1868-1953), físico americano ganhador do prêmio Nobel de 1923 por seus trabalhos na determinação do valor da carga do elétron.

### Exercício 1.5

Calcule o número de elétrons que deveriam ser arrancados do planeta Terra e de seu satélite, a Lua, para que a repulsão coulombiana igualasse a atração gravitacional.

*Resposta:*  $3,58 \times 10^{32}$  elétrons.

## Leituras complementares

Sugerimos a leitura de alguns livros que também tratam de tópicos abordados nesta aula. Você pode consultar como material complementar, por exemplo:

HALLIDAY, David.; RESNICK, Robert.; WALKER, E Jearl.

*Física*. v.3: eletromagnetismo. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. Cap. 22.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Edgard Blücher, v.:3: eletromagnetismo, 1997.

TIPLER, Paul A. *Física para cientistas e engenheiros*. 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. v.2.

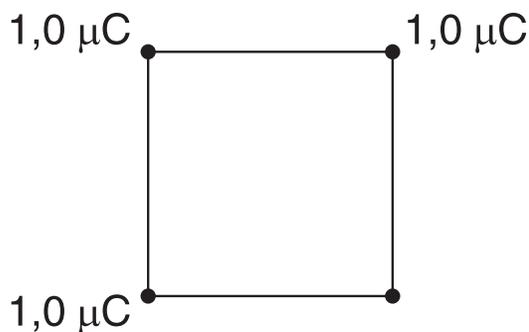
## Atividades Finais

Os problemas a seguir servem para verificar os conhecimentos que você adquiriu nesta aula. O grau de dificuldade vai de fácil a moderadamente difícil. Você só deve passar para a aula seguinte se conseguir resolver todos. Discuti-los em grupos de dois ou três colegas pode ser uma boa idéia. Não hesite em pedir orientação ao tutor, mas não espere que ele resolva os problemas para você!

**Problema 1.1:** Uma certa carga fixa  $Q$  deve ser dividida em duas partes,  $Q - q$  e  $q$ . *Mostre* que a relação entre  $Q$  e  $q$  para que a repulsão coulombiana seja máxima é  $q = Q/2$ .

**Problema 1.2:** A força coulombiana de atração entre duas cargas puntiformes de  $1\text{C}$ , sinais opostos e separadas por uma distância de  $1\text{m}$  vale, em magnitude, aproximadamente  $9 \times 10^9\text{N}$ . Para ter uma idéia melhor do que isso significa, é mais proveitoso fazer comparações. Por exemplo, determine o tamanho que deve ter a aresta de um cubo de chumbo para que ele pese  $9 \times 10^9\text{N}$ . A densidade do chumbo é  $\rho_{\text{Pb}} = 1,13 \times 10^4\text{kg/m}^3$ .

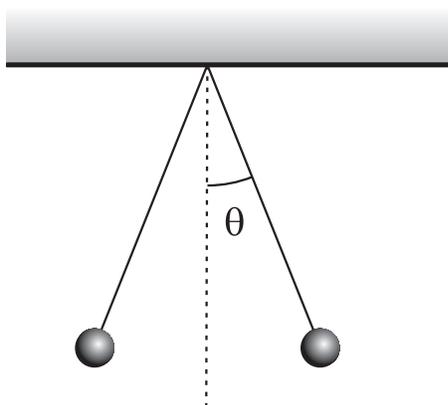
**Problema 1.3:** Uma carga puntiforme de  $1,0 \mu\text{C}$  é colocada em três dos quatro vértices de um quadrado com  $20,0\text{cm}$  de lado (veja **Figura 1.10**). Determine a força coulombiana resultante (módulo, direção e sentido) sobre uma carga puntiforme de  $3,0 \mu\text{C}$ , se esta for colocada no centro do quadrado. Explique como seria possível manter esse arranjo em equilíbrio mecânico.



**Figura 1.10:** Problema 1.3.

**Problema 1.4:** Refaça o problema anterior para o caso em que a carga de  $3,0 \mu C$  for colocada no vértice vazio do quadrado. Se uma carga adicional de  $1,0 \mu C$  for colocada no centro do quadrado, qual será a força elétrica resultante sobre ela?

**Problema 1.5:** Considere duas esferas idênticas carregadas e suspensas por meio de fios de seda de comprimento  $\ell$ , como ilustrado na **Figura 1.11**. Ambas as esferas têm raio  $a$ , massa  $M$  e carga  $q$ , e seus respectivos centros geométricos estão separados por uma distância fixa  $d$ .



**Figura 1.11:** Problema 1.5.

- (a) Em que condições podemos aplicar a Lei de Coulomb para descrever a repulsão eletrostática entre as esferas? Justifique cuidadosamente a sua resposta.
- (b) Obtenha uma expressão para a distância  $x$  em função de  $q$ ,  $\ell$ ,  $M$  e  $g$ , válida para pequenos afastamentos da posição vertical.

**Problema 1.6:** A **Figura 1.12** representa uma variante do **Problema 1.5**. A principal diferença é que os pontos de suspensão  $A$  e  $B$  estão separados por uma distância fixa  $d$ .

- (a) Mostre que:

$$(2\ell \sin \theta + d)^2 \tan \theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mg}.$$

- (b) De que modo esse arranjo poderia ser empregado para testar a Lei de Coulomb?

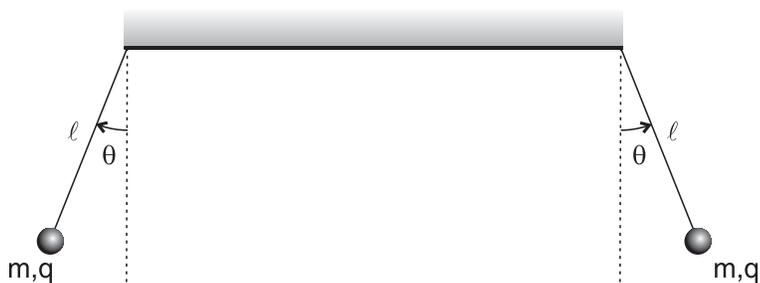


Figura 1.12: Problema 1.6.

**Problema 1.7:** Considere a configuração de cargas puntiformes mostradas na Figura 1.13.

- (a) Obtenha uma expressão para a força resultante  $\vec{F}_0(x)$  sobre a carga de prova  $q_0$ , como função da distância  $x$  entre a carga de prova e a carga  $q_2 = -2q$ .
- (b) A partir do resultado anterior, obtenha uma expressão aproximada para  $\vec{F}_0(x)$  no limite em que  $a/x \ll 1$ .
- (c) Repita o cálculo anterior no limite em que  $x/a \ll 1$ .

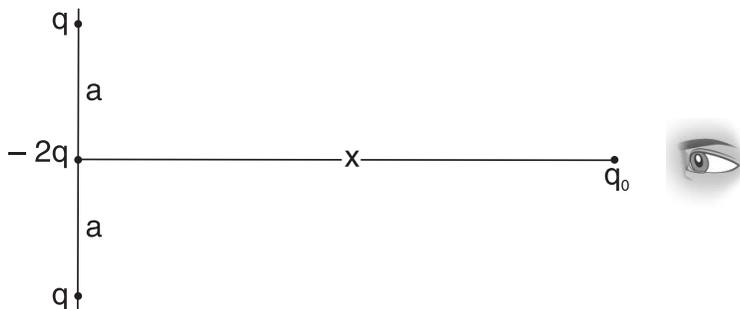
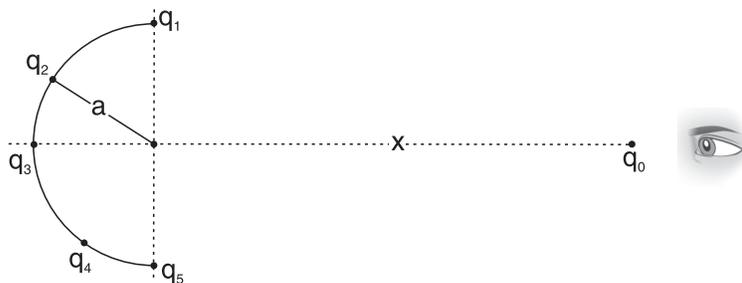


Figura 1.13: Problema 1.7. Para esta configuração,  $q_1 = q_3 = q$ ,  $q_2 = -2q$  e  $q_4 = q_0$ .

**Problema 1.8:** A Figura 1.14 mostra cinco cargas puntiformes, de mesmo valor, dispostas sobre um semicírculo de raio  $a$ . A distância entre duas cargas contíguas quaisquer é a mesma.

- (a) Determine uma expressão para a força resultante  $\vec{F}_0(x)$  sobre uma carga de prova  $q_0$  colocada a uma distância  $x$  do ponto  $O$ .
- (b) A partir do resultado anterior, obtenha uma expressão aproximada para  $\vec{F}_0(x)$  no limite em que  $a/x \ll 1$ .



**Figura 1.14:** Problema 1.8. Para a configuração mostrada na figura,  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q$ ,  $q_6 = q_0$ .

**Problema 1.9:** A **Figura 1.15** representa um modelo simples para a colisão entre uma partícula alfa,  $\alpha$ , o núcleo do átomo de hélio,  $q_\alpha = +2e$  e uma molécula de hidrogênio,  $H_2$  (não faça confusão com o hidrogênio atômico!). A partícula  $\alpha$  move-se sobre uma trajetória perpendicular ao eixo internuclear, em que temos dois prótons puntiformes, ou seja, sem estrutura interna, separados por uma distância  $D$ . Os elétrons da molécula são representados por uma nuvem simétrica de carga igual a  $-2e$ . Suponha que a velocidade da partícula  $\alpha$  seja muito alta e despreze a interação dela com a nuvem eletrônica.

- Determine uma expressão para a força coulombiana sobre a partícula  $\alpha$  quando ela se encontra a uma distância  $x$  do centro da molécula, o ponto  $P$  na **Figura 1.15**.
- Para que valor de  $x$  essa força é máxima?

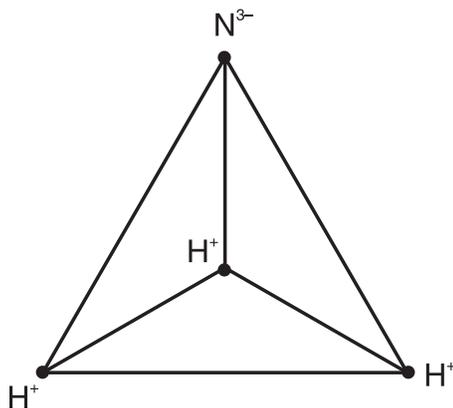


**Figura 1.15:** Problema 1.9.

**Problema 1.10:** A disposição geométrica da molécula de amônia,  $NH_3$ , pode ser descrita por um tetraedro regular de aresta igual a  $1,64\text{\AA}$ ; os três íons de  $H^+$  ocupam os vértices da base do tetraedro e o íon  $N^{3-}$ , o vértice remanescente. Veja a **Figura 1.16**. Calcule:

- A força eletrostática sobre um íon  $H^+$ .

(b) A força eletrostática sobre o íon  $N^{3-}$ .



**Figura 1.16:** Problema 1.10. Molécula de amônia. A ligação é iônica, os três hidrogênios cedem seus elétrons para o nitrogênio, que adquire carga igual a  $-3e$ .

O Problema 1.2 mostra a intensidade das interações elétricas. O fato de que um objeto sólido não entrar em outro se deve a essas interações. Se fosse possível inspecionar o ponto de contato entre dois objetos colocados um sobre o outro, seria possível ver que eles nem mesmo chegam a se tocar! A repulsão coulombiana impede o contato total.

## Resumo

As bases da eletrostática são fundamentalmente empíricas. A Lei de Coulomb é uma síntese de fatos experimentais, acumulados ao longo de muitos anos. A carga elétrica é uma propriedade da matéria, podendo ser tanto positiva quanto negativa. A Lei de Coulomb descreve a força de interação existente entre cargas elétricas puntiformes e é escrita na forma:

$$\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}.$$

A Lei de Coulomb segue o Princípio da Superposição; ou seja, a força em uma determinada carga  $q$  é a resultante de todas as forças devido a todas as cargas ao seu redor. A Lei de Coulomb e o Princípio da Superposição são aplicáveis em diferentes configurações de cargas elétricas. Na Natureza, a carga elétrica total de um sistema isolado não é nunca criada ou destruída, mas sim conservada. A carga elétrica que um corpo material eventualmente

possua não é contínua, mas um múltiplo inteiro de uma unidade básica cujo valor é igual à carga do elétron:

$$e = 1,60217733 \times 10^{-19}\text{C}.$$

## Auto-Avaliação

Agora que você chegou ao final desta aula, deve saber explicar os resultados observados nos experimentos com o pente eletrizado e com o eletroscópio. Se não souber, volte a ler as duas primeiras seções desta aula (Introdução e Lei de Coulomb).

Você deve ter condições de resolver, no mínimo, os problemas de 1 a 8. Caso tenha tido dificuldades com eles, volte a ler as seções Lei de Coulomb e Princípio da Superposição. Veja também os exemplos 1.1 e 1.2.



## Aula 2 – O campo elétrico: distribuições discretas de carga

### Meta da aula

Apresentar o conceito de campo elétrico e aplicá-lo às distribuições discretas de carga.

### Objetivos

Ao final do estudo desta aula, você deverá ser capaz de:

- Perceber que a interação eletrostática pode ser descrita por meio do conceito de campo elétrico.
- Aplicar o conceito de campo elétrico a distribuições discretas de cargas elétricas.

### Pré-requisitos

Para que você possa acompanhar esta aula, é fundamental a leitura da Aula 1 deste módulo, a interação eletrostática: a Lei de Coulomb. Também é aconselhável que você revise a Aula 2, do Módulo 4 do Volume 4 do curso de Introdução às Ciências Físicas.

### Introdução

Na Aula 1 deste módulo vimos que existem cargas elétricas e como elas interagem entre si. Foram apresentados e discutidos a Lei de Coulomb e o Princípio da Superposição.

Nesta aula introduziremos o conceito de campo elétrico e o aplicaremos a **distribuições discretas** de cargas elétricas. Como na aula anterior, nem tudo será novidade, pois os grandes protagonistas serão, novamente, a Lei de Coulomb e o Princípio da Superposição.

**Distribuição discreta** de cargas elétricas é uma configuração formada por um número finito de cargas puntiformes.

### O campo elétrico

O conceito de campo elétrico surge diretamente da compreensão da interação eletrostática entre cargas, que já foi vista na Aula 1 deste módulo.

Vamos, a seguir, lembrar como ocorre esta interação para um conjunto de várias cargas.

Consideremos uma coleção formada por  $N$  cargas puntiformes:

$$q_1, q_2, \dots, q_k \dots q_N,$$

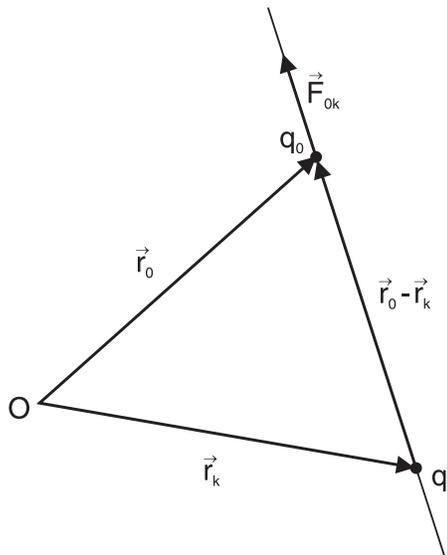
colocadas em posições fixas, e uma carga puntiforme adicional  $q_0$ .

A esse tipo de arranjo de cargas puntiformes chamaremos distribuição discreta.

Vamos supor que a distribuição discreta esteja no vácuo. A força eletrostática que uma das cargas da coleção – digamos, a carga  $q_k$  – exerce sobre a carga  $q_0$  é dada pela **Lei de Coulomb**:

$$\vec{F}_{0k} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_k q_0}{r_{0k}^2} \hat{r}_{0k} \quad (2.1)$$

onde  $r_{0k} = \|\vec{r}_0 - \vec{r}_k\|$ , e  $\hat{r}_{0k} = (\vec{r}_0 - \vec{r}_k) / \|\vec{r}_0 - \vec{r}_k\|$  é o vetor unitário cuja direção é dada pelo segmento de reta que une  $q_k$  a  $q_0$  e que tem sentido de  $q_k$  para  $q_0$ . Veja a **Figura 2.1**.



**Figura 2.1:** Força eletrostática que a carga  $q_k$  exerce sobre a carga  $q_0$ .

A força eletrostática total sobre a carga  $q_0$  pode ser calculada por meio da Lei de Coulomb e do Princípio da Superposição:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_{01} + \vec{F}_{02} + \vec{F}_{03} + \dots + \vec{F}_{0N} \quad (2.2)$$

A **Lei de Coulomb** foi estudada na Aula 1 deste módulo, e na Aula 1 do Módulo 4 do curso de Introdução às Ciências Físicas.

Como cada termo na Equação 2.2 é da forma dada pela Equação 2.1, podemos escrever:

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_0}{r_{01}^2} \hat{r}_{01} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_0}{r_{02}^2} \hat{r}_{02} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3 q_0}{r_{03}^2} \hat{r}_{03} + \dots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_N q_0}{r_{0N}^2} \hat{r}_{0N}$$

ou seja,

$$\vec{F}_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_{0k}^2} \hat{r}_{0k} \quad (2.3)$$

onde pusemos em evidência os fatores comuns.

Observe a Equação 2.3. Vamos verificar o que ocorre quando a dividimos por  $q_0$ . Isso significa que temos

$$\frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_{0k}^2} \hat{r}_{0k} \quad (2.4)$$

Observe o termo da direita na Equação 2.4. Ele não contém a carga  $q_0$ . Podemos concluir que, na posição ocupada por essa carga  $q_0$ , existe uma quantidade vetorial que depende exclusivamente da distribuição discreta das demais cargas e não de  $q_0$ . Assim, se na posição ocupada previamente pela carga  $q_0$  colocarmos (sem desmanchar o arranjo formado pelas cargas discretas) uma outra carga  $q'_0$ , a força sobre essa carga será dada pela Equação 2.3 com  $q_0$  substituído por  $q'_0$ . Esta é a base fundamental para a formulação do conceito de campo elétrico.

Estes fatos sugerem a possibilidade de descrever a eletrostática de modo independente da carga que sofre a ação de uma dada distribuição fixa de cargas. Em outras palavras, a distribuição discreta de cargas puntiformes cria uma propriedade em cada ponto do espaço que pode ser descrita por uma grandeza vetorial. Se soubermos como calcular essa grandeza vetorial, podemos calcular a força eletrostática sobre qualquer carga colocada em um ponto arbitrário desse espaço, tenha ela o valor  $q_0$ ,  $q'_0$  ou qualquer outro. Essa grandeza vetorial recebe o nome de *campo elétrico* e seu símbolo matemático é  $\vec{E}$ . Observe novamente a Equação 2.4. Podemos identificar a quantidade  $\vec{E}(P)$ , ou seja, o campo elétrico no ponto  $P$  como sendo:

$$\frac{\vec{F}_0}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_{0k}^2} \hat{r}_{0k} = \vec{E}(P) \quad (2.5)$$

ou seja,

$$\frac{\vec{F}_0}{q_0} = \vec{E}(P) \quad (2.6)$$

Observe a Equação 2.6. Dela se pode deduzir que a unidade de campo elétrico é definida como a divisão entre unidades de força e unidades de carga. No Sistema Internacional (S.I.) de unidades, a unidade de campo elétrico é o newton/coulomb, ou N/C.

Formalmente, o campo elétrico é definido por:

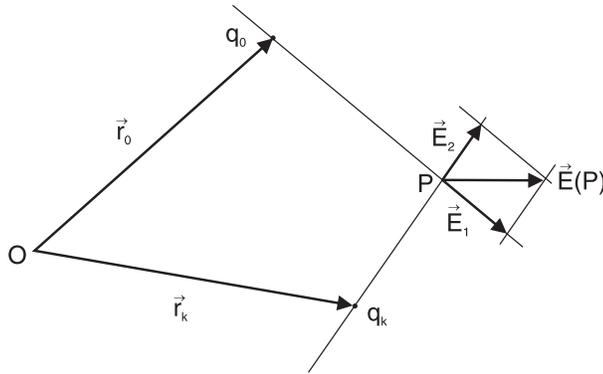
$$\vec{E}(P) := \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_0}{q_0} \quad (2.7)$$

onde  $q_0 \rightarrow 0$  agora representa uma carga puntiforme infinitesimal colocada em um ponto arbitrário  $P$  do espaço. A exigência de que a carga  $q_0$  seja arbitrariamente pequena serve para não perturbar a distribuição de cargas discretas que gera o campo elétrico no ponto de observação. Cargas infinitesimais que não provocam rearranjos na distribuição de cargas discretas que geram o campo elétrico são chamadas cargas de prova ou de teste, ou ainda cargas-teste. As cargas que geram o campo são chamadas cargas-fonte ou simplesmente fontes.

No caso da distribuição discreta de cargas que estamos considerando, e observando a Equação 2.4, o campo elétrico é dado por:

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_{Pk}^2} \hat{r}_{Pk} \quad (2.8)$$

onde agora  $r_{Pk} = \|\vec{r}_P - \vec{r}_k\|$ , e  $\hat{r}_{Pk} = (\vec{r}_P - \vec{r}_k) / \|\vec{r}_P - \vec{r}_k\|$  é o vetor unitário cuja direção é dada pelo segmento de reta que une  $q_k$  ao ponto arbitrário  $P$  do espaço e tem sentido de  $q_k$  para  $P$ . Veja a **Figura 2.2**.



**Figura 2.2:** O campo elétrico no ponto de observação  $P$  é uma consequência do Princípio da Superposição.

O leitor mais atento não deixará de se perguntar: o que acontece quando o ponto de observação coincide com a posição de uma das cargas da distribuição discreta? A resposta é: a Equação 2.8 não é bem definida nesses pontos, isto é, quando  $\vec{r}_P - \vec{r}_k = 0$ . Não há muito sentido em calcular o campo exatamente no ponto onde se encontra uma carga. Esses pontos serão omitidos nos cálculos que envolvem o campo elétrico.

### Exemplo 2.1. O campo elétrico de uma carga puntiforme.

Quando temos apenas uma carga puntiforme ( $N = 1$ ), a Equação 2.8, que descreve o campo elétrico no ponto  $P$ , conduz a:

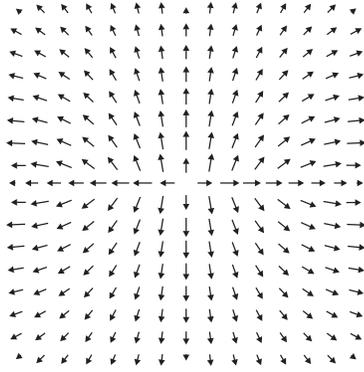
$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{P1}^2} \hat{r}_{P1}$$

onde  $r_{P1} = \|\vec{r}_P - \vec{r}_1\|$ , e  $\hat{r}_{P1} = (\vec{r}_P - \vec{r}_1) / \|\vec{r}_P - \vec{r}_1\|$ . Se colocarmos a carga puntiforme na origem, então  $\vec{r}_1 = 0$ , a norma do campo elétrico dependerá somente de  $r = \|\vec{r}_P\|$  e apresentará simetria esférica. Fazendo  $q_1 = q$ , temos:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} \quad (2.9)$$

onde omitimos a referência ao ponto  $P$ , por ser desnecessária no momento, e escrevemos  $\hat{r} = \vec{r}/r$ . A **Figura 2.3** representa o campo elétrico gerado por uma carga puntiforme colocada na origem.

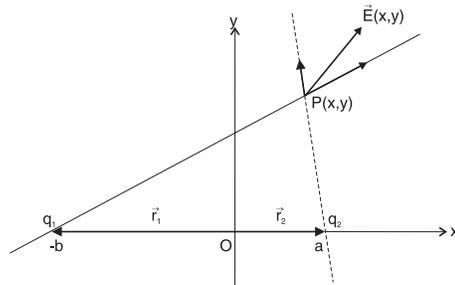
A cada ponto do espaço foi atribuído um segmento de reta radialmente orientado. O tamanho do segmento representa a intensidade do campo elétrico e diminui à medida que o ponto  $P$ , local de observação, estiver mais distante da origem. Evidentemente, apenas alguns pontos são representados.



**Figura 2.3:** Campo elétrico criado por uma carga puntiforme colocada na origem.

**Exemplo 2.2. O campo elétrico de duas cargas puntiformes em coordenadas cartesianas.**

Suponhamos que se queira expressar o campo elétrico em um ponto  $P$  do plano  $XY$ , o ponto de observação, para a configuração de cargas puntiformes da **Figura 2.4** em função de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $a$ ,  $b$  e das coordenadas  $x$  e  $y$ .



**Figura 2.4:** Campo elétrico criado por duas cargas puntiformes. Nessa figura, escolhemos  $q_1 > q_2 > 0$  e  $a > b > 0$ .

Pelo Princípio da Superposição, temos:

$$\vec{E}(P) \equiv \vec{E}(x, y) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_1)}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|^3} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_2)}{\|\vec{r} - \vec{r}_2\|^3}$$

Da **Figura 2.4**, vemos que  $\vec{r}_1 = -b\hat{x}$  e  $\vec{r}_2 = a\hat{x}$ . Como  $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$ , podemos escrever:

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = (x + b)\hat{x} + y\hat{y}$$

e

$$\vec{r} - \vec{r}_2 = (x - a)\hat{x} + y\hat{y}$$

Fazendo as substituições pertinentes, segue que:

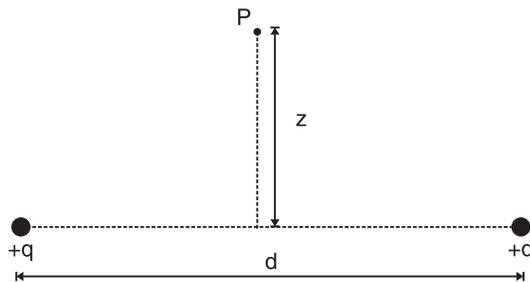
$$\vec{E}(x, y) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x + b)\hat{x} + y\hat{y}]}{[(x + b)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x - a)\hat{x} + y\hat{y}]}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}}$$

A extensão desse resultado para três dimensões, isto é, para um ponto  $P(x, y, z)$ , é imediata. O resultado é:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x + b)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}]}{[(x + b)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{[(x - a)\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}]}{[(x - a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}$$

### Exercício 2.1

Determine o campo elétrico  $\vec{E}$  em um ponto  $P$  a uma distância  $z \geq 0$  acima do ponto médio do segmento de reta que une duas cargas puntiformes idênticas de magnitude igual a  $q$  (veja Figura do Exercício 2.1). A distância entre as cargas vale  $d$ . Que resultado você obtém quando  $z = 0$ ? Ele é fisicamente razoável?



**Figura 2.5:** Figura do Exercício 2.1.

## Exercício 2.2

Suponha que no Exercício 2.1 uma das cargas puntiformes digamos, a da esquerda seja trocada por outra de valor igual a  $-q$  (veja Figura do Exercício 2.2). Determine  $\vec{E}$  em  $P$ .

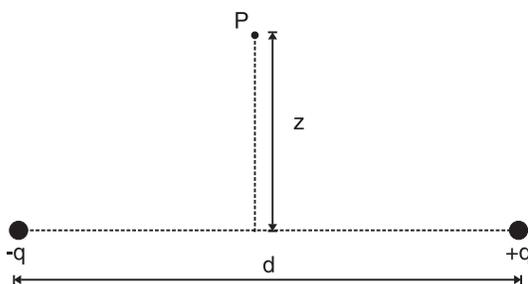


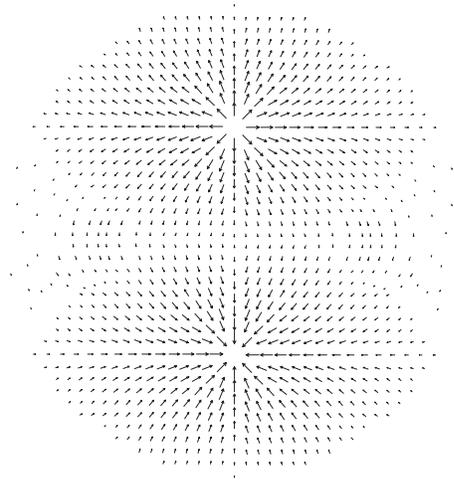
Figura 2.6: Figura do exercício 2.2.

## Exercício 2.3

Suponha que nos dois exercícios precedentes  $y \gg d$ . Qual a expressão para o campo elétrico em cada caso? *Sugestão*: uma expansão binomial será conveniente.

### Exemplo 2.3. O campo elétrico de um dipolo elétrico.

Como terceiro exemplo, consideremos duas cargas puntiformes de mesmo valor  $q$ , porém de sinais opostos. Seja  $\vec{s}$  o vetor que une  $-q$  a  $q$ ,  $\vec{r}_+$  o vetor que une a carga positiva ao ponto de observação  $P$ ,  $\vec{r}_-$  o vetor que une  $-q$  ao mesmo ponto e  $\vec{r}$  o vetor que une o ponto mediano  $O$  da reta suporte de  $\vec{s}$  ao ponto  $P$ . Veja a **Figura 2.7**. Um arranjo de cargas estáticas desse tipo é denominado *dipolo elétrico*. Como antes, queremos determinar o campo elétrico dessa configuração no ponto de observação  $P$ , mas com a condição de que esse ponto se encontre muito distante da configuração, isto é:  $s \ll r$ , onde  $s \equiv \|\vec{s}\|$  e  $r \equiv \|\vec{r}\|$ .



**Figura 2.7:** Campo elétrico de um dipolo elétrico.

Da **Figura 2.7** podemos escrever as relações vetoriais:

$$\vec{r}_+ = \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}$$

e

$$\vec{r}_- = \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}$$

Pelo Princípio da Superposição temos, então:

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}$$

Eliminando  $\vec{r}_+$  e  $\vec{r}_-$ :

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r} - \vec{s}/2}{(r^2 + \frac{s^2}{4} - rs \cos \theta)^{3/2}} - \frac{\vec{r} + \vec{s}/2}{(r^2 + \frac{s^2}{4} + rs \cos \theta)^{3/2}} \right] \quad (2.10)$$

Como o ponto de observação está muito distante do dipolo elétrico, convém reescrever a relação anterior de um modo que a deixe pronta para efetuarmos uma expansão binomial na variável adimensional  $s/r$ :

$$\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\vec{r} - \vec{s}/2}{r^3 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{s^2}{r^2} - \frac{s}{r} \cos \theta\right)^{3/2}} - \frac{\vec{r} + \vec{s}/2}{r^3 \left(1 + \frac{1}{4} \frac{s^2}{r^2} + \frac{s}{r} \cos \theta\right)^{3/2}} \right]$$

Recordemos, agora, a expansão binomial:

$$(1 + u)^p = 1 + \frac{p}{1!}u + \frac{p(p-1)}{2!}u^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}u^3 + \dots \quad (2.11)$$

No caso, desprezaremos o termo quadrático em  $s/r$  no denominador e faremos as identificações:

$$u \equiv \frac{s}{r} \cos \theta$$

e  $p = -3/2$ . Mantendo apenas os dois primeiros termos da expansão binomial, temos,

$$\left(1 \pm \frac{s}{r}\right)^{-3/2} \cos \theta \approx \left(1 \pm \frac{3s}{2r} \cos \theta\right)$$

Segue então, após algumas simplificações, que:

$$\vec{E}_{\text{dip}}(P) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3s \cos \theta \hat{r}}{r^3} - \frac{\vec{s}}{r^3} \right)$$

Podemos reescrever esse resultado de modo mais compacto se introduzirmos o *momento de dipolo elétrico*  $\vec{p}$ , que é definido por:

$$\vec{p} := q\vec{s} \quad (2.12)$$

O momento de dipolo é medido no S.I. em unidades de coulomb vezes metro, C · m. Como  $s \cos \theta = \vec{s} \cdot \hat{r}$ , é fácil ver que o campo do dipolo elétrico pode ser posto na forma:

$$\vec{E}_{\text{dip}}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}] \quad (2.13)$$

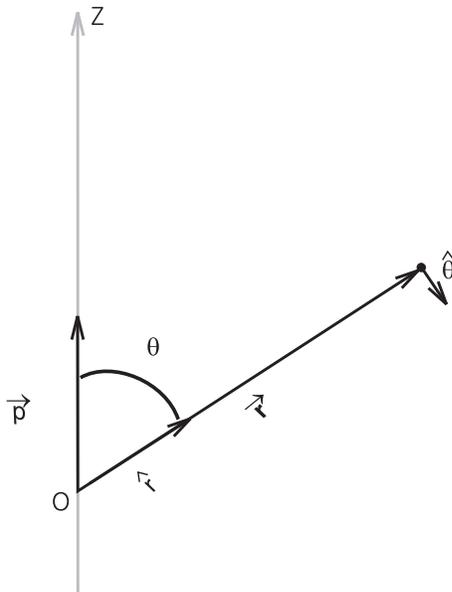
Observe que o campo do dipolo elétrico cai em intensidade com o inverso do cubo da distância e não com o inverso do quadrado, como no caso da carga puntiforme. A Equação 2.13 mostra, também, que uma configuração de cargas *neutra* pode ter interação elétrica. Algumas moléculas, por exemplo a molécula de água, apesar de neutras, têm momento de dipolo elétrico não nulo e são, por isto, capazes de interagir eletrostaticamente. Esse fato é de suma importância para as ligações e interações químicas.

O campo de dipolo elétrico na forma dada pela Equação 2.13 é independente da escolha de um sistema de coordenadas particular, desde que o

dipolo  $\vec{p}$  se encontre na origem. Por exemplo, em coordenadas polares, se colocarmos um dipolo elétrico na origem e fizermos o seu momento de dipolo  $\vec{p}$  apontar no sentido positivo do eixo  $OZ$ , isto é, se escrevermos:  $\vec{p} = p\hat{z}$ , então o campo se escreve:

$$\vec{E}_{\text{dip}}(P) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (2.14)$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o eixo  $\vec{p}$  e o vetor  $\vec{r} = r\hat{r}$ , que dá a posição do ponto de observação em relação à origem, e  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  são vetores unitários associados às coordenadas polares. Veja a **Figura 2.8**.



**Figura 2.8:** Dipolo elétrico em coordenadas polares.

## Exercício 2.4

Obtenha a Equação 2.14. Escreva primeiro:

$$\vec{E}_{\text{dip}}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(p \cos \theta) \hat{r} - p\hat{z}]$$

Agora, expresse o vetor unitário  $\hat{z}$  como combinação linear de  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$ , isto é:

$$\hat{z} = c_1 \hat{r} + c_2 \hat{\theta}$$

A seguir, mostre que  $c_1 = \cos \theta$  e  $c_2 = -\sin \theta$ , portanto:

$$\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$$

Agora, complete o cálculo e obtenha a Equação 2.14.

## Leituras complementares

Sugerimos a leitura de alguns livros que também tratam de tópicos abordados nesta aula. Você pode consultar como material complementar, por exemplo:

HALLIDAY, David.; RESNICK, Robert.; WALKER, E Jearl.

*Física*. v.3: eletromagnetismo. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. Cap. 22.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Edgard Blücher, v.:3: eletromagnetismo, 1997.

