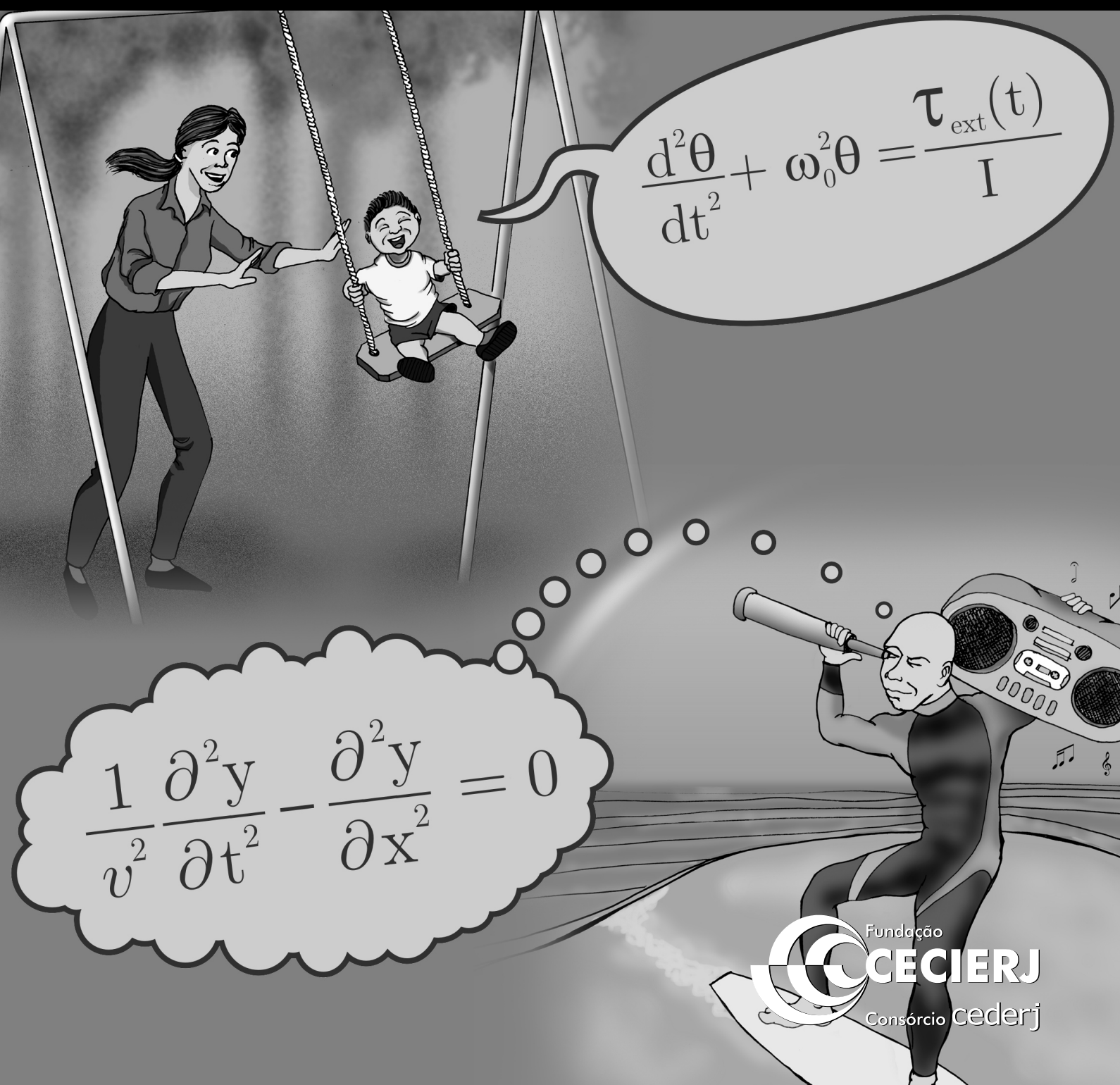


Bernard M. Marechal  
Thereza Cristina L. de Paiva

Física 2B







Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

## Física 2B

Volume 1 - Módulos 1 e 2  
2ª edição

Bernard M. Marechal

Thereza Cristina L. de Paiva



**GOVERNO DO  
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA**



**Ministério  
da Educação**



**Apoio:**



# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001  
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

## Presidente

Masako Oya Masuda

## Vice-presidente

Mirian Crapez

## Coordenação do Curso de Física

Luiz Felipe Canto

## Material Didático

### ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Bernard M. Marechal  
Thereza Cristina L. de Paiva

### COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

### DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Anna Maria Osborne  
Ana Tereza de Andrade

### COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM

Maria Angélica Alves

## Departamento de Produção

### EDITORA

Tereza Queiroz

### COORDENAÇÃO EDITORIAL

Jane Castellani

### REVISÃO TIPOGRÁFICA

Equipe CEDERJ

### COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

### PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas  
Mirelle Nascimento Mota

### ILUSTRAÇÃO

Equipe CEDERJ

### CAPA

Fabio Muniz

### PRODUÇÃO GRÁFICA

Patricia Seabra

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

M323f

Marechal, Bernard M.  
Física 2B. v.1 / Bernard M. Marechal. – 2.ed. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.  
220p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-115-4

1. Mecânica. 2. Oscilações. 3. Movimento harmônico.  
4. Ondas. 5. Análise de Fourier. 6. Efeito Doppler. 7. Sons.  
I. Paiva, Thereza Cristina L. de. II. Título.

CDD: 530.1

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**  
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia**  
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO  
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**  
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Vieiralses

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**  
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitora: Malvina Tania Tuttman



## SUMÁRIO

<b>Módulo 1: Oscilações</b>	<b>7</b>
<b>Aula 1</b> – Oscilações: observações, conceitos e definições	<b>9</b>
<i>Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 2</b> – O Movimento Harmônico Simples (MHS)	<b>17</b>
<i>Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 3</b> – O oscilador harmônico simples como aproximação de osciladores reais	<b>29</b>
<i>Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 4</b> – Movimento harmônico simples e movimento circular uniforme	<b>49</b>
<i>Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 5</b> – Superposição de movimentos harmônicos simples	<b>61</b>
<i>Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 6</b> – O movimento harmônico amortecido	<b>75</b>
<i>Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 7</b> – Oscilações forçadas e ressonância	<b>85</b>
<i>Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 8</b> – Oscilações acopladas	<b>95</b>
<i>Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 9</b> – Aula de exercícios	<b>103</b>
<i>Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Módulo 2: Ondas</b>	<b>107</b>
<b>Aula 10</b> – Ondas em uma dimensão: conceitos e definições	<b>109</b>
<i>Bernard M. Marechal / Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 11</b> – Ondas em uma dimensão: a equação da onda	<b>119</b>
<i>Bernard M. Marechal / Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 12</b> – Ondas em uma dimensão: interferência	<b>133</b>
<i>Bernard M. Marechal / Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 13</b> – Análise de Fourier	<b>159</b>
<i>Bernard M. Marechal / Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 14</b> – O som	<b>167</b>
<i>Bernard M. Marechal / Thereza Cristina L. de Paiva</i>	

<b>Aula 15 – Sons musicais</b>	<b>189</b>
<i>Bernard M. Marechal / Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 16 – Efeito Doppler e ondas de choque</b>	<b>203</b>
<i>Bernard M. Marechal / Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Aula 17 – Aula de exercícios</b>	<b>211</b>
<i>Bernard M. Marechal / Thereza Cristina L. de Paiva</i>	
<b>Referências bibliográficas -</b>	<b>217</b>
<b>Agradecimentos -</b>	<b>219</b>



# Módulo 1 – Oscilações

## Apresentação do módulo

O módulo **Oscilações**, dedicado ao estudo de sistemas oscilantes, é de grande importância, pois oscilações estão presentes sempre, em qualquer lugar e em qualquer escala, macro ou microscópica: o vento faz oscilar árvores ou cabos de linhas de transmissão aéreas, as moscas provocam oscilações incessantes do rabo de um boi pastando, átomos e moléculas vibram e oscilam permanentemente...

O caminho que nos levará do concreto ao abstrato terá como ponto de partida a **observação**: teremos de olhar, ouvir, tocar, e, sempre que possível, serão realizadas experiências qualitativas e, melhor ainda, quantitativas. Em paralelo, conceitos importantes e definições serão introduzidos, o que permitirá entender, caracterizar, medir e finalmente modelar esses sistemas e fenômenos.

Antes de mais nada, é interessante fazer um pequeno exercício de semântica, consultando o dicionário do Aurélio Buarque de Holanda Ferreira. Nele, você poderá encontrar, entre outras, as seguintes definições.

### – Oscilação:

- Fenômeno em que uma grandeza ou um conjunto de grandezas de um sistema varia segundo uma função periódica do tempo.
- Variação alternada; flutuação; mudança.

### – Oscilar:

- Mover-se alternadamente em sentidos opostos.
- Movimentar-se em vai-e-vem.
- Mover-se, tornando a passar (ao menos aproximadamente) pelas mesmas posições.

### – Oscilação forçada:

- A que um sistema oscilante efetua sob a ação de um agente externo que varia periodicamente.

### – Oscilação livre:

- A que é efetuada por um sistema sem a intervenção de agentes externos.

A eficiência da sua aprendizagem dependerá da realização de experimentos, seja na sua casa, seja nos pólos, da resolução de exercícios e de leituras complementares indicadas nas referências bibliográficas. Vídeos didáticos de videotecas ou de programas educativos de televisão serão de grande ajuda. Um caderno para anotações, comentários, resolução de exercícios e dúvidas que você levará ao conhecimento dos professores e/ou tutores, deverá ser seu companheiro ao longo do curso.

Ao longo desta apostila você encontrará referências a vários livros, sugerindo que você vá a algum deles e leia um capítulo, uma seção, faça a revisão de uma parte da matéria, etc...

Para não escrever o nome completo de cada livro todas as vezes que o mesmo é sugerido, nós criamos apelidos. Ao final da apostila, você encontrará a lista completa das referências, com os apelidos em negrito.

Os livros, na verdade, constituem uma série, com volumes que vão do 1 ao 4, dependendo do curso. Durante o módulo, em geral, faremos referência aos volumes 1 e 2, correspondendo aos cursos de Física 1 e 2.

Esses livros podem ser encontrados na biblioteca do pólo!

# Aula 1 – Oscilações: observações, conceitos e definições

## Meta da aula

- Introduzir conceitos fundamentais sobre oscilações.

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Identificar alguns sistemas oscilantes e realizar experiências semi-quantitativas simples, sem necessidade de se deslocar até o pólo.
- Compreender conceitos básicos e definições precisas de grandezas físicas e de suas unidades associadas.

## Introdução

Nessa fase inicial de aprendizagem, não poderemos estudar as oscilações que ocorrem em escala **microscópica**, como por exemplo as de átomos em moléculas. Entretanto, poderemos focalizar nossa atenção em oscilações **mecânicas** de sistemas **macroscópicos**. Embora as características e as leis físicas que governam esses sistemas sejam diferentes, o formalismo matemático que descreve a grandeza que oscila é o mesmo. Antes de observar e de fazer algumas experiências com sistemas oscilantes **reais**, vamos começar pelo mais simples (será ???) e realizar experiências **virtuais** qualitativas.

## Experiências Virtuais (EV)

### EV1 - Oscilações de uma massa presa a uma mola

Feche os olhos, imagine uma pequena esfera de aço pendurada a uma mola presa num suporte. O sistema encontra-se em repouso, o centro da esfera marcando a **posição de equilíbrio** do sistema ( $y = 0$ ). Continue usando sua imaginação e estique a mola, deslocando a esfera para baixo de uma pequena quantidade  $\Delta y$ : uma nova situação de equilíbrio é obtida, o centro da esfera encontrando-se agora na posição  $y_{max} = \Delta y$ . Ao largar a esfera (também mentalmente!), essa começa a mover-se alternadamente em

sentidos opostos em torno da sua posição de equilíbrio, isto é, **oscila** ... até você decidir abrir os olhos e acabar com sua primeira experiência **virtual**. Agora, vamos ver o que você aprendeu!

- A grandeza que oscila é a **posição**  $y(t)$  **do centro de gravidade da esfera**, que é uma função do tempo  $t$ .
- Essa grandeza oscila em torno da sua posição de repouso (ou **equilíbrio**)  $y(0) = 0$ .
- Nas extremidades superior e inferior da oscilação, a velocidade da esfera se anula. Portanto, o módulo dessa velocidade deve passar por um valor máximo em algum ponto entre essas extremidades.
- A repetitividade do movimento de vai-e-vem sugere o conceito de periodicidade: o tempo  **$T$**  necessário para um ciclo completo é chamado **período** da oscilação. A unidade geralmente usada é o **segundo**.
- O inverso  $\frac{1}{T}$  desse período é chamado **frequência**, cuja unidade no Sistema Internacional de Medidas (SI) é o hertz (Hz), em homenagem a Heinrich Hertz (1857-1894), que foi o primeiro a observar experimentalmente ondas eletromagnéticas.

### Exercício 1.1

Descreva seu experimento por meio de figuras e discuta-o com seu tutor.

Vamos fechar os olhos de novo e imaginar outros sistemas oscilantes.

## EV2 - Oscilações do pêndulo de um relógio

Você já deve ter observado o movimento periódico do pêndulo de um relógio antigo. Imagine esse movimento, tentando acertar o valor do seu período. Para isso, meça o tempo necessário à realização de, por exemplo, **30 oscilações imaginárias**: se você for esperto encontrará um resultado da ordem de 30 segundos e, portanto, um período da ordem de 1 segundo !!!

- A novidade é que, agora, a grandeza que varia é o **ângulo**  $\theta$  entre o braço do pêndulo e a vertical.
- A posição de equilíbrio do braço é a direção vertical, o que corresponde ao valor  $\theta = 0$ .

- Você deve se lembrar do caráter simétrico desse movimento: as duas posições, onde a velocidade do braço é nula, são simétricas em relação à vertical e correspondem a ângulos máximos  $\pm\theta_{max}$ . O valor absoluto  $\theta_{max}$  é chamado **amplitude** da oscilação.

### Exercício 1.2

Descreva seu experimento por meio de figuras e discuta-o com seu tutor.

## EV3 - Projeção vertical das oscilações do pêndulo de um relógio

Imagine seu pêndulo oscilando de novo, e agora projete **verticalmente** sua extremidade numa linha horizontal situada abaixo dele no plano da oscilação. O ponto que representa essa extremidade está oscilando. Desenhe essa experiência, em duas ou três dimensões e responda às seguintes perguntas:

- Qual é a grandeza que oscila?
- Qual é o seu ponto de equilíbrio?
- Qual é a amplitude da oscilação?
- Qual é o seu período? É igual a um segundo? Por quê?
- Qual é a sua frequência?

## EV4 - Projeção horizontal das oscilações do pêndulo de um relógio

Projete agora, **horizontalmente**, a extremidade desse mesmo pêndulo numa linha vertical situada, por exemplo, à sua direita no plano de oscilação. Desenhe de novo o que você imaginou e responda às mesmas cinco perguntas da experiência EV3 anterior.

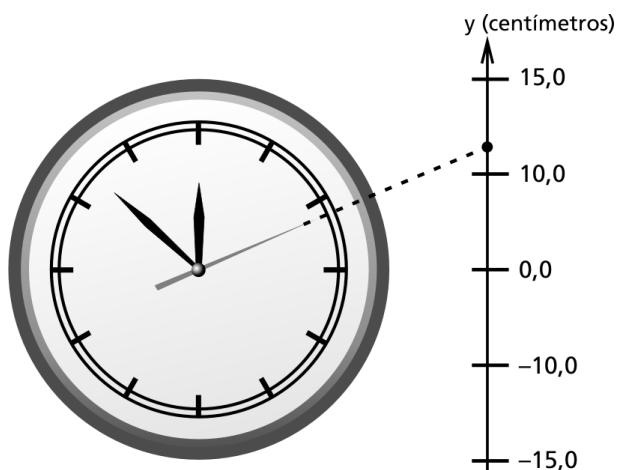
## EV5 - Oscilação da declinação do sol ao meio-dia

A uma dada hora do dia, por exemplo ao meio dia, você observa que a altura aparente do sol em relação ao horizonte, chamada declinação, varia ao longo do ano entre dois valores  $\Theta_{min}$  e  $\Theta_{max}$ . Imagine esse movimento periódico e indique:

- a grandeza que oscila;
- seu ponto de equilíbrio;
- a amplitude da oscilação;
- seu período (*expresso em meses!*).

### EV6 - Projeção radial do ponteiro dos segundos de um relógio

É freqüente encontrar um relógio de ponteiros numa sala ou numa cozinha: observe o movimento do ponteiro dos segundos e imagine que esse ponteiro emite um feixe de luz bem fino. Se o feixe luminoso incidir sobre um plano vertical perpendicular ao plano do relógio, o ponto luminoso, assim criado, oscilará ao longo de uma linha vertical de dimensão infinita (veja a Figura 1.1).



**Figura 1.1:** Prolongamento do ponteiro dos segundos de um relógio em um plano vertical, perpendicular ao plano do relógio (corte no plano do relógio).

E agora responda às questões a seguir.

- Qual é a grandeza que oscila?
- Quando essa grandeza está no seu “ponto de equilíbrio”, ou seja, é nula, quantos segundos indica o relógio?
- Qual é a amplitude da oscilação?
- Qual é o seu período?
- Qual é a sua frequência?

- Sabendo que o ângulo entre a vertical e o ponteiro dos segundos é dado por  $\alpha = 2\pi t/60$ , onde  $t$  é o tempo em **segundos**, escreva a equação do movimento do ponto luminoso em função do tempo.
- Esboce um gráfico dessa função.

Antes de passar do universo **virtual** onde (quase!) tudo é permitido, para o mundo **real**, onde modelos devem explicar e prever (por que não?) fatos experimentais, é importante compreender bem os conceitos básicos relacionados com os sistemas oscilantes que você acaba de estudar.

Mas uma experiência virtual é pura imaginação e, para progredir, você vai precisar realizar experiências **de verdade**.

## Experiências caseiras (EC)

### EC1 - Oscilações de uma massa presa a uma mola

Procure na sua casa uma pequena mola, **bem mole**, ou um elástico suficientemente comprido (aproximadamente de 50 cm), amarre algum objeto pequeno, porém pesado (um pedaço de latão, ou melhor, um chumbo de pescador com ganchinho), a uma extremidade e pendure o conjunto em algum lugar (numa maçaneta por exemplo, para não furar nem a parede, nem o teto!).

Realize agora, **de verdade**, a primeira experiência **virtual EV1**, tentando conseguir oscilações bem lentas para facilitar suas observações e suas medidas.

- Determine o ponto de repouso e as posições  $y_{max}$  e  $y_{min}$  das extremidades superior e inferior da oscilação.
- Essas posições são simétricas em relação ao ponto de repouso?
- Qual é, então, a amplitude da oscilação?
- Meça 10 vezes a duração  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  de 5 oscilações.
- Cada medida permite calcular o período  $T_i$  do movimento:

$$T_i = \frac{1}{5} \tau_i$$

- Calcule, então, o valor médio  $\overline{T}$  do período:

$$\overline{T} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} T_i$$

- Determine a frequência média

$$\overline{\nu} = \frac{1}{\overline{T}}$$

- Após consulta à apostila “**Tópicos de tratamento de dados experimentais**”, mostre que as incertezas (desvios padrões)  $\sigma$  sobre o conjunto de medidas  $T_i$  e  $\sigma_{\overline{T}}$  sobre o valor médio  $\overline{T}$  do período, são, respectivamente,

$$\sigma = \frac{1}{5} \sigma_{\tau_i} \quad \text{e} \quad \sigma_{\overline{T}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \sigma$$

onde  $\sigma_{\tau_i} \equiv \sigma_{\tau}$  é o desvio padrão experimental sobre a duração de 5 oscilações.

- Mostre que a incerteza  $\sigma_{\overline{\nu}}$  sobre o valor médio da frequência  $\overline{\nu}$  é

$$\sigma_{\overline{\nu}} = \frac{\sigma_{\overline{T}}}{\overline{T}^2}$$

- Descreva a experiência e apresente seus resultados, tentando mostrar o que você aprendeu.

## EC2 - Oscilações de um pêndulo simples

Nem todo mundo tem um relógio antigo em casa, além disso, o pêndulo desse tipo de relógio é um sistema mecânico bastante complicado (corpo rígido), e seu movimento será estudado mais tarde. Por isso, a sua segunda experiência caseira será dedicada ao estudo de um pêndulo **simples**, constituído por uma massa muito pequena, podendo ser considerada como um **ponto material**, presa a um fio inextensível, idealmente **sem massa**. Com um barbante ou um fio de náilon de 1 metro de comprimento e o pequeno objeto da experiência EC1 anterior, estude as oscilações desse **pêndulo simples**. Para isso, afaste o pêndulo da sua posição de repouso de um ângulo  $\theta_0$  pequeno (menor que 20 graus) e deixe-o oscilar livremente.