TIPLER, Paul A. *Física para cientistas e engenheiros*. 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. v.2.

## Atividades Finais

**Problema 2.1** Considere a configuração de cargas mostradas na **Figura 2.9**. Determine a intensidade do campo elétrico no ponto  $P$  devido às cargas puntiformes mostradas.

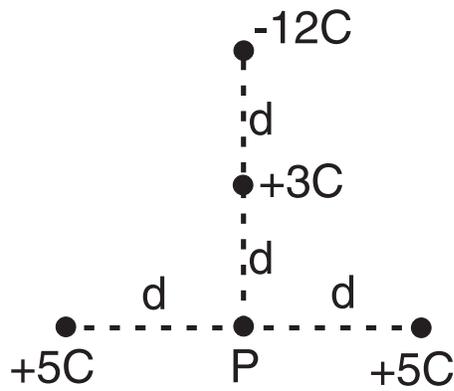


Figura 2.9: Problema 2.1.

**Problema 2.2** Calcule a direção, o sentido e a intensidade do campo elétrico no ponto  $P$  devido às três cargas puntiformes mostradas na **Figura 2.10**.

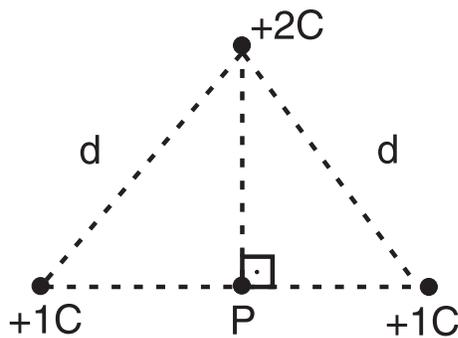


Figura 2.10: Problema 2.2.

**Problema 2.3** Qual é a direção, o sentido e a intensidade do campo elétrico no ponto  $P$  devido às cargas puntiformes mostradas na **Figura 2.11**.

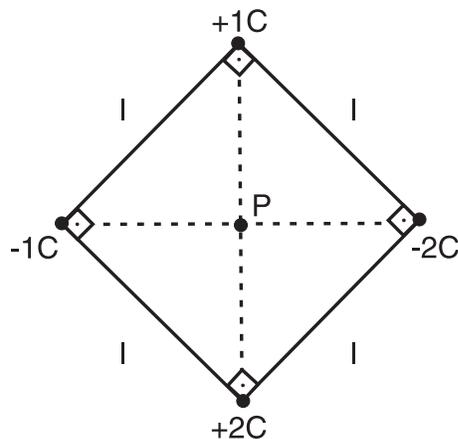


Figura 2.11: Problema 2.3.

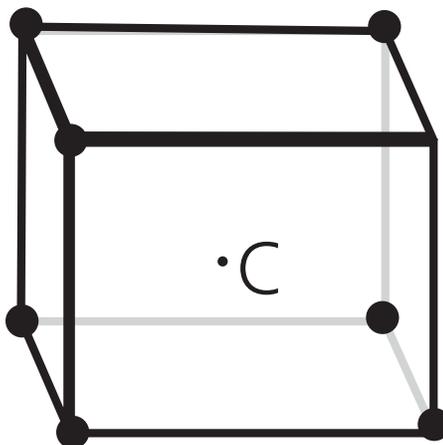
**Problema 2.4** Considere duas cargas puntiformes na configuração discutida no **Exemplo 2.2**, com  $q_1 = -q$ ,  $q_2 = q$  e  $b = a$ .

- Calcule o campo elétrico da configuração para pontos sobre o eixo  $OX$  tais que  $x > a/2$ .
- Suponha que  $x \gg a/2$ . Mostre que nesse caso o campo elétrico sobre o eixo  $OX$  é dado por:

$$\vec{E}(x, 0, 0) \approx \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{x^3}$$

onde  $\vec{p} := qa\hat{x}$  é o momento de dipolo elétrico da configuração.

**Problema 2.5** Considere um cubo de aresta  $a$ . Em cada vértice do cubo, exceto em um, uma carga puntiforme de valor  $q$  é colocada (veja **Figura 2.12**).



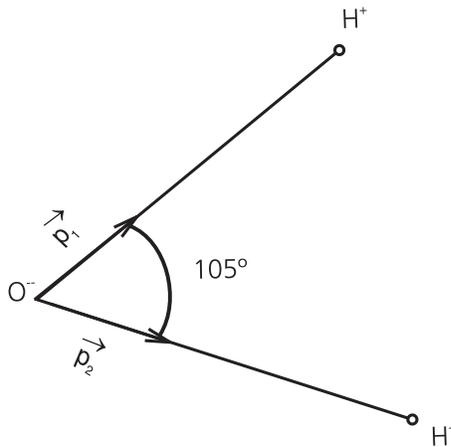
**Figura 2.12:** Problema 2.5.

- Determine o campo elétrico no centro do cubo.
- Determine o campo elétrico na posição do vértice em que não há carga.
- Uma carga de valor igual a  $-q_0$  é colocada no vértice do item anterior. Determine a força eletrostática sobre  $-q_0$ .

**Problema 2.6** Um dipolo elétrico ideal está localizado na origem de um sistema de coordenadas cartesiano e aponta para o sentido positivo do eixo  $OZ$ . Uma carga puntiforme  $q_0$  é colocada no ponto de coordenadas  $(a, 0, 0)$ . Calcule:

- a força eletrostática sobre a carga puntiforme;
- a força eletrostática sobre a carga puntiforme se essa for recolocada no ponto de coordenadas  $(0, 0, a)$ .

**Problema 2.7** A molécula de  $H_2O$  tem um momento de dipolo  $\vec{p}$  que é a soma vetorial de dois momentos de dipolo  $\vec{p}_1$  e  $\vec{p}_2$ . Veja a **Figura 2.13**. Medidas experimentais mostram que a distância entre o átomo de hidrogênio e o átomo de oxigênio vale  $9,6 \times 10^{-11}\text{m}$ , e que as retas que unem os dois tipos de átomo na molécula formam um ângulo cuja medida vale 105 graus. As medidas mostram também que  $\|\vec{p}\| \approx 6,1 \times 10^{-31} \text{C} \cdot \text{m}$ . Calcule a carga do átomo de hidrogênio. Você deverá obter um valor inferior ao esperado, tente explicar a razão desse resultado.



**Figura 2.13:** Problema 2.7. A molécula de água como dipolo elétrico.

## Resumo

O conceito de campo elétrico surge naturalmente da aplicação da Lei de Coulomb e do Princípio da Superposição para distribuições discretas de cargas elétricas. O campo gerado por uma distribuição discreta de carga é a soma dos campos elétricos gerados por cada uma das cargas que fazem parte da distribuição.

Na próxima aula veremos como podemos visualizar o campo elétrico através das linhas de campo, e como cargas elétricas puntiformes se comportam quando posicionadas em regiões onde há um campo elétrico.

## **Auto-Avaliação**

Ao final desta aula, você deve ter entendido o conceito de campo elétrico como decorrência da aplicação da Lei de Coulomb e o Princípio da Superposição. É fundamental que você seja capaz de resolver os Problemas 2.1 a 2.6.

## Aula 3 – O campo elétrico: linhas de campo e dinâmica de partículas no campo elétrico

### Meta da aula

Apresentar o conceito de linhas de campo e a dinâmica das partículas em um campo elétrico.

### Objetivos

Ao final do estudo desta aula, você deverá ser capaz de:

- Perceber que o campo elétrico pode ser facilmente visualizado quando se usa o conceito de linhas de campo.
- Descrever as linhas de campo elétrico de distribuições discretas de cargas elétricas.
- Descrever a dinâmica da partícula carregada em um campo elétrico externo.

### Pré-requisitos

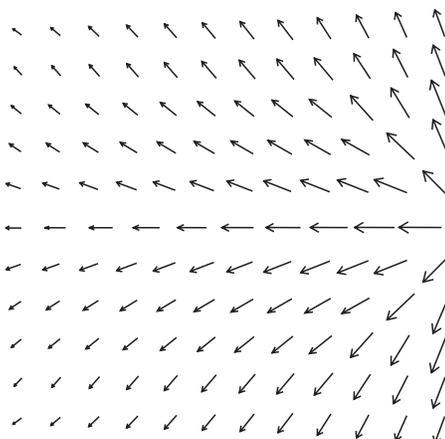
Para que você possa acompanhar esta aula, é fundamental a leitura da Aula 2 deste módulo (O campo elétrico: distribuições discretas de carga). Também é aconselhável que você revise a Aula 2 do Módulo 4 do Volume 4 do curso Introdução às Ciências Físicas.

### Introdução

Na Aula 2 deste módulo, vimos como o conceito de campo elétrico surge naturalmente da aplicação da Lei de Coulomb e do Princípio da Superposição para distribuições discretas de cargas elétricas. O campo gerado por uma distribuição discreta de carga é a soma dos campos elétricos gerados por cada uma das cargas dessa distribuição. Mas como podemos visualizar esse campo elétrico? Quais são as características do campo elétrico em uma região do espaço?

## Linhas de força

Como vimos anteriormente, em cada ponto do espaço podemos desenhar um segmento de reta orientado, isto é, uma flecha orientada (um vetor), que representará o campo elétrico naquele ponto. Podemos também tomar o cuidado de desenhar uma flecha cujo tamanho nos dê uma idéia da magnitude do campo naquele ponto. O resultado é a **Figura 3.1**.

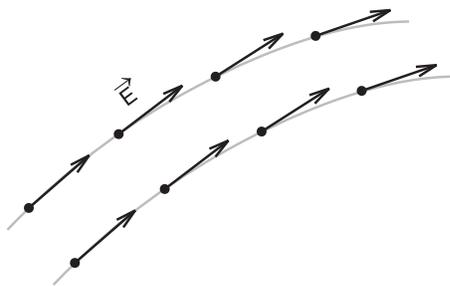


**Figura 3.1:** Representação esquemática de um campo vetorial.

Imagine um ponto do espaço. Sabemos calcular o campo elétrico criado por uma distribuição discreta de cargas neste ponto. Sabemos, também, que podemos associar a este ponto um vetor campo elétrico, que pode ser representado por uma seta.

Imaginemos que exista um equipamento capaz de indicar a direção e o sentido do campo elétrico em um ponto, de forma muito similar a uma **bússola**. Vamos, então, imaginar o seguinte experimento: caminharemos com esse instrumento observando a direção e o sentido do campo elétrico à medida que nos deslocamos, tomando o cuidado de dar passos sempre na direção e no sentido em que estiver apontando o vetor campo elétrico. Dessa forma, nosso deslocamento será sempre paralelo ao vetor campo elétrico. A linha imaginária pela qual nos deslocamos é chamada linha de força ou linha de campo. Veja a **Figura 3.2**.

A **bússola**, conforme será visto mais adiante, nas aulas relativas ao Magnetismo, é um instrumento que indica a direção e o sentido do campo magnético em um determinado ponto.



**Figura 3.2:** Linhas de força de um campo vetorial.

As linhas de campo constituem uma representação visual do campo elétrico e podem nos dar informações sobre o comportamento do campo em uma região do espaço. Por exemplo, a maior ou menor concentração das linhas de campo fornece uma indicação sobre a intensidade do campo. Se em uma região do espaço as linhas forem muito concentradas, sabemos que o campo ali é mais intenso do que em uma região onde a concentração é menor.

Embora muitas vezes seja possível desenhá-las de modo intuitivo, a construção das linhas de campo de um campo elétrico gerado por uma distribuição de carga só é simples em poucos casos.

Como essas linhas são o tempo todo paralelas ao campo elétrico  $\vec{E}$ , todas as componentes de reta que descrevem essas linhas serão iguais às componentes do campo elétrico, ou seja,  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$  são as componentes das retas, e  $E_x$ ,  $E_y$  e  $E_z$ , as componentes de  $\vec{E}$ , então:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (3.1)$$

As soluções do sistema de equações diferenciais dadas por 3.1 são curvas contínuas.

Obrigatoriamente, as linhas de campo não podem interceptar-se.

### Exercício 3.1

Por que as linhas de campo não podem interceptar-se? Para responder essa pergunta, pense na relação entre o campo elétrico e as linhas de campo.

Podemos também obter as equações diferenciais 3.1 imaginando um deslocamento  $d\vec{\ell}$  tangente à linha de força e escrevendo  $E\vec{\ell} = \kappa d\vec{\ell}$ , onde  $\kappa$  é uma constante positiva com as dimensões apropriadas.

**Exercício 3.2**

Determine as dimensões da constante  $\kappa$  para que o vetor  $\kappa d\vec{\ell}$  tenha as dimensões de campo elétrico.

Em coordenadas cartesianas, o paralelismo entre  $\vec{E}$  e  $\kappa d\vec{\ell}$  se escreve:  $E_x = \kappa dx$ ,  $E_y = \kappa dy$  e  $E_z = \kappa dz$ . Reescrevendo essas três relações na forma  $dx/E_x = 1/\kappa$ , e igualando todos os termos (pois são todos iguais a  $1/\kappa$ ), obtemos as equações diferenciais para as linhas de campo em coordenadas cartesianas, ou seja, a Equação 3.1.

**Exemplo 3.1. Linhas de força associadas com o campo de uma carga puntiforme.**

Considere uma carga puntiforme na origem de um sistema de coordenadas cartesiano. Para projetar o campo da carga puntiforme ao longo dos eixos coordenados e, dessa forma, obter as componentes cartesianas do campo, basta lembrar que:

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$$

e que, por exemplo,

$$E_x = \hat{x} \cdot \vec{E}$$

onde o símbolo  $\cdot$  denota o produto escalar.

O campo da carga puntiforme é dado pela Equação 2.9, logo

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{x} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Da mesma forma:

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{y} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Restringindo o problema ao plano  $XY$ , escrevemos a equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_y}{E_x}$$

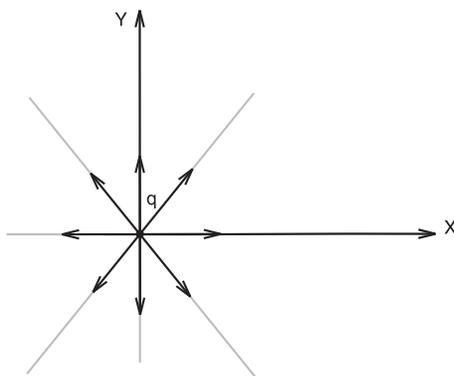
que, no caso, leva a:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad (3.2)$$

A solução da Equação 3.2, que é linear de primeira ordem, é:

$$y = C x$$

onde  $C$  é uma constante arbitrária. Isso significa que a solução do nosso problema é dada por uma família constituída por todas as retas (não-orientadas) que passam pela origem.



**Figura 3.3:** Linhas de força para uma carga puntiforme na origem. As linhas (no caso retas) obedecem à equação  $y = C x$ .

### Exercício 3.3

Obtenha a solução da equação diferencial 3.2.

A orientação dessas retas é adotada por *convenção*. No caso de uma carga puntiforme positiva, as retas são orientadas de forma a divergir para fora da posição onde se encontra a carga, como setas, com origem no local onde se encontra a carga. Se a carga puntiforme for negativa, as retas terão a orientação oposta, ou seja, serão setas que apontarão para onde a carga se encontra. De modo geral, podemos dizer que as linhas de campo “nascem” nas cargas positivas e “morrem” nas cargas negativas.

A equação para as linhas de campo pode ser escrita em coordenadas polares  $r, \theta, \phi$  (e em outros sistemas de coordenadas). No caso do campo elétrico do dipolo elétrico, que nos interessa particularmente, o campo não depende de  $\phi$  (**simetria axial**).

Nesse caso, restringimos o problema da determinação das linhas de campo ao plano  $\phi$  constante. Lembrando que:

$$\vec{E} = \kappa d\vec{\ell} \rightarrow E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta} = \kappa (dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta})$$

obtemos, como no caso com coordenadas cartesianas, a equação diferencial:

$$\frac{r d\theta}{E_\theta} = \frac{dr}{E_r} \quad (3.3)$$

#### Exercício 3.4

Obtenha a Equação 3.3.

O exemplo a seguir ilustra a aplicação da Equação 3.3 à determinação das linhas de campo de um dipolo elétrico.

### Exemplo 3.2. Linhas de força associadas com o campo de um dipolo elétrico.

As componentes do campo do dipolo elétrico em coordenadas polares são:

$$E_r(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} 2 \cos \theta$$

e

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta$$

substituindo na Equação 3.3 e simplificando, obtemos:

$$\cot \theta d\theta = \frac{1}{\tan \theta} d\theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = \frac{dr}{2r}$$

**Simetria** é a correspondência de posições, de forma, ou de medida, em relação a um eixo entre os elementos de um conjunto ou entre dois ou mais conjuntos. A simetria axial caracteriza uma simetria em relação a um eixo axial. Por exemplo, imagine um cilindro longo e um eixo que passa pelo centro do dele. Se o cilindro gira ao redor desse eixo, não temos como identificar qualquer diferença. O eixo do cilindro é um eixo de simetria axial.

Fazendo uso da integral

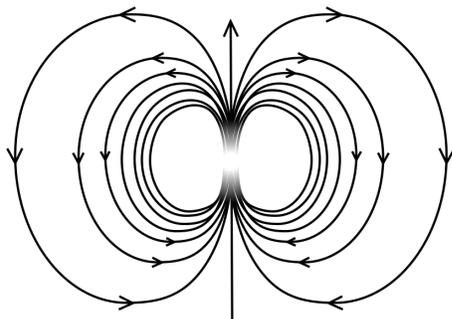
$$\int \cot \theta \, d\theta = \ln |\sin \theta|$$

podemos resolver facilmente a equação diferencial e obter a relação entre  $r$  e  $\theta$ :

$$r = C |\sin \theta|$$

onde  $C$  é uma constante de integração arbitrária. Novamente, como no caso da carga puntiforme, temos uma família de soluções, uma curva para cada valor da constante  $C$ .

A **Figura 3.4** mostra as linhas de campo de um dipolo elétrico ideal que aponta para o sentido positivo do eixo  $OZ$ , que tomamos como o eixo polar. Para visualizar o campo em três dimensões, gire a figura em torno do eixo polar.



**Figura 3.4:** Linhas de força para um dipolo ideal na origem. As linhas obedecem à equação  $r = C |\sin \theta|$ .

### Exercício 3.5

Determine a equação para as linhas de campo associadas com o campo elétrico de um dipolo elétrico em coordenadas cartesianas.

*Resposta:*  $x^2 + y^2 = Cy$ .

## O movimento de uma carga puntiforme em um campo elétrico externo

Suponha que exista um campo eletrostático  $\vec{E}$  definido em todos os pontos do espaço. As cargas-fonte que dão origem a esse campo não farão parte do problema. É suficiente saber que há um campo elétrico prescrito. Suponha também que uma carga  $q$  seja colocada em um ponto  $P$ , e que esta carga tenha uma velocidade inicial  $\vec{v}_0$ . Qual será o movimento subsequente da partícula? A resposta a essa pergunta é dada por meio de uma solução particular da equação de movimento da partícula. Para velocidades muito menores do que a velocidade da luz, a equação de movimento é dada pela segunda Lei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (3.4)$$

onde  $m$  é a massa inercial da partícula carregada,  $\vec{a} \equiv d^2\vec{r}/dt^2$  é a aceleração e  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Nesse caso, a aceleração da partícula carregada se escreve:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad (3.5)$$

Sabendo a posição inicial caracterizada pelo vetor de posição da partícula no instante inicial  $\vec{r}_0$  e a sua velocidade inicial  $\vec{v}_0$ , a equação de movimento pode ser integrada e as constantes do movimento, determinadas. Desse processo emerge a solução particular que descreve o movimento em qualquer instante de tempo  $t$ .

### Exemplo 3.3. Movimento em um campo elétrico uniforme e constante I

Suponha que uma partícula puntiforme de carga  $q$  esteja se movendo sob a ação de um campo elétrico uniforme  $\vec{E}$ . Se conhecemos a posição inicial e a velocidade inicial, a integração da equação de movimento é imediata, e a solução que queremos é:

$$\vec{r}(t) = r_0 + v_0t + \frac{q\vec{E}}{2m}t^2$$

que nos dá a posição em um tempo arbitrário  $t$  e

$$\vec{v}(t) = v_0 + \frac{q\vec{E}}{m}t$$

que nos dá a velocidade.

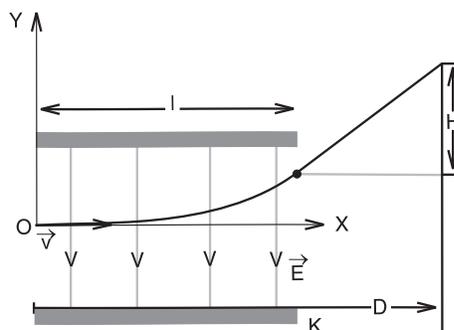
**Exercício 3.6**

Uma carga puntiforme de valor igual a  $-q_0$  e massa  $m$  é posicionada por um agente externo a uma altura  $h$  acima de um plano de extensão infinita uniformemente carregado com uma densidade superficial de carga  $\sigma$ . A seguir, a carga é abandonada pelo agente externo. Calcule o intervalo de tempo decorrido até o instante em que  $q_0$  toca o plano.

*Resposta:*  $\Delta t = 2\sqrt{\frac{\epsilon_0 h m}{q_0 \sigma}}$ . Por que o resultado depende da massa da partícula?

**Exemplo 3.4. Movimento em um campo elétrico uniforme e constante II**

A **Figura 3.5** mostra um dos aspectos fundamentais do funcionamento de um osciloscópio.



**Figura 3.5:** O osciloscópio

Um elétron de massa  $m_e$  e carga  $-e$ , emitido por um filamento aquecido e acelerado por um campo elétrico, passa através da fenda  $F$  com velocidade  $\vec{v}_0$  paralela ao eixo  $OX$ . Com essa velocidade, o elétron penetra em uma região limitada por duas placas condutoras paralelas carregadas que geram um campo elétrico uniforme paralelo ao eixo  $OY$ , apontando para o sentido negativo desse eixo. Após percorrer uma distância horizontal  $\ell$ , o elétron emerge no ponto de coordenadas  $(\ell, y)$  e a partir desse ponto, livre de forças, prossegue em uma trajetória retilínea até atingir a **tela fluorescente**  $T$  no ponto de coordenadas  $(\ell + D, y + H)$ . A tela do osciloscópio possui um tamanho definido, e queremos que o elétron atinja a tela dentro de certos limites. Assim, a distância não pode assumir qualquer valor, pois, dependendo dos valores da distância  $D$  e do tamanho da tela, correríamos o risco

A **tela fluorescente** de um osciloscópio simples é feita de um material que emite certa quantidade de luz quando sofre o impacto de uma partícula carregada, como o elétron.

de não ver os pontos brilhantes na tela. Isso impediria uma medida do campo elétrico nas placas paralelas. Portanto, a relação entre  $D$  e  $H$  é importante.

Suponha conhecidos o campo entre as placas,  $\vec{E} = -E_0\hat{y}$ , o comprimento horizontal das placas  $\ell$ , a distância entre a extremidade final da placa e a tela fluorescente  $D$ ,  $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$ , a massa do elétron  $m_e$  assim como a sua carga  $-e$ . Queremos determinar  $H$  e a razão  $y/H$ .

O elétron penetra na região entre as placas com velocidade  $\vec{v}_0 = v_0\hat{x}$  e sofre a ação do campo elétrico  $\vec{E} = -E\hat{y}$ . Isto quer dizer que o movimento ao longo do eixo  $OX$  é uniforme e o movimento ao longo do eixo  $OY$  é uniformemente acelerado. A solução do exemplo precedente nos leva a escrever:

$$x = v_0t$$

para o movimento horizontal, e

$$y = \frac{(-e)(-E)}{2m_e}t^2 = \frac{eE}{2m_e}t^2$$

para o movimento vertical. O elétron permanece um tempo igual a  $\ell/v_0$  na região entre as placas, logo

$$y = \frac{eE}{2m_e} \left( \frac{\ell}{v_0} \right)^2$$

Após sair da região entre as placas no ponto  $(\ell, y)$ , a trajetória do elétron é uma reta.

### Exercício 3.7

Você sabe explicar por que após sair da região entre as placas no ponto  $(\ell, y)$  a trajetória do elétron é uma reta? Caso não se lembre, volte a ler com atenção a explicação no início deste exemplo, prestando atenção na descrição do movimento dos elétrons.

A inclinação desta reta em relação à horizontal é medida por

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{v_y}{v_0} = \frac{H}{D}$$

Mas

$$v_y = a_y t = \frac{eE}{m_e} \frac{\ell}{v_0}$$

Como

$$H = D \frac{v_y}{v_0} = D \frac{eE\ell}{m_e v_0^2}$$

o cálculo da razão  $y/H$  agora é imediato e obtemos

$$\frac{y}{H} = \frac{\ell}{2D}$$

Se  $D$  for muito maior do que  $\ell$ , a coordenada vertical  $y$  será muito menor do que  $H$ , e essa quantidade então medirá o desvio vertical. Invertendo o sentido do campo elétrico entre as placas, inverteremos o sinal de  $H$ , e o deslocamento vertical será para baixo.

## Leituras complementares

Sugerimos a leitura de alguns livros que também tratam de tópicos abordados nesta aula. Você pode consultar como material complementar, por exemplo:

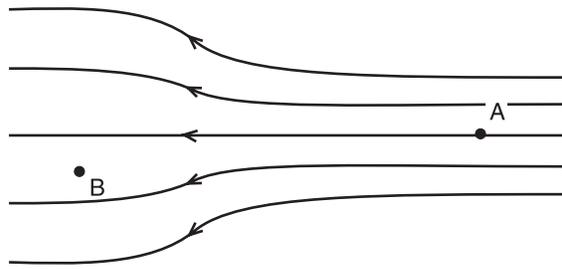
NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Edgard Blücher, v.:3: eletromagnetismo, 1997.

HALLIDAY, David.; RESNICK, Robert.; WALKER, E Jearl. *Física*. v.3: eletromagnetismo. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. Cap. 22.

Na seção 23.8 há uma interessante descrição do funcionamento de cabeças de impressão em impressoras de jato de tinta que utiliza os conceitos de movimento de cargas elétricas em campos elétricos.

## Atividades Finais

**Problema 3.1** Observe a **Figura 3.6** com atenção. Com relação às intensidades relativas do campo elétrico no pontos A e B indicados na figura, o que podemos afirmar? O campo elétrico no ponto A ( $E_A$ ) é maior que o campo elétrico no ponto B ( $E_B$ ), ou vice-versa?



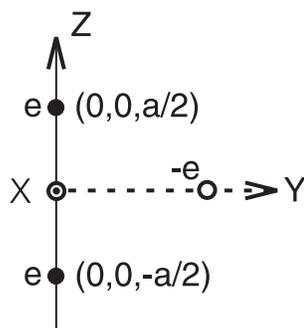
**Figura 3.6:** Problema 3.1.

**Problema 3.2** No problema anterior, suponha que a intensidade do campo elétrico no ponto A seja de  $E_A = 40 \text{ N/C}$ . Qual é a intensidade do campo elétrico no ponto B?

**Problema 3.3** Considere mais uma vez a **Figura 3.6** e os resultados do Problema 3.2.

- (a) Qual é a intensidade da força elétrica que atua sobre um elétron colocado no ponto A?
- (b) Qual é a intensidade da força elétrica que atua sobre um próton colocado no ponto B?

**Problema 3.4** O hidrogênio molecular  $\text{H}_2$  é formado por meio de uma ligação covalente entre dois átomos de hidrogênio. Se a molécula de  $\text{H}_2$  perder um elétron, ela torna-se positivamente ionizada. Considere um modelo clássico para a molécula ionizada de  $\text{H}_2$ , o  $\text{H}_2^+$ . O modelo consiste em duas cargas puntiformes positivas  $e$ , fixas, simetricamente posicionadas sobre o eixo  $OZ$ , uma no ponto  $(0, 0, a/2)$  e a outra no ponto  $(0, 0, -a/2)$ . O elétron remanescente de massa  $m_e$  e carga igual a  $-e$  descreve uma órbita circular de raio igual a  $s$  no plano  $XY$  com centro na origem do sistema de coordenadas. Veja a **Figura 3.7**.



**Figura 3.7:** Problema 3.4. Um modelo clássico para o hidrogênio molecular ionizado.

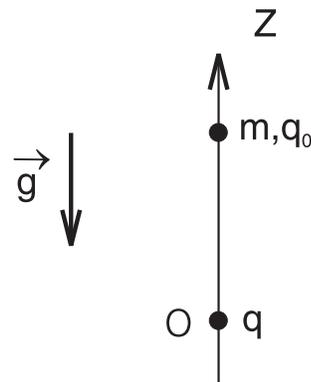
- Calcule o campo elétrico resultante, módulo, direção e sentido, na posição do elétron.
- Calcule a força, módulo, direção e sentido, sobre o elétron.
- Mostre que a velocidade angular do elétron é dada por:

$$\omega = e \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon_0 m_e \left(s^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}}}.$$

- Calcule a ordem de grandeza da frequência de revolução do elétron.  
*Resposta:*  $\approx 10^{15} \text{ Hz}$ .

**Problema 3.5** Qual é a intensidade de um campo elétrico que acelera um elétron na direção Norte, com aceleração  $a = 1,8 \times 10^{-9} \text{ m/s}^2$ ?

**Problema 3.6** Um corpo puntiforme de massa  $m$  e carga elétrica positiva  $q_0$  é obrigado a mover-se ao longo do eixo  $OZ$ , sob a ação de seu peso e do campo criado por uma carga elétrica  $q$  fixa na origem. Veja a **Figura 3.8**.

**Figura 3.8:** Problema 3.6

- Determine a posição de equilíbrio  $z_0$  do corpo.
- Suponha que o corpo é ligeiramente afastado da posição de equilíbrio  $z_0$ . Determine a frequência de oscilação do corpo.

## Resumo

Linhas de campo fornecem uma forma de visualizar a direção e a intensidade do campo elétrico em uma região do espaço. O vetor campo elétrico em qualquer ponto é tangente a uma linha de campo que passa por esse ponto. A intensidade do campo elétrico pode ser medida através da densidade de linhas de campo em uma região. As linhas de campo têm origem em cargas positivas, e terminam em cargas negativas. Quando uma carga puntiforme é colocada numa região onde há um campo elétrico, criado por outras cargas, sofre a ação de uma força eletrostática que possui a mesma direção e sentido do campo se a carga for positiva, ou sentido contrário se a carga for negativa.

Na próxima aula, veremos como calcular o campo elétrico de distribuições contínuas de carga.

## Auto-Avaliação

Ao final desta aula, é importante que você seja capaz de entender o conceito de linhas de campo, e de como elas podem facilitar a visualização do campo elétrico numa dada região. Você deve ser capaz de responder à questão formulada no exemplo 3.2. Você também deve ser capaz de resolver todos os problemas propostos.

# Aula 4 – O campo elétrico: distribuições contínuas de carga

## Meta da aula

Estender o conceito de campo elétrico às distribuições contínuas de carga.

## Objetivo

Ao final do estudo desta aula, você deverá ser capaz de:

- Aplicar o conceito de campo elétrico a distribuições contínuas de cargas elétricas.

## Pré-requisitos

Para entender melhor esta aula, você deverá estar familiarizado com os conceitos apresentados na Aula 2 deste módulo. O conceito de campo elétrico deve estar bem fixado.

## Introdução

Na Aula 2 deste módulo, você aprendeu o conceito de campo elétrico e o aplicou a distribuições discretas de carga elétrica. Na distribuição discreta, as cargas apareciam como pontos isolados. Porém, na grande maioria dos casos práticos, esta natureza granular da eletricidade fica totalmente oculta pelas condições específicas do experimento ou do problema teórico em questão. A eletricidade estática parece comportar-se como uma distribuição contínua de carga elétrica, como um fluido carregado em repouso. Você verá, no decorrer desta aula, que assim como no caso de distribuições discretas, é possível determinar o campo elétrico destas distribuições contínuas de carga. Para fazer isso, teremos apenas de fazer cálculos um pouco mais complexos. Vamos lá!

## O campo elétrico de distribuições contínuas de cargas fixas

Esta natureza contínua da eletricidade estática pode ser através da Equação 2.8, reescrita abaixo, e que você já estudou na Aula 2 deste módulo.

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_{Pk}^2} \hat{r}_{Pk} \quad (2.8)$$

Esta equação pode ser generalizada para o caso das distribuições contínuas. Como faremos isso?

Vamos imaginar uma região finita do espaço ordinário na qual há uma distribuição contínua e localizada de carga. Mas o que significa uma distribuição contínua de carga?

Você estudou, na Aula 2 deste módulo, que, em distribuições discretas de carga, a carga está mais localizada em pontos isolados do espaço.

Em distribuições contínuas, ao contrário, a carga já não está mais localizada em pontos isolados, mas sim distribuída de forma contínua em uma região do espaço.

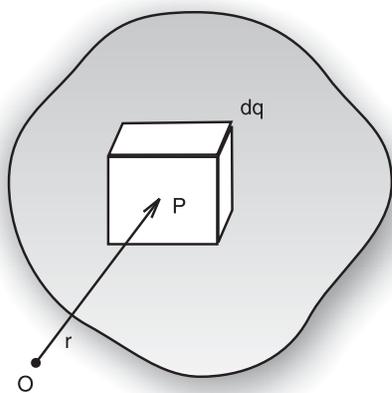
Se a carga está agora distribuída de forma contínua, é possível determinar uma função matemática que descreva a forma como ela está distribuída pelo espaço que ocupa.

Vamos supor que a carga total seja  $Q$  e que esta carga ocupe um volume total  $V$ . Se tomarmos um elemento de volume  $d\tau$ , ele deverá conter apenas uma parcela da quantidade total de carga, ou seja, uma quantidade de carga  $dq$ . Somente será possível relacionar  $dq$  e  $d\tau$  se conhecermos a função matemática que descreve de que forma a carga se distribui pelo espaço. Assim, podemos escrever

$$dq = \rho(\vec{r})d\tau \quad (4.1)$$

onde  $\rho(\vec{r})$  é uma função contínua que representa a densidade volumétrica de carga (em  $C/m^3$ ) no ponto  $P$ , cuja posição é  $\vec{r}$ . Veja a **Figura 4.1**.

Em diversas situações, a complexidade do problema fica simplificada quando a função que descreve a distribuição de carga for uniforme, ou seja, quando a distribuição for descrita da mesma forma em qualquer ponto do espaço. Neste caso, a relação  $Q/V$  é a mesma para todos os pontos do espaço.



**Figura 4.1:** Distribuição volumétrica de cargas.

Há situações em que a carga estará distribuída, de modo uniforme, por uma superfície e não em um volume. A densidade de carga será, portanto, superficial, descrita por  $\sigma$  e medida em coulombs/metro<sup>2</sup>. Descreveremos a carga escrevendo  $dq = \sigma da$ , onde  $da$  é o elemento de área.

Há ainda casos em que a distribuição uniforme é linear, ou seja, ao longo de uma linha. Nesses casos, a densidade de carga é linear, descrita por  $\lambda$ , medida em coulombs/metro, e escrevemos  $dq = \lambda ds$ , onde  $ds$  é o elemento de comprimento relevante para o problema.

Cada elemento de carga  $dq$  irá causar, em um ponto  $P(x, y, z)$  do espaço, uma contribuição de campo elétrico  $d\vec{E}$ . Observe novamente a Equação 2.8. Ela nos mostra que o campo  $\vec{E}$  é resultado da superposição das contribuições de cada carga  $q$ , em uma distribuição discreta. Em uma distribuição contínua, cada elemento de carga  $dq$  irá contribuir, no ponto  $P(x, y, z)$ , com um elemento  $d\vec{E}$  de campo, ou seja:

$$d\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq_k}{r_{Pk}^2} \hat{r}_{Pk} \quad (4.2)$$

O campo total no ponto  $P(x, y, z)$  pode simplesmente ser calculado aplicando o Princípio da Superposição e somando todas as contribuições  $d\vec{E}$  de todos os elementos  $dq$ . Esta soma é feita de forma simples:

$$\vec{E}(x, y, z) = \int d\vec{E}(x, y, z) \quad (4.3)$$

Vamos imaginar agora que um vetor  $\vec{r}'$  é o vetor que “varre” a distribuição de carga e  $P$  é o ponto de observação (o ponto onde hipoteticamente

colocaríamos uma carga elétrica para testar a propriedade elétrica). Então, a generalização da Equação 2.8 considerando a distribuição contínua é:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} d\tau'. \quad (4.4)$$

A Equação (4.4) é a versão da Lei de Coulomb para distribuições contínuas de carga, combinada com o Princípio da Superposição.

A seguir, você poderá ver o desenvolvimento de alguns exemplos em que distribuições contínuas lineares, superficiais e volumétricas de cargas serão usadas para cálculo do campo elétrico de geometrias simples.

#### Exemplo 4.1 O campo elétrico de um bastão fino uniformemente carregado

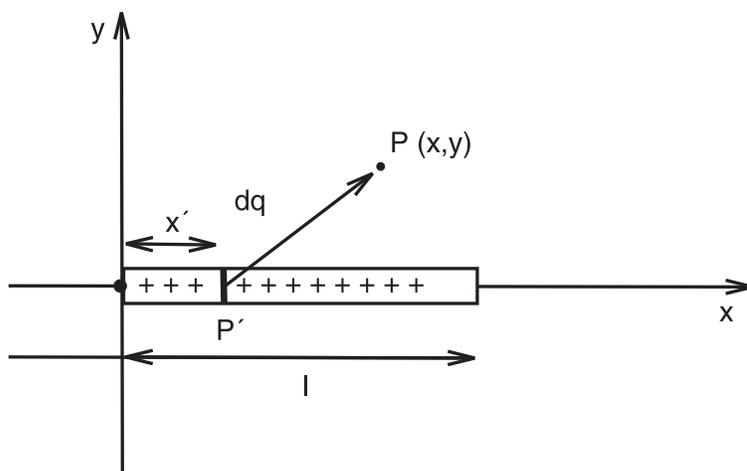
Como primeiro exemplo de cálculo de uma distribuição contínua de carga, iremos calcular o campo elétrico de um bastão fino uniformemente carregado.

Imagine uma distribuição linear na forma de um bastão muito fino, eletrizado de modo uniforme, com carga total  $q$ , e comprimento  $\ell$ .

Qual é a forma de descrever a distribuição linear de carga deste bastão fino, com carga total  $q$  e comprimento  $\ell$ , sabendo que a distribuição é uniforme?

Se a distribuição do bastão for uniforme, para qualquer porção do bastão que tomarmos, teremos uma densidade de carga dada pela razão entre a carga contida na porção e o tamanho desta porção. Isso será válido inclusive para o bastão inteiro. Agora fica fácil entender que a densidade linear de carga será então  $\lambda = q/\ell$ .

É importante você estar atento à geometria do problema, pois ela irá facilitar a compreensão do resultado. Façamos o bastão coincidir com o eixo cartesiano  $OX$  de tal modo que uma das suas extremidades encontre-se em  $x = 0$  e a outra em  $x = \ell$ . Veja a **Figura 4.2**.



**Figura 4.2:** Geometria para o cálculo do campo elétrico de um bastão fino, uniformemente carregado. A carga elementar  $dq$  está localizada no ponto  $P'$  de coordenadas  $(x', 0)$ . Iremos calcular o campo no ponto  $P(x, y, 0)$  situado no plano  $XY$ .

Observe que a simetria do problema permite considerar o cálculo do campo elétrico somente no plano  $XY$ . Uma vez encontrado o campo no plano  $XY$ , uma simples rotação em torno do eixo  $OX$  irá permitir a visualização do campo em todo o espaço. Qual é a contribuição  $d\vec{E}$  de cada elemento  $dq$  para o campo em um ponto de observação  $P(x, y, 0)$ , no plano  $XY$ ?

Os elementos de carga  $dq = \lambda dx'$  estão localizados no ponto  $P'$ , sobre o bastão, nas coordenadas  $(x', 0)$ . A contribuição  $d\vec{E}$  de cada elemento  $dq$  para o campo no ponto  $P$  é dada por:

$$d\vec{E}(P) \equiv d\vec{E}(x, y) = dE_x(x, y) \hat{x} + dE_y(x, y) \hat{y}$$

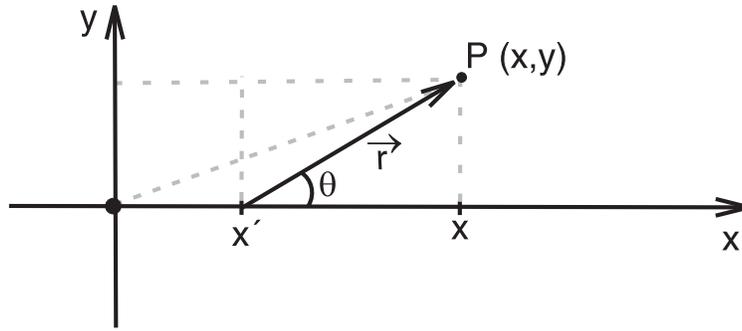
onde,

$$dE_x(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \sin \theta \quad (4.5)$$

e

$$dE_y(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos \theta \quad (4.6)$$

Observe agora, e com cuidado, a **Figura 4.3**. Ela salienta para você alguns aspectos geométricos importantes relativos a este problema.



**Figura 4.3:** Aspectos geométricos importantes relativos ao problema do bastão uniformemente carregado.

Observe que

$$r^2 = (x - x')^2 + y^2 \quad (4.7)$$

Observe também que

$$\sin \theta = \frac{(x - x')}{r} = \frac{(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2}} \quad (4.8)$$

$$\cos \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{(x - x')^2 + y^2}} \quad (4.9)$$

Podemos escrever, usando o conceito de densidade linear de carga,

$$dq = \lambda dx'$$

Aplicando as Equações 4.7, 4.8, 4.9 na Equação 4.5, temos então:

$$dE_x(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda(x - x') dx'}{[(x - x')^2 + y^2]^{3/2}}$$

Aplicando o Princípio da Superposição, podemos então calcular a componente  $x$  do campo elétrico  $\vec{E}$ , escrevendo

$$E_x(x, y) = \int dE_x(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\ell \frac{(x - x') dx'}{[(x - x')^2 + y^2]^{3/2}} \quad (4.10)$$

onde a integral é a soma de todas as contribuições  $dE_x$ .

Observando a Equação 4.10, vemos que ela é da forma:

$$\int \frac{u \, du}{(u^2 + a^2)^{3/2}}$$

onde  $u = (x - x')$  e  $a^2 = y^2$ .

Para completar o cálculo, podemos recorrer a uma **tabela de integrais**, onde verificaremos que a integral de que necessitamos é:

$$\int \frac{u \, du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{u^2 + a^2}}$$

Entretanto, antes de utilizá-la, convém fazer a mudança de variáveis:

$$x - x' = \omega \quad \Rightarrow \quad -dx' = d\omega$$

Os novos limites de integração são:  $x' = 0, \Rightarrow \omega = x, x' = \ell, \Rightarrow \omega = x - \ell$ . Segue então que:

$$E_x(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_x^{x-\ell} \frac{(-\omega \, d\omega)}{(\omega^2 + y^2)^{3/2}} = +\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x-\ell}^x \frac{\omega \, d\omega}{(\omega^2 + y^2)^{3/2}}$$

Agora podemos efetuar a integral com o auxílio do resultado da tabela para obter

$$E_x(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\sqrt{(x-\ell)^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (4.11)$$

Vejam agora o cálculo da componente  $E_y$ . Seguindo os passos que demos no cálculo da componente  $E_x$ , escrevemos

$$dE_y(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda y \, dx'}{[(x - x')^2 + y^2]^{3/2}}$$

Aplicando o Princípio da Superposição:

$$E_y(x, y) = \frac{\lambda y}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\ell \frac{dx'}{[(x - x')^2 + y^2]^{3/2}}$$

A integral de que necessitamos é

$$\int \frac{du}{(u^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{u^2 + x^2}}$$

Várias integrais que necessitamos são de uso muito freqüente, e portanto estão listadas em tabelas conhecidas como **tabelas de integrais**.

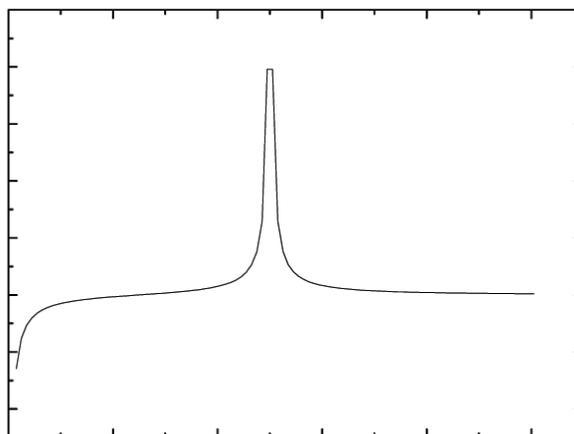
A mesma mudança de variáveis que utilizamos antes é também conveniente aqui. O resultado final é:

$$E_y(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{(x - \ell)}{\sqrt{(x - \ell)^2 + y^2}} \right) \quad (4.12)$$

A Expressão 4.12 vale também para  $y < 0$ . O campo elétrico em  $P(x, y, 0)$  será dado por  $\vec{E}(x, y) = E_x(x, y)\hat{x} + E_y(x, y)\hat{y}$ . Observe que a componente ao longo do eixo  $OX$  do campo elétrico desta distribuição, que é dada pela Equação (4.11), não é bem definida nos extremos. De fato, fazendo  $y = 0$  na Equação (4.11), obtemos:

$$E_x(x, 0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|x - \ell|} - \frac{1}{|x|} \right)$$

Para  $x = 0$  ou para  $x = \ell$  esta expressão não é bem definida. Veja o gráfico da **Figura 4.4**.



**Figura 4.4:** Componente  $x$  do campo elétrico de um bastão fino uniformemente carregado. O bastão tem  $\ell = 0,50$  m.

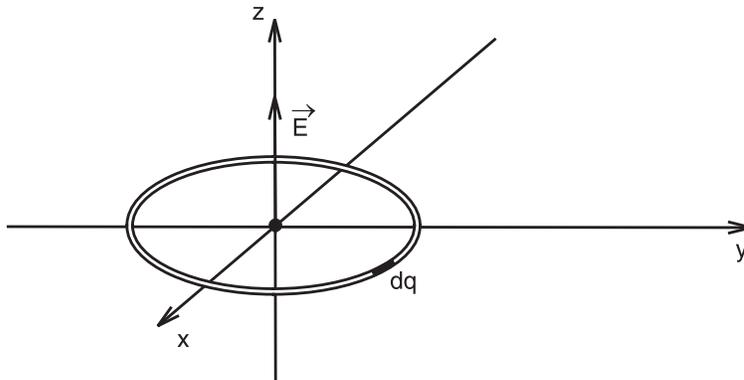
#### Exercício 4.1

Mostre que o limite da componente do campo elétrico do campo do bastão fino uniformemente carregado ao longo do eixo  $OY$ , Equação (4.12), quando  $y \rightarrow 0$  e  $x > \ell$  ou  $x < 0$  é zero. *Sugestão:* use a expansão binomial.

O caso particular de um bastão de comprimento infinito é discutido no Problema 2.16. Um modo alternativo de resolver este mesmo exemplo é proposto no Problema 2.20.

### Exemplo 4.2 O campo elétrico de um anel uniformemente carregado

Consideremos agora um anel de raio  $a$  com uma carga  $q$  uniformemente distribuída. Queremos calcular o campo elétrico em um ponto  $P$  sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o anel e que passa por seu centro geométrico. Veja a **Figura 4.5**.



**Figura 4.5:** Campo elétrico sobre eixo de simetria  $OZ$  de um anel de carga.

Por simetria, devemos esperar que o campo elétrico no eixo de simetria, que fizemos coincidir com o  $OZ$ , só tenha componente  $E_z(P)$  diferente de zero, isto é:  $E_x(P) = E_y(P) = 0$ . Logo, começamos com a contribuição relevante ao campo em  $P$  devido a um elemento de carga  $dq = \lambda ds$ , onde  $\lambda$  é a densidade linear de carga e  $ds$  um elemento de comprimento do perímetro do anel:

$$dE_z(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos\theta$$

ou, como  $r^2 = z^2 + a^2$  e  $\cos\theta = z/r = z/(z^2 + a^2)^{1/2}$ ,

$$dE_z(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda z ds}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

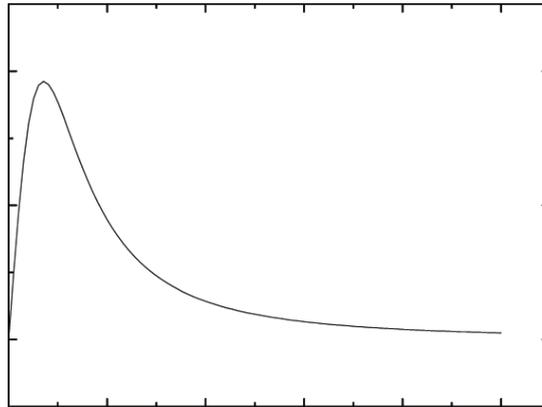
Agora invocamos o Princípio da Superposição e escrevemos:

$$E_z(P) = \int dE_z(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int_0^s ds$$

A integral é igual ao comprimento do perímetro do anel, isto é:  $s = 2\pi a$ . Lembrando que a densidade linear de carga  $\lambda$  é uniforme, bastará multiplicá-la por  $2\pi a$  para termos a carga total  $q$  sobre o anel, portanto:

$$E_z(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (4.13)$$

Como  $P$  é um ponto arbitrário de coordenadas  $(0, 0, z)$ , o resultado dado pela Equação (4.13) é uma função de  $z$ , como esperado, e vale para  $-\infty < z < +\infty$ . Na **Figura 4.6**, representamos o gráfico de  $4\pi\epsilon_0 E_z(z)/q$  como função da variável adimensional  $z/a$ .



**Figura 4.6:** O gráfico representa a variação da razão  $4\pi\epsilon_0 E_z(z)/q$  em função de  $z/a$  sobre eixo de simetria  $OZ$  de um anel de carga.

**Exercício 4.2**

Mostre que a Equação (4.13) pode ser posta na forma adimensional:

$$\frac{4\pi\epsilon_0 a^2 E_z(z)}{q} = \frac{z/a}{(z^2/a^2 + 1)^{3/2}}$$

Determine os pontos extremantes. Mostre que um dos pontos é um máximo e o outro é um mínimo. Confira o seu resultado com a **Figura 4.6**.

É instrutivo considerar analiticamente o que acontece com o nosso resultado para pontos sobre o eixo  $OZ$  muito distantes da origem. Matematicamente, expressamos esta condição escrevendo  $a^2/z^2 \ll 1$ . A seguir, reescrevemos a expressão para o campo do anel na forma:

$$E_z(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \left(1 + \frac{a^2}{z^2}\right)^{-3/2}$$

Fazendo uso da expansão binomial, Equação (2.11), escrevemos:

$$E_z(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z^2} \left[1 - \frac{3a^2}{2z^2} + O\left(\frac{a^4}{z^4}\right)\right]$$

Para pontos muito distantes da origem, ou melhor, para  $a^2/z^2 \ll 1$ , o primeiro termo da expansão anterior será suficiente; logo, podemos escrever:

$$E_z(z) \approx \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} & \text{para } z > 0 \\ -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 z^2} & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

Observe que, em relação à origem, o campo elétrico para  $z$  positivo deve ter o sentido oposto ao campo para  $z$  negativo, daí a necessidade de escrever o resultado aproximado que obtivemos em duas partes; por outro lado, a expressão exata que obtivemos dá conta do sinal automaticamente, pois o seu numerador é linear em  $z$ .

O que significa exatamente a condição  $a^2/z^2 \ll 1$ ? Em primeiro lugar, observe que podemos escrever, considerando apenas os dois primeiros termos da expansão binomial, a relação:

$$\frac{|E_z - E_z^0|}{E_z^0} = \frac{3a^2}{2z^2}$$

onde  $E_z^0 := q/(4\pi\epsilon_0)$ . Se, por exemplo, exigirmos que:

$$\frac{|E_z - E_z^0|}{E_z^0} \times 100 \approx 1\%$$

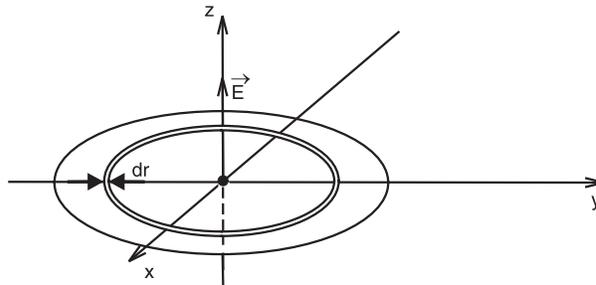
então, devemos ter:

$$\frac{3a^2}{2z^2} = 0,01$$

o que significa que a razão  $a/|z|$  deve ser aproximadamente igual a 0,08.

### Exemplo 4.3 O campo elétrico de um disco uniformemente carregado

Consideremos agora uma distribuição superficial de carga com a forma de um disco de espessura desprezível e raio  $a$ . Suponhamos, por simplicidade, que a distribuição de carga seja uniforme. Isto significa que, se o disco tiver uma carga total  $q$ , a densidade superficial  $\sigma$  valerá  $q/\pi a^2$ . Como no exemplo precedente, queremos calcular o campo elétrico em um ponto  $P$  sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o disco e que passa por seu centro geométrico. Veja a **Figura 4.7**.



**Figura 4.7:** Campo elétrico sobre eixo de simetria  $OZ$  de um disco fino uniformemente carregado.

A solução deste exemplo servirá para ilustrar como é possível aproveitar um resultado de um problema para resolver outro. A idéia será fazer uma partição do disco em anéis concêntricos de raio variável  $r$  e espessura radial infinitesimal  $dr$ , tirando partido do campo do anel dado pela Equação (4.13). Cada anel da partição tem uma carga  $dq = \sigma \times 2\pi r dr$  e contribuirá com um elemento  $dE_z(z)$ , de modo que escreveremos

$$dE_z(z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Fazendo uso do Princípio da Superposição, teremos

$$E_z(z) = \int dE_z(z) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

Esta integral é do mesmo tipo da que surge no Exemplo 2.7 e pode ser imediatamente efetuada. O resultado final para o campo do disco sobre o eixo de simetria em questão é:

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \quad z > 0. \quad (4.14)$$

Como para  $z < 0$  o campo deve apontar no sentido oposto ao determinado pela Equação (4.14), uma pequena modificação deve ser feita. O resultado para pontos tais que  $P = (0, 0, -z)$  é

$$E_z(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( 1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right) \quad z < 0. \quad (4.15)$$

Observe que, para  $z = 0$ , a função  $E_z(z)$  não está bem definida. De fato, temos uma descontinuidade em  $z = 0$ . Esta descontinuidade pode ser calculada do seguinte modo: primeiro calculamos o limite de  $E_z(z)$  quando  $z$  tende a zero pela direita, isto é,  $z \rightarrow 0^+$ , usando a Equação (4.14)

$$\lim_{z \rightarrow z_0^+} E_z(z) = E_z^+(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

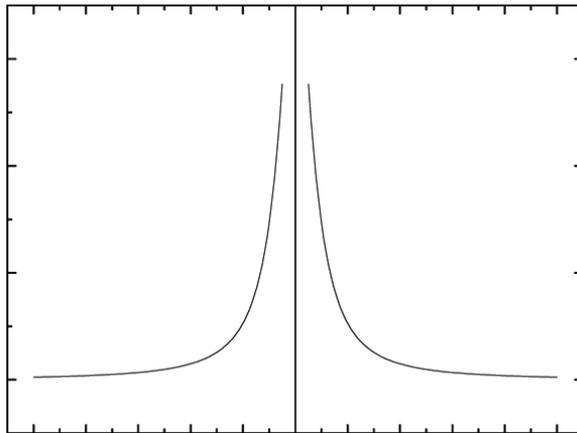
Agora tomamos o limite pela esquerda usando a Equação (4.15)

$$\lim_{z \rightarrow z_0^-} E_z(z) = E_z^-(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

A descontinuidade é medida pela diferença entre esses dois limites:

$$E_z^+(z) - E_z^-(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \left( -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

A descontinuidade é diretamente proporcional à densidade superficial de carga local! Este é um resultado importante que veremos reaparecer em problemas similares a este.



**Figura 4.8:** Variação do campo elétrico sobre eixo de simetria  $OZ$  de um disco fino uniformemente carregado. Observe a descontinuidade para  $z = 0$ .

Lembre-se de que uma função de variável real  $f(x)$  é uma função contínua em  $x = x_0$  se, e apenas se, em primeiro lugar,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

existe. Isto significa que os limites pela esquerda e pela direita são iguais; em segundo lugar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

**Exercício 4.3**

Use a expansão binomial para mostrar que, para pontos muito distantes da origem, a Equação (4.14) leva ao campo de uma carga puntiforme. Isto significa que, para  $z \gg a$ ,  $z > 0$ , o disco carregado comporta-se como um ponto carregado. Qual deve ser a relação entre  $z$  e  $a$  para que a aproximação de carga puntiforme nos dê o valor do campo do disco em  $P(0, 0, z)$  com acurácia de 1%? Resposta:  $z \approx 9a$ .

**Exercício 4.4**

Obtenha o campo elétrico de um plano infinito carregado, partindo do resultado obtido para o campo elétrico do disco uniformemente carregado para pontos sobre o eixo que passa pelo centro do disco perpendicularmente ao plano que o contém, Equações (4.14) e (4.15).

*Resposta:*  $E_z = \sigma/2\epsilon_0$  para  $z > 0$  e  $E_z = -\sigma/2\epsilon_0$  para  $z < 0$ .

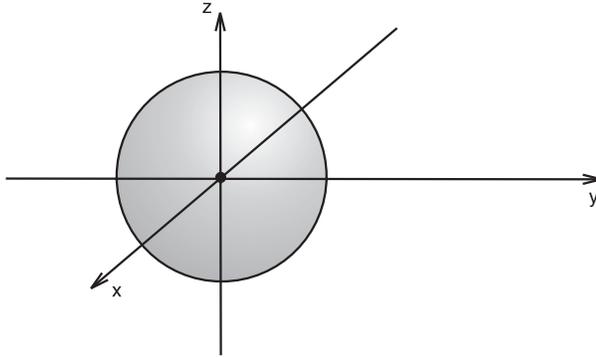
### **Exemplo 4.4 O campo elétrico de uma casca esférica uniformemente carregada**

Como último exemplo desta aula, consideremos uma casca esférica de raio  $R$  uniformemente carregada com uma densidade superficial de carga  $\sigma$ . Queremos calcular o campo elétrico dessa distribuição para pontos internos e externos à casca. Aplicaremos de novo a técnica do exemplo anterior, dividindo a casca em anéis de raio variável, espessura infinitesimal, eixo de simetria perpendicular aos anéis e passando pelos respectivos centros geométricos, e aplicaremos a Equação (4.13) com pequenas modificações.

Começamos fazendo o eixo  $OZ$  coincidir com o eixo de simetria e colocando a origem no centro geométrico da casca, (veja a **Figura 4.9**). Por simetria, o campo elétrico resultante em pontos sobre este eixo terá somente a componente  $E_z$  diferente de zero. Portanto, tomando a Equação (4.13) como ponto de partida, escrevemos

$$dE_z(z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{(z - z')}{[a^2(z) + (z - z')^2]^{3/2}}$$

para a contribuição de um anel, onde  $a(z')$  é o raio de um anel genérico.



**Figura 4.9:** Casca esférica.

Da geometria mostrada na **Figura 4.9**, vemos que:

$$a^2(z') = R^2 - z'^2$$

A carga  $dq$  em um anel genérico é igual à densidade superficial de carga vezes a espessura  $ds$ , isto é:

$$dq = \sigma \times 2\pi a(z') ds$$

Da **Figura 4.9**, vemos que:

$$\frac{dz'}{ds} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

mas  $\sin\theta = a(z')/R$ , logo

$$dq = \sigma 2\pi a(z') \frac{dz'}{a(z')/R} = 2\pi\sigma R dz'$$

Segue então que:

$$dE_z(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \frac{(z - z') dz'}{[R^2 - z'^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

O campo resultante é dado por:

$$E_z(z) = \int dE_z(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{-R}^R \frac{(z - z') dz'}{[R^2 - z'^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

Antes de efetuar a integral, convém fazer a mudança de variáveis:

$$z - z' = \omega, \quad \Rightarrow \quad -dz' = d\omega$$

Os novos limites de integração são:  $z' = -R, \Rightarrow \omega = z + R, z' = R, \Rightarrow \omega = z - R$ . Fazendo as substituições e simplificações necessárias, obtemos:

$$E_z(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{z-R}^{z+R} \frac{\omega d\omega}{[(R^2 - z^2) + 2z\omega]^{3/2}}$$

A integral tabelada pertinente é:

$$\int \frac{u du}{(au^2 + bu + c)^{3/2}} = \frac{2(bu + 2c)}{(b^2 - 4ac)\sqrt{au^2 + bu + c}}$$

No nosso caso  $a = 0$ , portanto

$$\int \frac{u du}{(bu + c)^{3/2}} = \frac{2(bu + 2c)}{b^2\sqrt{bu + c}}$$

Identificando as demais constantes,  $b = 2z$  e  $c = R^2 - z^2$ , a integral pode ser imediatamente efetuada, e o resultado é:

$$E_z(z) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0 z^2} \left( \frac{z + R}{\sqrt{(z + R)^2}} - \frac{z - R}{\sqrt{(z - R)^2}} \right)$$

Agora devemos ter muito cuidado com o segundo termo, que envolve a raiz  $\sqrt{(z - R)^2}$ . Se  $z > R$ , então  $\sqrt{(z - R)^2} = z - R$ . Mas se  $z < R$  temos que escrever  $\sqrt{(z - R)^2} = \sqrt{(R - z)^2} = R - z$ , pois o resultado da integral deve ser real. Segue então que para pontos sobre o eixo  $OZ$ , tais que  $z > R$ , teremos:

$$E_z(z) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 z^2}. \quad (4.16)$$

Por outro lado, para pontos sobre o eixo  $OZ$ , tais que  $z < R$ , o campo elétrico é zero!

#### Exercício 4.5

Mostre explicitamente que o campo elétrico dentro da casca esférica uniformemente carregada é zero, como enfatizado anteriormente.

Lembre-se de que o módulo de um número real  $x$  pode ser escrito como  $\sqrt{x^2} \geq 0$ .

Dada a simetria esférica da casca uniformemente carregada, podemos dizer que não há nada que diferencie nosso eixo  $OZ$  de um outro eixo que coincida com um diâmetro da casca. Portanto, podemos trocar  $z^2$  na Equação (4.16) por  $r^2$ , onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  é a distância radial ao centro geométrico da casca esférica.

Na próxima aula, vamos estudar a Lei de Gauss, uma nova forma de cálculo do campo elétrico.

## Leituras complementares

Para complementar o material desta aula, sugerimos que você consulte também os textos listados a seguir, como material complementar. Eles podem ajudar você a compreender melhor e aprofundar os temas abordados nesta aula.

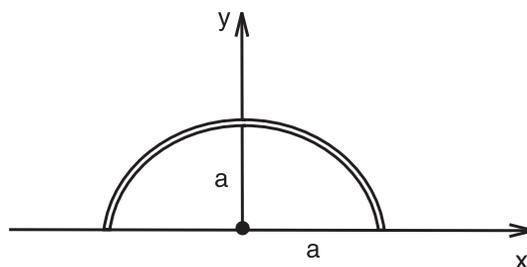
HALLIDAY, David.; RESNICK, Robert.; WALKER, E Jearl.

*Física*. v.3: eletromagnetismo. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. Cap. 22.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Edgard Blücher, v.:3: eletromagnetismo, 1997.

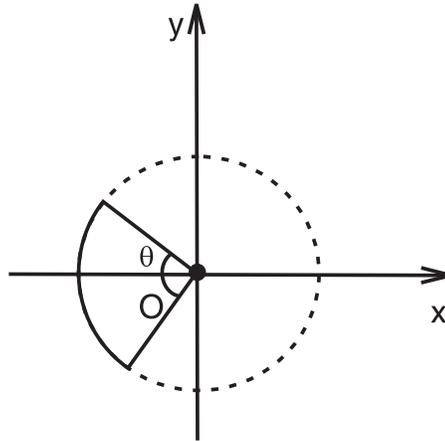
## Atividades Finais

**Problema 4.1** Uma carga elétrica  $q$  é uniformemente distribuída sobre a semicircunferência de um semicírculo de raio  $a$ . Calcule o campo elétrico no centro do semicírculo. Veja a **Figura 4.10**.



**Figura 4.10:** Problema 4.1.

**Problema 4.2** O Problema 4.1 é um caso particular de uma configuração similar, porém mais abrangente. Considere o arco circular de raio  $a$  uniformemente carregado com uma densidade linear de carga  $\lambda$  da **Figura 4.11**.



**Figura 4.11:** Problema 4.2. Arco circular uniformemente carregado.

Calcule as componentes do campo elétrico no centro geométrico do arco (que coincide com a origem) e mostre que:

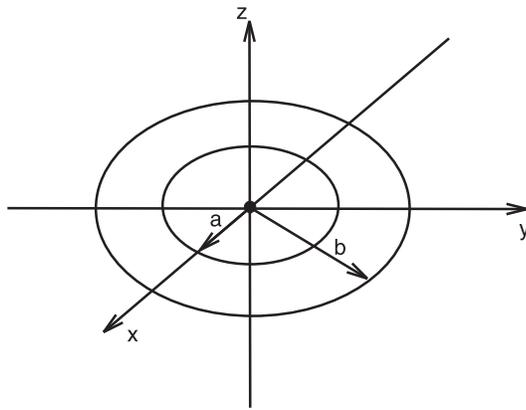
$$E_x = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin \theta_0$$

e

$$E_y = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (1 - \cos \theta_0)$$

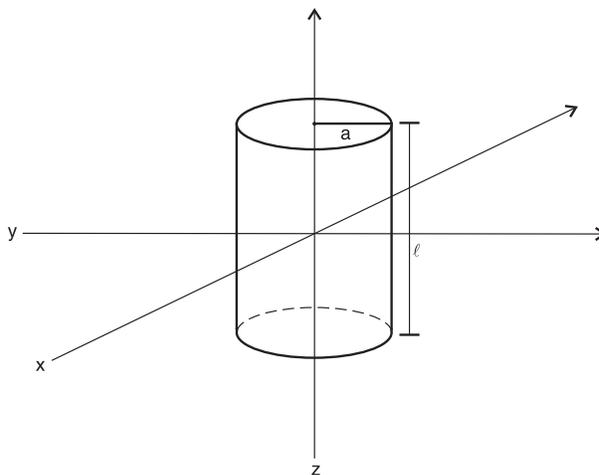
onde  $\theta_0$  é o ângulo medido em relação ao eixo  $OX$ . Considere os seguintes casos particulares:  $\theta_0 = \pi/2$ ,  $\theta_0 = \pi$  (caso do problema anterior),  $\theta_0 = 3\pi/2$  e  $\theta_0 = 2\pi$ .

**Problema 4.3** Considere um disco de espessura desprezível e raio  $b$  com um furo circular concêntrico de raio  $a$ . Suponha que o disco perfurado esteja uniformemente carregado com uma densidade de carga superficial de carga  $\sigma$ . Veja a **Figura 4.12**.

**Figura 4.12:** Problema 4.3.

- (a) Calcule o campo elétrico sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o disco perfurado e que passa por seu centro geométrico. Verifique se seu resultado reproduz o resultado do Exemplo 4.3 quando  $b = 0$ .
- (b) Mostre que, para um ponto sobre o eixo de simetria em questão próximo ao centro geométrico do disco perfurado, o campo é uma função linear na coordenada que dá a posição do ponto sobre este eixo.
- (c) Uma partícula de massa  $m$  e carga  $-q_0$  é colocada em um ponto descrito no item (b). Mostre que a partícula descreve um movimento harmônico simples e calcule sua frequência de oscilação.

**Problema 4.4** Considere um cilindro de raio  $a$  e comprimento  $\ell$  uniformemente carregado com uma densidade volumétrica de carga  $\rho$ . Calcule o campo elétrico gerado por essa distribuição sobre o eixo principal do cilindro para pontos dentro e fora da distribuição. Veja a **Figura 4.13**. *Sugestão:* divida o cilindro em discos de raio  $a$  e espessura infinitesimal e use os resultados do Exemplo 4.3.



**Figura 4.13:** Problema 4.4.

**Problema 4.5** Considere uma esfera de raio  $a$  uniformemente carregada com uma densidade volumétrica de carga  $\rho$ . Calcule o campo elétrico gerado por essa distribuição dentro e fora da esfera. *Sugestão:* inspire-se no Exemplo 4.4 e divida a esfera em discos de raio variável e espessura infinitesimal.

**Problema 4.6.** Reconsidere o problema do bastão fino uniformemente carregado que discutimos no Exemplo 4.1.

(a) Mostre que para  $x = \ell/2$ :

$$E_x(\ell/2, y) = 0, \text{ e } E_y(\ell/2, y) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} \frac{\ell/2}{\sqrt{\frac{\ell^2}{4} + y^2}}$$

(b) Agora tome o limite  $\ell \rightarrow \infty$  (um bastão de comprimento infinito) e mostre que:

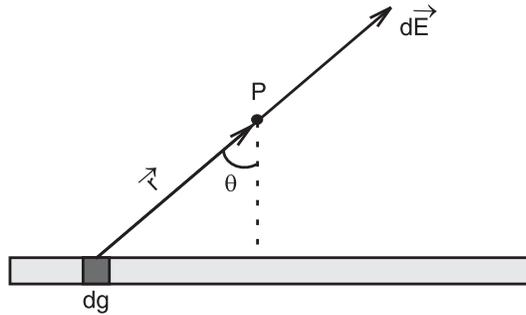
$$E_y(y) \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}$$

(c) Use argumentos de simetria para mostrar que o resultado do item anterior pode ser escrito na forma:

$$\vec{E}(r) \approx \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

onde  $r$  aqui é a distância perpendicular ao bastão. Este resultado será reobtido no próximo capítulo com outro método.