- Meça a amplitude  $\theta_{max}$  das oscilações e compare-a com  $\theta_0$ .
- Meça 10 vezes o tempo  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 10$  necessário para observar 5 oscilações.
- Cada medida permite calcular o período  $T_i$  do movimento:

$$T_i = \frac{\tau_i}{5}$$

- Calcule, então, o valor médio  $\overline{T}$  do período:

$$\overline{T} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} T_i$$

- Calcule as incertezas (desvios padrões)  $\sigma$  sobre as medidas  $T_i$  e  $\sigma_{\overline{T}}$  sobre o valor médio  $\overline{T}$  do período.
- Refaça toda sua experiência com um barbante de 50 cm de comprimento.
- Descreva a experiência e apresente seus resultados, tentando de novo mostrar o que você aprendeu.

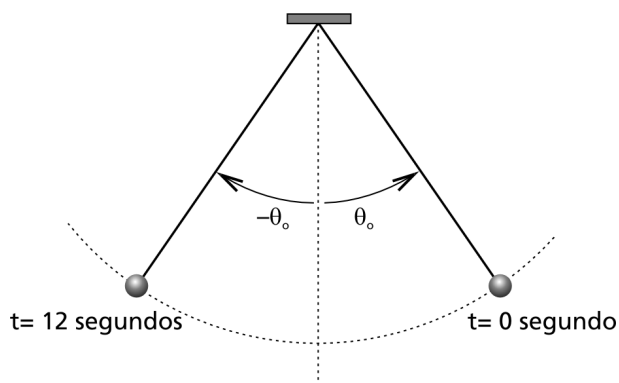
## Resumo

Nesta aula, você deve ter aprendido, na teoria e na prática, alguns conceitos importantes como **período**, **frequência**, **amplitude** e **posição de equilíbrio**.

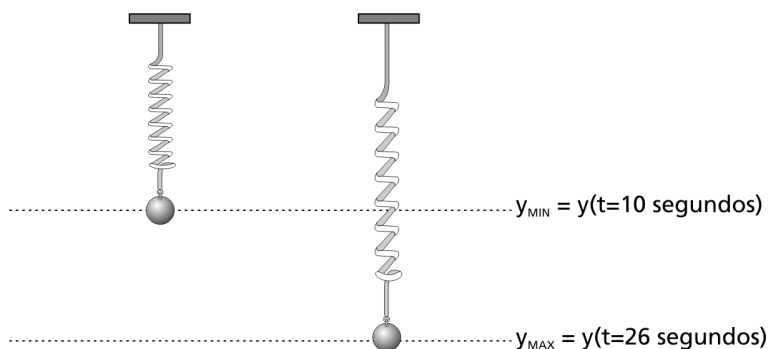
## Exercícios complementares

Vamos agora verificar se as experiências **virtuais** e **caseiras** propostas foram úteis. Para isso, respire fundo e realize as tarefas a seguir.

1. Sugira e descreva outros sistemas oscilantes.
2. Proponha a melhor definição, na sua opinião, de um sistema oscilante.
3. Examine com atenção a figura a seguir que permite ilustrar vários conceitos como posição de repouso (ou de equilíbrio), amplitude e período.
  - Considerando que o pêndulo simples foi largado no instante  $t = 0$ , da posição  $\theta_0$ , depois de quanto tempo ele passa pela sua posição de equilíbrio?



- Qual é a amplitude da oscilação?
  - Qual é o seu período?
4. A figura seguinte mostra as duas posições onde a velocidade da massa presa à mola é nula.



- Qual é a amplitude da oscilação?
- Qual é o seu período?
- Onde está a posição de equilíbrio da massa?

### Auto-avaliação

Com certeza você conseguiu responder a todas as perguntas! Caso contrário, volte ao início desta aula e, armado de paciência e de perseverança, percorra o mesmo caminho que o levará de novo até aqui. Lembre-se: tutores e professores estão à sua disposição para ajudá-lo. Não se acanhe e... Até a próxima aula!

## Aula 2 – O Movimento Harmônico Simples (MHS)

### Meta da aula

- Introduzir o Movimento Harmônico Simples.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Identificar o Movimento Harmônico Simples.
- Definir o MHS.
- Montar a equação que o rege e encontrar a sua solução.
- Entender novos conceitos como: **força restauradora**, **frequência angular** e **fase**.
- Exemplificar a transformação entre energias cinética e potencial.

### Introdução

Até agora, os sistemas oscilantes foram considerados somente de um ponto de vista **cinemático**, sem nos preocuparmos com o aspecto **dinâmico** do problema. Vamos, então, preencher essa lacuna e descobrir por que um sistema físico está oscilando. A resposta é bastante natural: há oscilação quando o sistema está submetido a uma **força** ou a um **torque restaurador** que provoca seu retorno à posição de repouso. As experiências que você realizou durante a Aula 1 devem ter conduzido você a prever essa explicação!

Antes de prosseguir, devemos entender o sentido das palavras **harmônico** e **simples**. Em geral, as vibrações de sistemas, como átomos e moléculas, são muito complicadas do ponto de vista físico, portanto, matemático. Entretanto, esses movimentos podem ser descritos e analisados, admitindo que eles resultam da **superposição** de oscilações **harmônicas** representadas por funções **seno** ou **cosseno**. A força restauradora responsável pelas oscilações de uma partícula é dada pela **Lei de Hooke**,

$$F(x) = -kx \quad (2.1)$$

O físico inglês Robert Hooke (1635-1703) propôs a Lei de Hooke em 1660.

onde  $k$  é a constante de Hooke e  $x$  o deslocamento da partícula, em relação a sua posição de repouso. Esta força caracteriza um **oscilador harmônico simples** e o movimento da partícula é chamado **Movimento Harmônico Simples (MHS)**. Um exemplo desse movimento é o da pequena massa  $M$  suspensa por uma mola (lembre-se da experiência caseira EC1 da Aula 1!). Nesse caso,  $k$  é a dureza da mola.

Essa força restauradora é **conservativa**, pois ela deriva de uma energia potencial  $U(x)$ :

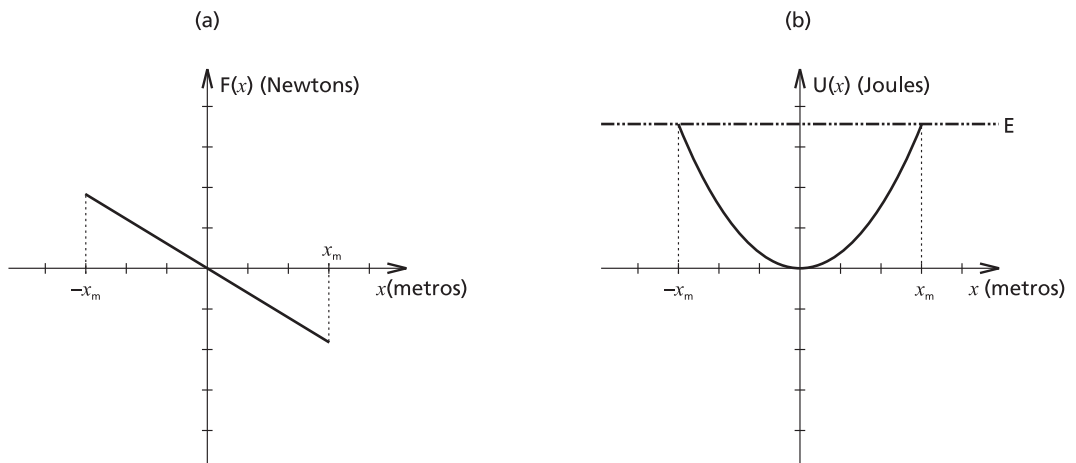
$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (2.2)$$

### Exercício 2.1

Verifique que a energia potencial é dada por:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.3)$$

As relações linear **força-posição** e quadrática **energia potencial-posição** estão ilustradas na Figura 2.1 a seguir.



**Figura 2.1:** (a) Força restauradora  $F(x)$  e (b) energia potencial  $U(x)$  como função da posição da massa  $M$  no MHS. Nas posições  $\pm x_m$ , onde a energia potencial  $U(\pm x_m)$  é igual à energia total  $E$ , a energia cinética e a velocidade da massa  $M$  são nulas.

## Equação do MHS

Temos a força! Como você, com certeza, não esqueceu a segunda Lei de Newton, podemos agora montar a equação do MHS,

$$-kx = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (2.4)$$

onde  $M$  é a massa da partícula e  $\frac{d^2x}{dt^2}$  sua aceleração.

Essa equação pode ser reescrita como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{M}x = 0 \quad (2.5)$$

## Solução da equação do MHS

Observando a primeira forma da equação do MHS (Equação 2.4), você nota que a solução  $x(t)$  é proporcional à sua derivada segunda. Você também deve lembrar (e verificar, agora, a título de exercício!) que as funções **seno** e **coseno** possuem essa propriedade. Portanto, podemos esperar que uma função do tipo

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.6)$$

seja a solução geral da equação do MHS, onde  $x_m$  é a **amplitude**,  $\omega$  é a **frequência angular** e  $\varphi$  a **fase**. A dimensão da frequência angular é a de inverso de tempo, e a sua unidade é o **rad/s**.

### Exercício 2.2

Derive duas vezes a função  $x(t)$  (Equação 2.6) em relação ao tempo  $t$  e, usando a equação do MHS, mostre que

$$\omega^2 = \frac{k}{M} \quad (2.7)$$

### Exercício 2.3

Se a função exponencial real é proporcional à sua derivada segunda, por que ela não pode ser solução da equação do MHS?

## Exercício 2.4

Mostre que

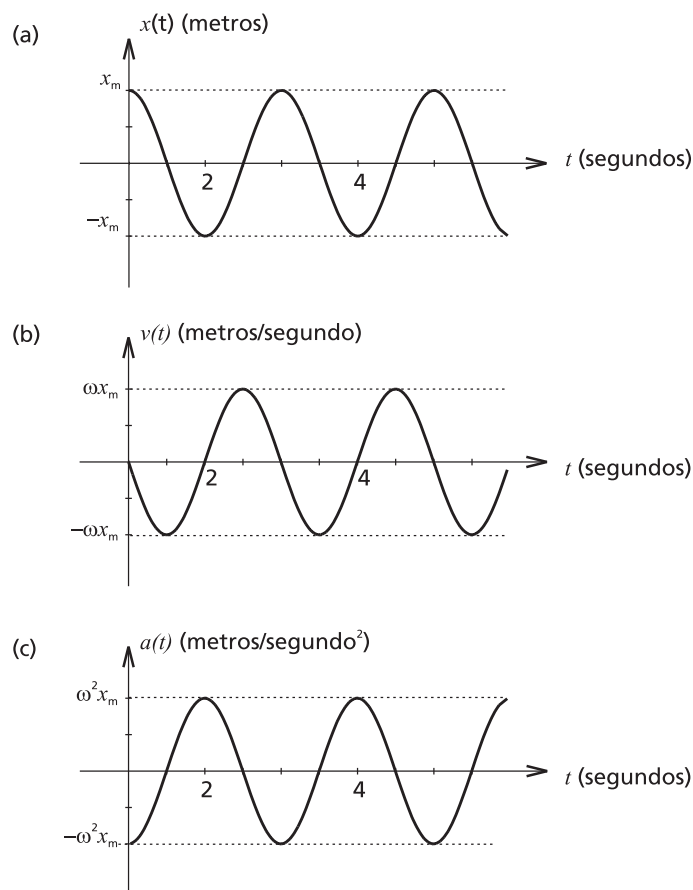
$$x(t) = x\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) \quad (2.8)$$

o que prova que o período do MHS é  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

Você acaba de descobrir, então, a relação entre período, massa e constante de Hooke:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \quad (2.9)$$

A dependência temporal da posição  $x(t)$ , da velocidade  $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  e da aceleração  $a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$  está ilustrada na Figura 2.2, a seguir. Por simplicidade, a fase foi considerada nula nessa figura.



**Figura 2.2:** (a) Posição, (b) velocidade e (c) aceleração como função do tempo para o MHS.

## Exercício 2.5

Examine cuidadosamente a Figura 2.2 e responda às seguintes perguntas:

- Qual é a velocidade na posição de repouso da massa  $M$ ?
- Qual é a aceleração na posição de repouso da massa  $M$ ?
- Qual é a velocidade nos pontos de deslocamento máximo?
- Qual é a aceleração nos pontos de deslocamento máximo?

## Exercício 2.6

A partir da Lei de Hooke, mostre que a unidade da constante  $k$  é o  $N/m$  (Newton/metro).

## Exercício 2.7

Calcule o período de oscilação de uma massa  $m = 1,18 \text{ kg}$  presa a uma mola de constante  $k = 64 \text{ N/m}$ .

## A Energia e o MHS

Vamos ser otimistas e supor que nosso sistema oscilante não dissipa energia, ou, com outras palavras, que o sistema não está submetido a forças dissipativas, como por exemplo, o atrito. Neste caso ideal, a energia **total**  $E$  do sistema permanece constante e ela é a soma de uma energia **cinética**  $K$  e de uma energia **potencial**  $U$ .

Agora pense, de novo, no seu sistema oscilante. Nos extremos das oscilações, a velocidade é nula e, conseqüentemente, sua energia cinética  $K$

também. No ponto de equilíbrio, onde  $x = 0$ , é a vez da energia potencial  $U$  se anular. Em qualquer outro ponto, o sistema possui tanto energia cinética quanto energia potencial e podemos dizer que, ao oscilar, há troca permanente **interna** de energia cinética e potencial. Vamos ver que essas energias também oscilam, embora com um período diferente! De fato, se o deslocamento da massa é dado por

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.10)$$

então a velocidade é

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.11)$$

### Exercício 2.8

Mostre que a aceleração é dada por

$$a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.12)$$

Logo, temos para as energias cinética e potencial, respectivamente:

$$K(t) = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M \omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (2.13)$$

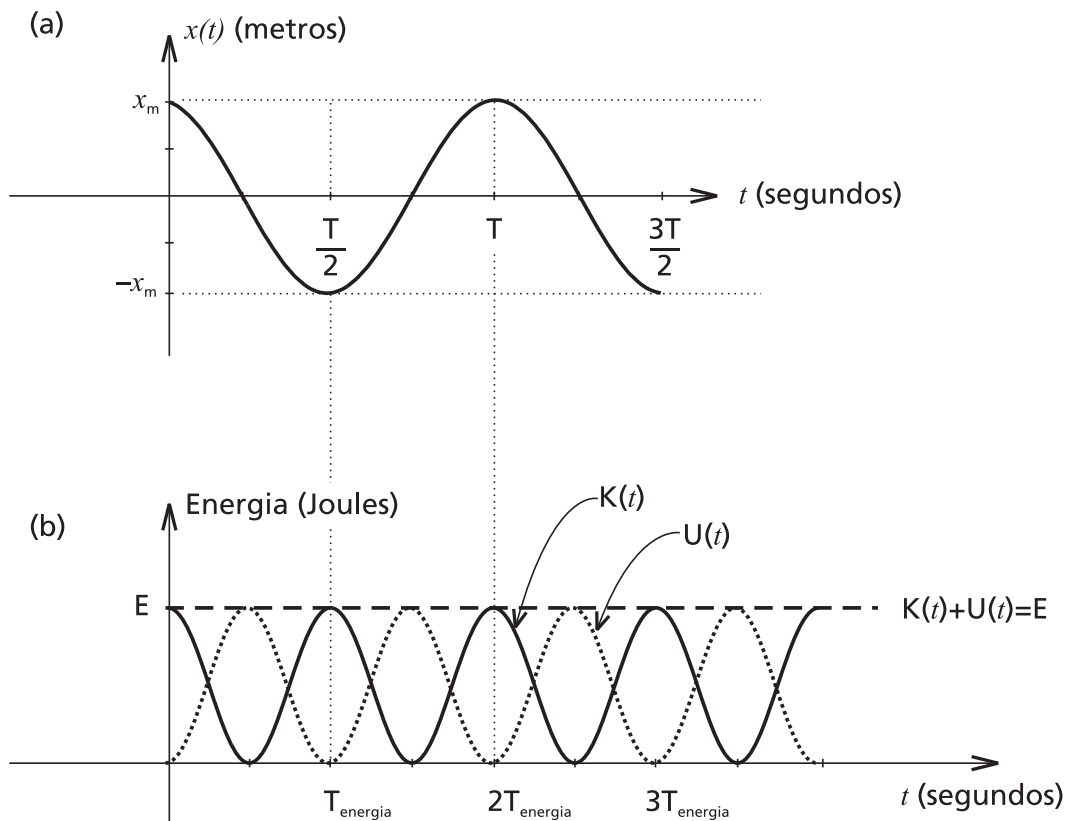
$$U(t) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (2.14)$$

Agora, se você não se esqueceu do que já demonstrou num exercício anterior, que  $\omega^2 = \frac{k}{M}$ , você deve provar, para se exercitar, que:

$$E = \frac{1}{2} k x_m^2 \quad (2.15)$$

Na Figura 2.3 aparece a dependência temporal do deslocamento e das energias cinética, potencial e total do nosso oscilador harmônico simples. Fica evidente que o período de oscilação  $T_{energia}$  das energias cinética e potencial é a metade do período  $T$  do MHS.





**Figura 2.3:** (a) Posição  $x(t)$ , (b) energia cinética  $K(t)$ , energia potencial  $U(t)$  e energia total  $E(t)$  como função do tempo.

### Exercício 2.9

Lembrando um pouco de trigonometria,

$$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x \quad (2.16)$$

mostre que você é capaz de confirmar matematicamente o que você observou na Figura 2.3, ou seja,

$$T_{\text{energia}} = \frac{T}{2} \quad (2.17)$$

### Exercício 2.10

Mostre que

$$v(t) = \pm \sqrt{\frac{k}{M}(x_m^2 - x^2)} \quad (2.18)$$

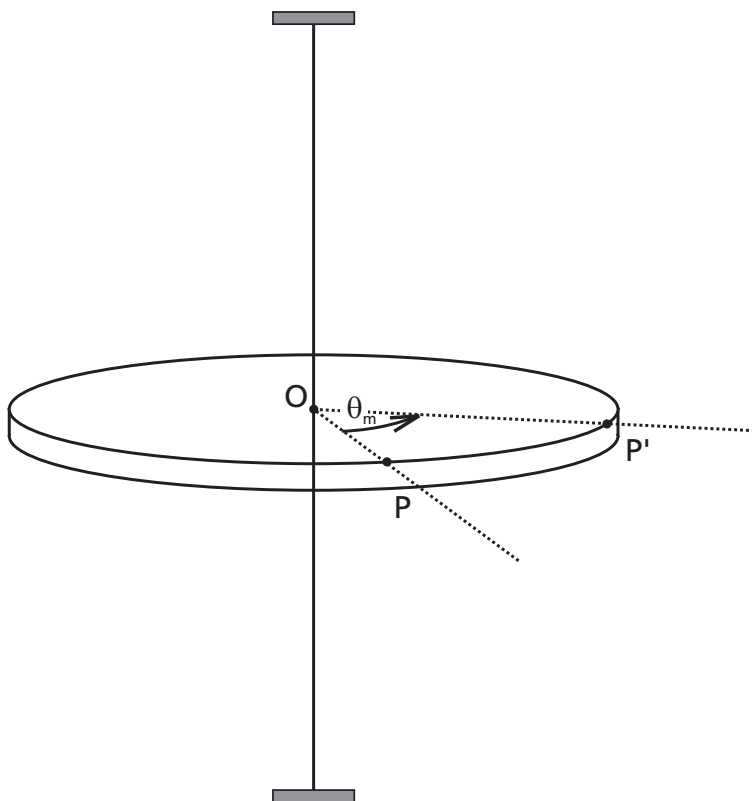
## Exercício 2.11

Mostre que os valores médios da energia cinética e potencial satisfazem

$$\overline{K}(t) = \overline{U}(t) = \frac{1}{2}E \quad (2.19)$$

## O Pêndulo de Torção

Nem sempre a variável **oscilante** é uma posição  $x(t)$ . Você vai ver, agora, que as oscilações do pêndulo de torção ilustrado na Figura 2.4 são descritas pela equação do MHS, na qual a **grandeza que oscila** é um ângulo  $\theta(t)$ . Uma outra novidade digna de atenção é que, para obter essa equação, usaremos a forma angular da segunda lei de Newton, pois a **causa** da oscilação não é mais uma força, e sim um **torque**.