**Problema 4.7** Um modo alternativo de calcular o campo elétrico do bastão fino uniformemente carregado com uma densidade de carga linear  $\lambda$  que discutimos no Exemplo 4.1 e no Problema 4.6 é sugerido na **Figura 4.14**. A idéia é expressar as contribuições elementares ao campo no ponto de observação  $P$  como funções do ângulo  $\theta$  e integrar a expressão do campo elétrico nesta variável desde  $\theta_1$  até  $\theta_2$ .



**Figura 4.14:** Problema 4.7 Observe que  $-\pi/2 \leq \theta_1 \leq 0$  e  $0 \leq \theta_2 \leq \pi/2$ .

(a) Use a geometria da **Figura 4.14** e mostre que:

$$E_{\parallel} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1)$$

e

$$E_{\perp} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 y} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

onde  $\parallel$  e  $\perp$  denotam a componente paralela e a perpendicular ao bastão, respectivamente.

(b) Obtenha o limite  $\ell \rightarrow \infty$ .

(c) Mostre que o resultado obtido em (a) pode ser transformado para coordenadas cartesianas e confira o resultado com os do Exemplo 2.7.

**Problema 4.8** Considere um plano de extensão infinita, uniformemente carregado com uma densidade superficial de carga  $\sigma$ . Use a Lei de Coulomb e o Princípio da Superposição para calcular o campo elétrico em um ponto  $P$  do espaço. *Sugestão:* use argumentos de simetria para mostrar que o campo deve ser perpendicular ao plano. Depois faça uma partição do plano em tiras de largura infinitesimal e comprimento infinito e adapte o resultado

obtido para o bastão uniformemente carregado de comprimento infinito, Problema 4.6.

**Problema 4.9** Determine a equação para as linhas de força associadas com o campo elétrico do bastão de comprimento infinito uniformemente eletrizado, Problema 4.6 (b), (c) e Problema 4.7 (b).

**Problema 4.10** Determine a equação para as linhas de força associadas com o campo elétrico de uma casca esférica uniformemente eletrizada.

**Problema 4.11** Refaça, sem consulta, os cálculos do campo elétrico das distribuições de carga dos Exemplos 4.1 a 4.4.

## Resumo

O campo elétrico devido a distribuições contínuas é determinado usando o Princípio da Superposição e tratando os elementos de carga como cargas pontuais, somando, por meio de integração, os vetores de campo elétrico produzidos por todos os elementos de carga. As distribuições contínuas de carga podem ser lineares, superficiais ou volumétricas.

## Auto-avaliação

É muito importante que você, ao final da aula, entenda e consiga explicar o que é uma distribuição contínua de carga, e como podemos descrever estas distribuições contínuas por meio de densidades lineares, superficiais e volumétricas de carga. Os Exemplos 4.1 a 4.4 são aplicações desses conceitos, e são muito importantes. Você deve saber refazê-los e explicá-los. Todos os problemas propostos são importantes.

## Aula 5 – A Lei de Gauss

### Meta da aula

Apresentar a Lei de Gauss.

### Objetivos

Ao final desta aula, queremos que você seja capaz de:

- Reconhecer e classificar o tipo de simetria relacionada com o problema eletrostático que você está tentando resolver.
- Aplicar a Lei de Gauss levando em conta a simetria em questão para calcular o campo elétrico.
- Reconhecer as situações em que a Lei de Gauss não torna o cálculo do campo elétrico uma tarefa simples.

### Pré-requisitos

Para que você possa acompanhar esta aula, é muito importante que você esteja familiarizado com todos os conceitos apresentados nas Aulas 2 e 4 deste módulo (O campo elétrico: distribuições discretas de carga e o campo elétrico: distribuições contínuas de carga).

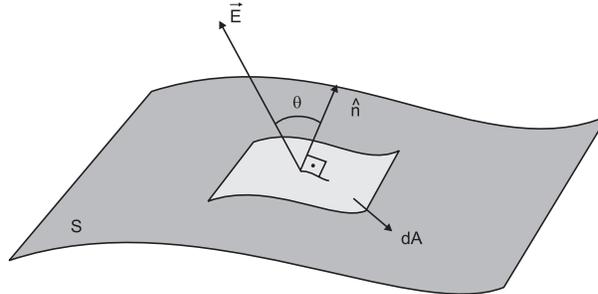
### Introdução

Vimos nas aulas anteriores que podemos calcular o campo elétrico de distribuições contínuas e discretas de carga considerando a Lei de Coulomb e o Princípio da Superposição. Vimos também que o cálculo do campo elétrico gerado por uma distribuição de cargas estáticas é bem mais fácil quando a distribuição em questão apresenta simetria. Quando isto acontece, uma ferramenta poderosa pode ser utilizada: a *Lei de Gauss*. O objetivo primordial desta aula é ensiná-lo a utilizar a Lei de Gauss de forma efetiva. Para isso, você deverá aprender a reconhecer e classificar o problema que está sendo resolvido de acordo com as simetrias. Vamos começar nossa exposição sobre a Lei de Gauss introduzindo dois conceitos preliminares fundamentais para a sua formulação.

- O fluxo do Campo Elétrico
- O conceito de ângulo sólido

### O fluxo do Campo Elétrico

Considere uma superfície  $S$  como a da **Figura (3.3)**.



**Figura 5.1:** Fluxo de um campo vetorial.

Faça uma partição dessa superfície em elementos de superfície orientados de área infinitesimal  $d\vec{\mathcal{A}} = \hat{n} d\mathcal{A}$ , onde  $\hat{n}$  é o vetor unitário normal exterior no ponto  $P$  e  $d\mathcal{A}$  a medida da área do elemento de superfície em torno de  $P$ . Suponha agora que em  $P$  o elemento orientado de superfície  $d\vec{\mathcal{A}}$  e o vetor campo elétrico  $\vec{E}$  formem um ângulo  $\theta$  entre si. Então, *por definição*, o elemento de fluxo  $d\Phi_{\vec{E}}$  de  $\vec{E}$  através do elemento orientado de superfície é:

$$d\Phi_{\vec{E}} := \vec{E} \cdot d\vec{\mathcal{A}} = \|\vec{E}\| \cos \theta d\mathcal{A}. \quad (5.1)$$

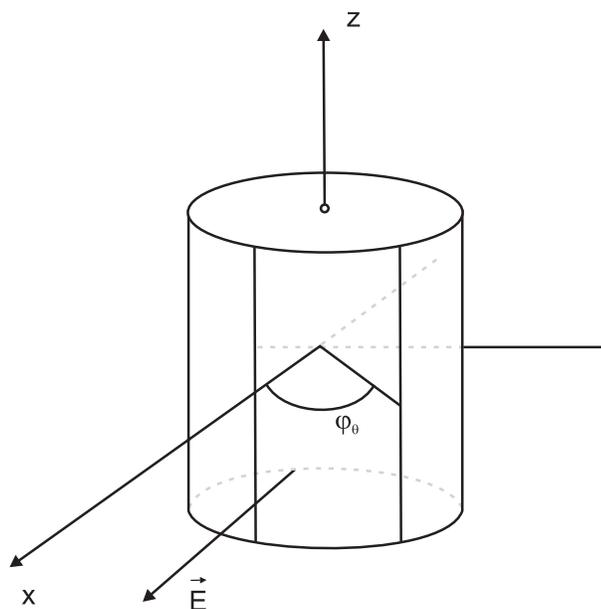
Se a cada ponto  $P$  da superfície associarmos de modo único um vetor  $\vec{E}$ , isto é, tivermos um campo vetorial definido sobre toda a superfície  $S$ , o fluxo total associado com o campo vetorial  $\vec{E}$  será então a soma de todos os fluxos infinitesimais:

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{\mathcal{A}}. \quad (5.2)$$

Vejamos alguns exemplos.

#### Exemplo 5.1. Fluxo através de uma superfície cilíndrica.

Considere uma superfície cilíndrica de raio  $a$  e comprimento  $\ell$  cujo eixo maior coincide com o eixo  $OZ$ . Um campo elétrico  $\vec{E}$  uniforme é aplicado ao longo do sentido positivo do eixo  $OX$ . Queremos calcular o fluxo do campo vetorial através de uma parte de superfície determinada por  $a$ ,  $\ell$  e  $\phi_0$ , o ângulo azimutal. Veja a **Figura 5.2**.



**Figura 5.2:** Fluxo através de uma superfície cilíndrica.

*Solução.* O campo vetorial se escreve:

$$\vec{E} = E \hat{x}$$

O fluxo de  $\vec{E}$  é:

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = E \int \hat{x} \cdot \hat{n} d\mathcal{A}$$

Em coordenadas cilíndricas,  $d\mathcal{A} = a d\phi dz$ , com  $0 \leq \phi \leq \phi_0$  e  $0 \leq z \leq \ell$ , pois devemos calcular o fluxo através de uma porção da superfície cilíndrica delimitada por estes domínios dos valores de coordenadas. Como  $\hat{x} \cdot \hat{n} = \cos \phi$ , temos:

$$\Phi_{\vec{E}} = Ea \int_0^\ell dz \int_0^{\phi_0} \cos \phi d\phi = Eal \sin \phi_0$$

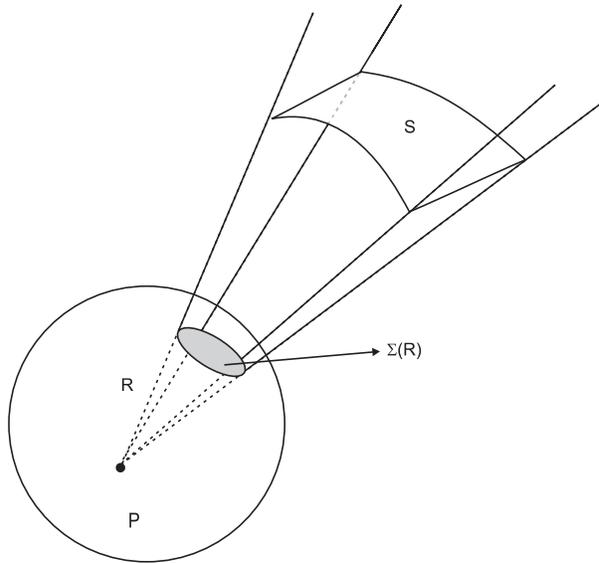
Para  $\phi_0 = \pi/2$ , por exemplo, o fluxo vale  $Eal$ .

#### Exercício 5.1

No exemplo anterior, calcule o fluxo do campo elétrico quando a superfície cilíndrica em questão corresponde a  $\phi_0 = \pi$  e  $\phi_0 = 2\pi$ . Interprete fisicamente os resultados!

## O ângulo sólido

Por definição, uma superfície orientável é uma superfície com dois lados, um lado especificado como externo e o outro como interno. Em cada ponto  $P$  da superfície haverá dois vetores unitários normais:  $\hat{n}_e$ , associado com o lado externo, e  $\hat{n}_i$ , associado com o lado interno, tal que em  $P$ ,  $\hat{n}_e = -\hat{n}_i$ . Observe que cabe a nós decidir qual lado da superfície é externo e qual lado é interno.



**Figura 5.3:** O ângulo sólido.

Se  $\mathcal{S}$  é uma superfície orientável, mas arbitrária, e se a partir de um ponto  $P$  emanam semi-retas que interceptam  $\mathcal{S}$  apenas uma vez, o conjunto dessas semi-retas (veja a **Figura 5.3**) é, por definição, o ângulo sólido com vértice em  $P$  subentendido por  $\mathcal{S}$ . A medida deste conjunto é definida da seguinte forma: seja  $\Sigma(R)$ , a interseção de  $\Omega(\mathcal{S})$  com a superfície de uma esfera de raio  $R$  cujo centro é o ponto  $P$ . O quociente:

$$\frac{\text{área de } \Sigma(R)}{R^2}$$

denotado por  $\Omega(\mathcal{S})$  é, por definição, a medida do ângulo sólido  $\Omega(\mathcal{S})$ . Esta medida também pode ser escrita na forma:

$$\Omega(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2} dA \quad (5.3)$$

onde  $\vec{r}$  é o vetor posição de um ponto arbitrário de  $\mathcal{S}$  em relação a  $P$  e  $\hat{n}$  é o vetor normal externo em um ponto sobre  $d\mathcal{S}$ . Observe que a medida do

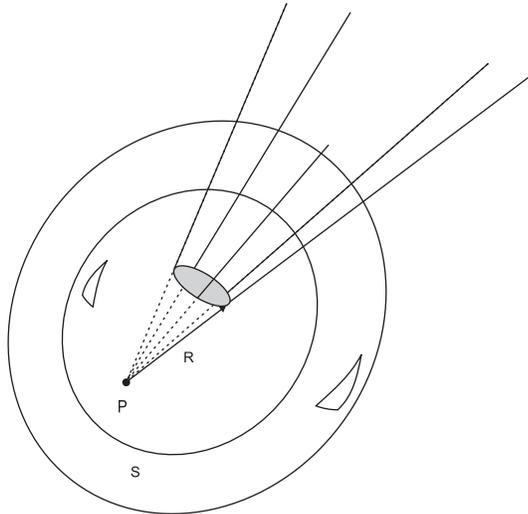
ângulo sólido não depende do raio  $R$ . Observe também que a medida de um ângulo sólido infinitesimal se escreve:

$$d\Omega(\mathcal{S}) = \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2} d\mathcal{A} \quad (5.4)$$

**Ângulo sólido correspondente a uma superfície fechada e o vértice  $P$  a um ponto interior.**

Se  $\mathcal{S}$  for uma superfície suave, arbitrária e fechada, então  $\Sigma(R)$  corresponderá à área de uma esfera de raio  $R$ . Como a área de esfera vale  $4\pi R^2$ , teremos:

$$\Omega(\mathcal{S}) = \oint_{\mathcal{S}} \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2} dS = 4\pi \quad (5.5)$$



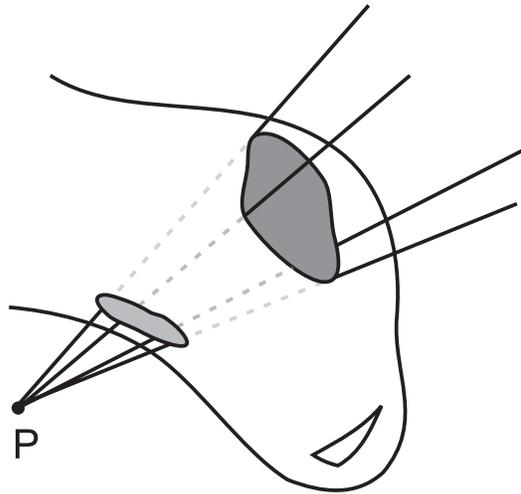
**Figura 5.4:** Ângulo sólido: superfície fechada, vértice em um ponto interior.

**Ângulo sólido correspondente a uma superfície fechada e o vértice  $P$  a um ponto exterior.**

Se  $\mathcal{S}$  for uma superfície, arbitrária, fechada e o ponto  $P$  for *externo* à região encerrada por  $\mathcal{S}$ , então  $\Omega(\mathcal{S}) = 0$ .

Podemos resumir os dois resultados acima da seguinte forma: se  $\mathcal{S}$  for superfície arbitrária e fechada, então:

$$\Omega(\mathcal{S}) = \oint_{\mathcal{S}} \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2} dS = \begin{cases} 4\pi & \text{se } P \text{ for interno a } \mathcal{S} \\ 0 & \text{se } P \text{ for externo a } \mathcal{S} \end{cases} \quad (5.6)$$



**Figura 5.5:** Ângulo sólido: superfície fechada, vértice em um ponto exterior

Este resultado, combinado com a expressão para o campo de uma carga puntiforme e com o Princípio da Superposição, nos levará à Lei de Gauss; mas antes vejamos alguns exemplos da aplicação do conceito de ângulo sólido e sua medida.

### Exemplo 5.2. Ângulo sólido subtendido por uma calota esférica.

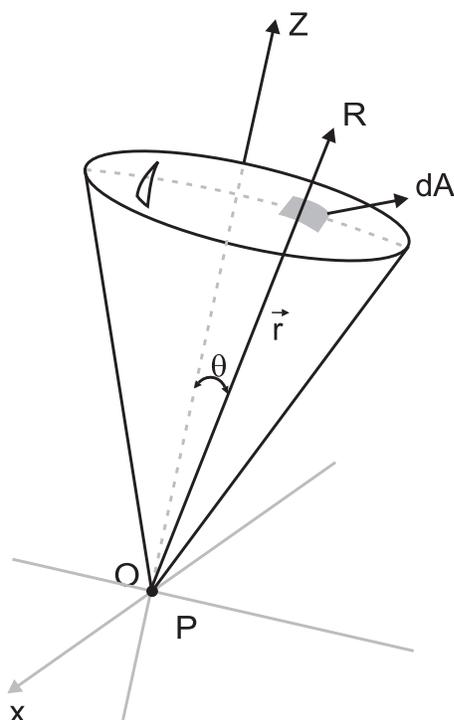
Consideremos uma esfera de raio unitário com centro na origem do sistema de coordenadas e uma calota esférica sobre esta esfera, conforme ilustrado na **Figura 5.6**.

Seja  $\theta$  o ângulo entre o vetor posição  $\vec{r}$  de um ponto na superfície da calota e o eixo  $OZ$ . Lembrando que, em coordenadas esféricas, a medida de um elemento de área se escreve:  $d\mathcal{A} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$ , temos

$$\begin{aligned}\Omega &= \int_{\text{calota}} \frac{\hat{r} \cdot \hat{n}}{r^2} d\mathcal{A} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta d\phi \\ &= 2\pi \int_0^{\theta_0} \sin \theta d\theta.\end{aligned}$$

Efetuada a integral, obtemos o ângulo sólido subtendido pela calota esférica:

$$\Omega(\theta_0) = 2\pi(1 - \cos \theta_0)$$

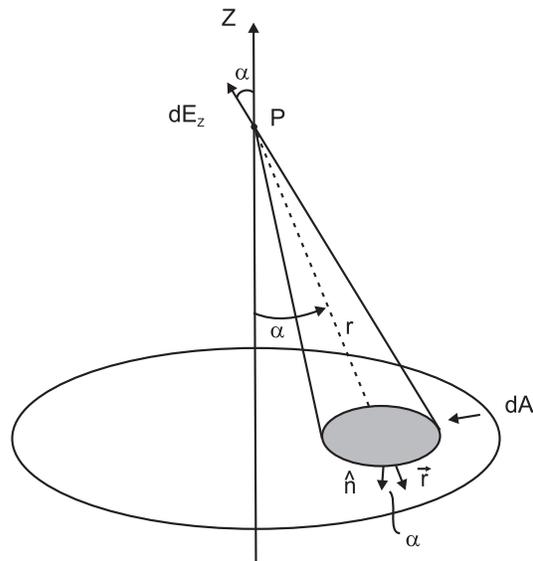


**Figura 5.6:** Ângulo sólido subentendido por uma calota esférica. O vértice está na origem.

Se fizermos  $\theta_0 = \pi$ , então  $\Omega(\pi) = 4\pi$ , como anteriormente.

**Exemplo 5.3. O campo elétrico de um disco uniformemente carregado recalculado.**

O conceito de ângulo sólido permite calcular o campo elétrico de um disco uniformemente carregado com uma densidade de carga  $\sigma$  sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o disco de uma maneira alternativa. Considere a **Figura 5.7**.



**Figura 5.7:** O campo elétrico de um disco uniformemente carregado via ângulo sólido.

Queremos calcular o campo no ponto  $P$  sobre o eixo de simetria  $OZ$  que passa pelo centro do disco.

*Solução:* Por simetria, o campo resultante jaz sobre o eixo  $OZ$ . Considere a contribuição infinitesimal do elemento de carga  $dq = \sigma d\mathcal{A}$ :

$$dE_z = \|d\vec{E}\| \cos \alpha = \frac{\sigma d\mathcal{A}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha$$

Mas  $\cos \alpha = \hat{r} \cdot \hat{n}$ , e portanto:

$$\frac{d\mathcal{A}}{r^2} \cos \alpha = \frac{\hat{r} \cdot \hat{n} d\mathcal{A}}{r^2} = d\Omega$$

onde  $d\Omega = d\phi \sin \alpha d\alpha$  é o ângulo sólido infinitesimal com vértice em  $P$  e subtendido por  $d\mathcal{A}$ . Portanto, a contribuição infinitesimal  $dE_z$  pode ser reescrita como:

$$dE_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

O campo total é:

$$\begin{aligned} E_z(P) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} d\Omega \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\alpha_0} \sin \alpha d\alpha \end{aligned}$$

As integrais são imediatas e o resultado final é:

$$E_z(P) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha_0) \quad (5.7)$$

### Exercício 5.2

Mostre que o resultado 5.7 é equivalente ao obtido no Exemplo 4.2 da Aula 4 deste módulo, com a técnica da divisão em anéis infinitesimais.

### Exercício 5.3

Elimine o  $\cos \alpha_0$  e mostre que o resultado 5.7 é equivalente ao obtido na Aula 4, Exemplo 4.3.

## A Lei de Gauss

Com o conceito de ângulo sólido em mãos, a demonstração da Lei de Gauss é simples. Considere inicialmente uma carga puntiforme  $q$  contida em uma superfície fechada, porém arbitrária,  $\mathcal{S}$ . Calculemos o fluxo do campo elétrico da carga puntiforme através de  $\mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{r^3} d\mathcal{A} \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (5.8)$$

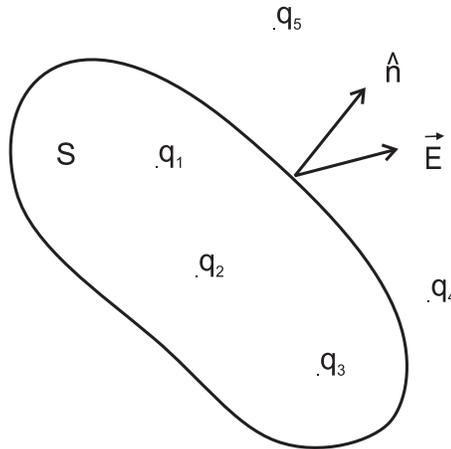
onde fizemos uso do resultado dado pela Equação (5.5) Suponhamos que agora  $\mathcal{S}$  contenha várias cargas puntiformes  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$ . Então, pelo princípio de superposição:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{S}} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_N) \cdot \hat{n} d\mathcal{A} &= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{r}_1 \cdot \hat{n}}{r_1^3} d\mathcal{A} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{r}_2 \cdot \hat{n}}{r_2^3} d\mathcal{A} \\ &+ \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{r}_3 \cdot \hat{n}}{r_3^3} d\mathcal{A} \dots \frac{q_N}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}} \frac{\vec{r}_N \cdot \hat{n}}{r_N^3} d\mathcal{A} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} (q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_N) \end{aligned} \quad (5.9)$$

ou, em notação concisa:

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n} d\mathcal{A} = \frac{q_{\text{total}}}{\epsilon_0} \quad (5.10)$$

Como o fluxo do campo elétrico criado pelas cargas elétricas não contidas pela superfície fechada  $\mathcal{S}$  é nulo, o campo elétrico  $\vec{E}$  na Equação (5.10) pode ser interpretado como a superposição dos campos criados pelas cargas no interior de  $\mathcal{S}$  e pelos campos criados pelas cargas que são exteriores a  $\mathcal{S}$ .



**Figura 5.8:** A Lei de Gauss. O campo elétrico é a soma dos campos das cargas no interior e no exterior da superfície fechada.

O campo elétrico  $\vec{E}$  no integrando da Lei de Gauss, Equação (5.10), é o campo elétrico de todas as cargas do universo!

Observe também que  $q_{\text{total}}$  representa a soma algébrica das cargas contidas por  $\mathcal{S}$ . Isto significa que o fluxo do campo elétrico através de  $\mathcal{S}$  pode ser nulo mesmo que  $\mathcal{S}$  contenha cargas.

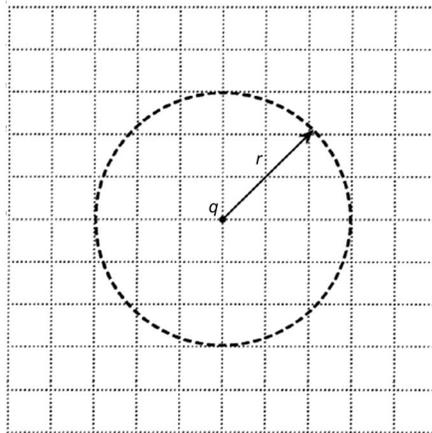
A Lei de Gauss é um instrumento poderoso no cálculo do campo elétrico de uma distribuição de cargas quando esta apresenta um alto grau de simetria, por exemplo, simetria esférica ou cilíndrica. Nestes casos, a Lei de Gauss representa o meio mais rápido e simples para o cálculo do campo elétrico. Vejamos uma aplicação.

**Exemplo 5.4. Campo de uma carga puntiforme.**

Suponha que exista uma única carga elétrica puntiforme de valor  $q$  em todo o universo e que seu campo elétrico nos seja desconhecido. Suponha também que desconheçamos totalmente a Lei de Coulomb, mas em compensação conheçamos a Lei de Gauss. Envolvamos esta carga com uma superfície fechada e calculemos o fluxo de  $\vec{E}$  através desta superfície. Admita que a presença da carga elétrica quebra a homogeneidade do espaço, mas não sua isotropia, ou seja, ele não é **homogêneo**, mas é **isotrópico**.

Isto significa que o campo elétrico deve ter simetria esférica em relação à carga puntiforme, ou seja, deve ser radial. Isto significa também que a superfície fechada conveniente é a superfície de uma esfera de raio  $r$  cujo centro coincide com a posição da carga  $q$ . Veja a **Figura 5.9**.

Você se lembra dos conceitos de **homogeneidade** e **isotropia**, apresentados na Aula 1 deste módulo? Não? Talvez seja uma boa hora para revê-los!



**Figura 5.9:** O campo elétrico de um carga puntiforme por meio da Lei de Gauss. Observe que a superfície gaussiana é imaginária.

Para todos os pontos sobre a superfície da esfera gaussiana, a intensidade do campo elétrico deve ser a mesma. Matematicamente, escrevemos:

$$\vec{E} = E(r) \hat{r}$$

e

$$\|\vec{E}\| = E(r) > 0, \text{ para qualquer } P \text{ sobre a esfera.}$$

Nessas condições, o fluxo do campo elétrico da carga puntiforme através da superfície da esfera é:

$$\Phi_{\vec{E}} = E(r) 4\pi r^2$$

Pela Lei de Gauss, esse fluxo deve ser proporcional à carga total encerrada pela superfície, logo

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Segue então que:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

#### Exercício 5.4

Qual seria o fluxo total de campo elétrico de um dipolo elétrico composto de cargas com valores  $q$  e  $-q$ , respectivamente, através de uma superfície arbitrária? Pense em termos das linhas de campo que atravessam a superfície.

## Aplicações da Lei de Gauss

O exemplo anterior, embora simples, demonstra uma característica importante a respeito da aplicação prática da Lei de Gauss: o cálculo do campo elétrico por meio da Lei de Gauss será eficaz quando pudermos calcular o fluxo do campo elétrico de forma simples. Isto significará tomar partido da simetria do problema em questão, escolhendo uma superfície gaussiana adequada para escrever o fluxo na forma:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} da = \text{campo} \times \text{área da superfície gaussiana}$$

No nosso curso e nos textos de apoio consideraremos a aplicação da Lei de Gauss às distribuições de carga que apresentam:

- a simetria do plano;
- simetria axial ou cilíndrica;
- simetria esférica.

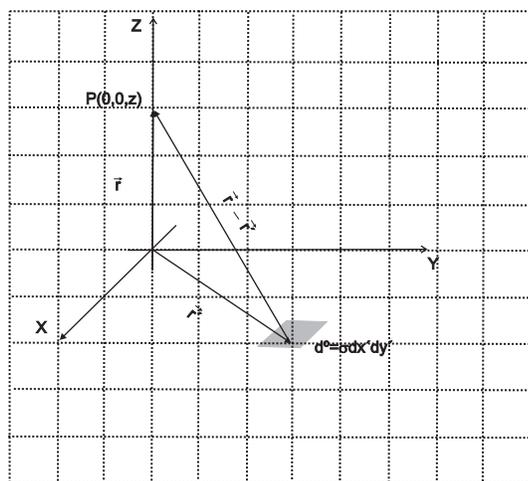
Os exemplos a seguir ilustram a aplicação da Lei de Gauss a essas situações, que envolvem um alto grau de simetria. Você logo perceberá que, nesses casos, a Lei de Gauss é o caminho mais curto e elegante para obter o campo elétrico.

Quando a simetria da distribuição de carga não é suficientemente alta, a Lei de Gauss, embora válida, não é o meio mais conveniente de calcular o campo elétrico, e outros métodos podem e devem ser utilizados.

Observe que, independentemente do método escolhido, os argumentos de simetria sempre tornam os cálculos mais fáceis.

### Exemplo 5.5. Campo elétrico de um plano infinito uniformemente carregado por meio da Lei de Coulomb e da Lei de Gauss.

Começaremos com a simetria do plano infinito. Para que você possa apreciar melhor a elegância e a eficácia da Lei de Gauss, consideraremos o problema do cálculo do campo elétrico associado com um plano de extensão infinita uniformemente carregado (**Problema 4.9**). Veja a **Figura 5.10**. Resolveremos o problema tanto do ponto de vista do capítulo anterior (Lei de Coulomb) como do ponto de vista da Lei de Gauss.



**Figura 5.10:** Campo elétrico de um plano infinito uniformemente carregado.

*Solução:* Considere uma distribuição superficial uniforme de carga  $\sigma$  medida em coulombs/(metro)<sup>2</sup>. Suponha que esta distribuição superficial tenha a

simetria do plano infinito. Seja  $OZ$  o eixo cartesiano perpendicular a este plano. Os eixos  $OX$  e  $OY$  estão contidos no plano, assim como a origem. Por simetria, em qualquer ponto do espaço, o campo elétrico deve ser perpendicular ao plano carregado e depender apenas da coordenada  $z$ , isto é, deve ser da forma  $\vec{E}(z) = E_z(z) \hat{z}$ . Para pontos cujas coordenadas cartesianas são  $P(x, y, z)$  e  $P'(x, y, -z)$ , este campo deve satisfazer as seguintes condições:

$$\vec{E}(P) = -\vec{E}(P')$$

$$\|\vec{E}(P)\| = \|\vec{E}(P')\|$$

Calculamos o campo elétrico primeiro com a Lei de Coulomb. Referindo-nos à **Figura 5.10**, vemos que o vetor posição de um ponto sobre o eixo  $OZ$  se escreve  $\vec{r} = z \hat{z}$ . Já um elemento de carga  $dq$  sobre o plano tem como vetor posição o vetor  $\vec{r}' = x' \hat{x} + y' \hat{y}$ .

O elemento de carga  $dq$  pode ser escrito como  $dq = \sigma dx' dy'$ . Aplicando a Lei de Coulomb e o princípio da superposição:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq(\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \frac{(z \hat{z} - x' \hat{x} - y' \hat{y})}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Duas dessas integrais são nulas por argumento de paridade. Resta a integral:

$$\vec{E}(z) = \hat{z} \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx' dy' \frac{1}{(z^2 + x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Façamos primeiro a integral sobre a variável  $y'$ . Uma consulta à tabela de integrais nos dá:

$$\int \frac{du}{(u^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{2}{b^2 \sqrt{u^2 + b^2}}$$

Segue então que:

$$\vec{E}(z) = \hat{z} \frac{\sigma z}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{x'^2 + z^2}$$

Efetuada a integral sobre a variável  $x'$  com o auxílio de

$$\int \frac{du}{u^2 + b^2} = \frac{1}{b} \tan^{-1} \frac{u}{b}$$

obtemos, finalmente,

$$\vec{E}(z) = \hat{z} \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad z > 0$$

Resta adaptar este resultado para  $z < 0$ . Como este procedimento é comum aos dois métodos, deixaremos esta tarefa para o final.

Vejamos agora como se faz o mesmo problema com a Lei de Gauss. As considerações de simetria que fizemos anteriormente levarão à conclusão de que uma superfície gaussiana que respeite a simetria do problema pode ser a superfície de um cilindro imaginário cujo eixo maior de simetria seja perpendicular ao plano carregado e com as superfícies de suas tampas a uma mesma distância do plano. Então, como não há fluxo do campo elétrico através da área lateral do cilindro gaussiano, e sobre as tampas a magnitude do campo é uniforme, podemos escrever:

$$\Phi_{\vec{E}} = \vec{E}(z) \cdot \hat{n}A + \vec{E}(-z) \cdot \hat{n}'A$$

onde  $A$  é a área de uma tampa. Como  $\hat{n} = \hat{z}$  e  $\hat{n}' = -\hat{z}$ , teremos:

$$\vec{E}(z) \cdot \hat{n}A = E_z(z)$$

e

$$\vec{E}(-z) \cdot \hat{n}A = E_z(-z)$$

Como por simetria  $E_z(z) = E_z(-z)$ , segue que o fluxo vale:

$$\Phi_{\vec{E}} = 2E_z(z)A$$

Por outro lado, a carga encerrada pela superfície gaussiana é:

$$q = \sigma A$$

Aplicando a Lei de Gauss, igualamos  $\Phi_{\vec{E}}$  a  $q/\epsilon_0$ ,

$$2E_z(z) A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

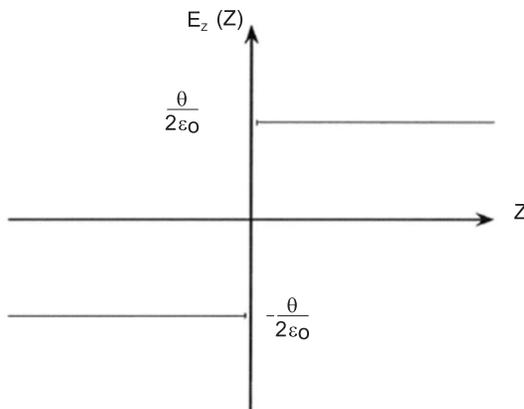
e, portanto,

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Observe que o campo não depende nem mesmo da coordenada  $z$ . O campo em todo espaço se escreve

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{para } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} & \text{para } z < 0 \end{cases}$$

Neste exemplo, a Lei de Gauss não nos permite inferir o valor do campo elétrico sobre a distribuição, isto é, para os pontos  $P(x, y, 0)$ . No gráfico da **Figura 5.11** representamos  $E_z(z)$ . Observe a descontinuidade na origem. Somos tentados a dizer que o campo sobre a placa é nulo, e de fato podemos fazê-lo por meio de uma definição apropriada. Mas isto não elimina o fato de que o campo é descontínuo sobre a placa. E mais ainda, esta descontinuidade é proporcional à densidade superficial de carga.



**Figura 5.11:** Campo elétrico de um plano infinito uniformemente carregado.

**Exercício 5.5**

Convença-se de que o campo elétrico criado por um plano infinito uniformemente carregado discutido no **Exemplo 5.5** também pode ser escrito como

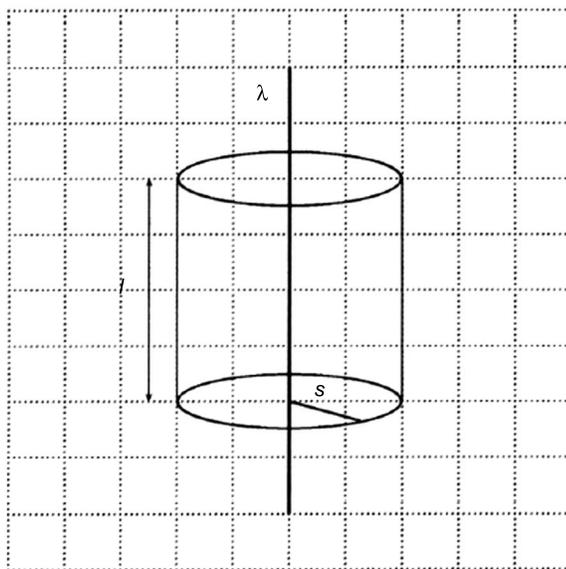
$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z}$$

onde  $|z|$  é o valor absoluto da coordenada  $z$ .

**Exemplo 5.6. Campo elétrico de uma distribuição filiforme.**

Consideremos agora uma distribuição de carga de densidade linear uniforme  $\lambda$ , um bastão fino de comprimento infinito que faremos coincidir com o eixo  $OZ$ . Queremos calcular o campo elétrico dentro e fora desta distribuição.

*Solução:* Como a distribuição apresenta simetria cilíndrica e o campo elétrico gerado por ela será perpendicular ao eixo do bastão, a superfície gaussiana conveniente será um cilindro de raio  $s$  de comprimento finito  $\ell \gg s$ . Veja a **Figura 5.12**.



**Figura 5.12:** Campo elétrico de um bastão fino de comprimento infinito uniformemente carregado.

Por simetria, o campo deve ter a forma:

$$\vec{E}(s) = E(s) \hat{s}$$

e sobre a superfície gaussiana  $\|\vec{E}(s)\| = |E(s)| > 0$ , e será o mesmo em todos os pontos da superfície. Como  $\hat{n} = \hat{s}$ , temos  $\vec{E} \cdot \hat{n} = E(s)$ . Logo, o fluxo através da gaussiana se escreve:

$$\Phi_{\vec{E}} = E(s) \int d\mathcal{A} = E(s) 2\pi s\ell$$

Aplicando a Lei de Gauss:

$$E(s) 2\pi s\ell = \frac{q}{\epsilon_0}$$

mas a carga encerrada pela gaussiana é  $q = \lambda\ell$ , portanto temos:

$$E(s) 2\pi s\ell = \frac{\lambda\ell}{\epsilon_0}$$

Simplificando, obtemos o resultado já conhecido da Aula 4:

$$E(s) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s}, \quad s > 0 \quad (5.11)$$

Vetorialmente escrevemos:

$$\vec{E}(s) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}, \quad s > 0 \quad (5.12)$$

#### Exercício 5.6

Você está convencido de que no exemplo anterior a superfície gaussiana conveniente é a superfície do cilindro reto de seção transversal circular? Por que não a superfície de uma esfera? Ou a de um cubo?

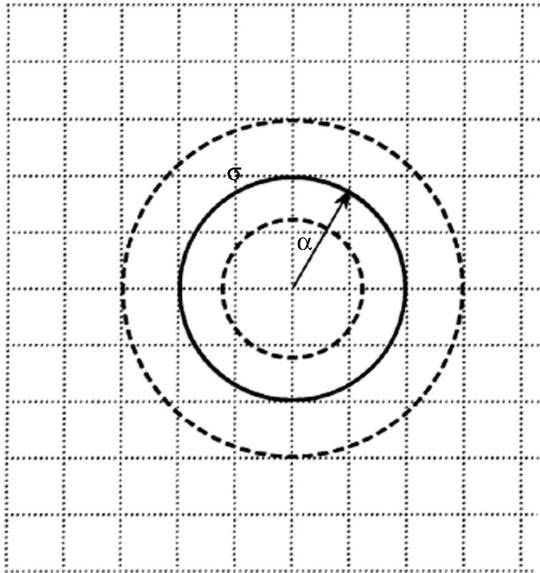
**Exemplo 5.7. Campo elétrico de uma distribuição esfericamente simétrica.**

Como exemplo de cálculo do campo elétrico de uma distribuição de carga esfericamente simétrica, consideremos a casca esférica de raio  $a$  uniformemente carregada com uma densidade superficial de carga  $\sigma$  que consideramos na Aula 4, Exemplo 4.4. Como antes, queremos calcular o campo elétrico desta distribuição para pontos interiores e exteriores à casca. Veja **Figura 5.13**.

*Solução:* A simetria esférica do problema sugere que escrevamos o campo gerado por esta distribuição na forma:

$$\vec{E}(r) = E(r) \hat{r}$$

onde  $r$  é a distância radial ao centro geométrico da casca. As superfícies gaussianas apropriadas são as superfícies de esferas de raio  $r$  concêntricas à casca.



**Figura 5.13:** Gaussianas para o cálculo do campo elétrico dentro e fora de uma casca esférica uniformemente carregada.

Consideremos primeiro a região interior da casca. A superfície gaussianas é a da esfera de raio  $r$  tal que  $0 < r < a$  com centro coincidindo com o centro da casca. Veja **Figura 5.13**. É fácil ver que  $\hat{n} = \hat{r}$ , logo  $\vec{E}(r) \cdot \hat{n} = E(r)$ .

Como no exemplo anterior, a norma  $\|\vec{E}(r)\|$  é a mesma em cada ponto da superfície da gaussiana. O fluxo através da gaussiana é então:

$$\Phi_{\vec{E}} = E(r) \int d\mathcal{A} = E(r) 4\pi r^2$$

A quantidade de carga encerrada pela gaussiana é zero. Logo, aplicando a Lei de Gauss, concluímos que o fluxo elétrico é zero. Como a superfície gaussiana, por construção, tem raio arbitrário diferente de zero, somos obrigados a concluir que o campo elétrico no interior da casca esférica uniformemente carregada é zero!

O cálculo do fluxo não sofre grandes alterações; você deve apenas ter em mente que a superfície gaussiana agora tem um raio  $r$  tal que  $a \leq r \leq \infty$ . O que muda é o cálculo da carga encerrada pela gaussiana, que vale  $q = \sigma 4\pi a^2$ , já que toda a carga da casca está encerrada. Aplicando a Lei de Gauss temos:

$$E(r) \int d\mathcal{A} = E(r) 4\pi r^2 = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\epsilon_0}$$

## Leituras complementares

O material a seguir serve de complementação ao seu estudo. Consulte-o a fim de aprofundar mais seus conhecimentos.

HALLIDAY, David.; RESNICK, Robert.; WALKER, E Jearl.

*Física*. v.3: eletromagnetismo. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. Cap. 22.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica*. v.3:

eletromagnetismo. São Paulo: Edgard Blücher, 1997. Cap. 1 e 2.

## Atividades Finais

**Problema 5.1** Considere uma distribuição volumar uniforme de carga  $\rho$  (medida em coulombs/metro<sup>3</sup>). Esta distribuição está confinada no eixo  $OZ$  entre  $-a \leq z \leq a$ , mas não está confinada nos eixos  $OX$  e  $OY$ . Em outros dizeres, temos uma distribuição planar com espessura  $2a$ . Use a Lei de Gauss e obtenha o campo dentro e fora da distribuição. Você deve obter:

$$E_z(z) = \frac{\rho}{\epsilon_0} z$$

dentro da distribuição, e

$$E_z(z) = \text{Sinal}(z) \frac{\rho}{\epsilon_0} z$$

fora da distribuição. As demais componentes do campo elétrico devem ser nulas. Faça o gráfico dessa função. Para obter o limite da distribuição com a simetria do plano, mas com espessura nula, estude o seguinte limite:  $\lim_{\rho \rightarrow \infty, a \rightarrow 0} = \sigma$ , onde  $\sigma$  é uma densidade superficial uniforme de carga.

**Problema 5.2** Considere dois planos infinitos, paralelos, uniformemente carregados com densidades superficiais de carga  $\sigma$  e  $-\sigma$  e separados por uma distância fixa. Determine o campo elétrico em todos os pontos do espaço.

**Problema 5.3** Uma carga elétrica puntiforme  $q$  é colocada no centro geométrico de um cubo de aresta  $a$ . Determine o fluxo do campo elétrico através de uma das faces do cubo. Suponha agora que a carga puntiforme seja colocada em um dos vértices do cubo. Nessas condições, determine o fluxo através de uma das faces do cubo.

**Problema 5.4** Obtenha o campo elétrico dentro e fora de uma distribuição de carga uniforme contida em um volume cilíndrico de altura  $H$  muito maior do que seu raio  $R$  e densidade de carga  $\rho$ . Faça o gráfico da variação do campo em função da distância radial ao eixo do cilindro.

**Problema 5.5** Uma esfera uniformemente carregada com uma densidade de carga  $\rho$  tem no seu interior uma cavidade esférica na qual não existe carga alguma. Mostre que o campo no interior da cavidade é uniforme e é dado por

$$\vec{E} = \frac{\rho \vec{s}}{3\epsilon_0}$$

onde  $\vec{s}$  é o vetor que une o centro da esfera ao centro da cavidade.

**Problema 5.6** Considere uma casca esférica metálica, carregada com uma densidade superficial de carga  $\sigma_e$ , na superfície da qual fazemos um pequeno furo circular. Determine o campo elétrico próximo ao centro do furo.

**Problema 5.7** Considere uma casca esférica de raio interno  $R_2$  e raio externo  $R_3$ , uniformemente carregada com uma densidade volumar de carga  $\rho$ . A casca esférica envolve uma esfera concêntrica de raio  $R_1 < R_2$ , também uniformemente carregada com a mesma densidade de carga  $\rho$ . Determine o campo elétrico nas quatro regiões do espaço determinadas pela esfera e pela casca esférica.

**Problema 5.8** *O modelo do pudim com ameixas de J. J. Thomson e o átomo de hidrogênio.* Um dos primeiros modelos para o átomo de hidrogênio é o modelo do “pudim de ameixas”. Nele, a carga  $e$  do próton está uniformemente distribuída no interior de uma esfera de raio  $R \approx 10^{-8}$  centímetros, que é o pudim. O elétron de carga  $-e$  é tratado como uma carga puntiforme  $e$ , portanto, é a ameixa.

- (a) Calcule o campo elétrico que atua na posição instantânea do elétron dentro do pudim.
- (b) Mostre que o movimento harmônico simples ao longo do raio é um dos movimentos possíveis do elétron.
- (c) Determine a frequência de oscilação radial do elétron e compare-a com as frequências típicas do visível.

Este modelo clássico fracassa porque não pode explicar a estabilidade do átomo, pois, de acordo com a teoria eletromagnética clássica (teorema de Larmor), o elétron está acelerado e deve radiar energia. Como consequência final, o elétron irá em direção ao núcleo.

**Problema 5.9** *Simetria esférica e distribuição não-uniforme de carga elétrica.* Considere um átomo de hidrogênio no seu estado fundamental, o estado  $1s^1$ . Sob certas condições podemos considerar a nuvem eletrônica associada com a distribuição esfericamente simétrica descrita por

$$\rho_e(r) = A \exp(-r/a_0), \quad 0 \leq r < \infty,$$

onde  $A$  e  $a_0$  (o raio de Bohr) são constantes atômicas. Determine o campo elétrico em um ponto arbitrário do espaço.

**Problema 5.10** *O teorema de Earnshaw.* Use a Lei de Gauss para mostrar que um campo puramente eletrostático no vácuo não admite pontos de equilíbrio estável. Isto significa que uma carga puntiforme não pode ser mantida em equilíbrio mecânico pela ação de forças de natureza puramente eletrostática. O mesmo vale para as distribuições discretas e contínuas de carga que vimos discutindo até aqui. Como reconciliar as exigências do teorema de Earnshaw com o trabalho que desenvolvemos até agora?

## Resumo

A Lei de Gauss é, assim como a Lei de Coulomb, uma maneira de descrever a relação entre cargas elétricas e campos elétricos. A aplicação da Lei de Gauss e considerações de simetria permitem a dedução de vários resultados importantes em situações eletrostáticas. A correta identificação de simetrias permite o uso da Lei de Gauss, facilitando muito o cálculo do campo elétrico em distribuições de carga discretas e contínuas.

## Auto-avaliação

É fundamental que, depois de estudar esta aula, você seja capaz de entender o conceito de simetria e saiba identificar possíveis simetrias em problemas eletrostáticos. A identificação destas simetrias permite que a Lei de Gauss seja corretamente aplicada. É muito importante que você seja capaz de entender e explicar sozinho os exemplos feitos ao longo do texto, além de resolver os exercícios e problemas propostos.



# Aula 6 – O potencial elétrico e sua aplicação às distribuições discretas de carga

## Meta da aula

Apresentar o conceito de potencial elétrico. Calcular o campo elétrico de distribuições discretas de carga, por meio do potencial elétrico. Apresentar o conceito de superfícies eqüipotenciais.

## Objetivos

Ao final desta aula, esperamos que você seja capaz de:

- Entender e explicar o conceito de potencial elétrico;
- Mostrar que, por meio do campo elétrico, é possível determinar o potencial elétrico;
- Identificar superfícies eqüipotenciais simples.

## Pré-requisitos

Para entender o conceito de potencial elétrico, é aconselhável que você reveja os resultados obtidos nos exemplos, problemas e exercícios das Aulas 2 a 5. Vários destes resultados serão obtidos novamente, agora usando-se o conceito de potencial elétrico que será apresentado.

## Introdução

Nas Aulas 2, 3 e 4, usamos a Lei de Coulomb, a Lei de Gauss e o Princípio da Superposição para calcular o campo elétrico de uma distribuição de cargas em um ponto arbitrário do espaço. Nesta aula, introduziremos um terceiro método de cálculo do campo elétrico. Mostraremos que o campo elétrico pode ser obtido a partir de uma função escalar, o potencial elétrico.

## O potencial elétrico

Em analogia com o caso gravitacional, a energia potencial elétrica  $U$  pode ser descrita de uma forma que não depende explicitamente do valor da

carga em estudo. Na forma  $U/q$ , a energia potencial por unidade de carga é expressa em unidades de joule/coulomb e depende, convenientemente, do campo elétrico na região de estudo.

A energia potencial por unidade de carga em um ponto de um campo elétrico é chamada potencial elétrico ou, simplesmente, potencial. Em geral, utiliza-se a letra  $V$  para expressar-se o potencial, ou seja:

$$V = \frac{U}{q} \quad (6.1)$$

#### Exercício 6.1

Observe a Equação (6.1). O potencial elétrico é uma grandeza escalar ou vetorial?

O potencial elétrico tem uma grande importância no nosso dia-a-dia, e se tornou um padrão de medida elétrica importante com o passar dos anos. Esta importância é tão grande que, no Sistema Internacional de Unidades, o potencial ganhou uma unidade própria, que leva o nome de volt, abreviado com a letra  $V$ . Assim:

$$1\text{volt} = 1\text{joule por coulomb}$$

Com o uso do volt, a unidade de campo elétrico pode ser definida em função da unidade de potencial como:

$$1\frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{1\text{J}}{\text{mC}} = \frac{\text{volt}}{\text{metro}} \quad (6.2)$$

## A diferença de potencial

Assim como no caso gravitacional, uma grandeza de bastante interesse é a diferença de potencial ( $\Delta V$ ). Por quê? A diferença de potencial é proporcional a que grandeza importante? Vamos verificar explicitamente.

Vamos imaginar dois potenciais distintos,  $V_1$  e  $V_2$ . Teremos:

$$V_1 = \frac{U_1}{q}$$

$$V_2 = \frac{U_2}{q}$$

Vamos agora calcular a diferença  $\Delta V$  entre os dois potenciais  $V_1$  e  $V_2$  simplesmente fazendo:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{U_2}{q} - \frac{U_1}{q} = \frac{\Delta U}{q} \quad (6.3)$$

Observe bem a Equação (6.3). Agora, já podemos responder às questões feitas. Por que a diferença de potencial é importante? A diferença de potencial é proporcional a que grandeza importante? A diferença de potencial é proporcional à diferença de energia potencial  $\Delta U$ .

Mas a diferença de potencial pode ser expressa em termos do trabalho realizado pela força elétrica, ou:

$$\Delta U = -\mathcal{W}$$

Portanto, podemos relacionar a diferença de potencial diretamente com o trabalho.

$$\Delta V = V_{final} - V_{inicial} = -\frac{\mathcal{W}}{q} \quad (6.4)$$

A Equação (6.4) é a definição de diferença de potencial. A diferença de potencial entre dois pontos é igual a menos o trabalho realizado pela força elétrica para mover uma carga de um ponto inicial a um ponto final. Observe que estamos falando sobre o trabalho realizado pelo campo elétrico. Dependendo das intensidades e dos sinais de  $q$  e  $\mathcal{W}$ , a diferença de potencial  $\Delta V$  pode ser nula, negativa ou positiva.

### Exercício 6.2

Observando a Equação (6.4), pense em qual seria o resultado de considerar o ponto inicial como tendo potencial nulo, ou seja,  $V_{inicial} = 0$ .

Se, em algum ponto, a energia potencial elétrica for nula, ou seja,  $U_{inicial} = 0$ , então, de acordo com a Equação (6.1), o potencial neste ponto também será nulo.

Para distribuições localizadas de carga, é conveniente escolher o infinito como ponto onde a energia potencial é nula e, portanto, onde o potencial é nulo. O potencial de qualquer ponto em um campo elétrico é, então, definido como o trabalho realizado pela força elétrica para trazer uma partícula carregada do infinito até aquele ponto, ou seja,

$$V = -\frac{\mathcal{W}_{\infty}}{q}$$

onde  $\mathcal{W}_{\infty}$  é o trabalho realizado pela força elétrica e, portanto, pelo campo elétrico.

#### Exercício 6.3

Calcule, em joules, a energia necessária para mover um elétron numa diferença de potencial de 1V. Lembre-se da definição de potencial e de suas unidades.

No Exercício 6.3, calculamos a energia gasta para mover um único elétron, ou seja, uma carga fundamental, numa diferença de potencial de 1V. Podemos utilizar este conceito e definir uma nova unidade de energia, que é bastante utilizada em diversas situações. A nova unidade é conhecida como elétron-volt e abreviada por eV.

#### Exercício 6.4

A diferença de potencial entre o solo e as nuvens durante uma tempestade pode chegar a valores da ordem de  $10^9V$ . Qual é a intensidade da variação da energia potencial elétrica, em eV, de um elétron que se move entre o solo e uma nuvem?

## O potencial elétrico a partir do campo elétrico

Vamos imaginar que conhecemos o vetor campo elétrico  $\vec{E}$  em uma região. É possível determinar a diferença de potencial entre dois pontos quaisquer no campo  $\vec{E}$ ?

Consideremos um campo arbitrário  $\vec{E}$  e uma carga  $q_0$  que queremos transferir de um ponto  $P_1$  para um ponto  $P_2$  com velocidade constante. Vamos supor também que a carga esteja em repouso em  $P_1$  e em  $P_2$ . Isto significa que a aceleração e a desaceleração são muito pequenas e podem ser desprezadas. Durante o deslocamento entre  $P_1$  e  $P_2$ , a carga estará sempre em equilíbrio mecânico. Para que isto aconteça, é necessária a intervenção de um agente externo, que deve exercer uma força  $\vec{F}_{externa}$  de mesma intensidade, na mesma direção, porém em sentido oposto ao da força elétrica exercida pelo campo elétrico. Isto vale para todos os pontos do trajeto da carga.

Em qualquer ponto da trajetória, uma força elétrica  $\vec{F} = q_0\vec{E}$  atua sobre a carga. Portanto:

$$\|\vec{F}_{externa}\| = q_0\|\vec{E}\|$$

Quando a carga sofre um deslocamento infinitesimal  $\vec{ds}$ , a força  $\vec{F}_{externa}$  realiza um trabalho sobre a carga  $q_0$  dado por:

$$d\mathcal{W}_{externo} = \vec{F}_{externa} \cdot \vec{ds}$$

ou

$$d\mathcal{W}_{externo} = q_0\vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (6.5)$$

Para determinar o trabalho total sobre a carga, somamos todas as contribuições  $d\mathcal{W}$  sobre a trajetória, usando uma soma infinita, ou seja, integrando a Equação 6.5

$$\mathcal{W}_{externo} = q_0 \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (6.6)$$

O trabalho realizado pelo campo elétrico tem o sinal oposto ao do trabalho realizado pelo agente externo. Logo, o trabalho por unidade de carga realizado pelo campo elétrico é:

$$\frac{W_{\text{externo}}}{q_0} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (6.7)$$

Como a diferença de potencial entre dois pontos é o trabalho por unidade de carga realizado pelo campo, segue que:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} \quad (6.8)$$

Freqüentemente, escolhemos o valor do potencial elétrico no ponto inicial de referência  $P_1$  como sendo nulo. Neste caso:

$$V = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

Vejamos o exemplo a seguir.

### Exemplo 6.1 O potencial elétrico de uma carga puntiforme

No Exemplo 2.1 da Aula 2 deste módulo, calculamos o campo elétrico de uma carga  $q$  colocada na origem de um sistema de coordenadas. O campo, expresso pela Equação (2.9), é dado por:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

O cálculo do potencial, considerando a Equação (6.8) e que o potencial no infinito ( $V_\infty$ ) é nulo, é dado por:

$$V = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot \vec{ds} = - \int_{\infty}^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \vec{ds}$$

o que nos leva a:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (6.9)$$

## Distribuições discretas

Acabamos de calcular o potencial em um sistema composto apenas por uma partícula. Se temos um sistema composto por um conjunto discreto de partículas, qual é o potencial? Conforme vimos na Aula 2, para um

sistema de cargas discretas, o campo elétrico pode ser determinado usando-se o Princípio de Superposição. Aplicando o princípio da superposição ao potencial elétrico, escrevemos:

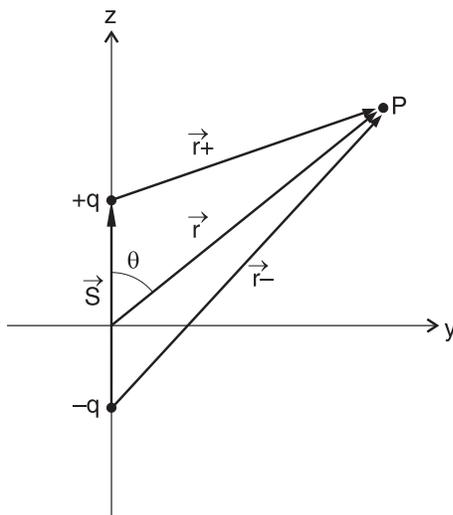
$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_k}, \quad (6.10)$$

onde  $r_k := \|\vec{r}_P - \vec{r}_k\|$

### Exemplo 6.2 O potencial elétrico do dipolo

Calculemos o potencial elétrico associado com o dipolo elétrico discutido no Exemplo 2.3 do Capítulo 2. Pelo princípio da superposição aplicado ao potencial, temos:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$



**Figura 6.1:** Geometria para o cálculo do potencial elétrico de um dipolo elétrico.

Como a geometria da configuração permanece a mesma, valem as relações entre os vetores  $\vec{r}_+$ ,  $\vec{r}_-$ ,  $\vec{s}$  e  $\vec{r}$ , que utilizamos antes, (veja a **Figura 6.1**). Logo, podemos escrever:

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\|\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2}\|} - \frac{1}{\|\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2}\|} \right)$$

e ainda

$$\|\vec{r} \mp \frac{\vec{s}}{2}\| = \left( r^2 + \frac{s^2}{4} \mp rs \cos \theta \right)^{1/2} = r \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{s^2}{r^2} \mp \frac{s}{r} \cos \theta \right)^{1/2}$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{s}/2$ . Como o ponto de observação  $P$  está, por hipótese, muito distante da configuração, isto é,  $s/r \ll 1$ , desprezamos o termo quadrático em  $s/r$  e escrevemos:

$$\|\vec{r} \mp \frac{\vec{s}}{2}\| \approx r \left( 1 + \mp \frac{s}{r} \cos \theta \right)^{1/2}$$

Substituindo a expressão do potencial e usando a expansão binomial, obtemos:

$$V(P) \approx \frac{qs \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ou, de forma mais concisa,

$$V(P) \approx \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (6.11)$$

#### Exercício 6.5

Complete os detalhes que levam ao resultado dado pela Equação (6.11).

#### Exercício 6.6

Escreva a Equação (6.11) em coordenadas cartesianas e obtenha o campo elétrico do dipolo elétrico. Verifique seu resultado comparando-o com o resultado do Exemplo 2.3 da Aula 2.

## Superfícies eqüipotenciais

O conhecimento do campo elétrico  $\vec{E}$  no espaço nos permite calcular o potencial elétrico. No plano e no espaço, isto equivale a dizer que podemos mapear o potencial elétrico. Eventualmente, ao fazer este mapeamento,

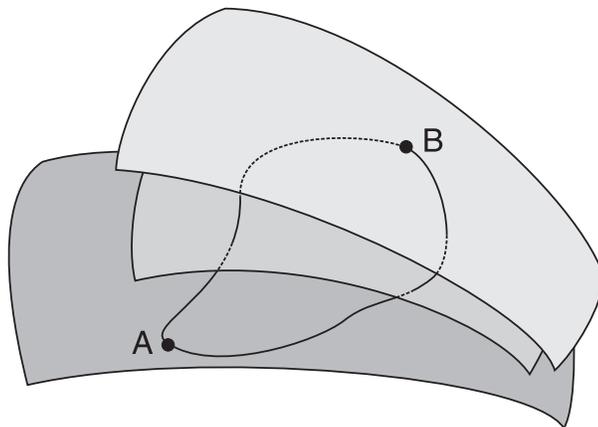
vamos identificar diversos pontos no espaço que possuem o mesmo potencial. Estes pontos eventualmente definem superfícies nas quais o potencial é sempre o mesmo.

Todos os pontos adjacentes que possuem o mesmo potencial elétrico formam uma superfície eqüipotencial. Esta superfície pode ser imaginária ou real. Qual é a importância destas superfícies?

#### Exercício 6.7

Observe com atenção a Equação (6.8). Calcule qual seria o trabalho realizado sobre uma carga que se move entre dois pontos que possuem o mesmo potencial ( $V_{inicial} = V_{final}$ ).

Se o trabalho realizado pelo campo elétrico em uma carga é definido em termos da diferença de potencial entre o ponto inicial e final, se ambos têm o mesmo potencial, ou seja, a diferença de potencial entre eles é nula, então o trabalho total realizado ao deslocar a carga pela superfície eqüipotencial também é nulo. A **Figura 6.2** mostra conjuntos de superfícies eqüipotenciais associadas a um campo elétrico devido a alguma distribuição de cargas. O trabalho realizado para levar a partícula do ponto A ao ponto B é nulo em qualquer das trajetórias mostradas.



**Figura 6.2:** Superfícies eqüipotenciais. Observe que, para as trajetórias indicadas, o potencial final é igual ao potencial inicial.

Exercício 6.8

Qual seria a família de superfícies eqüipotenciais criadas por uma carga isolada?

Exercício 6.9

Qual seria o trabalho para mover uma carga de prova  $q$  ao longo de uma trajetória circular de raio constante ao redor de uma carga puntiforme  $q_0$ ?

Para um campo uniforme, as superfícies serão sempre perpendiculares ao campo elétrico. Vamos imaginar que o campo  $\vec{E}$  não seja perpendicular à superfície eqüipotencial. Isto implicaria que o campo elétrico teria sempre uma componente não nula ao longo da superfície. Esta componente realizaria, então, trabalho sobre cargas quando elas se movessem ao longo da superfície. Isto violaria a relação 6.8. Portanto, o campo  $\vec{E}$  necessariamente deve ser perpendicular à superfície eqüipotencial.

## Atividades Finais

**Problema 6.1** Determine o potencial elétrico em um ponto  $P$  a uma altura  $y \geq 0$  acima do ponto médio do segmento de reta que une duas cargas puntiformes idênticas de magnitude igual a  $q$ . Veja a **Figura 6.3**. A distância entre as cargas vale  $d$ . Que resultado você obtém quando  $y = 0$ ? Ele é fisicamente razoável?

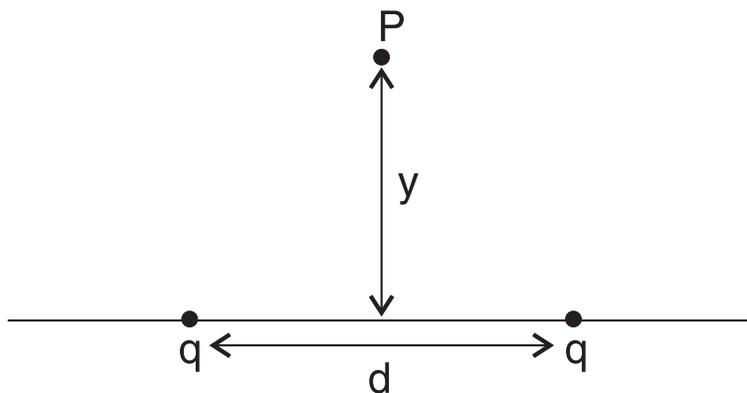


Figura 6.3: Problema 6.1.

**Problema 6.2** Suponha que, no problema anterior, uma das cargas pontiformes, digamos a da esquerda, seja trocada por outra de valor igual a  $-q$ . Veja a **Figura 6.4**. Determine o potencial elétrico em  $P$ .

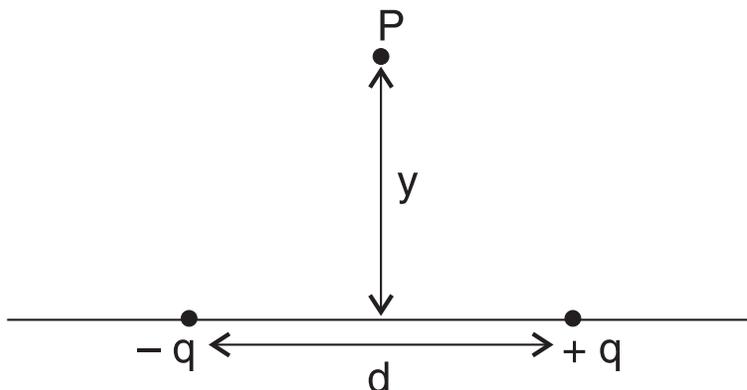


Figura 6.4: Problema 6.2.

**Problema 6.3** Suponha que, nos dois problemas precedentes,  $y \gg d$ . Qual a expressão para o potencial elétrico em cada caso? *Sugestão*: uma expansão binomial será conveniente.

**Problema 6.4** Calcule o potencial elétrico no centro geométrico (ponto  $P$ ) do triângulo equilátero indicado na **Figura 6.5**.

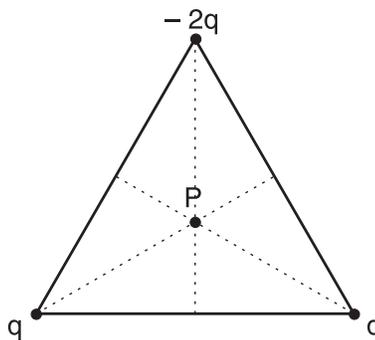


Figura 6.5: Problema 6.4.

**Problema 6.5** Uma pequena esfera transporta uma carga total de  $50\text{pC}$  ( $50 \times 10^{-15}\text{C}$ ). O potencial em sua superfície é de  $500\text{V}$ . Imaginando-se que toda a carga esteja concentrada em seu centro, qual é o raio da esfera?

**Problema 6.6** Calcule a diferença de potencial entre os pontos A e B na Figura 6.6 (a) e (b).



Figura 6.6: Problema 6.6.

## Resumo

O potencial elétrico é uma grandeza escalar, definida em relação à energia elétrica por unidade de carga:

$$V = \frac{U}{q}$$

e tem unidades de joule por coulomb.

A diferença de potencial entre dois pontos é definida em função da diferença de energia, ou seja, em função do trabalho realizado pelo campo elétrico em uma carga  $q$ :

$$\Delta V = V_{final} - V_{inicial} = -\frac{\mathcal{W}}{q}$$

O potencial elétrico pode ser calculado por meio do campo elétrico:

$$V = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Pontos adjacentes em um campo elétrico que possuem um mesmo potencial definem superfícies com o mesmo potencial, chamadas superfícies eqüipotenciais. O trabalho realizado pelo campo elétrico em cargas que se movem por trajetórias que se iniciam e terminam numa mesma superfície eqüipotencial é nulo. O potencial elétrico de cargas isoladas e de configurações simples, tal como o dipolo elétrico, foi calculado.

### Auto-avaliação

É importante que você tenha sido capaz de resolver os exercícios propostos durante a aula. É fundamental que você tenha sido capaz de entender e explicar os conceitos de potencial elétrico e de superfícies eqüipotenciais, bem como o cálculo do potencial elétrico a partir do conhecimento do campo.



# Aula 7 – A energia eletrostática de distribuições discretas de carga

## Meta da aula

Apresentar o conceito de energia eletrostática associada a uma distribuição discreta de cargas

## Objetivos

Ao final desta aula, esperamos que você seja capaz de:

- Entender que a força elétrica é conservativa;
- Entender o conceito de energia potencial elétrica;
- Entender que a variação da energia potencial de uma carga, quando se desloca por um campo elétrico, está relacionada ao trabalho realizado pela força elétrica.

## Pré-requisitos

É importante que você revise os conceitos de forças conservativas, apresentados no curso de Física 1. Também é importante ter bem claros o conceito de trabalho realizado por uma força conservativa e o conceito de energia potencial. Revise também a Aula 1 deste módulo, em que foram discutidas as semelhanças e as diferenças entre a Lei de Newton e a Lei de Coulomb.

## Introdução

Conforme vimos na Aula 1 deste módulo, a Lei de Coulomb e a Lei de Newton para a força gravitacional são matematicamente muito similares. Os aspectos mais gerais discutidos para a força gravitacional também devem ser aplicáveis à força elétrica. Estes aspectos já foram abordados e discutidos no Exercício 1.2 da Aula 1.

Um dos aspectos gerais da força gravitacional é o fato de ela ser conservativa. O que isto significa? Uma força é considerada conservativa se o trabalho que ela realiza sobre uma partícula quando esta se desloca entre um

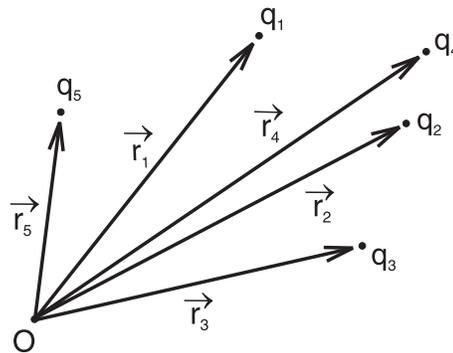
ponto inicial  $P_0$  e um ponto final  $P$  não depende da trajetória seguida pela partícula.

E a força elétrica? Como já vimos, a força elétrica, expressa por meio da Lei de Coulomb, tem a mesma forma matemática da Lei de Newton. Ambas variam com o inverso do quadrado da distância. Assim, não é estranho supor que a força elétrica também seja conservativa.

Mas a força elétrica tem uma diferença fundamental com relação à força gravitacional. A força elétrica pode ser atrativa ou repulsiva, enquanto a gravitacional é sempre atrativa. Isto afeta, de alguma forma, esta discussão? Veremos que isto somente altera o sinal do trabalho realizado em todas as trajetórias, não afeta o caráter conservativo da força elétrica.