**Figura 2.4:** Pêndulo de torção oscilando em torno de um eixo vertical.

O pêndulo de torção que estudaremos compõe-se de um disco rígido e homogêneo cujo centro **O** está preso a um fio vertical, por exemplo de aço,

muito bem esticado e cujas extremidades estão fixas. O raio **OP** indica a posição de repouso do pêndulo. Se você girar delicadamente o disco de um ângulo  $\theta_m$ , até que o raio **OP** esteja na direção **OP'**, o fio de aço, ao se torcer, vai exercer um **torque restaurador**  $\tau$  proporcional ao deslocamento angular, de acordo com a lei de Hooke,

$$\tau = -\kappa\theta \quad (2.20)$$

onde  $\kappa$  é a constante de torção que depende do fio.

Ao largar o disco, este vai começar a oscilar, isto sendo um fato experimental. Agora vamos entender **matematicamente** esse fato, aplicando ao sistema a segunda lei de Newton,

$$\tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (2.21)$$

onde  $\tau$  é o torque aplicado,  $I$  o momento de inércia do sistema, que, no nosso caso, é calculado relativamente ao eixo de simetria vertical representado pelo fio de aço, e  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  a aceleração angular desse sistema.

Combinando as lei de Hooke e de Newton, chega-se imediatamente à equação do movimento

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0 \quad (2.22)$$

cujas solução pode ser escrita como

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.23)$$

A fase  $\varphi$  depende das condições iniciais e a frequência angular  $\omega$  é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}} \quad (2.24)$$

O período  $T$  é, portanto:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad (2.25)$$

### Exercício 2.12

Relembrando o que você aprendeu sobre o o MHS e os exercícios anteriores, demonstre os dois últimos resultados.

Veja o Hallyday página 29

O físico inglês Henry Cavendish foi o primeiro a determinar experimentalmente em 1798, o valor da constante gravitacional  $G$ , usando um arranjo experimental que era de fato um pêndulo de torção.

Aparelhos de medidas elétricas, como o galvanômetro de quadro móvel, usam o princípio do pêndulo de torção. E para ficar mais perto do seu dia-a-dia, tente abrir um relógio mecânico (sabendo que é uma tarefa difícil achar esse tipo de relógio na era do **digital!**): você notará a presença de uma mola espiral que aplica um torque restaurador ao volante, fazendo o papel do nosso fio de aço.

## Resumo

Nesta aula você foi apresentado ao movimento harmônico simples. Partindo da Lei de Hooke e da segunda lei de Newton, a equação de movimento foi montada e então uma solução para esta equação foi proposta. Você também estudou a transformação de energia cinética em potencial (e vice-versa) neste tipo de movimento.

## Exercícios complementares

Você acaba de percorrer a segunda etapa da sua primeira viagem **do concreto ao abstrato**, entendendo porque e sob quais condições um sistema mecânico está oscilando. Pois bem, vamos ver, agora, se você sabe **oscilar sem vacilar**, respondendo às perguntas que seguem.

1. Qual é a unidade de frequência angular?
2. A dinâmica do MHS está ligada ao conceito de frequência ou ao de fase? Por quê?
3. Sabendo calcular o momento de inércia de um pêndulo de torção e medindo seu período de oscilação, você saberia determinar a constante de torção? Explique!
4. Supondo que a incerteza associada ao momento de inércia calculado seja nula, mostre que a incerteza  $\sigma_\kappa$  associada à constante de torção  $\kappa$  escreve-se:

$$\sigma_\kappa = 8\pi^2 I \frac{1}{T^3} \sigma_T$$

onde  $\sigma_T$  é a incerteza experimental sobre o período  $T$ .

## Auto-avaliação

O que você achou desta aula? Gostou? Se você entendeu bem os pontos que foram abordados durante a aula, deve ter conseguido responder, sem pestanejar, às questões acima. Se não conseguiu, não se assuste: tenha paciência e volte ao princípio da aula, lembrando sempre que os tutores e professores estão à sua disposição.



## Aula 3 – O oscilador harmônico simples como aproximação de osciladores reais

### Meta da aula

- Estudar osciladores reais.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Reconhecer osciladores **reais** e entender como, em certas circunstâncias, eles podem ser considerados osciladores harmônicos simples.
- Conhecer o **pêndulo simples** e o **pêndulo físico**.

### Introdução

Nem tudo na vida é perfeito e, em geral, osciladores **reais** não são harmônicos simples. A equação do movimento e sua solução são mais complexas que as do MHS. Dois casos que você estudará fazendo experiências no pólo merecem uma atenção especial: o pêndulo simples cujo movimento se torna harmônico simples no limite de pequenas oscilações e o pêndulo físico que de fato define qualquer pêndulo **real** e que também oscila com um MHS no limite de pequenas oscilações. Mas, cuidado, para entender bem o funcionamento de um pêndulo físico, você deverá revisar o início de seu curso de mecânica.

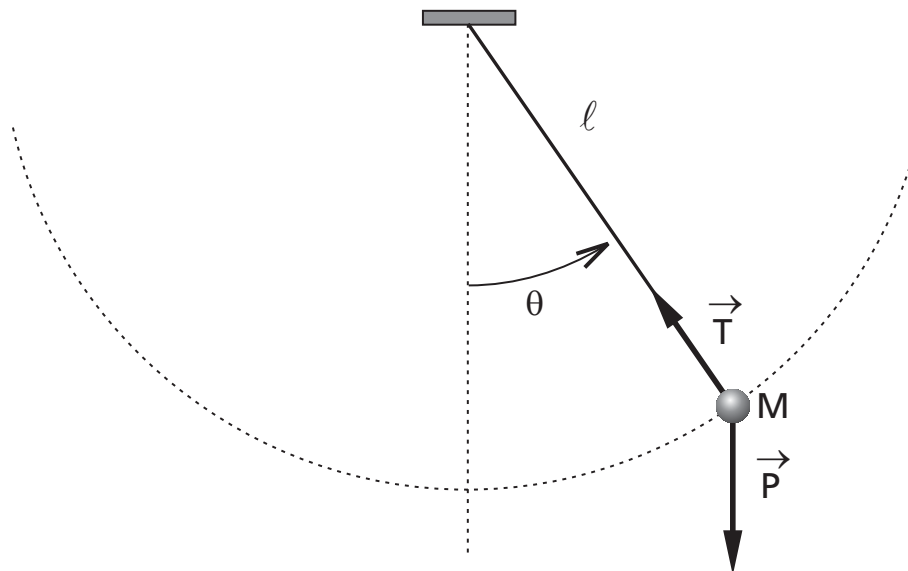
Um conselho de amigo: revise sua matéria sobre o corpo rígido e a inércia rotacional!!!

### O pêndulo simples

A Figura 3.1 define claramente o que entendemos por pêndulo simples: trata-se de uma massa  $M$  supostamente puntual suspensa a um fio inextensível, de massa nula, comprimento  $\ell$  e cuja outra extremidade encontra-se presa a um suporte. As forças que atuam sobre a massa são a força gravitacional  $\vec{P} = M\vec{g}$  e a tensão do fio  $\vec{T}$ , como mostra a Figura 3.1. De fato, a massa  $M$  está submetida a um torque restaurador, em relação ao eixo de rotação do pêndulo

$$\vec{\tau} = \vec{\ell} \times M\vec{g} \quad (3.1)$$

no qual  $\vec{\ell}$  é o vetor posição da massa no seu plano vertical de oscilação, tomando como origem o ponto no qual o fio está preso ao suporte.



**Figura 3.1:** Pêndulo simples

### Exercício 3.1

Mostre que o módulo do torque é dado por

$$\tau = -Mg\ell \sin\theta \quad (3.2)$$

Utilizando de novo a forma angular da segunda lei de Newton,  $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$ , onde  $\vec{\alpha}$  é a aceleração angular, temos:

$$-Mg\ell \sin\theta = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3.3)$$

Mas você deve se lembrar de que o momento de inércia da massa puntual  $M$  em relação ao eixo de rotação do pêndulo é

$$I = M\ell^2 \quad (3.4)$$

Portanto,

$$-Mg\ell \sin\theta = M\ell^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3.5)$$



que podemos reescrever como

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0 \quad (3.6)$$

Você pode notar que, apesar de o pêndulo ser simples, seu movimento não é harmônico simples, devido à presença do termo  $\sin\theta$  na equação!!! A solução dessa equação é longe de ser trivial, mas, para oscilações de pequena amplitude, podemos considerar que

$$\sin\theta \simeq \theta \quad (3.7)$$

A equação do movimento volta a ser aquela que conhecemos bem, ou seja, a equação do MHS

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0 \quad (3.8)$$

cujas soluções são

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.9)$$

com frequência angular  $\omega$  tal que

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell} \quad (3.10)$$

O período de oscilação desse pêndulo simples é, então,

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (3.11)$$

Esse **pêndulo simples** é surpreendente, pois seu período de oscilação não depende nem da massa  $M$  que oscila, nem da amplitude  $\theta_m$  do movimento! Este último fato é chamado **isocronismo das pequenas oscilações**. Um pouco de paciência, pois você vai poder observar tudo isso **experimentalmente** durante sua primeira prática no pólo. Mas antes, para os que gostam de matemática, vamos ver como encontrar o período  $T(\theta_m)$  quando as oscilações não são mais consideradas como pequenas, isto é, quando não podemos fazer a aproximação  $\sin\theta \simeq \theta$ .

## Correção de amplitude sobre o período $T_0$

Sejam  $T(\theta_m)$  e  $T_0$  os períodos para oscilações **não tão pequenas e pequenas**, respectivamente.  $T_0$  é o limite de  $T(\theta_m)$  quando a amplitude  $\theta_m$

tende a zero. Podemos, então, expandir em série de MacLaurin a função  $T(\theta_m)$  em torno de  $\theta = 0$ :

$$T(\theta_m) = T_0 + \theta_m T'(0) + \frac{\theta_m^2}{2} T''(0) + \dots \quad (3.12)$$

onde  $T'(0)$  e  $T''(0)$  são, respectivamente, a primeira e a segunda derivada de  $T(\theta_m)$ , calculadas para  $\theta_m = 0$ :

$$T'(0) = \left. \frac{dT(\theta_m)}{d\theta_m} \right|_{\theta_m=0} \quad (3.13)$$

$$T''(0) = \left. \frac{d^2 T(\theta_m)}{d\theta_m^2} \right|_{\theta_m=0} \quad (3.14)$$

Por simetria,

$$T(\theta_m) = T(-\theta_m) \quad (3.15)$$

portanto,

$$\theta_m T'(0) = 0 \quad (3.16)$$

o que também ocorre para os termos **ímpares** da série. Desprezando os termos de ordem **par** superiores,

$$T(\theta_m) \simeq T_0(1 + A\theta_m^2) \quad (3.17)$$

onde

$$A = \frac{1}{2} \frac{T''(0)}{T_0} \quad (3.18)$$

Você se lembra do **teorema do trabalho-energia**? Vamos aplicá-lo ao nosso pêndulo: o trabalho da força da gravidade entre as posições  $\theta = \theta_m$  e  $\theta$  é igual à variação de energia cinética de rotação da massa  $M$  entre essas duas posições, ou seja, lembrando que a energia cinética é nula na posição  $\theta_m$ :

$$Mgl[\cos(\theta) - \cos(\theta_m)] = \frac{I}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (3.19)$$

O momento de inércia da massa pontual  $M$  é  $I = M\ell^2$ . Portanto, a última equação escreve-se:

$$\cos(\theta) - \cos(\theta_m) = \frac{1}{2} \frac{\ell}{g} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (3.20)$$

ou, lembrando que

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (3.21)$$

e usando a relação trigonométrica

$$\cos(x) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3.22)$$

$$dt = \frac{T_0 d\theta}{4\pi \sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \quad (3.23)$$

### Exercício 3.2

Arme-se de coragem e de calma e deduza o resultado anterior.

Vamos agora escrever que o período  $T(\theta_m)$  é igual a 4 vezes o tempo que a massa  $M$  precisa para ir da sua posição de equilíbrio  $\theta = 0$  até a posição extrema  $\theta = \theta_m$ :

$$T(\theta_m) = 4 \int_{\theta=0}^{\theta=\theta_m} dt \quad (3.24)$$

ou seja,

$$T(\theta_m) = \frac{1}{\pi} T_0 \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} \quad (3.25)$$

Para continuar, temos de mudar de variável de integração:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_m}{2}\right) \operatorname{sen}(\psi) \quad (3.26)$$

o que conduz a:

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_m}{2}\right) \cos(\psi) d\psi \quad (3.27)$$

### Exercício 3.3

Usando  $x = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_m}{2}\right)$ , mostre que:

$$T(\theta_m) = \frac{2}{\pi} T_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - x^2 \operatorname{sen}^2(\psi)}} \quad (3.28)$$

Expandindo em série o integrando, o que equivale a supor que  $x$  é suficientemente pequeno, temos:

$$(1 - x^2 \operatorname{sen}^2 \psi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 \operatorname{sen}^2 \psi + \frac{3}{8} x^4 \operatorname{sen}^4 \psi + \dots \quad (3.29)$$

Estamos chegando agora no fim da linha. Só falta resolver integrais bem conhecidas!

$$T(\theta_m) = \frac{2}{\pi} T_0 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi + \frac{1}{2} x^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \psi d\psi + \frac{3}{8} x^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \psi d\psi + \dots \right\} \quad (3.30)$$

E aqui está o nosso resultado!

$$T(\theta_m) = \frac{2}{\pi} T_0 \left\{ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} x^2 \frac{\pi}{4} + \frac{3}{8} x^4 \frac{3\pi}{16} + \dots \right\} \quad (3.31)$$

#### Exercício 3.4

Mais um pouco de matemática! Encontre a expressão acima, mostrando que:

$$\int \sin^2 \psi d\psi = \frac{1}{2} \psi - \frac{1}{4} \sin(2\psi) \quad (3.32)$$

$$\int \sin^4 \psi d\psi = \frac{3}{8} \psi - \frac{1}{4} \sin(2\psi) + \frac{1}{32} \sin(4\psi) \quad (3.33)$$

Não fique angustiado, pois você consegue calcular essas integrais facilmente, transformando as potências de  $\sin \psi$  em polinômios contendo cosseno de múltiplos de  $\psi$ . Você sabe fazer isso? Se não, veja a seguir!

$$\sin^2 \psi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\psi) \quad (3.34)$$

$$\sin^4 \psi = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos 2\psi + \cos 4\psi) \quad (3.35)$$

$T(\theta_m)$  pode finalmente ser escrito como:

$$T(\theta_m) = T_0 \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \left( \frac{\theta_m}{2} \right) + \frac{9}{64} \sin^4 \left( \frac{\theta_m}{2} \right) + \dots \right) \quad (3.36)$$

#### Exercício 3.5

Vamos agora passar da álgebra à aritmética e à física. Para isso, calcule o erro relativo

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T(\theta_m) - T_0}{T_0} \quad (3.37)$$

quando a amplitude da oscilação do pêndulo simples é  $\theta_m = 30^\circ$ .

Agora, se for possível, seria muito conveniente pegar o caminho do seu pólo para (surpresa!) medir a aceleração da gravidade  $g$  usando um pêndulo simples. Se você for habilidoso, cuidadoso e paciente, vai ficar surpreso com a exatidão (no sentido da linguagem sobre obtenção e tratamento de dados experimentais) do seu resultado.

Muito bem, se você já chegou ao pólo, vamos começar a experiência! Se não, continue estudando com a ajuda deste texto e vá até o pólo o mais cedo possível: sua aprendizagem agradecerá!

## Experiência no Pólo (EP)

### EP1- Determinação da aceleração da gravidade

Hooke propôs que se medisse  $g$  com um pêndulo em 1666.

Você deve estar agora na frente de um **kit de oscilações** com o qual você vai medir a aceleração da gravidade. Como? Simplesmente usando um **pêndulo simples**! Antes de mais nada, você tem de ter certeza que o seu pêndulo é realmente **simples**, fazendo-o oscilar com amplitude crescente até observar que o período começa a depender significativamente dessa amplitude. Escolha um pêndulo de comprimento  $\ell$  da ordem de 1 metro.

Para obter a amplitude angular  $\theta_m$ , basta medir o comprimento  $\ell$  e a distância  $d$  da extremidade do pêndulo à vertical que passa pelo ponto de sustentação, pois,

$$\theta_m = \arcsen\left(\frac{d}{\ell}\right) \quad (3.38)$$

Você pode também escolher alguns (8 por exemplo) valores de  $\theta_m$  entre 5 e 60 graus e calcular as distâncias  $d$  correspondentes que determinarão as posições de largada do pêndulo.

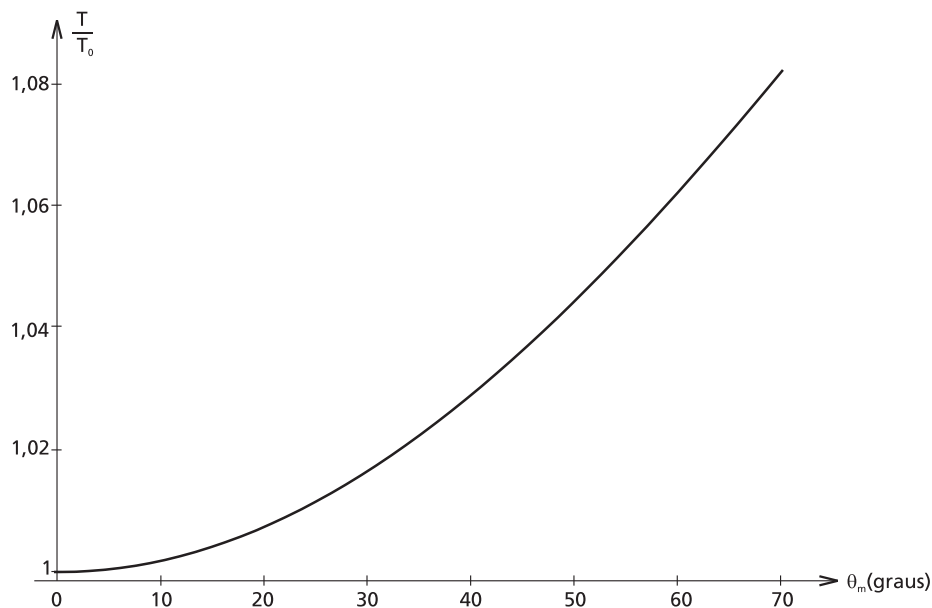
Para cada amplitude  $\theta_m$ , meça o tempo  $\Delta t$  necessário para observar 10 oscilações completas. O período pode, então, ser determinado:

$$T = \frac{\Delta t}{10} \quad (3.39)$$

Por enquanto e **só desta vez**, deixe de lado estimativas e propagações de incertezas (coisa muito feia!!!) e construa a tabela de dados a seguir:

d (cm)	$\theta_m$ (graus)	$\Delta t$ (s)	$T$ (s)

Agora, faça um gráfico de  $T$  contra  $\theta_m$  numa folha de papel milimetrado. **Atenção**, escolha as escalas horizontal e vertical com cuidado, de maneira a poder observar a variação de  $T$ . Será que o seu gráfico é parecido com o da Figura 3.2?



**Figura 3.2:** Período normalizado como função da amplitude angular  $\theta_m$ .

De posse desses resultados, você deve estar mais tranqüilo, sabendo que, ao fazer oscilar seu pêndulo com uma amplitude da ordem de 20 graus, este será um pêndulo simples **quase perfeito**. A determinação da aceleração da gravidade está nas suas mãos:

- regule e meça o comprimento  $\ell$  do pêndulo;
- para cada comprimento  $\ell$ , meça o tempo  $\Delta t$  necessário para observar 10 oscilações;
- determine o período como fez há pouco.