## Energia potencial eletrostática

Para montar uma configuração estática de cargas puntiformes – **Figura 7.1** – é necessário gastar energia, isto é, é necessário que um agente externo realize trabalho sobre as cargas, trazendo-as de suas posições iniciais até suas posições finais.

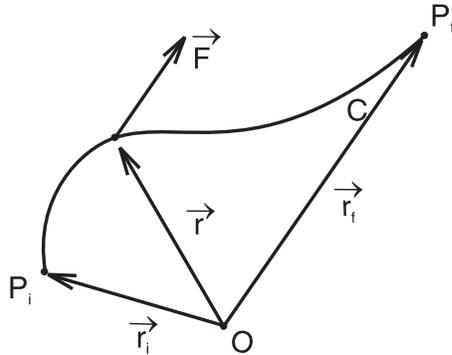


**Figura 7.1:** Energia eletrostática de um arranjo de cargas puntiformes.

Por exemplo, considere o cubo de aresta  $a$  com uma carga puntiforme de mesmo valor  $q$  em cada vértice, que consideramos no Problema 2.5 da Aula 2 deste módulo. As cargas por si sós não ocuparão os vértices do cubo espontaneamente. Para montar este cubo peculiar, é preciso trabalhar contra as forças coulombianas repulsivas que as cargas exercem umas sobre as outras. Depois, serão necessárias forças adicionais para mantê-las fixas em suas posições. Nos cristais iônicos, como, por exemplo, o sal de cozinha (cloreto de sódio), as forças adicionais são fornecidas pelas ligações químicas. Entender de que modo as cargas ficam “coladas” em suas posições não é nosso

objetivo no momento. Por ora, queremos calcular somente o quanto se gasta, em energia, para montar-se o arranjo de cargas estáticas. Como calculamos a energia gasta neste processo?

Vamos utilizar alguns conceitos abordados no curso de Física 1. Sabemos que podemos relacionar a variação de energia de uma partícula com o trabalho realizado por forças atuando nela. Digamos que  $C$  seja um dos caminhos possíveis entre dois pontos  $P_i$  e  $P_f$ . Vamos imaginar que uma partícula se mova ao longo de  $C$ , sujeita a uma força  $\vec{F}$ . Veja a **Figura 7.2**.



**Figura 7.2:** A força  $\vec{F}$  realiza trabalho quando a partícula se move ao longo da trajetória  $C$ .

O trabalho realizado pela força  $\vec{F}$  ao longo da trajetória  $C$  é definido por:

$$\mathcal{W}_{P_1 \rightarrow P_2}^{(C)} \equiv \int_{P_1(C)}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (7.1)$$

Quando a força  $\vec{F}$  é uma força *central*, podemos reescrever a Equação 7.1 da seguinte forma:

$$\mathcal{W}_{P_1 \rightarrow P_2}^{(C)} \equiv \int_{P_1(C)}^{P_2} F(r) \vec{r} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr \quad (7.2)$$

A Equação 7.2 mostra que o trabalho não depende do caminho, e somente dos pontos inicial e final,  $r_1$  e  $r_2$  respectivamente. Assim, podemos escrever:

$$\int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = -[U(r_2) - U(r_1)] \quad (7.3)$$

onde  $U(r)$  é a energia potencial. No Sistema Internacional de Medidas, a energia, como você já sabe, é medida em Joules (J). O trabalho ( $\mathcal{W}$ ) também se mede em Joules.

Relembrando um pouco do que foi visto, força central é aquela que pode ser definida da forma  $\vec{F} = F(r)\vec{r}$ , ou seja, tem origem no centro da força e é direcionada radialmente. Caso você tenha dúvida com relação a este conceito, reveja suas aulas do curso de Física 1.

Observe as Equações 7.2 e 7.3. Qual é a relação entre a energia potencial ( $U$ ) e o trabalho ( $\mathcal{W}$ )?

A força elétrica é uma força central e conservativa. Quando uma força elétrica atua entre duas ou mais partículas carregadas dentro de um sistema de partículas, podemos atribuir uma energia potencial elétrica ( $U$ ) ao sistema. Se ocorre alguma mudança no sistema, ou seja, se a configuração inicial se altera para um estado final, a força elétrica realiza trabalho sobre as partículas. O trabalho realizado pela força elétrica independe da trajetória.

### Exemplo 7.1 Energia potencial de um elétron em um campo elétrico uniforme

Imaginemos um sistema composto de diversas cargas elétricas estáticas. Vamos supor que o campo elétrico gerado pela presença de todas as partículas seja dado por  $\vec{E}_0$ . Vamos supor também que a configuração de cargas faça com que o campo  $\vec{E}_0$  seja uniforme e direcionado verticalmente para baixo. Um elétron que for colocado neste sistema sofrerá a ação de uma força elétrica, devida a todas as outras partículas. Qual é a variação ( $\Delta U$ ) da energia potencial eletrostática de um elétron liberado quando a força elétrica sobre ele faz com que se mova verticalmente para cima por uma distância  $d$ ?

Para resolver esta questão, temos de utilizar vários conceitos já vistos até aqui. Primeiro, temos de utilizar o fato de que a variação ( $\Delta U$ ) da energia potencial elétrica está relacionada com o trabalho realizado pela força, ou pelo campo elétrico, sobre o elétron. Isso é dado pela relação:

$$\Delta U = -\mathcal{W}$$

Em seguida, podemos utilizar o conceito de trabalho realizado por uma força  $\vec{F}$  sobre uma partícula que sofre um deslocamento  $d$ . Isto é dado por:

$$\mathcal{W} = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Por último, usamos o fato de que a força elétrica  $\vec{F}$  se relaciona com o campo elétrico  $\vec{E}_0$  na relação:

$$\vec{F} = q\vec{E}_0$$

onde  $q$  é, neste caso, a carga do elétron em questão.

Usando estas idéias, temos como relacionar o trabalho com o campo elétrico e a carga:

$$\mathcal{W} = q\vec{E}_0 \cdot \vec{d} = qEd \cos \theta$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre as direções de  $\vec{E}_0$  e de  $\vec{d}$ . Neste exemplo,  $\vec{E}_0$  está voltado verticalmente para baixo, e o deslocamento  $\vec{d}$  se dá verticalmente para cima. Portanto  $\theta = 180^\circ$ . Assim,

$$\mathcal{W} = -qEd$$

Desta forma, podemos calcular:

$$\Delta U = -\mathcal{W} = qEd$$

Como a carga do elétron é negativa, a variação de energia potencial também é negativa. O resultado nos diz então que, ao se deslocar para cima, a energia do elétron diminui de  $qEd$  Joules.

## Energia potencial por unidade de carga

Do resultado do exemplo anterior, podemos ver que a energia potencial de uma partícula carregada em um campo elétrico depende da carga da partícula.

Vamos supor que uma carga de valor  $q_1 = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$  seja colocada em um ponto de um campo elétrico em que possua energia potencial elétrica  $U = 2.4 \times 10^{-17}\text{J}$ . Calculemos agora o valor da energia potencial por unidade de carga:

$$\frac{2.4 \times 10^{-17}\text{J}}{1.6 \times 10^{-19}\text{C}} = 150\text{J/C}$$

Se a carga  $q_1$  for substituída por uma carga  $q_2$  com o dobro do valor, ou seja,  $q_2 = 3,2 \times 10^{-19}\text{C}$ , que será o valor da energia potencial por unidade de carga?

A energia potencial elétrica de  $q_2$  no mesmo campo tem o dobro do valor, pois há o dobro de carga. A energia por unidade de carga seria:

$$\frac{4.8 \times 10^{-17}\text{J}}{3.2 \times 10^{-19}\text{C}} = 150\text{J/C}$$

Portanto, a energia por unidade de carga não depende do valor da carga e é uma característica apenas do campo elétrico na região de interesse.

## Energia potencial de um sistema de partículas

O cálculo da energia eletrostática de uma configuração de cargas puntiformes fixas pode ser feito de forma simples a partir da definição de potencial elétrico (trabalho por unidade de carga). Suponha que temos uma carga inicial fixa  $q_1$ . O trabalho gasto com esta carga para trazê-la do infinito é zero, já que, quando a colocamos em sua posição  $\vec{r}_1$ , não havia forças coulombianas atuando. Logo,

$$\mathcal{W}_1 = 0.$$

O trabalho realizado com a carga seguinte,  $q_2$ , para trazê-la do infinito até sua posição final  $\vec{r}_2$  é:

$$\mathcal{W}_2 = q_2 \times \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

ou

$$\mathcal{W}_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

onde  $r_{12} = \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$  é a distância relativa entre  $q_1$  e  $q_2$ . A terceira carga será trazida do infinito no potencial criado pela primeira e pela segunda,

$$\mathcal{W}_3 = q_3 \times \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} \right)$$

ou, ainda,

$$\mathcal{W}_3 = \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}}$$

Trazer uma quarta carga  $q_4$  do infinito exige uma quantidade de trabalho igual:

$$\mathcal{W}_4 = q_4 \times \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{14}} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{24}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{34}} \right)$$

Lembre-se de que o potencial de uma distribuição localizada de cargas, com o zero do potencial no infinito, pode ser interpretado como trabalho por unidade de carga.

ou, ainda,

$$\mathcal{W}_4 = \frac{q_1 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{14}} + \frac{q_2 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{34}}$$

O trabalho *total* gasto para montar o sistema de quatro cargas puntiformes é, portanto:

$$\mathcal{W}_{\text{total}} = \mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2 + \mathcal{W}_3 + \mathcal{W}_4$$

ou

$$\mathcal{W}_{\text{total}} = 0 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{4\pi\epsilon_0 r_{23}} + \frac{q_1 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{14}} + \frac{q_2 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{24}} + \frac{q_3 q_4}{4\pi\epsilon_0 r_{34}}$$

Para um sistema eletrostático formado por  $N$  cargas puntiformes, a energia eletrostática pode ser escrita como

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{j \neq k}^N \frac{q_j q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \quad (7.4)$$

### Exercício 7.1

Verifique que o fator  $1/2$  da Equação 7.4 leva em conta o fato de que, na soma dupla que escrevemos acima, cada termo aparece duas vezes. Esta restrição imposta à segunda soma tem uma interpretação física que discutiremos mais adiante.

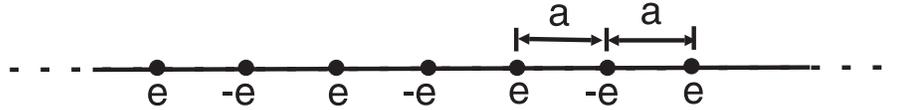
### Exercício 7.2

Verifique que, para uma configuração eletrostática formada por  $N$  cargas puntiformes, o número de termos que devemos levar em conta na Equação 7.4, independentemente do fator  $1/2$ , é dado por:

$$\frac{N!}{2! (N-2)!}$$

**Exemplo 6.2 O cristal iônico**

Imagine um cristal iônico unidimensional formado por uma fileira de cargas puntiformes de valor igual a  $e$  e sinal algébrico alternado. O parâmetro de rede, isto é, a distância entre duas cargas adjacentes, vale  $a$ . Veja a **Figura 7.3**. Queremos determinar a energia eletrostática por íon, já que a energia eletrostática desta rede particular é infinita  $- N \rightarrow \infty$ .



**Figura 7.3:** Modelo de um cristal iônico em uma dimensão.

Como a rede tem extensão infinita, escolhemos um íon ao acaso, digamos o íon marcado na **Figura 7.3**. Agora, contamos as interações eletrostáticas deste íon com seus vizinhos e escrevemos:

$$\mathcal{W}_{\text{por íon}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -2 \times \frac{e^2}{a} + 2 \times \frac{e^2}{2a} - 2 \times \frac{e^2}{3a} + 2 \times \frac{e^2}{4a} \pm \dots \right)$$

ou ainda:

$$\mathcal{W}_{\text{por íon}} = -2 \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots \right)$$

A soma entre parênteses pode ser calculada com a expansão de  $\ln(1+x)$  que é dada por:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \pm \dots$$

Fazendo  $x = 1$ , obtemos  $\ln 2$ ; portanto, a energia eletrostática por íon da rede, vale:

$$\mathcal{W}_{\text{por íon}} = -\frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 a} \ln 2$$

O sinal negativo significa que esta é uma energia de ligação. Para remover completamente um íon da rede devemos fornecer uma energia igual a  $-\mathcal{W}_{\text{por íon}} > 0$ .

**Exercício 7.3**

Calcule  $\mathcal{W}_{\text{por íon}}$  obtida acima para  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  e parâmetro de rede  $a = 1,0 \times 10^{-10} \text{ m}$ . Transforme o resultado para elétron-volts (eV) e compare-o com a energia do estado fundamental do átomo de hidrogênio que vale  $-13,0 \text{ eV}$ .

## Leituras complementares

Consulte o material sugerido a seguir, para aprofundar mais seus conhecimentos.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Edgard Blücher, v.:3: eletromagnetismo, 1997.

HALLIDAY, David.; RESNICK, Robert.; WALKER, E Jearl. *Física*. v.3: eletromagnetismo. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. Cap. 22.

## Atividades Finais

**Problema 7.1** Calcule a energia potencial elétrica de duas cargas puntiformes de  $1\text{C}$  afastadas de uma distância de  $1\text{km}$ .

**Problema 7.2** Calcule a energia potencial elétrica associada à interação entre dois prótons dentro de um núcleo, separados por uma distância da ordem de  $1,5 \times 10^{-15} \text{ m}$ .

**Problema 7.3** Calcule a energia potencial elétrica de três partículas carregadas com cargas iguais  $q$  e posicionadas nos vértices do triângulo indicado na **Figura 7.4**.

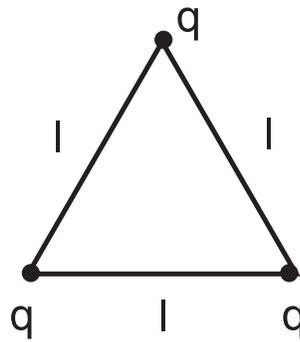


Figura 7.4: Problema 7.3.

**Problema 7.4** Calcule a energia potencial elétrica do sistema mostrado na Figura 7.5.

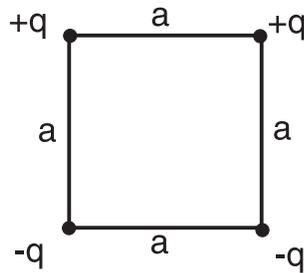


Figura 7.5: Problema 7.4.

**Problema 7.5** Um dipolo elétrico ideal está localizado na origem de um sistema de coordenadas cartesiano e aponta para o sentido positivo do eixo  $OZ$ . Uma carga puntiforme  $q_0$  é colocada, inicialmente, no ponto de coordenadas  $(a, 0, 0)$  e, em seguida, é movida até o ponto  $(0, 0, a)$ . Calcule o trabalho realizado sobre a carga puntiforme.

**Problema 7.6** Considere um cubo de aresta  $a$ . Em cada vértice do cubo, exceto um, uma carga puntiforme de valor  $q$  é colocada, conforme ilustra a Figura 7.6. Calcule a energia eletrostática do cubo.

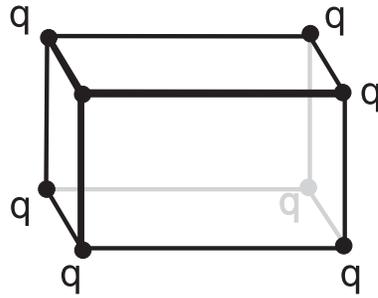


Figura 7.6: Problema 7.6.

## Resumo

Forças elétricas são forças centrais e conservativas. O trabalho realizado pela força elétrica não depende da trajetória. O trabalho realizado pelas forças elétricas pode ser associado a uma variação de energia potencial elétrica. Para montar uma configuração de cargas elétricas, é necessário realizar trabalho sobre as cargas, ou seja, gastar uma certa quantidade de energia. Um sistema de cargas elétricas tem uma energia potencial, que depende do valor das cargas. A energia potencial elétrica por unidade de carga depende somente do campo elétrico na região. A energia potencial de um sistema de cargas pode ser calculada somando-se as diferentes contribuições de cada carga adicionada ao sistema.

## Auto-Avaliação

É importante que você tenha claro que a energia potencial elétrica está associada à realização de trabalho da força elétrica e que este trabalho depende somente do ponto inicial e do ponto final, sendo independente da trajetória. Verifique se você é capaz de reproduzir os resultados mostrados no Exemplo 6.1. Todos os problemas são importantes.



# Aula 8 – A energia eletrostática e o potencial elétrico de distribuições contínuas

## Meta da aula

Aplicar o conceito de energia eletrostática e de potencial elétrico em distribuições contínuas de carga.

## Objetivos

Ao final desta aula, esperamos que você seja capaz de:

- Descrever o potencial elétrico de distribuições contínuas de carga.
- Calcular a energia eletrostática de distribuições contínuas de carga por meio do Potencial Elétrico.

## Pré-requisitos

- Para aplicar o conceito de energia eletrostática e de potencial elétrico em distribuições contínuas, é muito aconselhável que você reveja o texto e os resultados obtidos nos exemplos, problemas e exercícios das Aulas 4 e 5. Assim como feito na Aula 7 deste módulo, vários destes resultados obtidos anteriormente serão revistos a partir de conceitos novos. É importante que você tenha claro o conceito de energia potencial eletrostática e de potencial elétrico, vistos na Aula 6 deste módulo.

## Introdução

Na Aula 6, mostramos o conceito de energia eletrostática e que o campo elétrico pode ser obtido a partir de uma função escalar, o potencial elétrico. Este conceito foi aplicado para descrever o campo elétrico em distribuições discretas de carga. Nesta aula, estenderemos o conceito para distribuições contínuas de cargas.

## A energia eletrostática e o potencial elétrico de distribuições contínuas

A Equação (6.4) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j V_j \quad (8.1)$$

em que

$$V_j = \sum_{k \neq j}^N \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 r_{jk}} \quad (8.2)$$

Assim como vimos na Aula 4, as distribuições de carga em geral se apresentam em uma forma contínua. Relembrando a Introdução da Aula 4, na distribuição discreta as cargas aparecem como pontos isolados. Na grande maioria dos casos práticos, esta natureza granular da eletricidade fica totalmente oculta pelas condições específicas do experimento ou problema teórico em questão. A eletricidade estática parece comportar-se como uma distribuição contínua de carga elétrica.

A generalização da Equação (8.1) para distribuições contínuas é imediata; basta trocar  $q_j$  por um elemento diferencial de carga  $dq$ , que será definido pelas condições do problema. Em geral, o elemento de carga  $dq$  define, como vimos na Aula 4, uma densidade de carga, que pode ser unidimensional (densidade linear), bidimensional (densidade superficial) ou tridimensional (densidade volumétrica). Vamos examinar novamente, assim como fizemos na Aula 4, cada caso individualmente.

### A energia eletrostática em distribuições unidimensionais

Se a carga  $q$  está distribuída uniformemente sobre uma linha, podemos definir a densidade linear de carga como sendo:

$$\lambda = \frac{q}{\ell}$$

Desta forma, os elementos de carga  $dq$  podem ser definidos como:

$$dq = \lambda d\ell$$

Agora podemos utilizar a definição dada pela Equação 8.1, substituindo a soma finita por uma integral, e obtemos então:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int \lambda V d\ell \quad (8.3)$$

### A energia eletrostática em distribuições bidimensionais

Quando a carga se distribui por uma superfície de área  $\mathcal{A}$ , podemos definir uma distribuição superficial  $\sigma$  dada por:

$$\sigma = \frac{q}{\mathcal{A}}$$

e os elementos superficiais de carga serão definidos por:

$$dq = qd\mathcal{A}$$

A energia eletrostática fica então definida como:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int \sigma V d\mathcal{A} \quad (8.4)$$

Note a semelhança com a Equação 8.3. O termos  $\lambda$  e  $d\ell$  são substituídos pelos termos  $\sigma$  e  $d\mathcal{A}$ , respectivamente.

#### Exercício 8.1

Observando as Equações (8.3) e (8.4), como você definiria a energia de uma distribuição volumétrica de cargas?

### A energia eletrostática em distribuições tridimensionais

Para descrever a energia de uma distribuição tridimensional de cargas, ou seja, uma distribuição volumétrica, definimos a densidade volumétrica  $\rho$  de carga como sendo:

$$\rho = \frac{q}{\mathcal{V}}$$

e, portanto, os elementos volumétricos de carga são dados por:

$$dq = \rho d\mathcal{V}$$

A energia eletrostática pode então ser simplesmente descrita por:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int \rho V d\mathcal{V} \quad (8.5)$$

Vamos agora calcular alguns exemplos simples e compará-los com cálculos já realizados anteriormente, na Aula 4.

### Exemplo 8.1 Energia eletrostática de uma casca esférica

Considere a casca esférica de raio  $a$  uniformemente carregada com uma carga total  $q$ , discutida no **Exemplo 4.4**. A densidade superficial de carga é:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2}$$

O potencial sobre a superfície da casca é:

$$V(a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

A energia eletrostática da casca é então:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \int \frac{q}{4\pi a^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} d\mathcal{A} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 a^3} \int d\mathcal{A}$$

A integral é igual à área da casca,  $4\pi a^2$ ; portanto, a energia eletrostática da casca vale:

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \quad (8.6)$$

## Exercício 8.2

Considere uma esfera de raio  $a$ , uniformemente carregada com uma carga  $q$ . Mostre que a energia eletrostática da esfera é:

$$\mathcal{W} = \frac{3}{5} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a}$$

## Potencial elétrico de distribuições contínuas

Vimos, na Aula 6, que o potencial elétrico de uma distribuição de cargas discretas pode ser calculado simplesmente aplicando-se o Princípio da Superposição ao potencial elétrico, por meio da Equação 6.10, ou seja

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{r_k}$$

Como você faria para estender este princípio a uma distribuição contínua de cargas?

Lembre-se de que agora a carga está distribuída em um contínuo, e não há mais sentido em tratar cargas isoladas, e sim elementos de carga, cada um dos quais contribuindo.

Para distribuições contínuas, o princípio da superposição aplicado ao potencial leva é:

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (8.7)$$

em que agora  $r := \|\vec{r} - \vec{r}'\|$ . O vetor  $\vec{r}'$  descreve pontos na distribuição, e o vetor  $\vec{r}$ , o ponto de observação.

Obviamente, o potencial dependerá do tipo de distribuição de carga. Note que esta dependência aparece uma vez que os elementos de carga  $dq$  dependem de como é a distribuição.

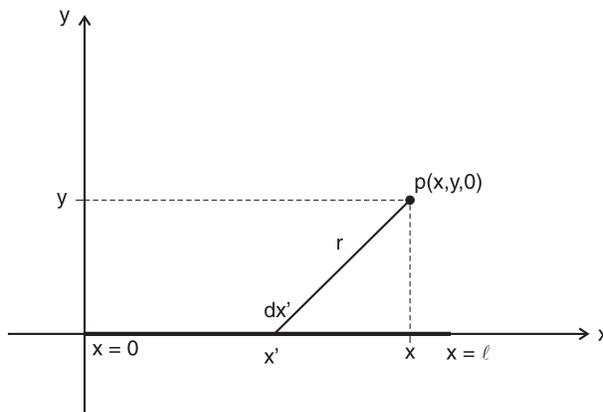
### Potencial elétrico em distribuições lineares de carga

Para distribuições lineares, basta utilizar um elemento do tipo:

$$dq = \lambda(\vec{r}') d\ell$$

### Exemplo 8.2 O potencial elétrico de um bastão fino uniformemente carregado

Consideremos novamente o Exemplo 4.1 da Aula 4: a distribuição linear em forma de um bastão muito fino eletrizado de modo uniforme de comprimento  $\ell$  e densidade de carga  $\lambda$ . Como antes, fazamos o bastão coincidir com o eixo cartesiano  $OX$ , de tal modo que uma das suas extremidades se encontre em  $x = 0$  e a outra em  $x = \ell$ . Veja a **Figura 8.1**.



**Figura 8.1:** Geometria para o cálculo do potencial elétrico de um bastão fino uniformemente carregado.

Denotemos por  $P(x, y, 0)$  o ponto de observação no plano  $XY$ . A contribuição ao potencial no ponto  $P$  de um elemento de carga  $dq$ , localizado no ponto  $P'$  sobre o bastão e de coordenadas  $(x', 0)$ , é dado por:

$$dV(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx'}{[(x - x')^2 + y^2]^{1/2}}$$

Aplicando o princípio da superposição:

$$V(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\ell \frac{\lambda dx'}{[(x - x')^2 + y^2]^{1/2}}$$

Efetuando a transformação de variáveis  $\omega = x - x'$ , como no Exemplo 4.1, obtemos:

$$V(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{x-\ell}^x \frac{d\omega}{(\omega^2 + y^2)^{1/2}}$$

A integral tabelada que nos convém é:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \sinh^{-1} \left( \frac{u}{a} \right) = \ln \left( \frac{u}{a} + \sqrt{\left( \frac{u}{a} \right)^2 + 1} \right)$$

Fazendo as identificações requeridas e efetuando, obtemos:

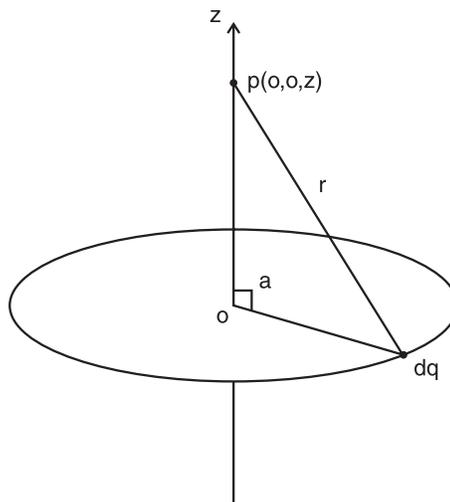
$$V(x, y) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( \ln \left( \frac{x}{y} + \sqrt{\left( \frac{x}{y} \right)^2 + 1} \right) - \ln \left( \frac{x - \ell}{y} + \sqrt{\left( \frac{x - \ell}{y} \right)^2 + 1} \right) \right) \quad (8.8)$$

### Exercício 8.3

Complete os detalhes da integração que levam ao resultado dado pela Equação (8.8).

### Exemplo 8.3 O potencial elétrico de um anel uniformemente carregado

Reconsideremos agora o Exemplo 4.2 da Aula 4, o anel de raio  $a$  uniformemente carregado. Queremos calcular o potencial elétrico deste anel sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o anel e que passa por seu centro geométrico, o eixo  $OZ$  na **Figura 8.2**.



**Figura 8.2:** Geometria para o cálculo do potencial elétrico de um anel uniformemente carregado.

A contribuição ao potencial elétrico sobre o eixo  $OZ$  de um elemento de carga  $dq$  é:

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

Como  $r = \sqrt{z^2 + a^2}$  e todos os elementos de carga estão a uma mesma distância do ponto de observação  $P(0,0,z)$ , a integração é imediata, e o resultado é:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(z^2 + a^2)^{1/2}} \quad (8.9)$$

em que  $q = \lambda \times 2\pi a$  é a carga do anel.

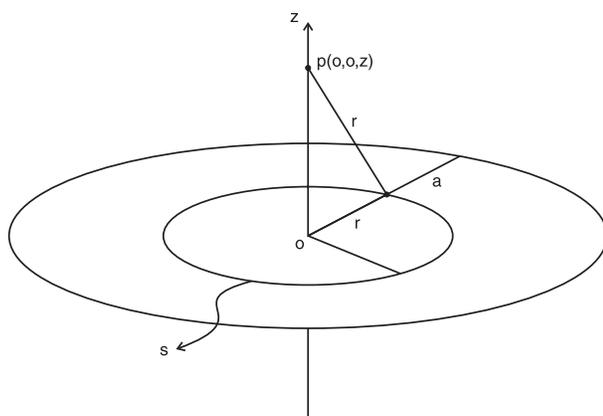
### Potencial elétrico em distribuições superficiais de carga

Para distribuições superficiais, escrevemos:

$$dq = \sigma(\vec{r}') dA$$

### Exemplo 8.4 O potencial elétrico de um disco uniformemente carregado

Reconsideremos agora o Exemplo 4.3 da Aula 4, o disco de raio  $a$  uniformemente eletrizado com uma densidade de carga uniforme  $\sigma$ . Queremos calcular o potencial sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o disco e que passa por seu centro geométrico, o eixo  $OZ$  na **Figura 8.3**. Como no exemplo mencionado, dividiremos o disco em anéis concêntricos de raio variável  $s$  e espessura  $ds$  e usaremos o resultado do potencial do anel, Equação (8.9). A contribuição de um anel elementar ao potencial sobre o eixo  $OZ$  é:



**Figura 8.3:** Geometria para o cálculo do potencial elétrico de um disco uniformemente carregado.

$$dV(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 2\pi s ds}{\sqrt{z^2 + s^2}}$$

em que usamos a Equação (8.9). Aplicando o princípio da superposição:

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{s ds}{(z^2 + s^2)^{1/2}}$$

A integral de que necessitamos é:

$$\int \frac{s ds}{(u^2 + s^2)^{1/2}} = \sqrt{u^2 + s^2}$$

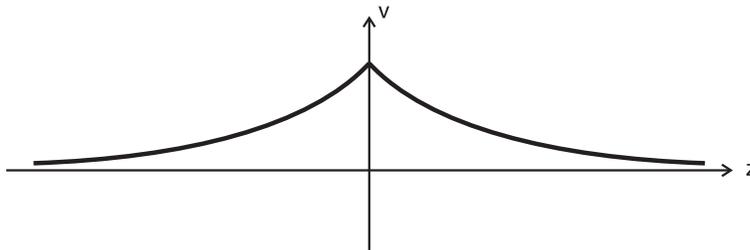
Efetuando-a, obtemos:

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{z^2 + a^2} - \sqrt{z^2} \right)$$

ou, como  $\sqrt{z^2} = |z|$ :

$$V(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( \sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right) \quad (8.10)$$

Na **Figura 8.4**, representamos o gráfico da Equação (8.10):



**Figura 8.4:** Gráfico do potencial elétrico de um disco uniformemente carregado sobre o eixo de simetria.

### Potencial elétrico em distribuições volumétricas de carga

Se a distribuição for volumétrica, então:

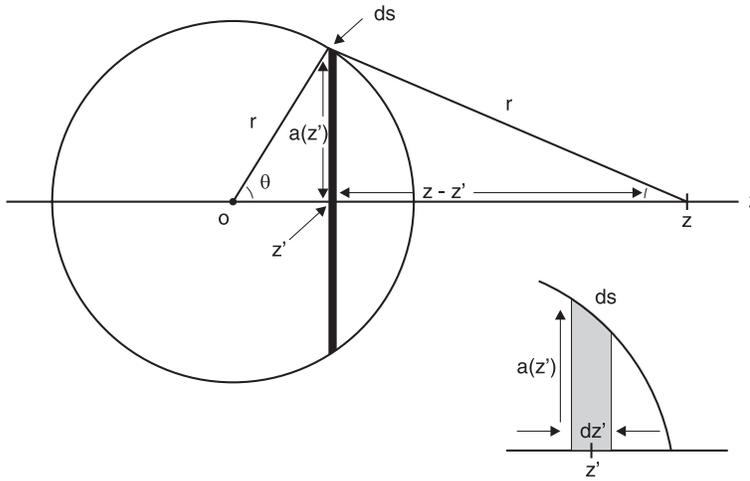
$$dq = \rho(\vec{r}') dv$$

#### Exemplo 8.5 O potencial elétrico de uma casca esférica uniformemente carregada

Como último exemplo, calculemos o potencial da casca esférica de raio  $R$  uniformemente carregada com uma densidade de carga  $\sigma$ , Exemplo 4.4 da Aula 4. A contribuição de um anel elementar de carga  $dq$ , espessura infinitesimal  $ds$ , com centro em  $z'$  e raio  $a(z')$ , é:

$$dV(z) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 [a^2(z'^2) + (z - z')^2]^{1/2}}$$

em que tomamos como ponto de partida o potencial do anel, Equação (8.9). Como a geometria é a mesma que no Exemplo 4.2, valem as relações:  $a^2(z'^2) = R^2 - z'^2$ , e  $ds = dz' / \sin \theta$ , em que  $\theta$  é o ângulo mostrado na **Figura 8.5**.



**Figura 8.5:** Geometria para o cálculo do potencial elétrico de uma casca esférica uniformemente carregada sobre o eixo  $OZ$ .

A carga  $dq$  pode ser escrita como  $dq = \sigma \times 2\pi a(z') ds = \sigma 2\pi R dz'$ ; logo, fazendo as substituições e simplificações necessárias, temos:

$$dV(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \frac{dz'}{[R^2 - z'^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$$

Aplicando o princípio da superposição:

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{-R}^R \frac{dz'}{[R^2 - z'^2 + (z - z')^2]^{1/2}}$$

Agora fazemos a transformação de variáveis:  $\omega = z - z'$ , que implica  $d\omega = -dz'$  e os novos limites de integração,  $\omega_1 = z + R$  e  $\omega_2 = z - R$ . Segue então que:

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \int_{z-R}^{z+R} \frac{d\omega}{[R^2 - z^2 + 2z\omega]^{1/2}}$$

A integral tabelada requerida é:

$$\int \frac{du}{\sqrt{au+b}} = \frac{2\sqrt{au+b}}{a}.$$

Fazendo as identificações requeridas e efetuando a integral, obtemos:

$$V(z) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0 z} \left( \sqrt{(z+R)^2} - \sqrt{(z-R)^2} \right)$$

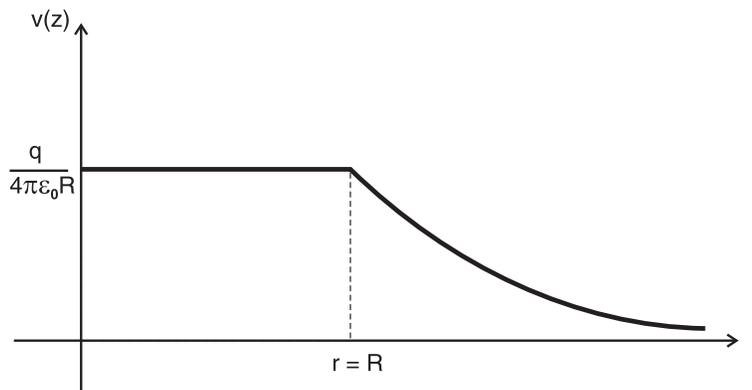
Por um lado,  $\sqrt{(z+R)^2} = z+R$  mas  $\sqrt{(z-R)^2} = |z-R|$ , e  $|z-R| = z-R$  se  $z > R$ , isto é: fora da casca; por outro,  $R-z$  se  $z < R$ , dentro da casca. Levando isto em conta, o resultado final para o potencial da casca é:

$$V(z) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad \text{para } z \leq R, \quad (8.11)$$

e

$$V(z) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 |z|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |z|} \quad \text{para } z \geq R, \quad (8.12)$$

em que  $q$  é a carga total da casca. Observe que o potencial dentro da casca é uniforme, significando que o campo elétrico no interior da casca esférica carregada é nulo! Observe também que, diferentemente do campo elétrico, o potencial é contínuo. Veja a **Figura 8.6**.



**Figura 8.6:** Potencial elétrico de uma casca esférica uniformemente carregada em função da distância radial ao centro.