Monte a tabela de dados seguinte, **sem esquecer as incertezas  $\sigma_\ell$  e  $\sigma_{\Delta t}$  sobre suas medidas de comprimento e de tempo.**

$\ell$ (m)	$\sigma_\ell$ (m)	$\Delta t$ (s)	$\sigma_{\Delta t}$ (s)	$T$ (s)	$\sigma_T$ (s)	$T^2$ (s <sup>2</sup> )	$\sigma_{T^2}$ (s <sup>2</sup> )

As regras de propagação de incertezas, demonstradas na apostila **Tópicos de tratamento de dados experimentais**, permitem calcular as incertezas  $\sigma_T$  sobre o período  $T$  e  $\sigma_{T^2}$  sobre seu quadrado:

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{\Delta t}}{10} \quad (3.40)$$

$$\sigma_{T^2} = 2T\sigma_T \quad (3.41)$$

Você pode estar se perguntando por que diabo calcular  $T^2$ ! A resposta é simples (também!): fazendo isso, você obtém uma forma linear

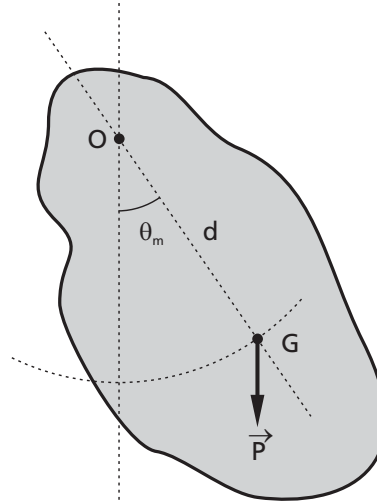
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}l \quad (3.42)$$

permitindo, assim, que seus dados sejam ajustados usando o método de regressão linear descrito na apostila **Tópicos de tratamento de dados experimentais**.

Gostou do ambiente de um laboratório? Conseguiu medir  $g$  com acurácia e precisão? Muito bem, mas chega de **quase realidade** e vamos agora estudar as oscilações de um **pêndulo físico**.

## O pêndulo físico

O pêndulo físico nada mais é que um corpo rígido de forma qualquer que pode oscilar em um plano vertical em torno de um eixo horizontal que o atravessa. A Figura 3.3 permite ver como o peso  $\vec{P} = M\vec{g}$  aplicado no centro de massa  $\mathbf{G}$  do corpo rígido produz um torque restaurador relativo ao eixo horizontal  $\mathbf{O}$  de rotação, quando o corpo é afastado de um ângulo  $\theta_m$  de sua posição de equilíbrio.



**Figura 3.3:** Pêndulo físico oscilando em torno de um eixo que passa pelo ponto  $\mathbf{O}$ . O ponto  $\mathbf{G}$  é o centro de gravidade.

Para um deslocamento angular  $\theta$ , esse torque restaurador é, como no caso do pêndulo simples :

$$\tau = -Mgd \sin\theta \quad (3.43)$$

Em geral, a oscilação não será harmônica simples, mas, de novo, no caso de oscilações de pequena amplitude para as quais podemos escrever que  $\sin\theta \simeq \theta$ , o movimento voltará a ser do tipo MHS com período

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} \quad (3.44)$$

sendo  $I$  o momento de inércia relativo ao eixo de rotação  $\mathbf{O}$ .



Observe o **teorema dos eixos paralelos** enunciado a seguir:

*Sendo  $I_{\Delta}$  a inércia rotacional (ou momento de inércia) de um corpo rígido qualquer de massa  $M$  em torno de um eixo arbitrário  $\Delta$ , e  $I_{\Delta_{CM}}$  sua inércia rotacional em torno de um eixo **paralelo** passando pelo seu centro de massa, tem-se:*

$$I_{\Delta} = I_{\Delta_{CM}} + Md^2 \quad (3.45)$$

*onde  $d$  é a distância entre os eixos.*

Definindo o **raio de giração**  $k$  tal que  $I_{\Delta_{CM}} = Mk^2$ , temos uma nova expressão, **independente da massa do corpo e da amplitude da oscilação**, para o período do pêndulo físico:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{d^2 + k^2}{gd}} \quad (3.46)$$

### O centro de oscilação do pêndulo físico

Voltando à expressão do período do pêndulo físico

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} \quad (3.47)$$

e comparando-a com a do pêndulo simples

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (3.48)$$

podemos deduzir facilmente que os dois pêndulos oscilam com o mesmo período desde que

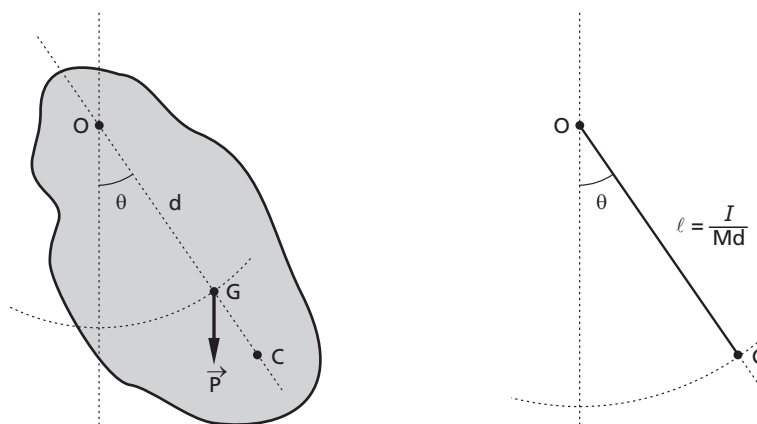
$$\ell = \frac{I}{Md} \quad (3.49)$$

Na posição de equilíbrio do pêndulo físico, encontramos 3 pontos alinhados verticalmente, o ponto **O** por onde passa o eixo de rotação, o centro de massa **G** e o **centro de oscilação C**, definido por

$$OC = \frac{I}{Md} \quad (3.50)$$

A Figura 3.4 ilustra a equivalência dos dois pêndulos, o físico e o simples, oscilando com o mesmo período para **oscilações de pequena amplitude**.

O corpo rígido oscila em torno do eixo passando pelo ponto **O** como se toda sua massa estivesse concentrada no centro de oscilação **C**.



**Figura 3.4:** Pêndulo físico e pêndulo simples. O ponto **C** é o centro de oscilação do pêndulo físico.

### Exercício 3.6

A posição do centro de oscilação de um corpo rígido é um ponto bem determinado, como por exemplo, o centro de massa, que depende somente do corpo? Justifique sua resposta.

### Exercício 3.7

Qual seria o período de oscilação do nosso pêndulo físico se o eixo de rotação passasse pelo centro de oscilação? Se você não conseguir responder e justificar sua resposta, terá de ir até o pólo para ter uma **resposta experimental!**

Por falar em pólo, acreditamos no poder **didático** da experiência e temos a certeza de que sua primeira experiência foi um sucesso. Por isso, sugerimos **fortemente** que você volte para lá para determinar o momento de inércia de um corpo rígido de forma complicada (Experiência EP2) e construir o pêndulo simples equivalente a um pêndulo físico constituído por um disco uniforme suspenso na borda (Experiência EP3).

### EP2- Determinação do momento de inércia de um corpo rígido

Muito bem! Você está agora no pólo, incumbido por um “amigo” de determinar o momento de inércia  $I_{\Delta_{CM}}$  de um corpo rígido em relação a um

eixo  $\Delta_{CM}$  passando pelo seu centro de massa. Olhando para a complexidade geométrica do corpo rígido, você vai imediatamente descartar a solução **teórica** que consistiria em **calcular** este momento. Entretanto, você sabe que, se este corpo rígido de massa  $M$  oscilar em torno de um eixo  $\Delta$  paralelo ao eixo  $\Delta_{CM}$ , o período de oscilação será

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{Mgd}} \quad (3.51)$$

onde  $I_{\Delta}$  é o momento de inércia relativo ao eixo de rotação  $\Delta$  e  $d$  a distância entre os dois eixos.

Você esqueceu o teorema dos eixos paralelos? Claro que não! Então, você pode escrever que

$$I_{\Delta_{CM}} = I_{\Delta} - Md^2 \quad (3.52)$$

e, usando estas duas Equações, 3.51 e 3.52, mostrar que

$$I_{\Delta_{CM}} = M \left\{ \frac{gdT^2}{4\pi^2} - d^2 \right\} \quad (3.53)$$

Perfeito! Só falta realizar a experiência, medindo a distância  $d$ , a massa  $M$  e o período  $T$  com o auxílio de uma régua, de uma balança de precisão e de um cronômetro, respectivamente. Meça **7 vezes** o tempo  $\Delta t_i$  necessário para observar **10 oscilações** completas do pêndulo físico, obtendo, assim, 7 medidas do período:

$$T_i = \frac{\Delta t_i}{10} \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, 7$$

De posse dessas medidas, construa a tabela de dados seguinte:

i	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta t_i$ (s)							
$T_i$ (s)							

De acordo com a Equação (1) da apostila **Tópicos de Tratamento de Dados Experimentais**, o valor médio de conjunto do período é

$$\bar{T} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 T_i$$

E as incertezas? Agora você não escapa de estimá-las e propagá-las! No caso da distância e da massa, você tem de estimar, com bom senso, os

desvios padrões  $\sigma_d$  e  $\sigma_M$  dessas **medidas diretas**. O caso do período é um pouco mais complicado, mas é só consultar de novo a apostila **Tópicos de Tratamento de Dados Experimentais** e usar a Equação (6), que fornece a melhor estimativa da **variância de um conjunto de medidas idênticas**. Assim, você pode obter o desvio padrão do conjunto de medidas do período

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^7 T_i^2 - \frac{7}{6} \bar{T}^2}$$

e apresentar seu resultado sob a forma correta

$$T = (\bar{T} \pm \sigma_T) \text{ segundos}$$

A última tarefa consiste em propagar as incertezas para calcular o desvio padrão do momento de inércia  $I_{\Delta_{CM}}$ . Para facilitar um pouco sua vida, você pode assumir que a aceleração da gravidade  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  é conhecida com uma precisão infinita, ou seja, que  $\sigma_g = 0$ . Outrossim, não havendo correlação estatística entre as grandezas  $T$  e  $d$ , a covariância  $\sigma_{Td} = 0$ .

Usando  $k = \frac{Mg}{4\pi^2}$ , a Equação 3.53 pode ser reescrita como

$$I_{\Delta_{CM}} = \alpha(d, T) - \beta(d, T) \quad \text{com}$$

$$\alpha(d, T) = kT^2d \quad \text{e} \quad \beta(d, T) = Md^2$$

Podemos calcular as derivadas parciais

$$\frac{\partial I_{\Delta_{CM}}}{\partial d} = \frac{\partial \alpha}{\partial d} - \frac{\partial \beta}{\partial d} = kT^2 - 2Md$$

$$\frac{\partial I_{\Delta_{CM}}}{\partial T} = \frac{\partial \alpha}{\partial T} - \frac{\partial \beta}{\partial T} = 2kTd$$

e, utilizando a Equação (23) da apostila **Tópicos de Tratamento de Dados Experimentais**, obtemos finalmente

$$\sigma_{I_{\Delta_{CM}}}^2 = \{kT^2 - 2Md\}^2 \sigma_d^2 + 4k^2T^2d^2 \sigma_T^2$$

Uma alternativa possível consiste em aplicar diretamente as fórmulas contidas na Tabela 1 desta mesma apostila, lembrando que as funções  $\alpha(d, T)$

e  $\beta(d, T)$  são obviamente correlatas. Portanto,

$$\sigma_{I_{\Delta_{CM}}}^2 = \sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\beta}^2 - 2 \sigma_{\alpha\beta} \quad \text{com}$$

$$\sigma_{\alpha}^2 = k^2 \{ T^4 \sigma_d^2 + 4 T^2 d^2 \sigma_T^2 \}$$

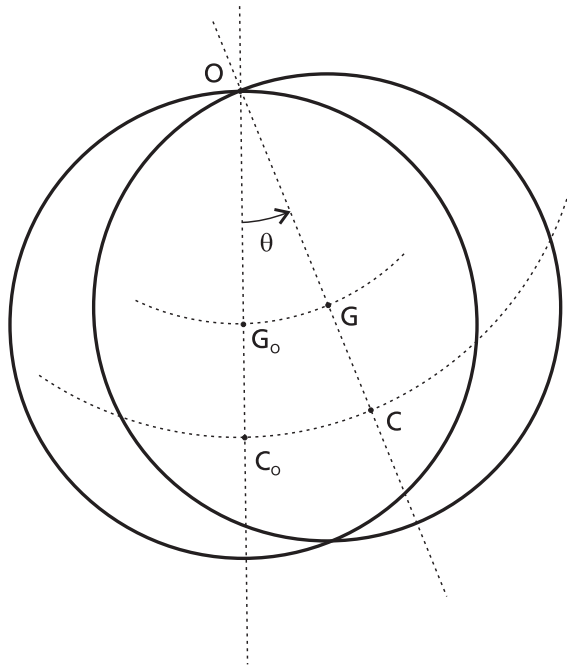
$$\sigma_{\beta}^2 = 4 M^2 d^2 \sigma_d^2$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\partial \alpha}{\partial T} \frac{\partial \beta}{\partial T} \sigma_T^2 + \frac{\partial \alpha}{\partial d} \frac{\partial \beta}{\partial d} \sigma_d^2$$

### EP3-Pêndulos simples e físico equivalentes

Quando o conceito de **centro de oscilação** de um pêndulo físico foi introduzido, você deve ter notado que, a qualquer pêndulo físico, correspondia um pêndulo simples equivalente, isto é, oscilando com o mesmo período. Vamos então construir um pêndulo simples equivalente a um disco uniforme oscilando em torno de um eixo passando pela sua borda. Você está no pólo e o disco de acrílico oscila na sua frente em torno do eixo passando pelo ponto **O**, de acordo com a Figura 3.5. **G**<sub>0</sub> representa a posição de equilíbrio do centro geométrico (e de massa) do disco e **G** sua posição num instante qualquer durante a oscilação.

Leitura aconselhada:  
Seção 15.5 do RHK



**Figura 3.5:** Deslocamento angular  $\theta$ , a partir da posição de repouso, do disco de acrílico.

A primeira tarefa consiste em determinar o período de oscilação desse pêndulo físico. Mãos à obra! Meça **4 vezes** o tempo  $\Delta t_i$  necessário para observar **5 oscilações** completas do pêndulo físico, obtendo assim 4 medidas do período

$$T_i = \frac{\Delta t_i}{5} \quad i = 1, 2, 3, 4$$

De posse dessas medidas, construa a seguinte tabela de dados:

i	1	2	3	4
$\Delta t_i$ (s)				
$T_i$ (s)				

Mais uma vez, de acordo com a Equação (1) da apostila **Tópicos de Tratamento de Dados Experimentais**, o valor médio de conjunto do período é

$$\overline{T_O} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 T_i$$

e sua incerteza é obtida usando a equação (6) dessa mesma apostila, que fornece a melhor estimativa da variância de um conjunto de medidas idênticas. Dessa forma, o desvio padrão do conjunto de medidas do período é

$$\sigma_{T_O} = \sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 T_i^2 - \frac{4}{3} \overline{T_O}^2}$$

Seu resultado deve ter a forma

$$T_O = (\overline{T_O} \pm \sigma_{T_O}) \text{ s}$$

Muito bem! Agora, observando com cuidado o disco de acrílico, você pode notar a presença de 3 pequenos furos **C**, **D** e **E**. Faça, então, oscilar o disco em torno desses 3 eixos e, como você fez há pouco, meça os períodos correspondentes

$$T_C = (\overline{T_C} \pm \sigma_{T_C}) \text{ s}$$

$$T_D = (\overline{T_D} \pm \sigma_{T_D}) \text{ s}$$

$$T_E = (\overline{T_E} \pm \sigma_{T_E}) \text{ s}$$

Compare os valores dos 4 períodos  $T_O$ ,  $T_C$ ,  $T_D$  e  $T_E$  e verifique que dois deles devem ser compatíveis, considerando as incertezas experimentais e possíveis erros sistemáticos. E agora, será que essa compatibilidade é fortuita? Claro que não! Vamos tentar desvendar o mistério? Pois bem, meça com o máximo de precisão o raio  $R$  do disco e as distâncias **OC**, **OD** e **OE**. Após estimar as incertezas experimentais das suas medidas, você deve poder afirmar sem medo de errar que

$$\mathbf{OC} = \frac{3}{2}R$$

Será que esse ponto **C** é o **centro de oscilação do disco** de massa  $M$  quando o eixo de rotação passa pelo ponto **O**? Usando o teorema dos eixos paralelos, é fácil mostrar que o momento de inércia do disco em relação ao eixo passando pelo ponto **O** é

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

### Exercício 3.8

Demonstre o resultado anterior.

Assim, usando a Equação 3.51, o período de oscilação  $T_O$  do disco escreve-se

$$T_O = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}}$$

e o pêndulo simples equivalente, isto é, que oscila com o mesmo período, tem um comprimento

$$l = \frac{3}{2}R$$

precisamente igual a **OC**! Você já verificou experimentalmente que  $T_O = T_C$ , mas, será que esse resultado podia ser previsto? De fato, o momento de inércia do disco em relação ao eixo passando por **C** é, usando de novo o teorema dos eixos paralelos,

$$I_C = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}MR^2$$

e o período  $T_C$  escreve-se, lembrando uma vez mais a Equação 3.51,

$$T_C = 2\pi\sqrt{\frac{I_C}{Mg\frac{R}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}} = T_O$$

Missão cumprida: você provou, experimentalmente e teoricamente, que **C** é o centro de rotação do disco!

Experimento concluído, mais experiência adquirida: você está no caminho certo e vai querer voltar ao pólo para aprender mais física, nem experimental nem teórica, somente física! A título de exercício, você poderia fazer a mesma experiência, tentando determinar o centro de oscilação de uma régua de plástico oscilando em torno de um eixo que passa pela sua borda menor. Isso pode ser feito na sua casa com amigos!

## Resumo

Com o auxílio das experiências que você fez no pólo, você aprendeu que osciladores **reais** se comportam, em determinadas circunstâncias, como osciladores harmônicos simples. Você foi apresentado ao pêndulo simples e ao pêndulo físico.

## Exercícios complementares

Vamos agora reforçar o que você aprendeu com esta aula, fazendo os problemas a seguir:

1. Um aro circular fino é suspenso usando um prego. Queremos fazer o aro realizar uma oscilação completa com ângulo pequeno, a cada 2 segundos. Qual deve ser o valor do raio do aro? O momento de inércia de um aro delgado **em torno de um eixo que passa pelo seu centro** é  $MR^2$ .
2. Uma chapa quadrada de massa  $M$  e lado  $\ell$  é colocada na vertical e presa a um suporte em um de seus vértices. A chapa pode oscilar e o ângulo que a diagonal do quadrado faz com o eixo vertical é  $\theta$ . O momento de inércia da chapa em torno de um eixo que passa por um dos vértices é  $2M\ell^2/3$ .
  - (a) Escreva a equação diferencial para  $\theta$ .
  - (b) Para  $\theta \ll 1$ , mostre que o movimento é harmônico simples.
  - (c) Calcule a frequência do movimento.
  - (d) Calcule o período do movimento.



## Auto-avaliação

O que você aprendeu nesta aula? Você estudou o pêndulo simples e o pêndulo físico, tanto do ponto de vista formal e teórico, quanto do ponto de vista experimental, indo até um pólo e realizando, na prática, experimentos que certamente ajudaram você a entender os conceitos abordados. Ficou tudo bem claro? Se você acha que sim, siga em frente. Se ainda ficou alguma dúvida lá no fundo da sua cabeça, não desanime! Releia a aula e tire suas dúvidas com seu tutor. Com isto feito, agora sim, siga em frente e passe para a próxima aula.



## Aula 4 – Movimento harmônico simples e movimento circular uniforme

### Meta da aula

- Mostrar como o Movimento Circular Uniforme gera o Movimento Harmônico Simples.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Identificar a relação entre o movimento circular uniforme (MCU) e o MHS.
- Utilizar números complexos para obter a solução da equação do MHS.

### Pré-requisitos

- Números complexos.
- Movimento circular uniforme.

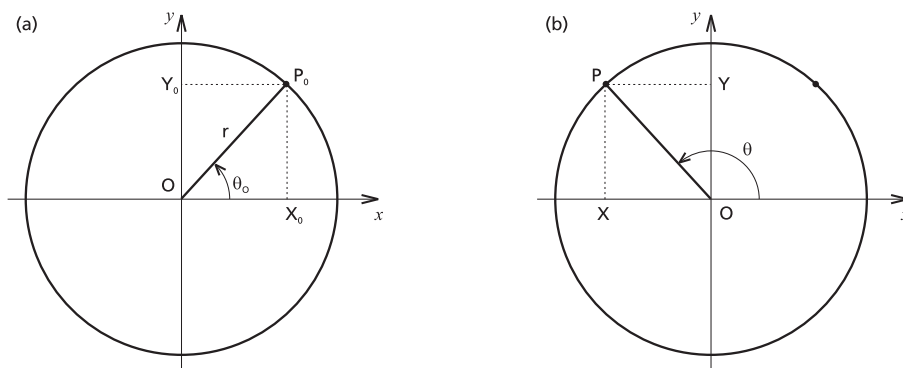
### Relação entre MHS e MCU

Você se lembra do movimento circular uniforme que estudou em Física I? Neste movimento, uma partícula se move em uma trajetória circular de raio  $r$ , com velocidade e aceleração constantes **em módulo**. Na Figura 4.1, temos uma ilustração do MCU. Uma partícula se encontra, inicialmente, no ponto  $P_0$  e percorre um círculo de raio  $r$  com velocidade angular  $\omega$  constante. No instante  $t$ , a partícula estará no ponto  $P$ , como mostra a Figura 4.1(b). Como descrever a posição da partícula como função do tempo? Podemos fornecer a posição da partícula em termos de suas coordenadas cartesianas ( $x$  e  $y$ ), ou polares ( $r$  e  $\theta$ ). O deslocamento angular  $\theta$  é dado por

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \quad (4.1)$$

onde  $\theta_0$  é a posição angular em  $t = 0$ .

Sua memória não anda assim tão boa? Pegue sua apostila de Física 1 e dê uma olhada na Aula 9 do Módulo 1!



**Figura 4.1:** Movimento circular uniforme. (a) Posição da partícula no instante  $t = 0$ , (b) posição da partícula em um instante  $t$  posterior.

Você deve estar pensando: “Ah! isso tudo eu já sabia, mas onde é que entra o movimento harmônico nessa história?”. Para responder a essa pergunta, vamos dar uma olhada na projeção de  $P$  sobre o eixo  $x$ . Ela é dada por  $X$  como você pode observar na Figura 4.1, de modo que

$$\overline{OX} = x = r \cos(\theta) = r \cos(\omega t + \theta_0) \quad (4.2)$$

Equação 2.6:  
 $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$

Se chamarmos  $r$  de  $x_m$  e  $\theta_0$  de  $\varphi$ , esta equação fica **idêntica** à solução do MHS (Equação 2.6)!

#### Exercício 4.1

Mostre que a projeção do ponto  $P$  sobre o eixo  $y$  também pode ser escrita na forma da Equação 2.6.

Dica: lembre-se de que  $\sin(\omega t + \theta_0) = -\cos(\omega t + \theta_0 + \frac{\pi}{2})$ .

Da mesma forma que estudamos a projeção da **posição** sobre o eixo  $x$ , podemos, também, analisar a projeção da **velocidade** e da **aceleração** da partícula sobre este eixo. Na Figura 4.2 (a), temos o vetor velocidade da partícula no ponto  $P$ . Ele é **tangencial** à trajetória e o seu módulo é dado por  $v = r\omega$ . A projeção deste vetor ao longo do eixo  $x$  é

$$v_x = -\omega r \cos(\pi + \theta - \frac{\pi}{2}) = -\omega r \sin(\theta) = -\omega r \sin(\omega t + \theta_0) \quad (4.3)$$

Comparando esta equação com a velocidade no MHS (Equação 2.11), podemos ver que a projeção da velocidade no MCU ao longo do eixo  $x$  é

Lembre-se,  
no MCU,  $v = \omega r$ , onde  $r$  é o  
raio da circunferência.

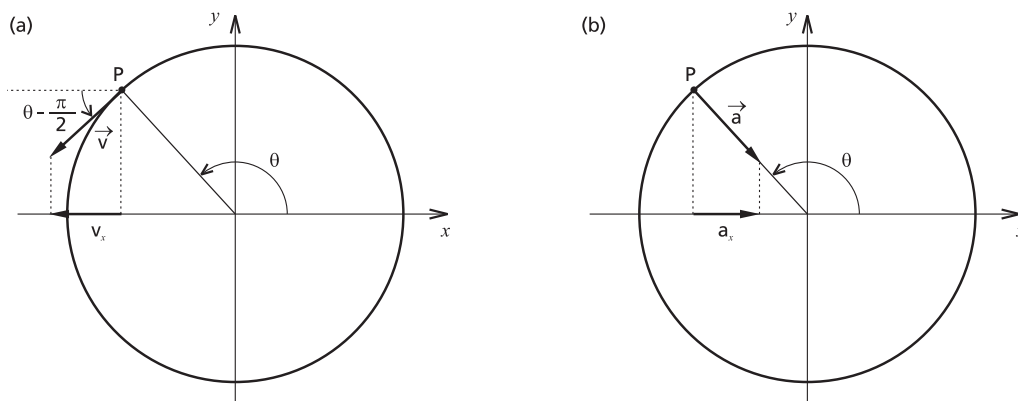
Equação 2.11  
 $v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi)$ .

a velocidade no MHS! Vamos ver o que acontece com a aceleração. Você se lembra de que a aceleração no MCU é a **aceleração centrípeta**, não é mesmo? Como o nome indica, o vetor aponta para o centro do círculo, como mostra a Figura 4.2, e tem módulo  $a = \omega^2 r$ . A projeção ao longo do eixo  $x$  é dada por

$$a_x = \omega^2 r \cos(\theta + \pi) = -\omega^2 r \cos(\theta) = -\omega^2 r \cos(\omega t + \theta_0) \quad (4.4)$$

Equação 2.12  
 $a(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi).$

Mais uma vez, constatamos que a projeção de uma grandeza do MCU sobre o eixo  $x$  corresponde à mesma grandeza no MHS. Desta vez, a grandeza é a aceleração.



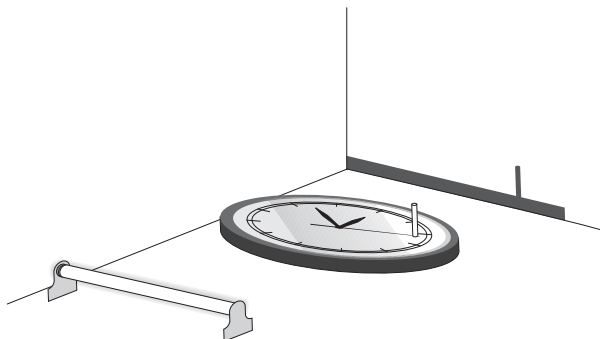
**Figura 4.2:** (a) Velocidade no MCU e sua projeção ao longo do eixo  $x$ , (b) aceleração no MCU e sua projeção ao longo do eixo  $x$ .

#### Exercício 4.2

Mostre que as projeções da velocidade e da aceleração do MCU sobre o eixo  $y$  também correspondem à velocidade e à aceleração no MHS.

Vemos, portanto, que podemos considerar o MHS como projeção de um movimento circular uniforme. A Figura 4.3 deve nos ajudar a compreender o que isso quer dizer. Você se lembra da EV 6? Nela, havia um relógio de ponteiros, do tipo encontrado em uma cozinha. Imagine, agora, que este relógio é retirado da parede e colocado no plano horizontal, sobre uma mesa, por exemplo. Mais do que isso, o vidro do relógio é retirado e, sobre o ponteiro dos segundos, colamos um pequeno cilindro (um pedaço de massa

de modelar de criança). Este cilindro estará executando um MCU. Se agora iluminarmos, com luz paralela, o relógio com a massinha, como mostra a Figura 4.3, poderemos observar a sombra da massinha se movendo na parede. Quando o cilindro anda em MCU, sua sombra está realizando um MHS!



**Figura 4.3:** Projeção do MCU sobre o eixo  $x$ .

## Revisão: números complexos

Na seção anterior, descrevemos um ponto  $P$  por meio de suas coordenadas cartesianas e também por meio de suas coordenadas polares. Agora, vamos fazer algo semelhante com um ponto  $z$  no plano complexo. Podemos escrever um número complexo como

$$z = x + iy \quad (4.5)$$

onde  $x$  é a parte real de  $z$  e  $y$  é a parte imaginária, ou, de forma equivalente:

$$x \equiv \text{Re } z \quad \text{e} \quad y \equiv \text{Im } z \quad (4.6)$$

Você deve se lembrar de que o número  $i = \sqrt{-1}$  é chamado **unidade imaginária**. Também podemos escrever um número complexo  $z$  em termos de coordenadas polares

$$z = x + iy = r (\cos\theta + i \sin\theta) \quad (4.7)$$

onde  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Para fazer uma última simplificação na fórmula anterior, vamos usar a famosa Fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta \quad (4.8)$$

Dessa maneira, podemos escrever senos e cossenos como exponenciais de números complexos

$$\cos\theta = \text{Re } (e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad (4.9)$$

O matemático suíço  
Leonhard Euler (1707-1783)  
obteve este resultado em  
1748.

$$\operatorname{sen} \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (4.10)$$

Finalmente, podemos descrever um ponto  $z$  no plano complexo como:

$$z = x + iy = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = r e^{i\theta} \quad (4.11)$$

## Aplicação ao MHS

No início da aula, você viu que a notação complexa vai facilitar muito a sua vida no estudo do MHS. Agora nós vamos ver como.

Vamos voltar à equação do oscilador harmônico simples:

$$-kx = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (4.12)$$

Você se lembra de como esta solução foi encontrada? As funções seno e cosseno são proporcionais às suas derivadas segundas, portanto, servem de solução para esta equação. Você deve se lembrar também do Exercício 2.3. Nele, você mostrou que funções exponenciais com argumentos **reais** não podem ser soluções para a equação do oscilador. Mas, e as funções exponenciais com argumentos complexos que acabamos de ver? Se é possível escrever senos e cossenos como combinações lineares destas exponenciais, então elas também devem ser soluções da equação do oscilador.

## Linearidade e princípio da superposição

A equação do oscilador harmônico simples tem nome e sobrenome. Ela é uma equação **diferencial linear ordinária de segunda ordem**. Ela é diferencial porque envolve derivadas. É linear porque só contém termos lineares em  $x$  e suas derivadas, ou seja, não contém termos do tipo  $x^2$ ,  $x^3$ ,  $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ ,  $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^3$ , ou outros termos de ordem superior. Ela é ordinária porque só envolve derivadas de  $x$  com relação a  $t$ . E, finalmente, é de segunda ordem porque a derivada de maior ordem é uma derivada segunda.

A solução geral de uma equação diferencial linear ordinária de segunda ordem envolve duas constantes arbitrárias. Vamos analisar um exemplo bem conhecido, um corpo que se move com aceleração constante  $a$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a \quad (4.13)$$

Integrando esta equação, encontramos a velocidade

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + at \quad (4.14)$$

Integrando novamente, encontramos  $x(t)$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (4.15)$$

Na solução, aparecem duas constantes:  $x_0$  e  $v_0$ , que são as condições iniciais do problema.

Qualquer equação diferencial linear de segunda ordem homogênea tem as seguintes propriedades fundamentais:

1. Se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são soluções, então  $x_1(t) + x_2(t)$  também é solução.
2. Se  $x(t)$  é solução, então  $C x(t)$ , onde  $C$  é uma constante, também é solução.

Portanto, se  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  são soluções, então qualquer combinação linear  $x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)$  é solução. Este é o **princípio da superposição**. Se  $x_1(t)$  é linearmente independente de  $x_2(t)$ , então  $x(t)$  é a solução geral, pois depende de duas constantes arbitrárias  $C_1$  e  $C_2$  **reais**.

Vamos usar o que acabamos de aprender sobre equações diferenciais para resolver a equação do oscilador harmônico simples. Da Equação 4.12 para o MHS, vemos que  $x$  deve ser proporcional à sua derivada segunda. Fisicamente sabemos que  $x$  é real. No entanto, por simplicidade matemática, usaremos, inicialmente, como palpite para a solução, a função **complexa**

$$z(t) = e^{pt} \quad (4.16)$$

onde  $p$  é uma constante que precisamos determinar.

Partindo de  $z(t)$ , podemos determinar suas derivadas:

$$\frac{dz}{dt} = p e^{pt} \quad (4.17)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = p^2 e^{pt} \quad (4.18)$$

Vamos substituir estas derivadas na Equação 4.12 do oscilador:

$$p^2 e^{pt} + \frac{k}{M} e^{pt} = 0 \quad (4.19)$$

Para  $e^{pt} \neq 0$ , temos

$$p^2 + \frac{k}{M} = 0 \quad (4.20)$$



Esta equação recebe o nome de **equação característica**. Fazendo a substituição  $\omega^2 = k/M$  (de acordo com o que você mostrou no exercício 2.7!), temos:

$$p^2 = -\omega^2 \quad (4.21)$$

ou seja,

$$p = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega \quad (4.22)$$

Voltando ao nosso palpite, temos duas soluções linearmente independentes:

$$z(t) = e^{i\omega t} \quad \text{e} \quad z(t) = e^{-i\omega t} \quad (4.23)$$

A solução geral **complexa** da equação do oscilador é dada pela combinação linear das duas soluções anteriores

$$z(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (4.24)$$

onde, agora, as constantes arbitrárias  $C_1$  e  $C_2$  podem ser **complexas**. O nosso oscilador não está no plano complexo, ele é **real!!** Logo, devemos impor condições sobre  $C_1$  e  $C_2$  para obter a solução **física**, ou seja, **real**. O exercício a seguir deve ajudar a refrescar a sua memória...

#### Exercício 4.3

Mostre que a soma de dois números complexos é real quando um deles é o complexo conjugado do outro.

Vamos substituir as constantes arbitrárias  $C_1$  e  $C_2$  por duas novas constantes  $r$  e  $\varphi$

$$C_1 = r e^{i\varphi} \quad (4.25)$$

$$C_2 = r e^{-i\varphi} \quad (4.26)$$

Dessa maneira, temos

$$z(t) = r e^{i(\omega t + \varphi)} + r e^{-i(\omega t + \varphi)} \quad (4.27)$$

ou, usando a Equação 4.9, com  $\theta = \omega t + \varphi$ ,

$$z(t) = 2r \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.28)$$

Fazendo uma última substituição

$$2r = x_m \quad (4.29)$$

e observando que  $z(t)$ , agora, é finalmente real, obtemos a solução **física**

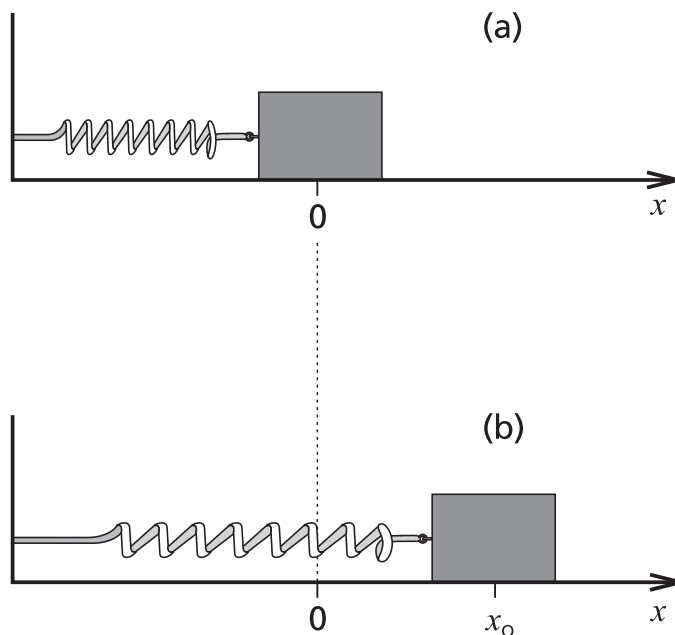
$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Você acaba de chegar à mesma solução para o oscilador harmônico simples que você encontrou na aula anterior! Isso não deve ter surpreendido você nem um pouco, não é mesmo? Afinal de contas, independentemente de como a equação é resolvida, o resultado deve ser o mesmo.

Na aula anterior, você viu que  $x_m$  corresponde à amplitude de oscilação e  $\varphi$  à fase. Essas duas constantes são determinadas a partir das **condições iniciais** do problema, como por exemplo, a posição inicial e a velocidade inicial, ou a posição inicial e a energia cinética inicial.

## Exemplo

O uso de números complexos na solução do MHS pode estar parecendo um pouco abstrato, não é mesmo? Vamos ver um exemplo, passo-a-passo. Temos uma mola de constante elástica  $k$  presa a uma parede, de um lado, e do outro lado colocamos uma pequena massa  $M$ . Este sistema está na horizontal, como mostra a Figura 4.4. Vamos considerar que o atrito entre a mesa e a massa pode ser desprezado. A mola é esticada até a posição  $x_0$ , indicada na figura, e solta. Como a posição da massa varia com o tempo?



**Figura 4.4:** Bloco preso a uma mola, na horizontal. (a) A mola está relaxada, (b) a mola é distendida até  $x_0$ .

O primeiro passo para resolver este problema é escolher um sistema de referência. Vamos colocar a origem do sistema na posição do centro da massa quando a mola se encontra relaxada, como mostra a Figura 4.4. Vamos, também, escolher o eixo  $x$  paralelo à mesa, positivo para a direita. Como o movimento é unidimensional, não precisamos definir os outros eixos. Quando a mola está relaxada, a resultante das forças atuando sobre o sistema é nula. Ao puxar a mola, ela se distende e puxa a massa  $M$  de volta com uma força proporcional à sua distensão. Como a origem do sistema de referência está na posição do centro da massa quando a mola está relaxada, a distensão da mola será igual à coordenada  $x$ . Usando a segunda lei de Newton, chegamos à equação de movimento

$$F = -kx = M \frac{d^2x}{dt^2}$$

Fazendo  $\omega^2 = k/M$ , essa equação pode ser reescrita como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

A solução geral para esta equação nós encontramos há pouco:

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (4.30)$$

Agora vamos usar as condições iniciais para determinar  $x_m$  e  $\varphi$ . A mola foi distendida de uma distância  $x_0$ , e solta. Assim, em  $t = 0$ ,  $x(t = 0) = x_0$  e

$v(t = 0) = 0$ , ou seja,

$$x(t = 0) = x_m \cos \varphi = x_0 \quad (4.31)$$

Podemos também encontrar a velocidade

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi) \quad (4.32)$$

tal que

$$v(t = 0) = -\omega x_m \sin \varphi = 0 \quad (4.33)$$

Para que a equação anterior seja satisfeita, fazemos  $\varphi = 0$ . Substituindo este valor da fase na Equação 4.31, temos  $x_0 = x_m$ . Assim, finalmente, chegamos a solução do problema:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t \quad (4.34)$$

## O oscilador harmônico passo-a-passo

Vamos recapitular como resolver o problema do oscilador harmônico.

- Escrever a equação de movimento. Para tanto, você deve identificar que forças atuam sobre o seu sistema e aplicar a segunda lei de Newton.
- Dar um palpite para a solução. Como você já viu, a função  $z(t) = e^{pt}$  é um bom palpite.
- Calcular as derivadas da sua função palpite.
- Substituir as derivadas na equação de movimento para encontrar a equação característica.
- Resolver a equação característica e encontrar  $p$ . Isso equivale a resolver uma equação de segundo grau na qual, em geral, teremos duas soluções  $p_1$  e  $p_2$ .
- Escrever a solução geral na forma  $z(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}$ .
- Encontrar  $C_1$  e  $C_2$  que tornem  $z(t)$  real e satisfaçam às condições iniciais do problema.

## Resumo

Nesta aula você relembrou o MCU e estudou as relações entre este movimento e o MHS. Você aprendeu o princípio da superposição e como aplicá-lo ao MHS. Após uma breve revisão sobre números complexos, você os utilizou para encontrar uma solução, obtida passo-a-passo, para o oscilador harmônico simples, com diferentes condições iniciais.

## Exercícios complementares

Você acaba de dar mais um passo importante no estudo das oscilações, compreendendo, passo-a-passo, a solução da equação do oscilador harmônico simples. Reveja o exemplo que nós resolvemos juntos. Agora você vai resolver, sozinho, o mesmo oscilador ilustrado na Figura 4.4, só que com outras condições iniciais.

1. Em vez de puxar a massa e soltar, considere que a massa está em sua posição de equilíbrio quando leva um peteleco e ganha velocidade inicial  $v_0$ . Encontre  $x(t)$ .
2. Considere, agora, as condições iniciais  $x(t = 0) = 0$  e  $v(t = 0) = 0$ . O que acontece?

## Auto-avaliação

Você conseguiu fazer os exercícios complementares? Se você achou **a maior moleza**, pode seguir adiante e passar para a próxima aula sem problema. Se você teve dificuldades, releia a aula, com muita paciência, e tente fazer, desta vez sozinho, o exemplo que nós resolvemos juntos. Se tiver dificuldades, lembre-se de que tutores e professores podem ajudá-lo. Depois de feito o exemplo, passe aos exercícios complementares. Uma boa compreensão desta aula é muito importante para que você possa acompanhar a próxima aula sem problemas. Até lá!



## Aula 5 – Superposição de movimentos harmônicos simples

### Meta da aula

- Mostrar o papel fundamental do Movimento Harmônico Simples.

### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender a superposição de movimentos harmônicos simples, paralelos ou perpendiculares, de mesma frequência ou não.
- Reconhecer o fenômeno de batimentos.