#### Exercício 8.4

Complete os detalhes e expresse o potencial como uma integral sobre a variável  $\omega$ , efetue a integral e obtenha as Equações (8.11) e (8.12).

**Exercício 8.5**

Usando argumentos de simetria, mostre que o potencial da casca esférica pode ser escrito como:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}, \quad \text{para } r \leq R, \quad (8.13)$$

e

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{para } r \geq R, \quad (8.14)$$

em que  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , é a distância radial ao centro da casca.

Na próxima aula, veremos que é possível calcular o campo elétrico de uma forma muito elegante, utilizando o potencial elétrico. Também veremos que existe uma classe de material especial, conhecida como condutores, na qual o potencial elétrico se comporta de uma maneira especial.

## Leituras complementares

Sugerimos a leitura de alguns livros que também tratam de tópicos abordados nesta aula:

NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Edgard Blücher, v.:3: eletromagnetismo, 1997.

HALLIDAY, David.; RESNICK, Robert.; WALKER, E Jearl.

*Física*. v.3: eletromagnetismo. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. Cap. 22.

## Atividades Finais

**Problema 8.1** Considere um disco de espessura desprezível e raio  $b$ , com um furo circular concêntrico de raio  $a$ . Suponha que o disco perfurado esteja uniformemente carregado com uma densidade de carga superficial de carga  $\sigma$ . Veja a **Figura 8.7**.

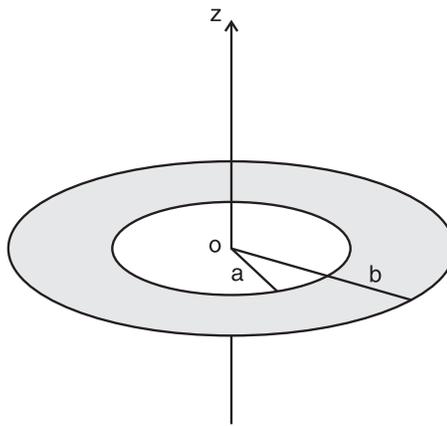


Figura 8.7: Problema 8.1.

- (a) Calcule o potencial elétrico sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o disco perfurado e que passa por seu centro geométrico.
- (b) Verifique se seu resultado reproduz o resultado do Exemplo 8.3 quando  $b = 0$ .

**Problema 8.2** Considere um cilindro de raio  $a$  e comprimento  $\ell$  uniformemente carregado com uma densidade volumétrica de carga  $\rho$ . Veja a **Figura 8.8**. Calcule o potencial elétrico gerado por esta distribuição sobre o eixo principal do cilindro para pontos sobre o eixo dentro e fora da distribuição.

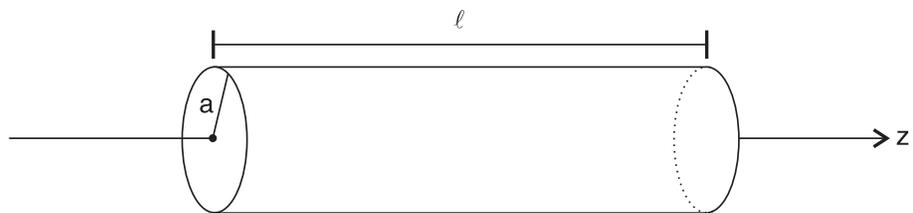


Figura 8.8: Problema 8.2.

**Problema 8.3** Considere uma esfera de raio  $a$  uniformemente carregada com uma densidade volumétrica de carga  $\rho$ .

- (a) Calcule o potencial elétrico gerado por esta distribuição dentro da esfera.
- (b) Calcule o potencial elétrico gerado por esta distribuição fora da esfera.

**Problema 8.4** Mostre que o potencial no ponto  $P$ , que está a uma distância  $s$  de uma das extremidades de um bastão muito fino de comprimento  $\ell$  eletrizado com uma densidade linear de carga uniforme  $\lambda$ , é dado por:

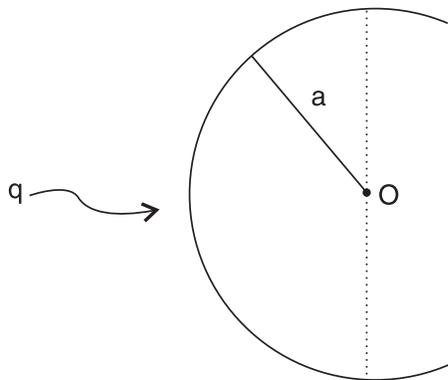
$$V(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{s + \sqrt{s^2 + \ell^2}}{s} \right)$$

**Problema 8.5** Considere um disco de material de espessura desprezível e raio  $a$  carregado com uma carga total  $q$ . Veja a **Figura 8.9**. Suponha que a distribuição de carga seja proporcional à distância ao centro geométrico do disco, isto é:  $\sigma = \kappa s$ , em que  $s$  é a distância ao centro do disco, e  $\kappa$  é uma constante positiva.

- (a) Mostre que  $\kappa = 3q/(2\pi a^3)$ .
- (b) Mostre que o potencial elétrico em um ponto  $P(0, 0, z)$  sobre o eixo de simetria perpendicular ao plano que contém o disco e que passa por seu centro geométrico coincidindo com o eixo cartesiano  $OZ$ ,

$$V(z) = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left\{ \frac{a\sqrt{a^2 + z^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln \left( \frac{a + \sqrt{a^2 + z^2}}{x} \right) \right\}$$

**Problema 8.6** Uma carga elétrica  $q$  é uniformemente distribuída sobre a semicircunferência de um semicírculo de raio  $a$ . Calcule o potencial elétrico no ponto  $O$ , mostrado na **Figura 8.9**:



**Figura 8.9:** Problema 8.6

## **Resumo**

A energia eletrostática de distribuições contínuas de carga pode ser calculada considerando-se adequadamente os elementos de carga e integrando-se sobre toda a distribuição. O potencial elétrico de distribuições contínuas de carga pode ser determinado considerando-se adequadamente os elementos de carga na distribuição e aplicando-se o Princípio da Superposição.

## **Auto-avaliação**

É muito importante que você seja capaz de identificar os elementos de carga que compõem a distribuição contínua de carga e entender claramente o conceito de distribuição linear, superficial e volumétrica. Os exemplos apresentados durante a aula são muito importantes. Entenda estes exemplos para resolver corretamente os problemas propostos.

## Aula 9 – Condutores e capacitores

### Metas da aula

Calcular o campo elétrico por meio do potencial. Apresentar os condutores elétricos e mostrar como se comporta o potencial elétrico neles. Apresentar o conceito de capacitância, os capacitores e seu princípio de funcionamento.

### Objetivos

Ao final desta aula, esperamos que você seja capaz de:

- Calcular o campo elétrico de distribuições de cargas por meio do potencial elétrico.
- Explicar o que são os condutores.
- Entender o conceito de capacitância.
- Explicar o funcionamento dos capacitores e calcular as capacitâncias de capacitores com geometrias diversas.
- Calcular a capacitância em associações de capacitores.

### Pré-requisitos

Nesta aula, você necessitará de todos os conhecimentos adquiridos no decorrer das Aulas 6 a 8. Será importante ter claro o conceito de superfícies eqüipotenciais.

### Introdução

Você viu, na Aula 6 deste módulo, que o potencial elétrico pode ser determinado por meio do campo elétrico. Você aprendeu a calcular o potencial elétrico por meio do campo elétrico em diversos tipos de distribuições de carga, discretas e contínuas. Vimos também o que eram as superfícies eqüipotenciais e a energia eletrostática.

É possível fazer o caminho inverso? É possível calcular o campo elétrico por meio do potencial? Veremos, a seguir, que sim e que, de fato, esta é uma maneira bastante elegante para a determinação do campo elétrico.

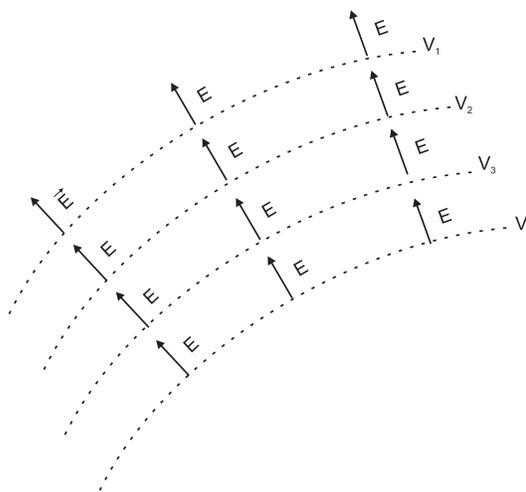
Abordaremos também os condutores, mostrando algumas características importantes desta classe de material. E, por fim, veremos o que ocorre quando aproximamos dois condutores de modo a formar um dispositivo interessante capaz de armazenar energia elétrica, o capacitor.

## Cálculo do campo elétrico usando o potencial

Vamos começar recordando um pouco sobre o potencial. Dada uma certa distribuição de cargas, seja ela discreta ou contínua, conhecemos o potencial elétrico em todos os pontos vizinhos a ela.

Caso você tenha alguma dúvida de como fazer isto, reveja os conceitos que você já aprendeu nas Aulas 6 a 8 deste módulo.

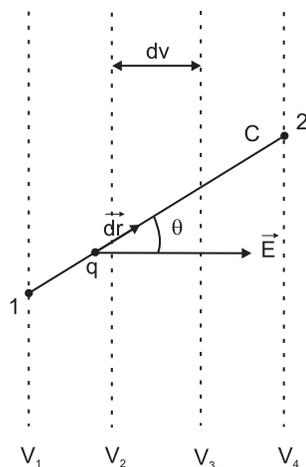
Sabemos, portanto, desenhar as superfícies eqüipotenciais relativas a uma distribuição de cargas. Sabemos também que as linhas de campo devem ser perpendiculares às superfícies eqüipotenciais. Observe a **Figura 9.1**, em que o campo elétrico é representado por vetores. Repare que, na região onde o campo elétrico é mais intenso, as linhas eqüipotenciais são mais próximas. Os vetores do campo elétrico estão sempre perpendiculares a uma linha eqüipotencial. O procedimento gráfico é bastante simples.



**Figura 9.1:** Determinação gráfica do campo elétrico usando as superfícies eqüipotenciais.

Existe um procedimento matemático equivalente a este?

Vamos supor um conjunto de superfícies eqüipotenciais cujo espaçamento seja equivalente a uma diferença de potencial de  $dV$ . Veja a **Figura 9.2**. Novamente, o campo elétrico em qualquer ponto  $P$  é perpendicular às superfícies eqüipotenciais.



**Figura 9.2:** Movimento infinitesimal  $\vec{dr}$  de uma carga  $q$  em um campo elétrico  $\vec{E}$ .

Vamos supor que uma carga puntiforme de prova, de valor  $q$ , se mova ao longo da trajetória  $C$ , sofrendo um deslocamento  $\vec{dr}$ . Ora, conforme vimos nas aulas anteriores, a força elétrica  $\vec{F}$  realizará trabalho nesta carga. O trabalho é dado por:

$$\mathcal{W} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot \vec{dr} = -\Delta U$$

onde  $\Delta U$  é a diferença de energia potencial.

Se o deslocamento  $\vec{dr}$  é infinitesimal, podemos dizer que:

$$\vec{dr} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

e, portanto:

$$\vec{F} \cdot \vec{dr} = -dU = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) \quad (9.1)$$

Isto significa que a força  $\vec{F}$  pode ser expressa assim:

$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{z}\right) \quad (9.2)$$

O termo da direita na Equação 9.2 é conhecido como gradiente e é denotado pelo símbolo  $\nabla$ . Simplificando, podemos escrever:

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Agora, podemos utilizar a Equação 2.4:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

e a Equação 6.1:

$$V = \frac{U}{q}$$

para descrever o campo elétrico  $\vec{E}$  em função do potencial  $V$  na forma:

$$\frac{\vec{F}}{q} = -\frac{\nabla U}{q} \quad (9.3)$$

ou seja:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (9.4)$$

A Equação 9.4 nos diz que o campo elétrico  $\vec{E}$  é simplesmente o gradiente do potencial  $V$ . Esta é uma forma bastante elegante de cálculo do campo, principalmente quando a simetria da distribuição de cargas permite a determinação simples do potencial. Veremos alguns exemplos destas configurações simples a seguir.

Em coordenadas cartesianas, as componentes do campo elétrico são dadas por

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

**Exercício 9.1**

No Exemplo 8.3 da Aula 8 deste módulo, você calculou o potencial de um anel carregado. Calcule o campo elétrico associado ao potencial dado pela Equação (8.9) e confira o resultado com o obtido no Exemplo 4.2 da Aula 4 deste módulo.

**Exercício 9.2**

Calcule o campo elétrico associado ao potencial dado pela Equação (8.10) e confira o resultado com o obtido no Exemplo 4.3 da Aula 4.

## Condutores perfeitos

Na Natureza, os materiais são classificados de acordo com suas propriedades físicas. Uma das propriedades importantes na classificação de materiais diz respeito a como as cargas, que estão no material, respondem à aplicação de um campo elétrico  $\vec{E}$ .

Em alguns materiais, conhecidos como *isolantes* (o vidro, por exemplo), em razão de sua estrutura atômica interna, os portadores de carga, os elétrons, ficam presos aos seus respectivos átomos. Campos elétricos de intensidade fraca ou moderada aplicados a esse tipo de material apenas provocam distorções na distribuição de cargas, gerando dipolos elétricos induzidos ou alinhando com o campo moléculas com momento de dipolo permanente.

Em uma outra classe de materiais, conhecidos como materiais *condutores*, cada átomo que constitui o material contribui com um ou dois elétrons que não estão presos. Estes elétrons são conhecidos como elétrons de condução, ou elétrons livres. Quando diversos átomos se juntam, os elétrons passam a pertencer ao material como um todo, e não a um átomo em particular. Quando um campo elétrico é aplicado, a força elétrica que é exercida nesses elétrons é suficiente para causar seu movimento.

Por definição, um *condutor perfeito* é um material que possui um suprimento ilimitado desses elétrons e responde instantaneamente aos campos elétricos externos, aplicados sem oferecer resistência. Um condutor perfeito em equilíbrio eletrostático possui algumas características interessantes. A partir deste momento, nos referiremos aos condutores perfeitos apenas por condutores.

O campo elétrico dentro de um condutor é zero. Se o campo no interior não fosse zero, exerceria uma força sobre os elétrons livres, que estariam sempre em movimento. Não existe tal movimento perpétuo de elétrons, e, portanto, o campo necessariamente é zero no interior de um condutor.

Se o campo elétrico é nulo em todos os pontos no condutor, ele deve ser nulo em todos os pontos na superfície deste condutor. Isto significa que o fluxo em uma superfície gaussiana colocada sobre o condutor deve ser nulo. Isto implica que a densidade de carga no interior de um condutor é zero.

Mas será que podemos colocar cargas adicionais em um condutor? Como estas cargas adicionais vão se comportar?

Qualquer carga adicional colocada em um condutor poderá mover-se livremente. As cargas se movem rapidamente, distribuindo-se pela superfície de tal forma que o campo elétrico interno resultante, ou seja, a soma vetorial de todos os campos elétricos de todas as cargas, se anula. Quando isto ocorre, o movimento cessa, pois a força resultante em cada carga é nula. As cargas, então, atingem novamente o equilíbrio eletrostático.

Uma vez que qualquer campo no interior do condutor é nulo, podemos dizer que:

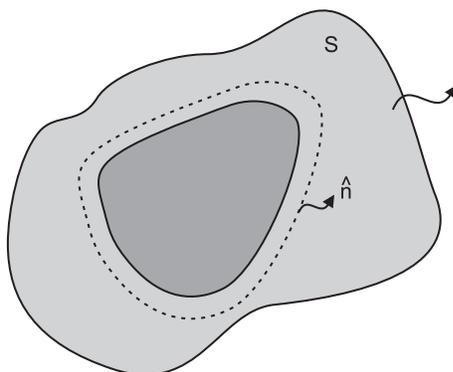
$$\Delta V = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$$

Isto significa que qualquer ponto no interior do condutor está sempre no mesmo potencial. A superfície de um condutor, que faz parte do condutor, é uma superfície equipotencial.

Como é o campo elétrico logo acima da superfície do condutor?

Imaginemos que o campo elétrico logo acima tenha duas componentes, uma perpendicular ao condutor e outra tangencial a ele. Se a componente tangencial for diferente de zero, o campo estará na superfície do condutor, que redistribui as cargas até que a componente tangencial seja nula. Assim, a componente tangencial é sempre nula, e, imediatamente acima da superfície de um condutor, o campo elétrico tem somente uma componente perpendicular à superfície.

Vamos, agora, imaginar um condutor que possua uma cavidade no seu interior. Veja a **Figura 9.3**. Vamos imaginar, ainda, que não exista carga no interior da cavidade.



**Figura 9.3:** Um condutor oco, que possui uma cavidade no seu interior.

Se tomamos uma superfície gaussiana  $S$  que seja coincidente com a superfície da cavidade interna, como a indicada na **Figura 9.3**, podemos escrever o fluxo  $\Phi_{\vec{E}}$  como foi feito na Equação 5.2:

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

e como não há cargas:

$$\Phi_{\vec{E}} = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$$

### Exercício 9.3

Mostre que o campo elétrico na superfície de um condutor é dado por:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

onde  $\hat{n}$  é um vetor unitário perpendicular à superfície,  $\sigma$  é a densidade superficial de carga, e  $\epsilon_0$  é a constante de permissividade do vácuo.

Compare este resultado com o valor do campo na superfície de um plano infinito não-condutor, calculado no Exemplo 5.5 da Aula 5 deste módulo.

**Exercício 9.4**

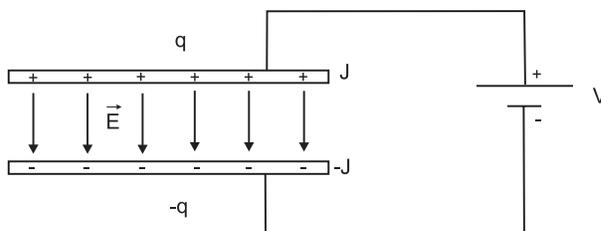
Um condutor perfeito possui uma cavidade de forma arbitrária em seu interior. Uma carga puntiforme  $q$  é introduzida nesta cavidade. Mostre que, em equilíbrio eletrostático, haverá uma carga  $-q$  induzida na superfície da cavidade. Discuta a distribuição de cargas na superfície da cavidade e do condutor.

**Capacitores**

Quando seguramos a extremidade de uma mola e a deslocamos, ou quando esticamos a corda de um arco, estamos armazenando energia potencial. Esta energia pode ser utilizada depois. É possível armazenar energia elétrica de alguma forma?

Uma das maneiras mais simples de armazenar energia elétrica é utilizando dispositivos conhecidos como capacitores. O que vêm a ser eles?

Vamos imaginar duas placas condutoras posicionadas paralelamente entre si e isoladas eletricamente. Neste momento, vamos supor também que não exista nenhum material entre as placas. Veja a **Figura 9.4**. Uma das placas é carregada com uma carga total  $q$ , enquanto a segunda é carregada com uma carga total  $-q$ .



**Figura 9.4:** Duas placas paralelas condutoras separadas por uma distância  $d$ . Uma das placas possui carga total  $q$ , e a segunda, carga total  $-q$ . As placas são mantidas em potenciais diferentes por meio de uma bateria.

As placas são condutoras e, portanto, são superfícies equipotenciais, ou seja, todos os pontos de cada placa estão no mesmo potencial elétrico. Mas o potencial de cada placa é diferente, ou seja, a diferença de potencial entre as placas não é nula. Como podemos escolher o potencial nulo arbitrariamente, vamos definir que o potencial na placa inferior seja nulo ( $V_{inferior} = 0$ ). A placa superior está em um potencial  $V_{superior} = V$ . A diferença de potencial entre as placas é, portanto, dada por:

$$\Delta V = V_{superior} - V_{inferior} = V$$

Se a distância  $d$  entre as placas for muito menor que a dimensão das placas, então o campo elétrico que aparece entre as placas poderá ser considerado uniforme. Aplicando a Lei de Gauss à superfície do condutor, encontramos o campo elétrico

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (9.5)$$

onde  $\sigma$  é a densidade superficial de carga dada por:

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

onde  $A$  é a área das placas.

A diferença de potencial entre as placas é dada por:

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = Ed$$

e, usando a Equação 9.5, teremos:

$$V = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = \frac{q d}{\epsilon_0 A} \quad (9.6)$$

Observe a Equação 9.6. Note que a diferença de potencial  $V$  é diretamente proporcional à carga  $q$  da placa positiva. Essa proporcionalidade vale para qualquer par de condutores, de qualquer forma, que estejam submetidos a uma diferença de potencial  $V$ .

Essa relação linear entre a carga  $q$  e o potencial  $V$  também pode ser determinada experimentalmente e é dada por

$$q = CV \quad (9.7)$$

onde a constante de proporcionalidade  $C$  é conhecida como capacitância. Este dispositivo simples é conhecido como capacitor. O valor da constante  $C$  depende, como veremos, somente da geometria do sistema, e não da sua carga ou da diferença de potencial entre elas. A partir da Equação 9.7, vemos que a capacitância  $C$  é dada por:

$$C = \frac{q}{V}$$

Portanto, a capacitância é uma medida de quanta carga  $q$  deve ser colocada nas placas, para produzir uma certa diferença de potencial  $V$ . Quanto maior for a capacitância, maior será a carga exigida.

No Sistema Internacional de Medidas, a capacitância ganhou uma unidade própria, conhecida como farad, representada pela letra F.

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ F} = 1 \text{ coulomb por volt} = 1 \text{ C/V}$$

#### Exercício 9.5

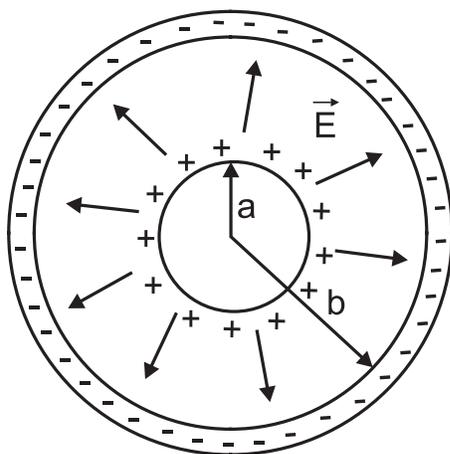
Qual é a área necessária para obter um capacitor de placas planas e paralelas de capacitância  $C = 1 \text{ F}$  se a distância entre as placas é de  $d = 1\text{mm}$ ? Lembre-se de que  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ .

Usualmente, as unidades de capacitância de capacitores comerciais estão na faixa dos  $\mu\text{F}$  ( $10^{-6} \text{ F}$ ) e  $\text{pF}$  ( $10^{-12} \text{ F}$ ).

#### Exercício 9.6

Mostre que a capacitância de um capacitor cilíndrico de comprimento  $L$ , formado por dois cilindros coaxiais de raios  $a$  e  $b$ , conforme mostra a **Figura 9.5**, é dada por:

$$C = 2\pi\epsilon_0 \frac{L}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$



**Figura 9.5:** Corte de um capacitor cilíndrico mostrando dois cilindros coaxiais de raios  $a$  e  $b$ .

#### Exercício 9.7

A **Figura 9.5** também pode representar duas cascas esféricas concêntricas de raios  $a$  e  $b$ , formando um capacitor esférico. Mostre que a capacitância, neste caso, é dada por:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

### Energia armazenada em capacitores

Quando a diferença de potencial entre as placas de um capacitor é nula, ou seja, quando estão no mesmo potencial, dizemos que o capacitor está descarregado. O ato de levar as placas de um capacitor a diferentes potenciais é conhecido como carga do capacitor.

Um agente externo deve realizar trabalho, para carregar um capacitor. Para carregar o capacitor, devemos progressivamente tirar cargas de uma placa e colocá-las na outra. Este processo pode ser alcançado por meio de uma bateria, por exemplo. Assim, pouco a pouco, desenvolve-se uma diferença de potencial entre as placas. Entretanto, o campo elétrico que se desenvolve entre as placas possui direção e sentido de tal forma a se opor a essa transferência. À medida que se acumula carga nas placas, o trabalho para mover mais cargas vai se tornando cada vez maior.

Vamos supor que uma carga  $q'$  tenha sido transferida de uma placa a outra de um capacitor. A diferença de potencial  $V'$  desenvolvida entre as placas é dada por:

$$V' = \frac{q'}{C}$$

Se um diferencial de carga  $dq'$  for retirado em seguida, o incremento de trabalho será dado por:

$$d\mathcal{W} = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

O trabalho total necessário para elevar a carga até um valor  $q$  será dado por:

$$\mathcal{W} = \int d\mathcal{W} = \frac{1}{C} \int_0^q q' dq' = \frac{q^2}{2C}$$

Este trabalho será armazenado na forma de uma energia potencial elétrica  $U$  no capacitor, e, portanto, podemos escrever:

$$U = \frac{q^2}{2C} \quad (9.8)$$

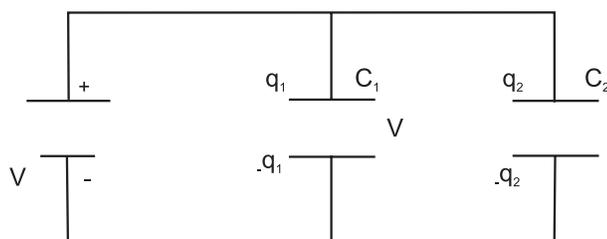
#### Exercício 9.8

Mostre que a Equação 9.8 pode ser reescrita em termos da diferença de potencial  $V$  como:

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

### Associação de capacitores

Os capacitores que encontramos no mercado são dispositivos que podem ser utilizados em um circuito elétrico. Em diversas situações, temos de associar dois ou mais capacitores, que vão se comportar como se fossem um único capacitor equivalente. A **Figura 9.6** mostra um par de capacitores, representados esquematicamente por duas barras paralelas de mesmo tamanho, conectados a uma bateria (representada esquematicamente por duas barras paralelas de tamanhos diferentes), que fornece uma diferença de potencial  $V$ .



**Figura 9.6:** Dois capacitores conectados em paralelo a uma bateria que fornece uma diferença de potencial  $V$ .

Observando a **Figura 9.6**, vemos que as placas superiores de cada capacitor estão conectadas entre si. O mesmo ocorre com as placas inferiores. Também notamos que as placas superiores estão conectadas ao terminal positivo da bateria, enquanto as inferiores estão conectadas ao terminal negativo. Imaginemos que todas essas conexões sejam feitas usando-se fios condutores. Isso garante que a diferença de potencial entre as placas de ambos os capacitores é a mesma e vale  $V$ . Dizemos que os capacitores, nesse caso, estão conectados em paralelo. A carga total armazenada será a soma das cargas armazenadas em cada capacitor.

Queremos substituir este circuito, formado por dois capacitores, por um circuito equivalente, formado por apenas um capacitor e uma bateria, com o mesmo potencial  $V$ . Qual deve ser o valor da capacitância  $C_{equivalente}$ ? Observando o circuito, notamos que:

$$q_1 = C_1 V$$

$$q_2 = C_2 V$$

A carga total será:

$$q = q_1 + q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V$$

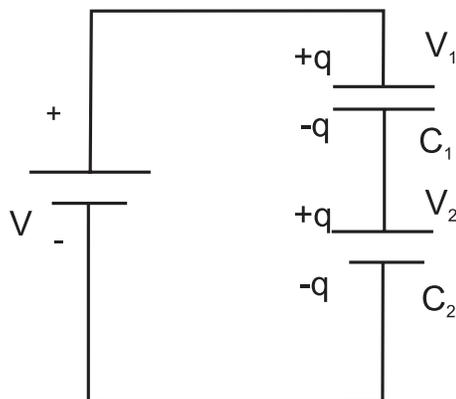
A capacitância total equivalente  $C_{equivalente}$  será, portanto:

$$C_{equivalente} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2$$

Para sistemas com  $N$  capacitores em paralelo, devemos apenas somar as capacitâncias de cada capacitor:

$$C_{equivalente} = \sum_{i=1}^N C_i$$

Uma outra associação possível é mostrada na **Figura 9.7**.



**Figura 9.7:** Dois capacitores conectados em série a uma bateria que fornece uma diferença de potencial  $V$ .

Observe agora a **Figura 9.7**. O terminal positivo da bateria está conectado à placa superior do capacitor  $C_1$ . A placa inferior de  $C_1$  está conectada à placa superior de  $C_2$ . Finalmente, a placa inferior de  $C_2$  está conectada ao terminal negativo da bateria. Dizemos, neste caso, que os capacitores estão conectados em série. A diferença de potencial em cada capacitor não é mais a diferença de potencial total  $V$ , porém a soma de todas as diferenças de potencial é igual a  $V$ .

Quando o terminal negativo da bateria é conectado à placa inferior de  $C_2$ , uma carga  $-q$  se acumula nesta placa. Por indução, as placas ficam com uma seqüência de cargas  $-q$  e  $q$ , conforme indica a **Figura 9.7**. A carga em cada capacitor é a mesma.

Podemos escrever, neste caso:

$$V_1 = \frac{q}{C_1}$$

$$V_2 = \frac{q}{C_2}$$

Mas sabemos que a diferença de potencial total  $V$  se relaciona com  $V_1$  e  $V_2$  da seguinte forma:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

e, portanto:

$$C_{equivalente} = \frac{q}{V} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

ou, ainda:

$$\frac{1}{C_{\text{equivalente}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Para um sistema com  $N$  capacitores em série, teremos:

$$\frac{1}{C_{\text{equivalente}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

Aqui termina o módulo da primeira parte do curso. Na próxima aula, já no módulo seguinte, veremos o que ocorre quando inserimos um material entre as placas de um capacitor e estudaremos o comportamento dos dielétricos.

## Leituras complementares

Sugerimos a leitura de alguns livros, que também tratam de tópicos abordados nesta aula. Você pode consultar como material complementar, por exemplo:

NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Edgard Blücher, v.:3: eletromagnetismo, 1997.

HALLIDAY, David.; RESNICK, Robert.; WALKER, E Jearl. *Física*. v.3: eletromagnetismo. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. Cap. 22.

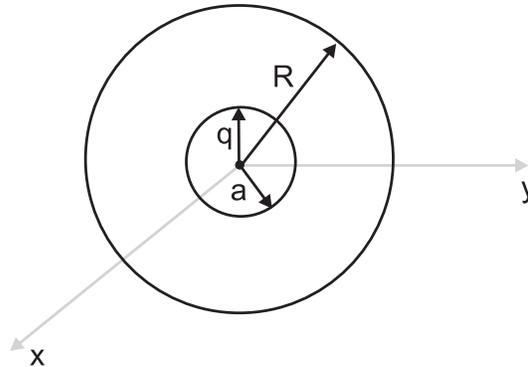
## Problemas

**Problema 9.1** O potencial elétrico em um ponto do espaço é dado por  $V(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ , onde as posições são medidas em metros a partir da origem, e o potencial é dado em  $V/m^2$ . Qual é a intensidade do campo elétrico no ponto  $P(3,4,1)$ ?

**Problema 9.2** O potencial elétrico em um ponto do espaço é dado por  $V(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 2z^2$ , onde as posições são medidas em metros a partir da origem, e o potencial é dado em  $V/m^2$ . Qual é a intensidade, a direção e o sentido do campo elétrico no ponto  $P(1,2,1)$ ?

**Problema 9.3** Calcule o campo elétrico de uma casca esférica carregada usando o potencial calculado no Exemplo 8.5 da Aula 8 deste módulo e compare-o com o resultado obtido no Exemplo 4.4 da Aula 4 deste módulo.

**Problema 9.4** Uma cavidade esférica de raio  $a$  foi escavada no centro de uma esfera condutora de raio  $R$ . Veja a **Figura 9.8**. No centro da cavidade, foi colocada uma carga pontual  $q$ .



**Figura 9.8:** Problema 9.4.

Determine:

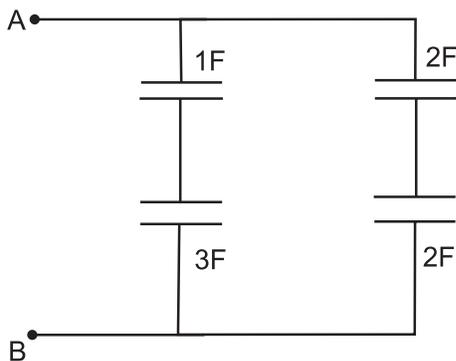
- (a) A densidade superficial de carga  $\sigma_a$  na superfície da cavidade.
- (b) A densidade superficial de carga  $\sigma_R$  na superfície da esfera de raio  $R$ .

**Problema 9.5** Considere, ainda, a **Figura 9.8**. Determine:

- (a) O campo elétrico fora do condutor.
- (b) O campo elétrico dentro do condutor.
- (b) O campo elétrico dentro da cavidade.

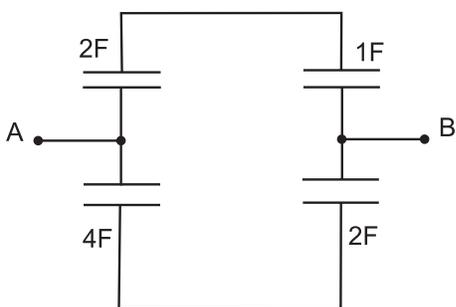
**Problema 9.6** Quais respostas nos Problemas 9.4 e 9.5 seriam modificadas se uma segunda carga pontual  $q'$  fosse trazida para perto do condutor? Por quê?

**Problema 9.7** Qual é a capacitância equivalente entre os pontos A e B na **Figura 9.9**?



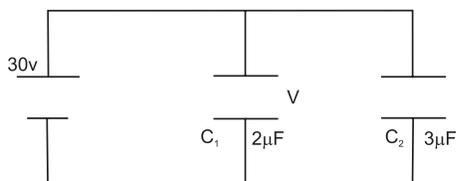
**Figura 9.9:** Problema 9.7.

**Problema 9.8** Calcule a capacitância equivalente entre os pontos A e B na **Figura 9.10**.



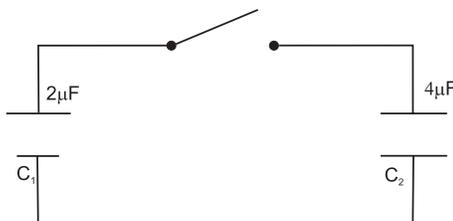
**Figura 9.10:** Problema 9.8.

**Problema 9.9** Calcule o valor das cargas  $q_1$  e  $q_2$  acumuladas nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , indicados na **Figura 9.11**.



**Figura 9.11:** Problema 9.9.

**Problema 9.10** Um capacitor  $C_1$  de valor igual a  $2\mu F$  está inicialmente carregado com uma diferença de potencial de 2V. Um segundo capacitor  $C_2$ , descarregado, é conectado ao capacitor  $C_1$  por meio de uma chave elétrica  $S$ , conforme indica a **Figura 9.12**.



**Figura 9.12:** Problema 9.10.

Determine:

- A carga inicial do capacitor  $C_1$ .
- A diferença de potencial final nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ .
- A carga final em cada capacitor.

**Problema 9.11** Qual é a energia armazenada em um conjunto de 20 capacitores idênticos de  $10\mu F$ , conectados em paralelo e submetidos a uma diferença de potencial de 10kV?