### Introdução

Como o MHS não tem mais segredos para você, vamos complicar um pouco sua vida e entender o que acontece quando dois MHS, paralelos ou ortogonais, combinam-se, gerando, assim, um movimento resultante. Muitos fenômenos físicos, como batimentos e interferências, ocorrem em consequência dessas combinações, chamadas também superposições.

Até agora, a **fase** do MHS não mereceu nossa atenção, pois os fenômenos observados e as grandezas consideradas, como por exemplo, o período, não dependem dela. Isso vai mudar e você vai entender a importância e o significado físico dessa fase.

### Superposição de MHS perpendiculares de mesma frequência

Considere uma partícula de massa  $M$  submetida a uma força restauradora no plano  $x - y$

$$\vec{F} = -k \vec{r} \quad (5.1)$$

onde  $\vec{r}$  é o deslocamento da partícula, a partir da sua posição de equilíbrio que define a origem das coordenadas.

Você deve se lembrar de que a segunda Lei de Newton fornece a equação vetorial do movimento da partícula:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega^2 \vec{r} = 0 \quad (5.2)$$

onde

$$\omega^2 = \frac{k}{M} \quad (5.3)$$

Você sabe também que esta equação vetorial desdobra-se em duas equações escalares

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \quad (5.4)$$

cujas soluções podem ser escritas

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_x) \quad \text{e} \quad y(t) = y_m \cos(\omega t + \varphi_y) \quad (5.5)$$

ou, escolhendo a origem do tempo de maneira a ter  $\varphi_x = 0$ ,

$$x(t) = x_m \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad y(t) = y_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (5.6)$$

A fase  $\varphi$  representa, agora, a **defasagem** entre os dois MHS ortogonais. A trajetória da partícula no plano  $x - y$ , inscrita num retângulo de lados  $2x_m$  e  $2y_m$ , é obtida como segue.

Sabemos que  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ . Portanto,

$$\frac{y}{y_m} = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi$$

que podemos escrever

$$\frac{y}{y_m} = \frac{x}{x_m} \cos \varphi \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_m^2}} \sin \varphi$$

ou, ainda,

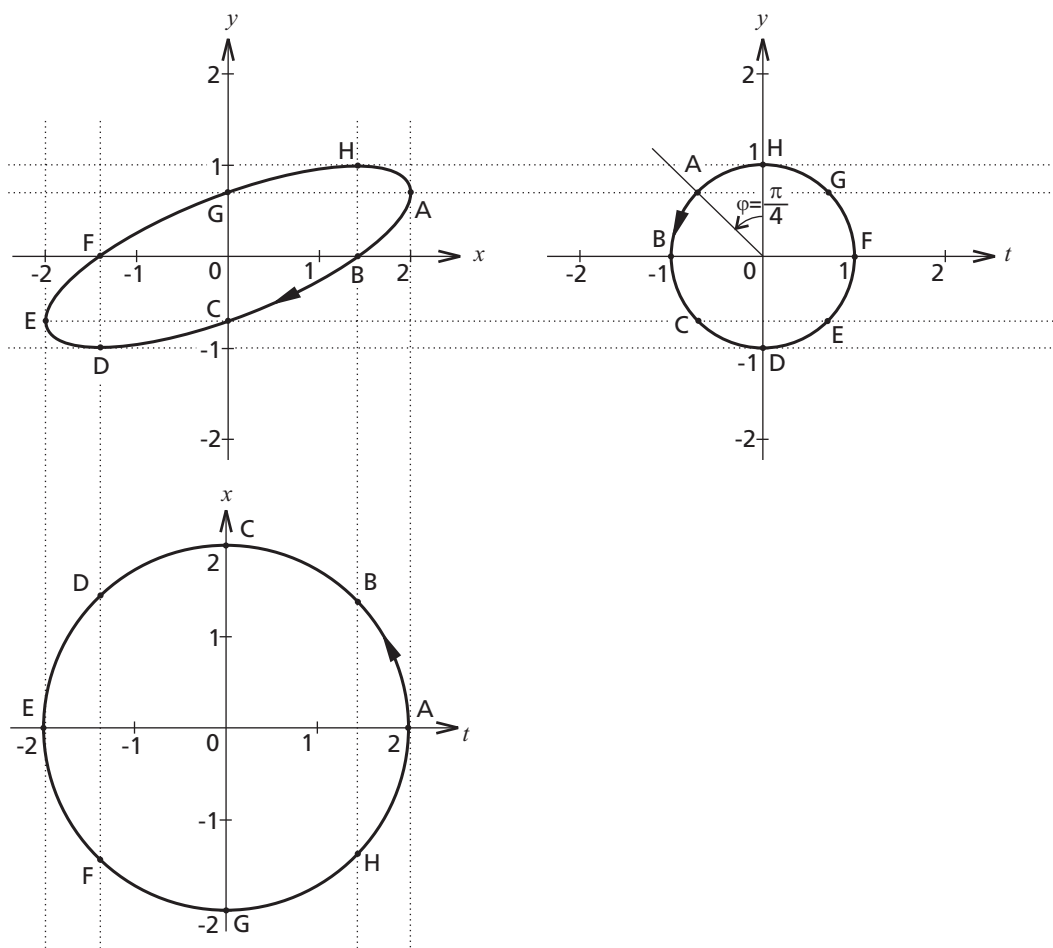
$$\frac{y}{y_m} - \frac{x}{x_m} \cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_m^2}} \sin \varphi$$

e, finalmente, elevando os dois membros ao quadrado,

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{y^2}{y_m^2} - 2 \frac{xy}{x_m y_m} \cos \varphi = \sin^2 \varphi \quad (5.7)$$

Essa é a equação de uma elipse. Para uma fase  $\varphi$  qualquer, podemos construir graficamente, ponto a ponto, a trajetória elíptica e observar o sentido de percurso da elipse, lembrando a Aula 4 deste Módulo na qual se mostrou a relação entre MHS e MCU. Basta associar dois MCUs defasados de  $\varphi$  aos dois osciladores harmônicos, como ilustrado na Figura 5.1.





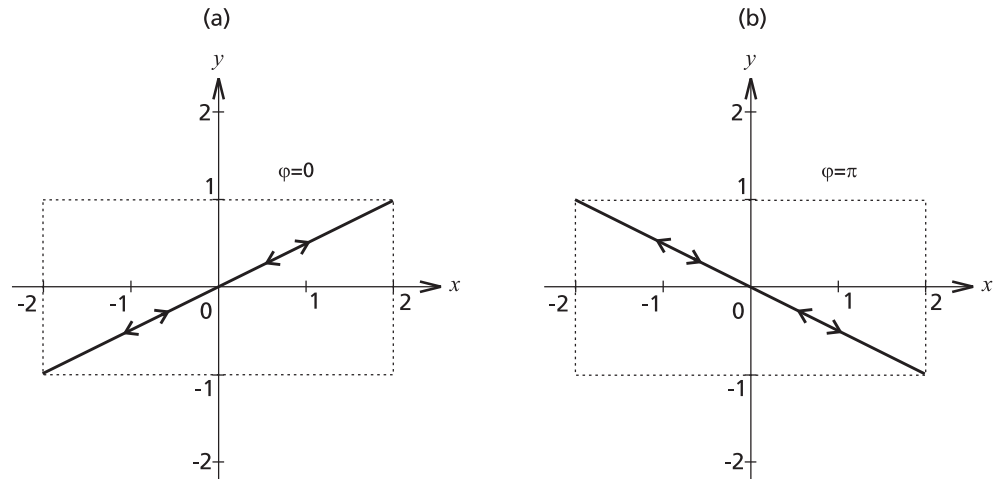
**Figura 5.1:** Composição de dois MHS perpendiculares e de mesma frequência:  $x(t) = 2\cos(\omega t)$  e  $y(t) = \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$ . As setas indicam o sentido de percurso em função do tempo.

- $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pi$

Quando os dois MHS estão em fase ( $\varphi = 0$ ) ou em oposição de fase ( $\varphi = \pi$ ), a trajetória elíptica se transforma em segmentos de reta ao longo das diagonais principal ou secundária, respectivamente, do retângulo. De fato, a Equação 5.7 se escreve

$$\begin{aligned} y &= \frac{y_m}{x_m} x & \text{quando } \varphi &= 0 \\ y &= -\frac{y_m}{x_m} x & \text{quando } \varphi &= \pi \end{aligned} \quad (5.8)$$

Estas trajetórias retilíneas podem ser observadas na Figura 5.2.



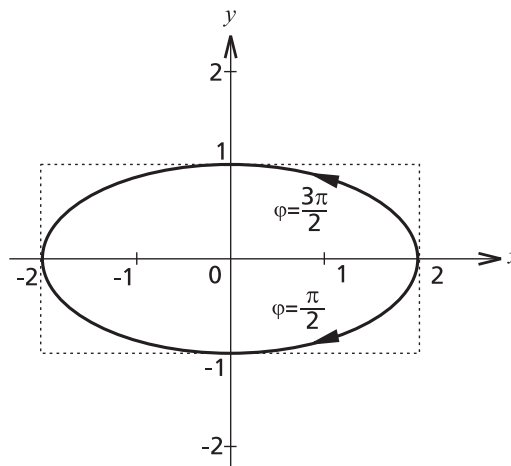
**Figura 5.2:** Composição de dois MHS perpendiculares e de mesma frequência:  $x(t) = 2\cos(\omega t)$  e  $y(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ . (a)  $\varphi = 0$  e (b)  $\varphi = \pi$ .

•  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ou  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$

Em ambos casos, os dois MHS estão, agora, em quadratura e a Equação 5.7 torna-se a de uma elipse cujos eixos principais coincidem com os eixos de coordenadas

$$\frac{x^2}{x_m^2} + \frac{y^2}{y_m^2} = 1 \quad (5.9)$$

A Figura 5.3 ilustra estes casos de superposição de MHS em quadratura.



**Figura 5.3:** Composição de dois MHS perpendiculares e de mesma frequência:  $x(t) = 2\cos(\omega t)$  e  $y(t) = \cos(\omega t + \varphi)$ . A elipse percorrida no sentido horário corresponde a  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  e no sentido anti-horário a  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ .

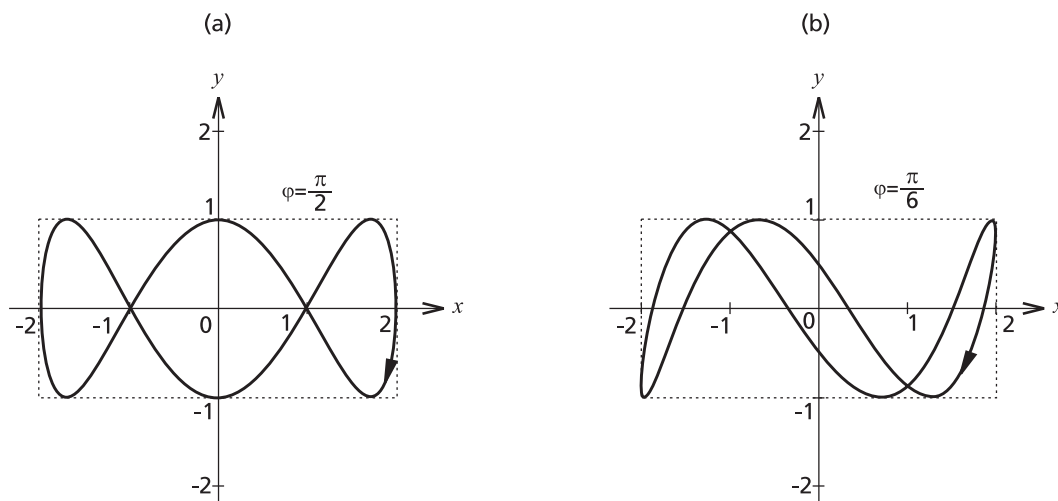
## Exercício 5.1

Com a ajuda das Equações 5.6, mostre que a elipse é percorrida nos sentidos **horário**, quando  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , e **anti-horário**, quando  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ .

## Superposição de MHS perpendiculares de frequências diferentes

Quando as frequências dos MHS são diferentes, a obtenção da equação da trajetória do oscilador bidimensional é bastante complicada. Entretanto, a relação entre MHS e MCU e o método gráfico utilizado anteriormente permitem construir a trajetória do movimento resultante, ponto a ponto. Dependendo da relação entre as frequências, o movimento resultante será periódico ou aperiódico.

Quando a razão entre as frequências  $\omega_x$  e  $\omega_y$  não é um número **inteiro**, o movimento resultante não é periódico e a trajetória do oscilador não é uma curva fechada. Em contrapartida, se esta razão for um número inteiro, o movimento harmônico bidimensional será periódico e a trajetória uma curva fechada. Em geral, a função  $y(x)$  é bastante complicada! A Figura 5.4 ilustra a superposição de MHS perpendiculares de frequências diferentes nos casos  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  e  $\varphi = \frac{\pi}{6}$  para  $\omega_y = 3\omega_x$ .



**Figura 5.4:** Composição de dois MHS perpendiculares e de frequências diferentes:  $\omega_y = 3\omega_x$  e (a)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  e (b)  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ .

O físico francês Jules-Antoine Lissajous (1822-1880) estudou as agora chamadas Figuras de Lissajous em 1857-1858. No entanto, elas já haviam sido estudadas em 1815 pelo matemático americano Nathaniel Bowditch.

Todas as curvas que representam osciladores harmônicos bidimensionais são chamadas **curvas de Lissajous** e podem ser observadas facilmente com dois geradores de ondas senoidais e um osciloscópio de dois canais  $x$  e  $y$ . Infelizmente, a obtenção experimental de figuras de Lissajous com ondas mecânicas é bastante complicada.

## Superposição de MHS paralelos de mesma frequência

Consideremos agora dois MHS de mesma direção e de mesma frequência  $\omega$ , descritos pelas equações

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{e} \quad x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad (5.10)$$

Qual será o movimento resultante  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ? Podemos responder a esta pergunta usando a representação complexa dos MHS ou a analogia entre MHS e MCU. Caso você tenha esquecido esses **truques**, volte um pouco atrás e revise a Aula 4. Para dividir o trabalho, vamos encontrar a resposta manipulando números complexos e vamos apostar que você encontrará o mesmo resultado usando a analogia MHS-MCU, ou seja, com a ajuda da geometria.

A representação complexa dos dois MHS escreve-se

$$z_1(t) = X_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \quad \text{e} \quad z_2(t) = X_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} \quad (5.11)$$

e a do movimento resultante é, portanto,

$$z(t) = X_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + X_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)} \quad (5.12)$$

que podemos reescrever como

$$z(t) = X_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + X_2 e^{i(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1)} \quad (5.13)$$

ou, ainda,

$$z(t) = e^{i(\omega t + \varphi_1)} \{X_1 + X_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}\} \quad (5.14)$$

Introduzindo uma amplitude complexa

$$X e^{i\beta} = X_1 + X_2 e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} \quad (5.15)$$

obtemos:

$$z(t) = X e^{i(\omega t + \varphi_1 + \beta)} \quad (5.16)$$

A parte real de  $z(t)$  fornece a resultante da superposição dos dois MHS paralelos e de mesma frequência  $\omega$ :

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi_1 + \beta) \quad (5.17)$$

## Exercício 5.2

Calculando o módulo quadrado e a parte imaginária da amplitude complexa definida pela Equação 5.15, mostre que:

$$\begin{aligned} X^2 &= X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \text{sen}\beta &= \frac{X_2}{X} \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Usando um pouco de trigonometria, podemos obter as Equações 5.17 e 5.18 de outra maneira. De fato, podemos escrever

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = X_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + X_2 \cos(\omega t + \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_1) \quad (5.19)$$

ou

$$\begin{aligned} x(t) &= X_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ &+ X_2 \{ \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \text{sen}(\omega t + \varphi_1) \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) \} \end{aligned} \quad (5.20)$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} x(t) &= \{ X_1 + X_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \} \cos(\omega t + \varphi_1) \\ &- X_2 \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) \text{sen}(\omega t + \varphi_1) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Introduzindo um módulo  $X$  e uma fase  $\beta$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) &= X \cos\beta \\ X_2 \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) &= X \text{sen}\beta \end{aligned} \quad (5.22)$$

obtemos

$$x(t) = X \cos\beta \cos(\omega t + \varphi_1) - X \text{sen}\beta \text{sen}(\omega t + \varphi_1) \quad (5.23)$$

que, obviamente, se escreve

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi_1 + \beta) \quad (5.24)$$

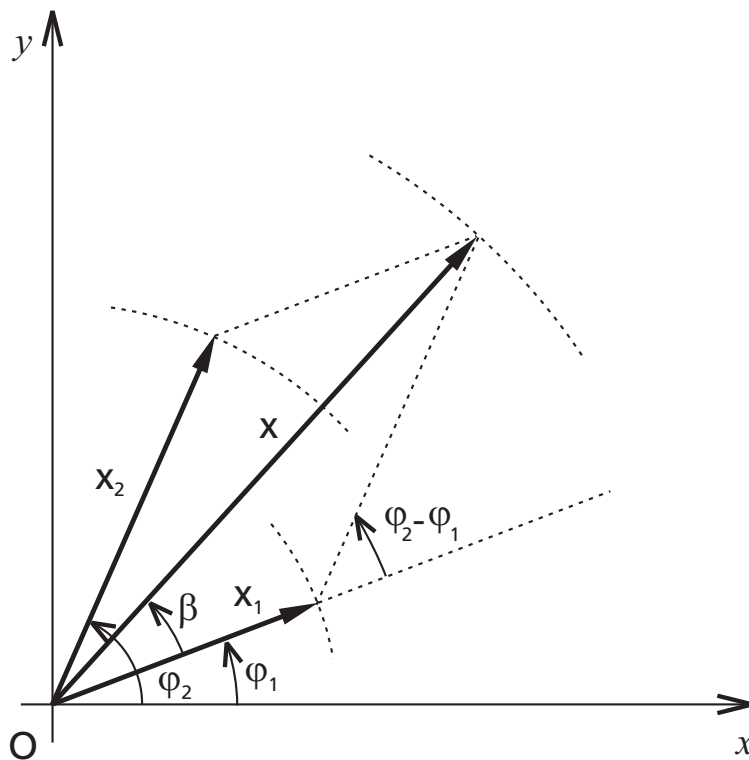
Elevando ao quadrado as Equações 5.22 e somando-as membro a membro, encontramos de novo a amplitude  $X$  e a fase  $\beta$  do movimento resultante

$$X^2 = X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\text{sen}\beta = \frac{X_2}{X} \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

### Exercício 5.3

Observe, atentamente, a Figura 5.5 na qual o paralelogramo gira com velocidade angular  $\omega$  no plano  $x - y$ . Usando a analogia MHS-MCU, mostre que o movimento resultante da superposição de dois MHS paralelos na direção  $x$  e de mesma frequência angular  $\omega$  é definido pelas Equações 5.17 e 5.18.



**Figura 5.5:** Composição de dois MHS paralelos.

## Superposição de MHS paralelos de frequências diferentes

No caso da superposição de MHS paralelos, a defasagem  $\Phi$  entre os dois MHS

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega_1 t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = X_2 \cos(\omega_2 t + \varphi)$$

varia com o tempo, pois reescrevendo

$$x_2(t) = X_2 \cos[\omega_1 t + (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi] \quad (5.25)$$

verificamos que

$$\Phi = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi \quad (5.26)$$

Portanto, o movimento resultante  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  não é periódico, a não ser que exista um período  $T$ , satisfazendo simultaneamente as equações

$$\omega_1 T = 2n_1\pi \quad \text{e} \quad \omega_2 T = 2n_2\pi$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são dois números **inteiros** quaisquer.

Sendo  $T_1$  e  $T_2$  os períodos dos MHS, é fácil mostrar que o período  $T$  do movimento resultante é

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2$$

### Exercício 5.4

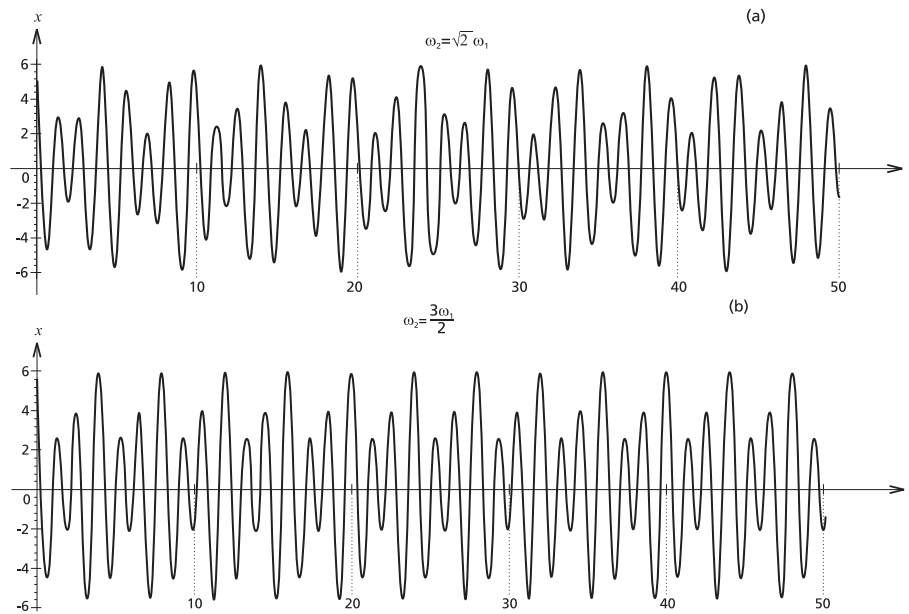
Demonstre o resultado anterior.