## Resumo

O campo elétrico pode ser determinado pelo gradiente do potencial elétrico, ou seja,

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Condutores elétricos são materiais que possuem elétrons livres que podem se reordenar. O campo elétrico, dentro de um condutor, é zero. A densidade de carga no interior de um condutor é zero. As cargas em excesso estão localizadas na superfície do condutor. A superfície de um condutor é uma superfície equipotencial, isto é, todos os seus pontos estão a um mesmo potencial. Imediatamente acima da superfície de um condutor, o campo elétrico é perpendicular à superfície.

Capacitores são dispositivos simples capazes de armazenar energia elétrica na forma de campo elétrico. Capacitores são formados por dois condutores próximos, isolados eletricamente. A quantidade de carga armazenada em um capacitor é diretamente proporcional à diferença de potencial entre os terminais do capacitor e é dada pela relação:

$$q = CV$$

A constante de proporcionalidade  $C$  é chamada capacitância e é medida em farads no Sistema Internacional.

Capacitores associados em paralelo produzem uma capacitância equivalente igual à soma das capacitâncias individuais:

$$C_{\text{equivalente}} = \sum_{i=1}^N C_i$$

Capacitores associados em paralelo produzem uma capacitância equivalente, cujo inverso é igual à soma dos inversos das capacitâncias individuais:

$$\frac{1}{C_{\text{equivalente}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i}$$

A energia eletrostática armazenada em um capacitor é dada por:

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

## Auto-avaliação

É importante que você tenha compreendido bem a determinação do campo elétrico usando o gradiente do potencial. Você deve ser capaz de resolver os Exercícios 9.1 e 9.2, bem como o Problema 9.3. Também é importante que você saiba descrever as principais características de um condutor elétrico e resolver os Problemas 9.3 a 9.5. É importante que você saiba explicar o princípio de funcionamento de um capacitor e identificar os diferentes tipos de associações de capacitores. Verifique se você é capaz de chegar aos resultados obtidos para a associação de dois capacitores em série e em paralelo.



# Aula 10 – Prática - Atividades experimentais

## Meta da aula

Realizar experimentos simples relacionados com os conceitos de eletrostática abordados nas aulas teóricas.

## Objetivos

- Comparar os resultados experimentais com os conceitos teóricos apresentados durante as aulas.
- Verificar experimentalmente a existência de cargas elétricas.
- Observar experimentalmente os efeitos de campos elétricos.
- Observar experimentalmente o potencial elétrico.
- Observar experimentalmente a existência de linhas de campo.

Ela é composta dos seguintes experimentos:

- Experimento 1: geração de cargas por atrito.
- Experimento 2: descarga em gases.
- Experimento 3: o eletroscópio e a distribuição de cargas num condutor.
- Experimento 4: campo elétrico e linhas de campo.
- Experimento 5: superfícies eqüipotenciais.

Estas cinco atividades experimentais permitirão que você acompanhe os processos de produção e transferência de cargas elétricas e os efeitos destas em sistemas simples. Nos cinco experimentos que constituem esta aula, será possível criar campos elétricos e determinar superfícies eqüipotenciais por medições de diferenças de potencial para distintas configurações dos eletrodos.

## Pré-requisitos

Nas atividades experimentais, você necessita saber o uso de incertezas e sua propagação. É também necessário que você leia o roteiro completo antes de realizar cada experimento.

## Experimento 1: geração de cargas por atrito

### Informações preliminares

Na Aula 1 deste módulo, você realizou um experimento simples com um pente. Naquela experiência, usando um pente e alguns pedaços de papel, você foi induzido a gerar cargas por atrito e a experimentar as forças que o campo elétrico resultante gerava. Vamos repetir essencialmente aquela experiência.

### Objetivos

Este experimento tem como objetivos:

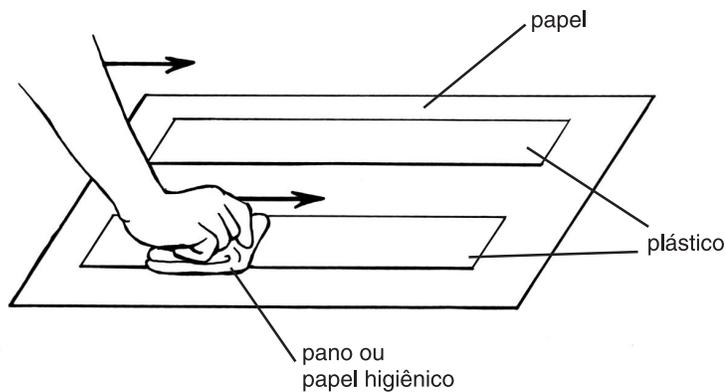
- Produzir objetos eletricamente carregados por atrito.
- Verificar os efeitos das interações entre cargas elétricas.
- Descrever qualitativamente os efeitos observados.

### Material utilizado

- Duas fitas de plástico (3 cm × 12 cm aproximadamente).
- Uma fita de papel do mesmo tamanho que o das plásticas.
- Uma folha de papel A4.
- Um pano seco de lã ou papel higiênico.

### Atividade experimental

1. Coloque as fitas em cima de uma folha de papel.
2. Esfregue as fitas sempre na mesma direção com um pano de lã ou papel higiênico (veja **Figura 10.1**).



**Figura 10.1:** Eletrificação por atrito.

3. Levante as tiras pelos extremos e aproxime as suas superfícies.
4. Descreva e anote o que você observou.
5. Repita o experimento agora com uma fita plástica e outra de papel.

## Análise dos dados

Com base em suas observações e anotações, responda:

1. Supondo que o plástico recebe elétrons ao ser atritado, justifique o resultado das suas observações.
2. O que você pode dizer da carga do material que utilizou para atritar as tiras plásticas?

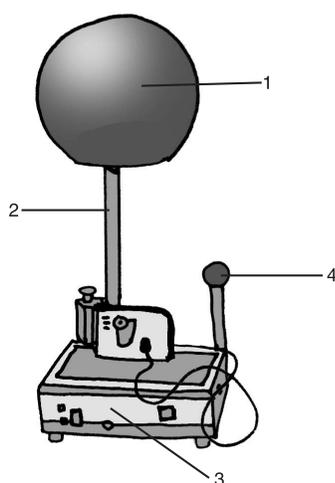
## Experimento 2: Descarga em gases

### Informações preliminares

Neste experimento, utilizaremos um gerador eletrostático de correia disponível no pólo.

Leia com atenção as páginas 7 a 12 do manual de instruções MLEQ063, do gerador eletrostático, que estará disponível no pólo (instruções 1992.001). Este manual contém uma descrição detalhada de todas as partes do gerador e de seu funcionamento básico. Reconheça suas partes, descritas de forma cuidadosa no manual MLEQ063. Em caso de dúvida, recorra ao tutor e não siga adiante sem ser capaz de identificar bem as peças do gerador.

A **Figura 10.2** ilustra as partes do gerador:



**Figura 10.2:** Gerador eletrostático. 1 - Esfera principal superior; 2 - haste com correia; 3 - base; 4 - haste com esfera de teste.

## Objetivos

Este experimento tem como objetivos:

- Produzir uma superfície carregada através de um gerado eletrostático.
- Produzir descargas elétricas intensas.
- Observar os efeitos da presença de um campo elétrico.
- Descrever qualitativamente os efeitos observados.

## Material utilizado

O material necessário será:

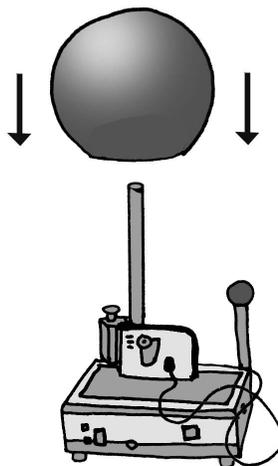
- Gerador eletrostático de correia com cabo de três pinos e aterramento.
- Esfera de teste.
- Conexão elétrica com pinos de pressão.
- Placas paralelas para acoplamento ao gerador eletrostático.
- Uma vela.
- Uma caixa de fósforos.

## Atividade experimental

1. Monte o gerador de acordo com as instruções contidas no manual MLEQ063, sem colocar a esfera superior.

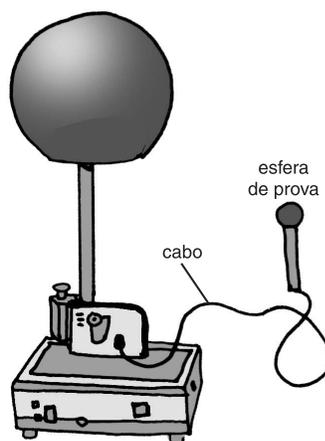
Lembre-se de manter o aparelho ligado por, no mínimo, três minutos, para assentar a correia do mesmo.

- Desligue o gerador e coloque a esfera superior conforme indica a **Figura 10.3**.



**Figura 10.3:** Gerador eletrostático com esfera principal superior.

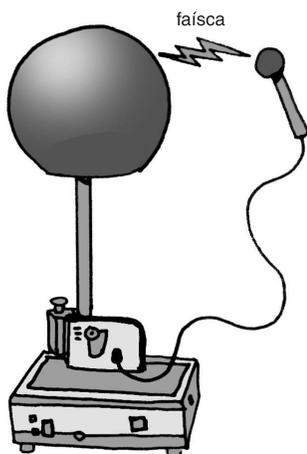
- Conecte um cabo entre a esfera de teste, colocada na ponta de um bastão, e a base do gerador, conforme a **Figura 10.4**.



**Figura 10.4:** Conectando esfera de teste à base.

- Ligue o gerador. Aguarde alguns instantes e aproxime lentamente a esfera auxiliar da esfera principal.

- Observe a ocorrência de faíscas entre a cabeça principal e a esfera de teste. Veja a **Figura 10.5**.

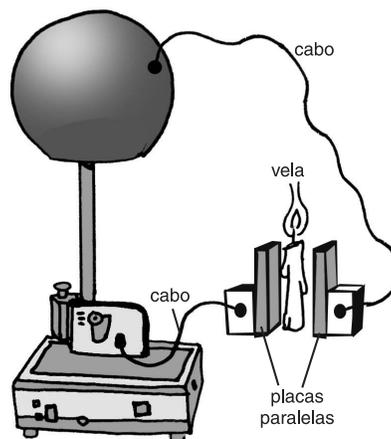


**Figura 10.5:** Faiscamento entre o gerador e a esfera de teste.

- Afaste a esfera de teste até não obter mais as faíscas. Se o aparelho estiver bem ajustado, você deve obter faíscas em distâncias de até 30mm ou mais entre a esfera superior e a esfera de teste.
- Aproxime novamente a esfera de teste e observe a cor das faíscas e o ruído gerado.

Na Natureza, durante as tempestades de chuva, ocorrem fenômenos que são muito similares aos observados. Como as faíscas geradas no experimento se relacionam com essas manifestações da Natureza durante as tempestades?

- Monte as placas paralelas condutoras conectando uma placa à esfera e a outra à base, como mostrado na **Figura 10.6**.



**Figura 10.6:** Montagem das placas paralelas com gerador eletrostático.

- Posicione uma vela no centro das placas.
- Acenda a vela e ligue o gerador.
- Observe, anote e descreva o que ocorre com a chama da vela.
- Desmonte e guarde o material utilizado.

Não deixe o aparelho ligado enquanto estiver pensando, lendo ou escrevendo, para evitar seu desgaste prematuro.

É sempre conveniente garantir a descarga da cabeça principal antes de manuseá-la. Para isto, toque a esfera de teste, conectada à base por meio de um cabo, na esfera superior. Isto garante a descarga completa da parte superior.

## Análise dos dados

Responda às seguintes perguntas:

1. Qual é o princípio de funcionamento do gerador? Observe que a cabeça do gerador se encontra a um potencial negativo com relação à base (esfera de teste) e que este potencial pode ser trasladado por meio de condutores, por exemplo, para a cuba cilíndrica, com fixadores para eletrodos.
2. Como se classificam as partes do gerador, cabeça, haste acrílica, correia, plaquetas, quanto a bons ou maus condutores elétricos?
3. Dê duas ou três características importantes que fazem com que as cargas sejam transportadas à esfera principal.
4. De onde saem estas cargas?
5. Por que as cargas carregadas pela correia ficam na esfera superior?
6. Para onde vão as cargas com sinal oposto, necessárias para manter o equilíbrio de neutralidade total de cargas?
7. Por que as faíscas só aparecem quando o bastão e a esfera de prova se aproximam da esfera maior?
8. Entre a cabeça do gerador e a base, temos tipicamente uma diferença de potencial de aproximadamente 240.000 volts. Considerando a distância entre a cabeça e o bastão de prova, o que você pode dizer da intensidade do campo elétrico?
9. Esta experiência permite determinar, nas condições do experimento, um campo elétrico crítico abaixo do qual não ocorrem descargas. Lembre-se de que o campo elétrico depende da distribuição de cargas e das distâncias entre estas e o ponto de observação. A cabeça do gerador é chamada cátodo (eletrodo negativo), e o bastão conectado à base é chamado anodo (eletrodo positivo). A cor das faíscas é consequência das propriedades do ar e da pressão (neste caso, a descarga é realizada a pressão atmosférica). Se colocássemos o gerador em uma câmara na qual pudéssemos modificar a pressão, veríamos que, à medida que esta diminui, a distância máxima na qual ainda temos faíscas aumenta. O que se pode dizer das propriedades condutoras do ar com a pressão?

10. Existe um momento em que a pressão é baixa demais para permitir a descarga. Argumente sobre esta observação. Se mudássemos o gás dentro desta câmara (acetona, álcool etc.), veríamos que a cor da descarga também muda. Você pode explicar este efeito?
  
11. No procedimento com a vela, sua chama aquece e ioniza o ar ao seu redor, ou seja, torna as moléculas do ar carregadas. Estas cargas elétricas sentem a presença do campo elétrico entre as placas. Descreva as características do campo elétrico e o comportamento da chama da vela em função do movimento destas cargas no campo elétrico.

## Experimento 3: O eletroscópio e a distribuição de cargas num condutor

### Informações preliminares

Vamos lembrar alguns conceitos. Responda às questões abaixo antes de iniciar os experimentos. Caso tenha dúvidas, consulte as referências sugerida e o texto das aulas.

1. O que você entende por carga elétrica?
2. Escreva a lei de forças de Coulomb.
3. Qual a diferença entre a obtenção de carga por atrito e a obtenção de carga por indução?
4. Cite três partículas fundamentais do átomo, com o valor e o sinal de suas cargas elétricas.

### Objetivos

Este experimento tem como objetivos:

- Induzir cargas elétricas em um eletroscópio com o gerador eletrostático.
- Observar o efeito da interação de cargas elétricas.
- Descrever qualitativamente os efeitos observados.

### Material utilizado

O material necessário será:

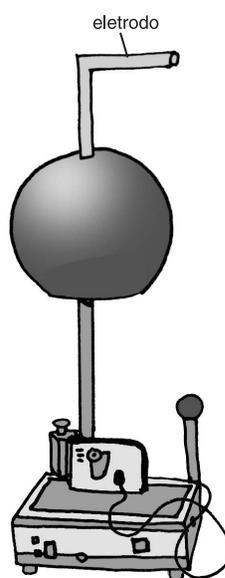
- Gerador eletrostático de correia com cabo de três pinos e aterramento.
- Eletrodo com gancho para eletroscópio.
- Lâmina de alumínio dobrada ao meio.
- Esfera de teste.
- Conexão elétrica com pinos de pressão.
- Torniquete elétrico com pivô.

## Atividade experimental

Se o gerador não tiver sido utilizado recentemente, faça os testes iniciais descritos no manual (página 12).

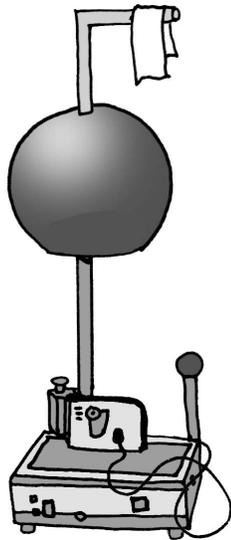
Lembre-se de anotar cuidadosamente cada observação, para depois poder fazer uma boa análise de seus resultados.

1. Com o gerador desligado, monte o eletrodo com ganchos no topo da esfera superior, como mostra a **Figura 10.7**.



**Figura 10.7:** Montagem do eletrodo de gancho sobre o gerador eletrostático.

2. Coloque a lâmina de alumínio dobrada sobre o eletrodo, conforme indica a **Figura 10.8**.



**Figura 10.8:** Montagem da lâmina sobre o eletrodo de gancho.

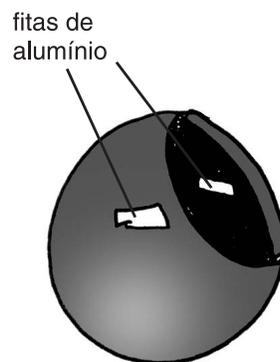
Esta montagem é um eletroscópio. Observe que este eletroscópio é bem simples, composto de duas fitas leves de metal em paralelo, suportadas por um extremo e apoiadas em uma haste. Não há aqui a ampola de vidro, como foi visto na Aula 1 deste módulo.

3. Conecte a esfera de teste à base do gerador com um cabo. Mantenha a esfera de teste afastada da esfera principal.
4. Ligue o gerador e observe o que ocorre com as lâminas do eletroscópio.
5. Desligue o gerador e observe o que ocorre com as lâminas do eletroscópio.
6. Toque a cabeça do gerador com a esfera de prova e observe o que ocorre com as lâminas do eletroscópio.
7. Desmonte o eletroscópio da cabeça e guarde as peças com cuidado.

Este material, se bem cuidado, pode durar muito tempo. Lembre-se de que outros colegas vão utilizar o equipamento.

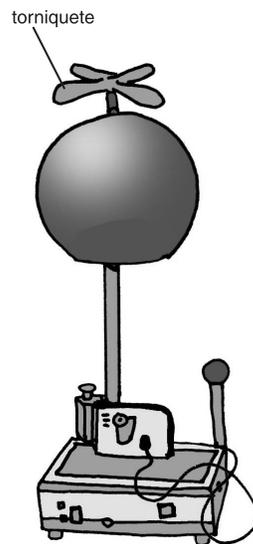
8. Retire a esfera principal do gerador e apóie-a na cuba de acrílico (isto isola eletricamente a esfera e não permite que esta role).

9. Conecte um cabo entre a parte superior do gerador e a esfera que está na cuba.
10. Cole fitas de folha de alumínio, uma por dentro da esfera e a outra por fora, conforme a **Figura 10.9**.



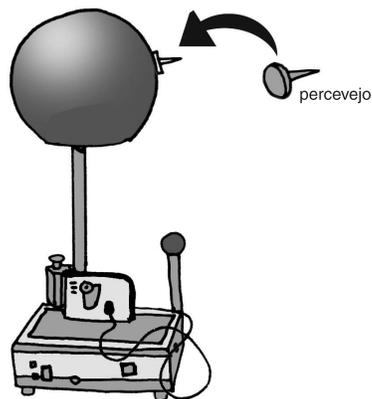
**Figura 10.9:** Fitas de alumínio coladas na parte de fora e na de dentro da esfera principal do gerador.

11. Ligue o gerador e aguarde alguns segundos, desligando em seguida.
12. Observe o que ocorre com as fitas e anote o resultado.
13. Toque a esfera principal com o bastão de prova.
14. Volte a cabeça do gerador ao suporte.
15. Monte o torniquete elétrico, como na **Figura 10.10**.



**Figura 10.10:** Torniquete elétrico montado na esfera principal.

16. Ligue o gerador e observe o que ocorre com o torniquete.
17. Retire o torniquete da esfera principal.
18. Cole um percevejo metálico (tachinha) na esfera principal do gerador com uma fita adesiva, de forma que a ponta fique para fora. Veja a **Figura 10.11**.



**Figura 10.11:** Percevejo montado na esfera principal.

19. Conecte a esfera de teste à base.
20. Ligue o gerador.
21. Aproxime a esfera de teste à esfera principal, longe da posição do percevejo. Observe as faíscas geradas.

22. Aproxime agora a esfera de teste à posição do percevejo. Observe o que acontece com as faíscas.
23. Deligue o gerador.
24. Toque a esfera de teste na cabeça principal para descarregá-la.
25. Desmonte o equipamento e guarde tudo com cuidado.

### **Análise dos dados**

1. Descreva o observado em cada etapa. Justifique o que foi observado com base nos conceitos vistos durante o curso.
2. Leia o texto das páginas 25, 26 e 27 do manual MLEQ063 e o relacione ao que foi observado neste experimento.

## Experimento 4: Campo elétrico e linhas de campo

### Informações preliminares

Vamos relembrar alguns conceitos. Responda às questões abaixo antes de iniciar os experimentos. Caso tenha dúvidas, consulte as referências e o texto das aulas.

- O que é campo elétrico?
- O campo elétrico é conservativo?
- O que são linhas de força de um campo elétrico?
- Que propriedades têm as linhas de campo?
- O que acontece com uma carga liberada dentro de um campo elétrico e o que podemos dizer da sua trajetória? Qual o efeito com o sinal da carga neste comportamento?

### Objetivos

Este experimento tem como objetivos:

- Gerar campos elétricos, com diferentes configurações, utilizando o gerador eletrostático.
- Observar as linhas de campo elétrico.
- Descrever qualitativamente os efeitos observados.

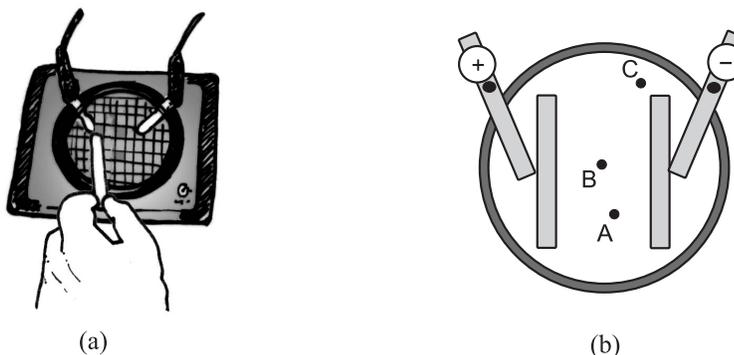
### Material utilizado

O material necessário será:

- Gerador eletrostático.
- Cuba cilíndrica pequena.
- Base para cuba cilíndrica com eletrodos.
- Conexões com pinos banana.

## Atividade Experimental

1. Observe o fixador de eletrodos da base da cuba cilíndrica. Veja a **Figura 10.12(a)**. Esta base permite algumas configurações de eletrodos, que, posteriormente, podemos conectar aos pólos positivo e negativo do gerador eletrostático, gerando, desta maneira, um campo elétrico entre os eletrodos.



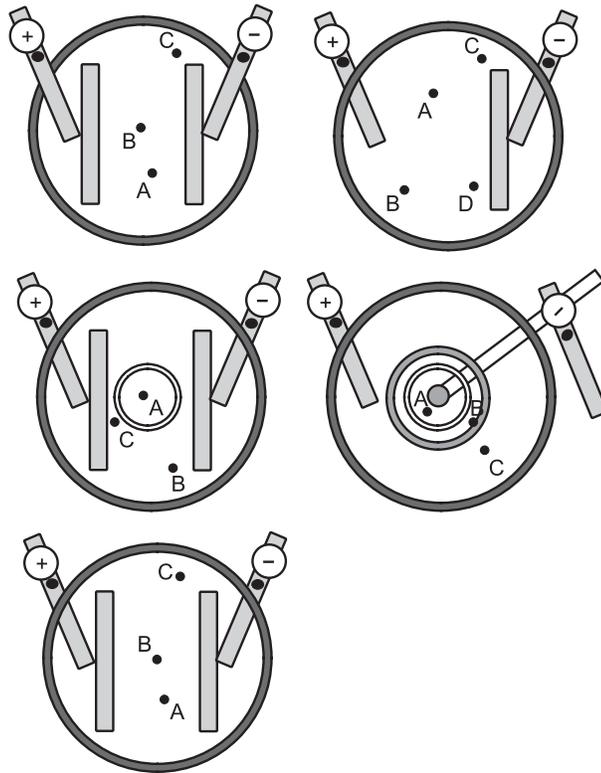
**Figura 10.12:** (a) Base com eletrodos. (b) Configuração de eletrodos paralelos.

2. Monte, na base, dois eletrodos paralelos, um em contato físico com o pólo positivo do gerador (base) e o outro com o negativo (esfera principal), conforme indica a **Figura 10.12(b)**.
3. Coloque na cuba cilíndrica uma fina camada de óleo.
4. Espalhe por cima do óleo uma fina camada de pó de milho. Observe que ele ficará flutuando na superfície do óleo. Observe também que não há nenhuma distribuição particular nas partículas de milho.
5. Coloque a cuba acima da base de eletrodos, conforme indica a **Figura 10.13**.



**Figura 10.13:** Cuba cilíndrica montada em cima da base com eletrodos.

6. Ligue o gerador pelo tempo necessário para observar um rearranjo nas partículas flutuando na superfície do óleo.
7. Observe e anote o que ocorre com as partículas do pó.
8. Modifique a posição dos eletrodos e refaça o experimento. Complete as cinco configurações de eletrodos mostradas na **Figura 10.14**.



**Figura 10.14:** Configuração de eletrodos.

Atenção! O tempo todo, anote a geometria, com as distâncias entre eletrodos, para poder relacionar e entender o observado.

### Análise dos dados

1. Para cada uma das observações feitas, faça um comentário sobre as linhas do campo elétrico e sobre a interação entre as partículas.
2. Observe que o campo elétrico é sempre perpendicular às superfícies metálicas. Faça um comentário sobre a densidade das linhas.

## Experimento 5: Superfícies equipotenciais

### Informações preliminares

Com a utilização do conjunto EQ029, podemos visualizar um campo elétrico e determinar as superfícies equipotenciais em distintas configurações. Para isto, utilizaremos uma cuba com um eletrólito e eletrodos que permitem distintas geometrias dentro da cuba. A diferença de potencial para os eletrodos será fornecida por uma fonte de alimentação 0 - 20 Vcc. Utilizaremos um multímetro, para determinar a diferença de potencial entre um eletrodo e diferentes posições dentro da cuba.

### Objetivos

Este experimento tem como objetivos:

- Gerar campos elétricos, com diferentes configurações, utilizando eletrodos imersos em um eletrólito e uma fonte de alimentação.
- Medir as linhas equipotenciais para diferentes configurações de eletrodos.
- Descrever qualitativamente os efeitos observados.

### Material utilizado

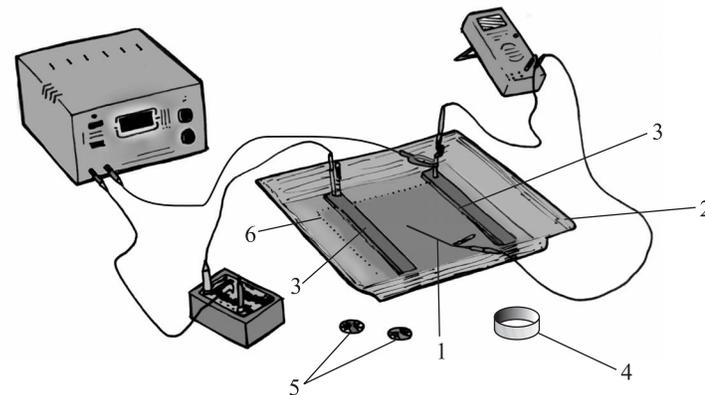
O material necessário será:

- Cuba com escala.
- Conexões com pinos banana.
- Ponteira para tomada de dados de mapeamento.
- Eletrodos retos.
- Eletrodo em forma de anel.
- Eletrodos cilíndricos.
- Fonte de alimentação com tensão de saída entre 0Vcc e 20Vcc.
- Multímetro na escala 20Vcc.

- Chave liga-desliga.
- Colher de sopa.
- Sal de cozinha
- Copinho descartável.
- Papel milimetrado.

## Atividade experimental

1. Monte o circuito indicado na **Figura 10.15**. Comece com eletrodos retos.



**Figura 10.15:** Cuba para mapeamento do potencial elétrico. (1) ponteira para tomada de dados. (2) cuba. (3) eletrodos retos. (4) eletrodo em anel. (5) eletrodos cilíndricos. (6) escala.

2. Prepare uma solução salina em um copo descartável juntando aproximadamente 250ml de água, ou então um copo cheio, e duas colheres (das de sopa) de sal.
3. Aguarde a dissolução do sal, ajudando com uma leve agitação.
4. Se ainda for possível observar restos de sal sem dissolver, coe, usando um filtro de papel de café.
5. Coloque esta solução dentro da cuba.
6. Ligue a fonte de alimentação e ajuste para 2V.

Observe que pode haver a formação de gás nos eletrodos. Isto se deve ao processo conhecido como eletrólise, com liberação de oxigênio em um lado e hidrogênio no outro. Este efeito não nos interessa no momento.

7. Queremos determinar o campo elétrico por meio de medidas de diferença de potencial. Mergulhe a ponteira na solução dentro da cuba, entre os eletrodos. O multímetro deve estar na escala de 20Vcc. Observe uma leitura no multímetro.
8. Desloque a ponteira entre os eletrodos e observe que esta diferença de potencial entre a ponteira e um dos eletrodos (aquele que também está conectado ao multímetro) vai de zero, perto do eletrodo negativo, até 2V, perto do positivo.
9. Vamos fixar um valor arbitrário de voltagem, digamos 1V. Desloque a ponteira dentro da cuba e procure pelo valor de 1V no multímetro.
10. Leia as coordenadas do ponto usando a escala no fundo da cuba, anotando na tabela o valor da posição e da incerteza.
11. Movimente novamente a ponteira e obtenha outros pontos em que a diferença de potencial é de 1V. Leia as coordenadas de cada ponto encontrado, sempre com as incertezas associadas a sua leitura. Faça isto com, no mínimo, oito pontos. Anote na tabela seus resultados da seguinte forma:

Tabela 1.1: Tabela de tomada de dados de linhas equipotenciais de 1V.

Ponto	Coordenada x (m)	Coordenada y (m)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

12. Repita o procedimento para o valor de 0,5 V.

Tabela 1.2: Tabela de tomada de dados de linhas eqüipotenciais de 0,5V.

Ponto	Coordenada x (m)	Coordenada y (m)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

13. Repita este experimento colocando no centro da cuba o anel cilíndrico metálico, sem conectá-lo a um potencial. Levante as linhas eqüipotenciais para diferentes posições dentro e fora do anel cilíndrico.
14. Retire o anel cilíndrico da cuba e troque os eletrodos retos pelos cilíndricos. Repita o experimento.
15. Você pode, ainda, montar distintas configurações, tais como um eletrodo reto e outro cilíndrico, e, em todas elas, ver as modificações resultantes da introdução do anel cilíndrico em algum ponto da cuba.
16. Experimente, ainda, tocar o anel cilíndrico em um eletrodo.
17. Divirta-se, mas, depois, limpe e guarde tudo.

## Análise dos dados

Vamos utilizar os dados das tabelas, para traçar as linhas eqüipotenciais e observar as linhas de campo elétrico.

1. Em uma folha de papel milimetrado, coloque os pontos medidos com o potencial de 1V.
2. Una os pontos da primeira com uma linha. O que podemos afirmar sobre esta linha?

3. Coloque no mesmo gráfico os pontos medidos para o potencial de 0,5V e una novamente os pontos.
4. Você pode fazer isto para outros valores de potenciais no multímetro.
5. Observe bem as linhas traçadas no gráfico. Elas são paralelas aos eletrodos?
6. Se estas linhas são linhas eqüipotenciais, qual é a direção do campo elétrico e a sua intensidade? Esboce no mesmo gráfico as linhas de campo elétrico.
7. Nesta cuba, devido às dimensões reduzidas, basicamente não temos profundidade, ou seja, estamos praticamente trabalhando num plano. Se a cuba fosse bem profunda e os eletrodos estivessem somente à metade da profundidade total, que efeitos você visualizaria nas linhas (superfícies neste caso) eqüipotenciais?
8. Com os dados tomados com o anel dentro da cuba, faça um gráfico em papel milimetrado indicando as linhas eqüipotenciais e esboce, no mesmo gráfico, as linhas de campo elétrico.
9. O que ocorre com as linhas de campo nas regiões próximas ao anel, fora dele?
10. Qual é o potencial dentro do anel? Isto é coerente com o que você viu em aula?
11. Trace sempre o gráfico de linhas eqüipotenciais e as linhas de campo para as medidas feitas usando os eletrodos cilíndricos.

## Referências

- ALMEIDA, Maria Antonieta T. de: *Introdução às Ciências Físicas*. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, v.4.
- ALONSO, Marcelo; FINN, Edward J. *Física: um curso universitário*. 2.ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1972. 2v.
- BRUHAT, Georges; GOUDET, G. *Curso de física geral*. 7.ed. São Paulo: Difusão Européia do Livro, 1961. v.2: eletricidade.
- CAVENDISH, Henry. *Electrical researches*. Cambridge: Cambridge University Press, 1879. p. 104-113.
- FRENCH, Anthony Philip. *Newtonian mechanics*. New York: Norton, 1965. (The M.I.T. Introductory Physics Series).
- GRIFFITHS, David J. *Introduction to electrodynamics*. 2.ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1989.
- HALLIDAY, David.; RESNICK, Robert.; WALKER, E Jearl. *Física*. v.3: eletromagnetismo. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. Cap. 22.
- HEERING, Peter. Coulomb's inverse square law, *American Journal of Physics*, v.60, n. 11, p. 998, 1992.
- LORRAIN, Paul; CORSON, Dale R.; LORRAIN, Franco. *Fundamentals of electromagnetic phenomena*. New York: Freeman, 2000.
- MARSDEN, Jerrold. E.; TROMBA, Anthony J.; WEISTEIN, Alan. *Basic multivariable calculus*. New York: Springer-Verlag, 1993.
- NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de Física Básica*. São Paulo: Edgard Blücher, v.:3: eletromagnetismo, 1997.
- PLIMPTON, S. J.; LAWTON, W.E. A very accurate test of coulumb's law of force between charges. *Physical Review*, v. 50, p. 1066, 1936.
- PRINT, John Servern. *Gauss' Law a forgotten tool?* *Phys. Educ.*, v. 35, n. 4, p. 277, July 2000.
- PURCELL, Edward M. *Eletricidad y magnetismo*. Berkeley Physics Course. 2.ed. Barcelona: Editorial Reverse, 1998. v. 2.
- RUECKNER, Wolfgang. Demonstration of charge conservation. *American Journal of Physics*, v. 63, n. 1, p. 90, 1995.

SPIEGEL, Murray R.; LIU, John; ABELLANAS RAPUN, Lorenzo. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España, 2000.

TIPLER, Paul A. *Física para cientistas e engenheiros*. 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000. v.2.

WILLIAMS, E.R.; FALLER, J.E.; HILL, H.A. New experimental test of coulomb's law: a laboratory upper limit on the photon rest mass. *Physics Review Letters*, v. 26, p. 721, 1971.

YOUNG, Hugh D. *et al. Sears e Zamansky Física*. 10.ed. São Paulo: Person Education do Brasil, 2004. v. 3: eletromagnetismo.



ISBN 85-7648-206-1



9 788576 482062



**UENF**  
Universidade Estadual  
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense



SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério  
da Educação