A Figura 5.6 ilustra as superposições de MHS definidos por

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega_1 t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = 2X_1 \cos(\sqrt{2}\omega_1 t + \frac{\pi}{6}) \quad (\text{Figura 5.6a})$$

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega_1 t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = 2X_1 \cos(\frac{3}{2}\omega_1 t + \frac{\pi}{6}) \quad (\text{Figura 5.6b})$$

Note que, enquanto na Figura 5.6b o movimento é periódico, na Figura 5.6a o movimento é aperiódico.



**Figura 5.6:** Composição de MHS paralelos, resultando em um movimento aperiódico (a) ou periódico (b).

Vamos, agora, estudar o caso importante da superposição de dois MHS paralelos e de frequências **muito próximas**. O fenômeno físico bem conhecido que resulta dessa composição é o **batimento**, muitas vezes observado em acústica e utilizado para afinar instrumentos musicais.

## Batimentos

Sejam os dois MHS paralelos representados por

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega_1 t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = X_2 \cos(\omega_2 t) \quad (5.27)$$

Sendo as fases arbitrárias, podemos considerá-las nulas, o que simplifica bastante os cálculos! Supondo  $\omega_2 > \omega_1$ , introduzimos a frequência angular média  $\bar{\omega}$  e a diferença de frequências  $\Delta\omega$  definidas por

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{e} \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \quad (5.28)$$

Quando as amplitudes são iguais ( $X_1 = X_2 = X$ ), o movimento resultante é

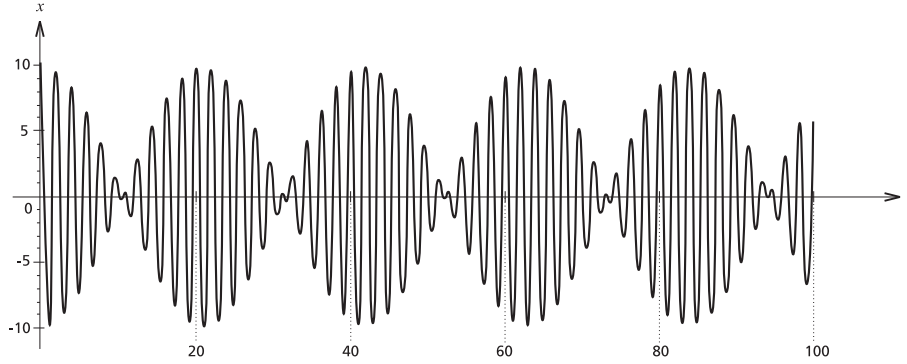
$$x(t) = X \left\{ \cos\left(\bar{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}\right) t + \cos\left(\bar{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right) t \right\}$$

ou ainda

$$x(t) = 2X \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cos(\bar{\omega} t)$$



Quando as frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são muito próximas, temos  $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$ . Assim, como pode ser observado na Figura 5.7,  $x(t)$  pode ser interpretado como uma oscilação de frequência angular  $\bar{\omega}$  e de amplitude  $2X \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)$ , **lentamente** variável com frequência angular  $\frac{\Delta\omega}{2}$ .



**Figura 5.7:** Batimento obtido com a superposição de dois MHS em fase e de mesma amplitude.

E se as amplitudes dos MHS não forem iguais, o que acontece? Nesse caso, podemos escrever

$$x(t) = X_1 \cos(\omega_1 t) + X_2 \cos(\omega_1 + \Delta\omega) t \quad (5.29)$$

Para continuar, é conveniente usar a representação complexa

$$z(t) = X_1 e^{i\omega_1 t} + X_2 e^{i(\omega_1 + \Delta\omega) t} = e^{i\omega_1 t} \{X_1 + X_2 e^{i\Delta\omega t}\} \quad (5.30)$$

Introduzindo a amplitude  $X$  e a fase  $\beta$  como segue,

$$X e^{i\beta t} = X_1 + X_2 e^{i\Delta\omega t} \quad (5.31)$$

temos, então,

$$z(t) = X e^{i(\omega_1 + \beta) t} \quad (5.32)$$

## Exercício 5.5

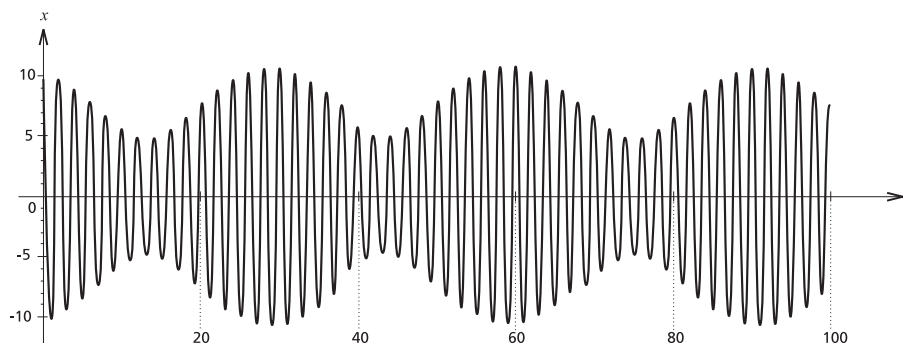
A partir da Equação 5.31, mostre que

$$\begin{aligned} X^2 &= X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 \cos(\Delta\omega t) \\ X \cos(\beta t) &= X_1 + X_2 \cos(\Delta\omega t) \\ X \sin(\beta t) &= X_2 \sin(\Delta\omega t) \end{aligned} \quad (5.33)$$

O movimento resultante, dado pela parte real da expressão 5.32,

$$x(t) = X \cos(\omega_1 + \beta) t \quad (5.34)$$

é uma oscilação **rápida** de frequência angular  $(\omega_1 + \beta)$  e de amplitude **lentamente** modulada com frequência angular  $\Delta\omega$ . A novidade é que a amplitude  $X$  oscila entre um mínimo não-nulo  $|X_1 - X_2|$  e um máximo  $X_1 + X_2$  de acordo com a primeira das Equações 5.33. A Figura 5.8 a seguir é um exemplo de batimento entre dois MHS de amplitudes diferentes.



**Figura 5.8:** Batimento obtido com a superposição de dois MHS em fase e de amplitudes diferentes.

## Resumo

Você aprendeu a importância e o significado físico da **fase**, estudando a superposição de movimentos harmônicos simples. Você foi apresentado aos fenômenos de batimentos e interferência.

## Exercícios complementares

Vamos aplicar o que aprendemos nesta aula? Para isso, faça os problemas a seguir!

1. Considere a superposição de movimentos harmônicos perpendiculares de mesma frequência e amplitude:

$$x(t) = A \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Descreva a trajetória do oscilador para

- (a)  $\varphi = 0$ ;
- (b)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;
- (c)  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ;

2. Considere a superposição de movimentos harmônicos paralelos

$$x_1(t) = X_1 \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad x_2(t) = X_2 \cos(2\omega t).$$

- (a) A trajetória é fechada? Se for, qual é o período do movimento?
- (b) Faça um esboço da trajetória quando  $X_1 = X_2$ .
- (c) Faça um esboço da trajetória quando  $X_1 = 2X_2$ .

## Auto-avaliação

O que você achou desta aula? Tomara que você tenha gostado e, mais ainda, tomara que você tenha compreendido todos os pontos abordados. Você acha que sim? Parabéns, siga em frente! Você ficou com alguma dúvida? Teve dificuldades no decorrer da aula ou nos problemas? Não desanime! Releia a aula mais uma vez, discuta as dúvidas com seu tutor, seus colegas, mande um *e-mail*... Não faltam opções para você. Quando estiver com tudo claro, passe para a próxima aula.



## Aula 6 – O movimento harmônico amortecido

### Meta da aula

- Introduzir o fenômeno de amortecimento.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Entender como a presença de forças dissipativas altera o comportamento de sistemas oscilantes.

### EC3 - Oscilações de uma massa presa a uma mola

Você ainda tem aquela mola ou aquele elástico que usou na experiência caseira EC1? Então repita a mesma experiência, só que, agora, observe o seu sistema oscilar por um tempo bastante grande.

- Determine o ponto de repouso e as posições  $y_{max}$  e  $y_{min}$  das extremidades superior e inferior da oscilação.
- O ponto de repouso muda com o passar do tempo?
- As posições  $y_{max}$  e  $y_{min}$  mudam com o passar do tempo?
- A amplitude de oscilação muda com o tempo?

O que se pode aprender com esta experiência? A amplitude de oscilação diminui com o tempo, e, se você tiver bastante paciência e esperar um tempo muito grande, vai ver o seu sistema parar de oscilar. O que está acontecendo? Até agora, estávamos estudando osciladores nos quais as forças dissipativas podem ser desprezadas. Mas nós sabemos que na natureza, **no mundo real**, as forças de atrito estão presentes e dissipam energia do sistema. O movimento harmônico é **amortecido**. No caso da nossa experiência, este amortecimento é devido à resistência do ar (além do atrito no suporte). A resistência de um fluido, como o ar, ao deslocamento de um corpo é proporcional à velocidade, para velocidades suficientemente pequenas.

Veja Moyses, volume I, seção 2.7

## Equação do movimento harmônico amortecido

Quando temos uma partícula submetida à ação de uma força restauradora elástica e ao atrito,

$$\sum F = -kx - b \frac{dx}{dt} \quad (6.1)$$

em que  $\frac{dx}{dt}$  é a velocidade da partícula,  $b$  é uma constante positiva que depende das propriedades do fluido onde a massa está se movendo (o ar, por exemplo) e o sinal negativo indica que a força de atrito está no sentido contrário ao do movimento.

### Exercício 6.1

Mostre que a unidade de  $b$ , no Sistema de Unidades MKSA, é  $kg/s$ .

Nós podemos, agora, da mesma forma que fizemos ao estudar o MHS, aplicar a segunda Lei de Newton ao nosso sistema, ou seja,

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2} \quad (6.2)$$

onde  $M$  é a massa da partícula e  $\frac{d^2x}{dt^2}$  sua aceleração.

Passando todos os termos para o mesmo lado da equação e dividindo por  $M$ , temos

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{M} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{M} x = 0 \quad (6.3)$$

É útil definir as constantes

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{b}{M} \quad (6.4)$$

e substituir  $\omega_0$  e  $\gamma$  na Equação 6.3. Fazendo isso, chegamos à equação do movimento harmônico amortecido:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (6.5)$$

## Solução da equação do movimento harmônico amortecido

Você deve se lembrar de que no MHS a solução  $x(t)$  é proporcional à sua derivada segunda. No caso do movimento harmônico amortecido, você pode notar, observando a equação anterior, que a solução  $x(t)$  é proporcional à sua derivada segunda (como no MHS) e também **é proporcional à sua derivada primeira**.

Quais são as funções que são proporcionais às suas derivadas e às suas derivadas segundas? São as funções exponenciais. Podemos, então, encontrar a solução para a Equação 6.5 usando o mesmo método da Aula 4. Vamos usar como palpite a função **complexa**

$$z(t) = e^{pt} \quad (6.6)$$

na qual  $p$  é uma constante que nós queremos encontrar. Se  $z(t)$  tem a forma anterior, então sua derivada e sua derivada segunda com relação ao tempo são dadas por

$$\frac{dz}{dt} = p e^{pt} \quad \text{e} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = p^2 e^{pt} \quad (6.7)$$

### Exercício 6.2

Substitua  $z$ ,  $\frac{dz}{dt}$  e  $\frac{d^2z}{dt^2}$  na Equação 6.5 e mostre que

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0 \quad (6.8)$$

A Equação 6.8 é a **equação característica** para o movimento harmônico amortecido. Ela é uma equação de segundo grau em  $p$  e tem como raízes:

$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} \quad (6.9)$$

Ao analisar essas raízes, observamos que podemos dividi-las em três grupos, dependendo da relação entre  $\gamma$  e  $\omega_0$ . Quando  $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$ , o amortecimento é chamado **subcrítico**, quando  $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ , o amortecimento é chamado **supercrítico**, e para  $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$ , temos o amortecimento **crítico**. Vamos estudar cada um desses casos separadamente.

(a) **Amortecimento subcrítico:**  $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$

O primeiro caso que vamos estudar é o amortecimento subcrítico. Olhando para Equação 6.9, vemos que quando  $\frac{\gamma}{2} < \omega_0$  aparece a raiz quadrada de um número negativo. Nesse caso, podemos reescrever a Equação 6.9 como

$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega \quad (6.10)$$

na qual  $\omega$  é dado por:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (6.11)$$

Encontramos, dessa forma, as duas raízes de nossa equação característica e podemos escrever a posição em função do tempo como combinação linear das duas soluções particulares,

$$z(t) = C_1 e^{p_+ t} + C_2 e^{p_- t} \quad (6.12)$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são duas constantes que a princípio podem ser complexas e dependem das condições iniciais do sistema, por exemplo, da posição inicial  $x_0$  e da velocidade inicial  $v_0$ , e  $p_+$  e  $p_-$  são dados pela Equação 6.10:

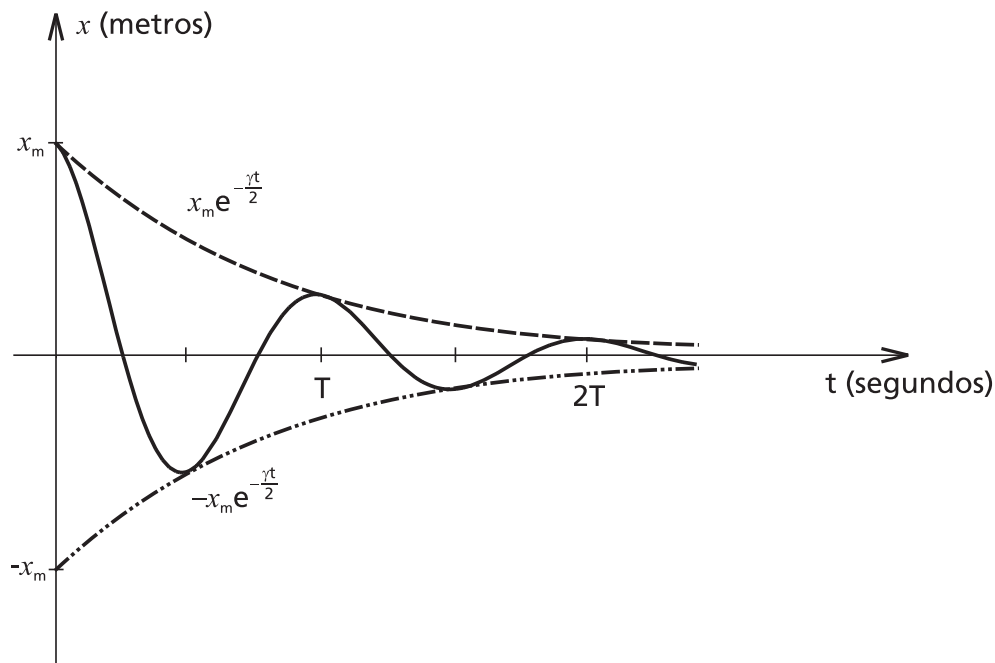
$$z(t) = C_1 e^{-\frac{\gamma}{2}t + i\omega t} + C_2 e^{-\frac{\gamma}{2}t - i\omega t} \quad (6.13)$$

### Exercício 6.3

Partindo da Equação 6.13, mostre que ela pode ser reescrita na forma a seguir 6.14. Dica: reveja a aula sobre movimento harmônico simples e movimento circular uniforme.

$$x(t) = x_m e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.14)$$





**Figura 6.1:** Posição como função do tempo para um oscilador subamortecido.

A Figura 6.1 mostra um gráfico da posição como função do tempo para um oscilador subamortecido. A linha contínua é a representação gráfica da Equação 6.14, onde, por simplicidade, tomamos  $\varphi = 0$ . O que se pode aprender analisando este gráfico? Em primeiro lugar, vemos que o movimento é oscilatório, a posição passa por valores negativos e positivos alternadamente, de forma semelhante ao movimento harmônico simples não-amortecido, que estudamos na segunda aula. O que está acontecendo de diferente neste caso? A frequência de oscilação é diferente: ela é  $\omega_0 = \sqrt{k/M}$  na ausência de amortecimento, e  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$  no caso de amortecimento subcrítico, ou seja,  $\omega < \omega_0$ . Com isso, o período  $T$  do movimento amortecido subcrítico é sempre maior que  $T_0$ , do movimento na ausência de amortecimento. Mas esta não é a única diferença, não é mesmo?

#### Exercício 6.4

Dê uma olhada no gráfico da posição em função do tempo no MHS, na Figura 2.2a, e compare-a com a Figura 6.1. Qual é a principal diferença?

Você deve se lembrar da experiência EC-3, que fez no início desta aula. Você pôde observar que, quando há amortecimento, a amplitude da oscilação diminui com o tempo. Quando o amortecimento é fraco, o fator  $x_m e^{-\gamma t/2}$  varia lentamente com o tempo. Podemos reescrever (de novo!!) a solução do oscilador harmônico subamortecido:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.15)$$

Temos uma amplitude dependente do tempo,  $A(t)$ , multiplicando um termo oscilante,  $\cos(\omega t + \varphi)$ . No caso do oscilador não-amortecido, tínhamos uma solução semelhante, na qual a amplitude era constante e igual a  $x_m$ . Agora, comparando a equação anterior com a Equação 6.1, vemos que  $A(t) = x_m e^{-\gamma t/2}$ . A amplitude cai exponencialmente com o tempo. Este decaimento pode ser observado na Figura 6.1, na qual as curvas tracejadas ( $\pm x_m e^{-\gamma t/2}$ ) representam a **envoltória** das oscilações.

**(b) Amortecimento super crítico:**  $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$

O que acontece quando  $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ ? Nesse caso, a raiz quadrada que aparece na Equação 6.9 será a de um número positivo. Nós temos, então, duas soluções reais que podemos escrever

$$p = -\gamma_1 \quad \text{e} \quad p = -\gamma_2 \quad (6.16)$$

A variação da posição em função do tempo para o amortecimento super crítico é

$$x(t) = C_1 e^{-\gamma_1 t} + C_2 e^{-\gamma_2 t} \quad (6.17)$$

com  $C_1$  e  $C_2$  constantes, a serem determinadas a partir das condições iniciais.

O que esta solução nos diz? Quando o amortecimento é grande, ou seja,  $\frac{\gamma}{2} > \omega_0$ , a solução não é mais oscilante, ela é a combinação linear de duas soluções que decaem exponencialmente com o tempo!

**(c) Amortecimento crítico:**  $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$

Dizemos que o amortecimento é crítico quando

$$\frac{\gamma}{2} = \omega_0 \quad (6.18)$$

Assim sendo, temos apenas uma raiz para a equação característica:

$$p = -\frac{\gamma}{2} \quad (6.19)$$

Como a Equação 6.5 é de segunda ordem, sua solução deve depender de duas constantes arbitrárias. Até agora encontramos apenas uma solução. Como conseguir a segunda?

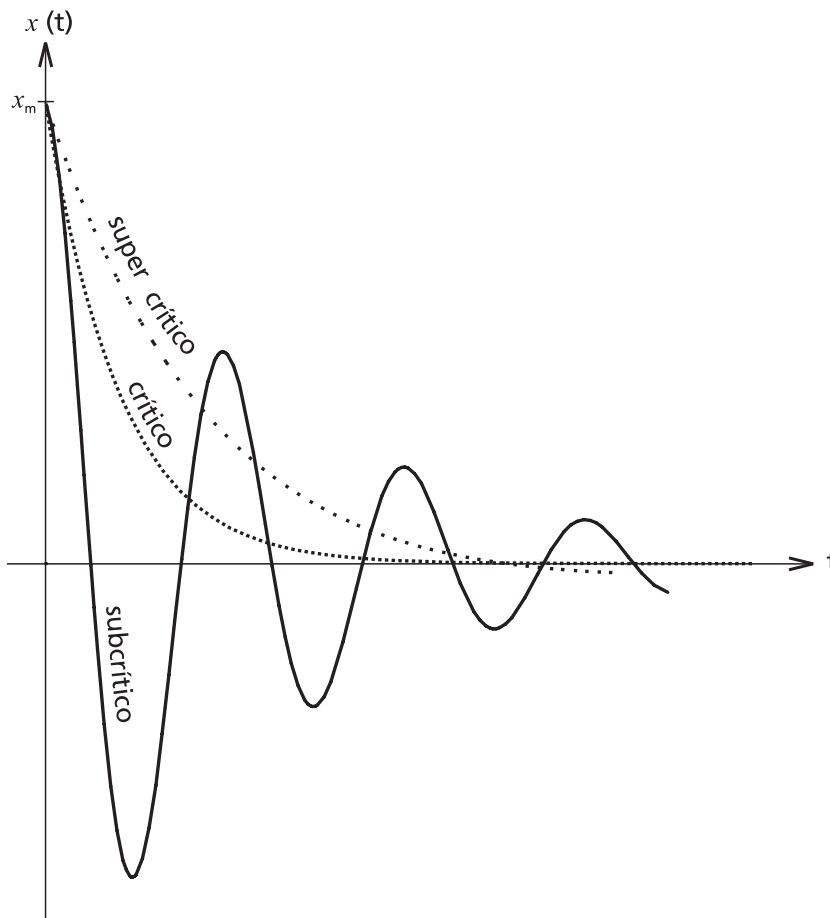
### Exercício 6.5

Mostre que, se  $e^{-\frac{\gamma}{2}t}$  é solução da Equação 6.5,  $t e^{-\frac{\gamma}{2}t}$  também é solução.

Assim, temos como solução geral para o amortecimento crítico:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} (C_1 + C_2 t) \quad (6.20)$$

Na Figura 6.2 podemos comparar os três tipos de movimento amortecido.



**Figura 6.2:** Movimento harmônico amortecido: subcrítico, super crítico e crítico.

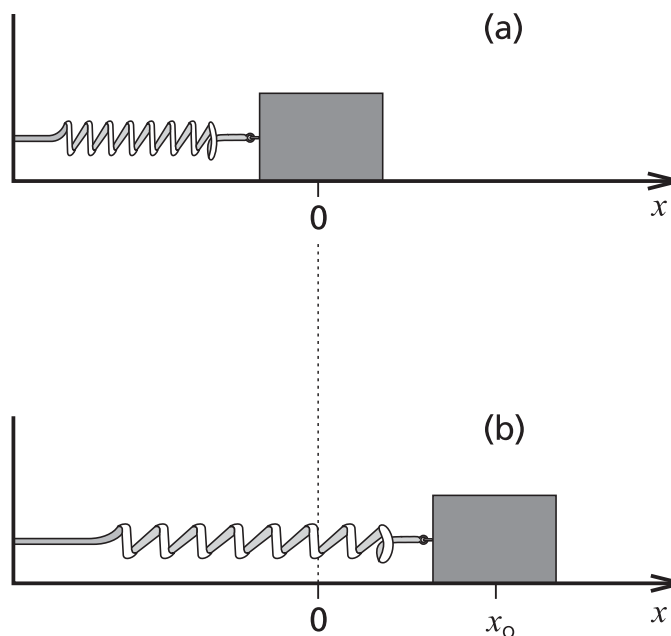
## Resumo

Nesta aula, estudamos o movimento harmônico amortecido. Usando funções exponenciais como tentativa de solução, chegamos à equação característica para esse movimento. Analisando as soluções, vimos que o amortecimento pode ser crítico, subcrítico ou super crítico.

## Exercícios complementares

Vamos agora juntar o que você aprendeu, nesta aula, sobre oscilações amortecidas, com a solução, passo-a-passo, da equação do oscilador harmônico simples. Reveja o exemplo que resolvemos juntos para o oscilador harmônico simples da Aula 4.

Considere o mesmo sistema massa mola que vimos anteriormente, repetido na figura a seguir. Agora, além da força restauradora da mola, há também uma força de atrito, dependente da velocidade, atuando sobre a massa.



1. A mola é esticada até uma distância  $x_0$  e solta. Encontre  $x(t)$ , supondo que o amortecimento é subcrítico.
2. Em vez de puxar a massa e soltar, considere que a massa está em sua posição de equilíbrio, quando leva um peteleco e ganha velocidade inicial  $v_0$ . Encontre  $x(t)$ , considerando, ainda, que o amortecimento é subcrítico.

3. Considere, agora, as mesmas condições iniciais do primeiro item, mas suponha que o amortecimento é crítico. Encontre  $x(t)$ .
4. Mais uma vez, considere  $x(t = 0) = x_0$  e  $v(t = 0) = 0$ , mas agora suponha que o amortecimento é super crítico. Encontre  $x(t)$ .

## Auto-avaliação

Você conseguiu fazer os exercícios complementares? Eles são mais difíceis do que aqueles ao final da Aula 4, mas podem ser resolvidos do mesmo modo. Se você teve um pouco de dificuldade, volte ao início da aula e tente de novo. Se a sua dificuldade for muito grande, releia a Aula 4, estude a seção “O oscilador harmônico passo-a-passo” e use-a como um roteiro para resolver os problemas acima. Isso com certeza vai ajudar muito! Até a próxima aula.



## Aula 7 – Oscilações forçadas e ressonância

### Meta da aula

- Introduzir o fenômeno de ressonância.

### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Entender como a presença de forças externas altera o comportamento de sistemas oscilantes.

### Introdução

Até agora, estudamos apenas oscilações livres, ou seja, aquelas nas quais, após fornecermos uma energia inicial (por meio de uma distensão inicial da mola ou de uma velocidade inicial, por exemplo), deixamos o sistema oscilar livremente. Nesse caso, atuam sobre o sistema apenas a força restauradora e, possivelmente, alguma força dissipativa. O que acontecerá se outras forças, também periódicas, atuarem sobre o sistema?

Quando você era criança deve ter brincado muitas vezes em uma pracinha, com um balanço (Figura 7.1).

Você sabe que quando uma criança senta em um balanço e sua mãe a empurra, o balanço oscila algumas vezes, e a amplitude vai diminuindo até que o balanço pare.



Figura 7.1: Lembranças do passado...

Nós podemos entender isso lembrando da aula anterior, quando estudamos oscilações amortecidas (pelo tipo de movimento, você diria que o amortecimento é crítico, super crítico ou subcrítico?). Mas nenhuma criança senta em um balanço e fica satisfeita com um único impulso, não é mesmo? Ao empurrar a criança repetidas vezes, a mãe dá impulsos periódicos: ela aplica uma **força externa periódica** sobre o oscilador. Este é apenas um exemplo, entre tantos outros, de **oscilações forçadas**. Fenômenos tão diferentes quanto as oscilações do tímpano de nossos ouvidos sob a ação de ondas sonoras, e as oscilações de elétrons sob a ação de campos eletromagnéticos são, também, oscilações forçadas.

## Equação do movimento harmônico forçado

Vamos agora encontrar a equação do movimento harmônico forçado. Como acabamos de ver, as forças que atuam sobre o sistema são: a força restauradora, a força dissipativa e uma força externa periódica

$$\sum F = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_{ext} \quad (7.1)$$

Vamos supor que a força externa tenha a forma

$$F_{ext} = F_0 \cos(\omega't) \quad (7.2)$$

ou seja, tenha uma amplitude  $F_0$  e oscile no tempo de forma cossenoidal com uma frequência  $\omega'$ .

### Exercício 7.1

Esta força cossenoidal é uma boa descrição matemática para a força que a mãe faz ao empurrar o balanço? Por quê? Discuta com o seu tutor.

Conhecendo as forças que atuam sobre o sistema, vamos, mais uma vez, fazer uso da segunda lei de Newton:

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0 \cos(\omega't) \quad (7.3)$$

Podemos reescrever a equação anterior colocando, do lado esquerdo, todos os termos que dependem de  $x$  e suas derivadas e, do lado direito, tudo o que não depende de  $x$ :

$$M\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega't) \quad (7.4)$$



O lado esquerdo da equação é idêntico ao lado esquerdo da equação para o movimento amortecido. A diferença está no lado direito que, naquele caso, é zero, e aqui é uma função do tempo. Você se lembra quando nós vimos que as equações têm nome e sobrenome? Esta é uma equação diferencial linear ordinária de segunda ordem **não-homogênea**.

Antes de encontrar a solução para esta equação, vamos reescrevê-la usando as constantes  $\gamma = b/M$  e  $\omega_0^2 = k/M$ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M} \cos(\omega' t) \quad (7.5)$$

É importante ressaltar que existem duas frequências envolvidas na Equação 7.5:  $\omega_0$  e  $\omega'$ . Não devemos confundi-las;  $\omega_0$  é a chamada **frequência natural** do sistema, isto é, sua frequência de oscilação na ausência de força oscilante aplicada e de força dissipativa. Em contrapartida,  $\omega'$  é a frequência da força aplicada.

Como encontrar a solução para a equação anterior? A solução mais geral para uma equação não-homogênea é a soma da solução da equação homogênea associada a ela e de uma solução particular para a equação não-homogênea:

$$x(t) = x_{homogênea} + x_{particular} \quad (7.6)$$

## Movimento forçado, não amortecido

Para entender melhor o que nós vimos anteriormente, vamos estudar um caso especial, em que temos um oscilador forçado, mas podemos considerar que o amortecimento é desprezível. Nesse caso, a equação de movimento fica:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M} \cos(\omega' t) \quad (7.7)$$

A equação homogênea associada é

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7.8)$$

ou seja, a equação do oscilador harmônico simples. Neste momento você já está cansado de saber sua solução:  $x_{homogênea}(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . Para encontrar a solução geral, basta agora encontrar uma solução particular para a equação não-homogênea. Mas o que é isso? Uma solução particular é qualquer solução que “sirva”! Nesse caso, queremos encontrar uma função

$x(t)$  que seja uma solução para a Equação 7.7. Vamos usar, como tentativa, uma função que tenha a mesma dependência temporal que a força externa,

$$x_{particular} = C \cos(\omega' t) \quad (7.9)$$

em que  $C$  é uma constante que precisa ser determinada. Mas como? Substituindo  $x_{particular}$  e sua derivada segunda na Equação 7.7.

### Exercício 7.2

Substitua  $x_{particular}$  (Equação 7.9) e sua derivada segunda na Equação 7.7 e mostre que

$$C = \frac{F_0}{M(\omega_0^2 - \omega'^2)} \quad (7.10)$$

Substituindo  $C$ , encontrado no exercício anterior, a solução particular escreve-se:

$$x_{particular} = \frac{F_0}{M(\omega_0^2 - \omega'^2)} \cos(\omega' t) \quad (7.11)$$

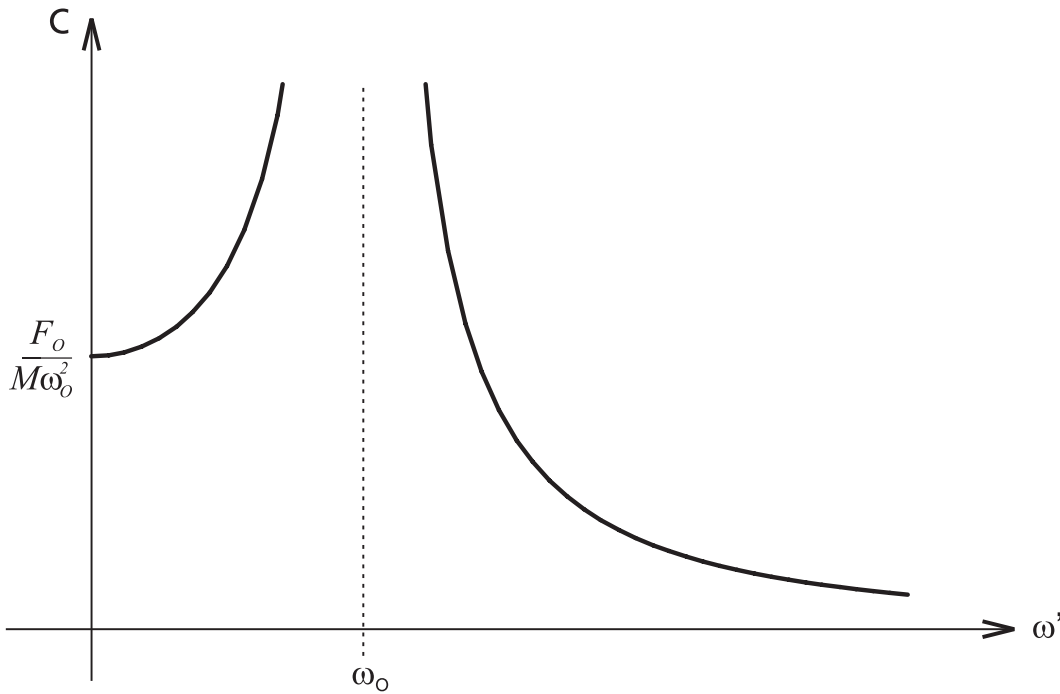
Agora, estamos prontos (finalmente!) para escrever a solução geral, que como vimos há pouco, é a soma da solução homogênea e da particular:

$$x(t) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{M(\omega_0^2 - \omega'^2)} \cos(\omega' t) \quad (7.12)$$

## Ressonância

Qual é a interpretação física da solução que acabamos de encontrar? Que tipo de movimento ela descreve? Você pode notar que a solução que encontramos é a soma de duas funções que oscilam com frequências diferentes: a primeira oscila com a frequência natural do sistema  $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ , e a segunda oscila com a frequência da força aplicada. O que se pode dizer sobre a amplitude de oscilação de cada uma delas? Para o termo com  $\omega_0$ , a amplitude de movimento é  $x_m$ , ou seja, depende apenas das condições iniciais. Já para o termo com a frequência da força aplicada, vemos que existe um valor de  $\omega'$  para o qual a amplitude de movimento é máxima. Este valor corresponde à chamada **frequência de ressonância**. Neste caso, em que desconsideramos o amortecimento, a frequência de ressonância é a frequência natural do sistema  $\omega_0$  para qual a amplitude diverge (Figura

7.2). Em sistemas físicos reais sempre existe algum amortecimento, como veremos a seguir. Nesses casos, a amplitude pode ser grande, porém, será sempre finita.



**Figura 7.2:** Amplitude  $C$  da solução particular da Equação 7.7 como função da frequência da força aplicada.

## Oscilações forçadas e amortecidas

Vamos voltar a considerar o caso forçado e amortecido que tem, como equação de movimento, a Equação 7.5, que repetimos a seguir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M} \cos(\omega' t)$$

Para resolvê-la, é necessário encontrar a solução da equação homogênea associada e uma solução particular da equação inhomogênea. A equação homogênea associada é

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7.13)$$

e se você tem boa memória, vai lembrar que esta é a equação do movimento harmônico amortecido que estudamos na aula anterior. Sua solução depende de o amortecimento ser subcrítico, crítico ou super crítico. Vamos supor que seja subcrítico. Neste caso,

$$x_{homogênea} = x_m e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.14)$$

Para encontrar a solução geral, temos de somar à solução homogênea uma solução particular da equação não-homogênea. A solução particular é

$$x_{particular} = \frac{F_0}{M \sqrt{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega'^2}} \cos(\omega' t - \theta) \quad (7.15)$$

onde

$$\theta = \arctan\left(\frac{\gamma \omega'}{\omega_0^2 - \omega'^2}\right) \quad (7.16)$$

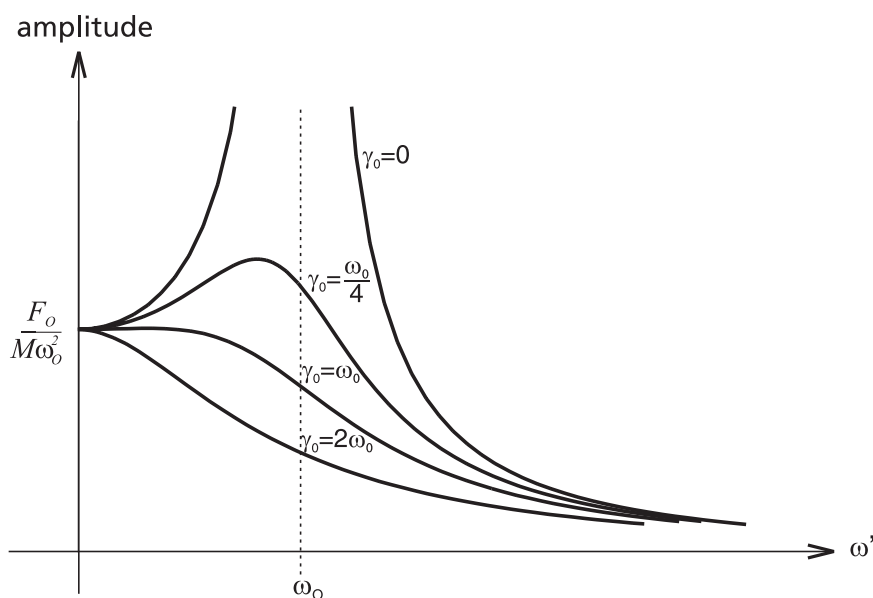
Desta vez apresentamos a solução sem mostrar passo-a-passo como ela foi encontrada. Ao final desta aula, você vai encontrar esta demonstração, pois afinal de contas, ninguém deve se satisfazer de encontrar uma solução sem compreender de onde ela veio...

Note que, como no caso anterior, a solução particular da equação não-homogênea tem a mesma frequência da força aplicada. Somando as soluções homogênea e particular, temos

$$x(t) = x_m e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{M \sqrt{(\omega'^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega'^2}} \cos(\omega' t - \theta) \quad (7.17)$$

Neste caso, como o movimento é amortecido, a solução da equação homogênea decai com o tempo, por isso é chamada **transiente**. A amplitude da solução particular não depende do tempo, por isso  $x_{particular}$  é chamado **solução estacionária**.

Analisando a Equação 7.17, vemos que a presença de amortecimento ( $\gamma \neq 0$ ) faz com que o denominador seja sempre diferente de zero. Dessa forma, como pode ser visto na Figura 7.3, a amplitude nunca diverge. No entanto, para pequenos amortecimentos, a amplitude pode ser bastante grande.



**Figura 7.3:** Amplitude da solução estacionária da Equação 7.17 como função da frequência da força aplicada, na presença de amortecimento.

Voltando ao exemplo da mãe empurrando a criança em um balanço, todos sabemos, por experiência própria, que, se os impulsos forem dados “com a frequência certa”, ou seja, com a frequência de ressonância, a amplitude de oscilação do balanço cresce cada vez mais, o que pode gerar gritos e choros!

## Solução particular do oscilador forçado e amortecido

Vamos voltar, agora, a procurar a solução particular do oscilador forçado e amortecido. Para tanto, vamos partir da Equação 7.5:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M} \cos(\omega' t)$$

Como esta equação envolve derivadas pares e ímpares, não vamos fazer como no caso do oscilador forçado e não-amortecido e supor que

$$x_{\text{particular}} = C \cos \omega' t$$

pois teremos não apenas cossenos, mas também senos. Nesses casos, é mais conveniente usarmos a notação complexa. Você deve se lembrar de que podemos escrever  $x(t)$  como a parte real de um número complexo:

$$x_{\text{particular}} = \text{Re } z(t) \quad (7.18)$$

Partindo da Equação 7.5, vamos escrever uma equação diferencial para  $z(t)$ :

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{M} e^{i\omega' t} \quad (7.19)$$

De posse da equação anterior, podemos agora dar um palpite para  $z(t)$ ,

$$z(t) = C e^{i\omega' t} \quad (7.20)$$

em que  $C$  é uma constante que precisamos determinar. A derivada de  $z$  fica, então,

$$\frac{dz}{dt} = i\omega' C e^{i\omega' t} \quad (7.21)$$

e sua segunda derivada,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\omega'^2 C e^{i\omega' t} \quad (7.22)$$

## Exercício 7.3

Substitua  $z$  e suas derivadas na Equação 7.19 e mostre que

$$C = \frac{F_0}{M(\omega_0^2 - \omega'^2 + i\omega'\gamma)} \quad (7.23)$$

Com  $C$  encontrado no exercício anterior, temos, finalmente,  $z(t)$ :

$$z(t) = \frac{F_0}{M(\omega_0^2 - \omega'^2 + i\omega'\gamma)} e^{i\omega't} \quad (7.24)$$

Para tomar a parte real de  $z(t)$  (e então encontrar  $x$ ), vamos reescrever a equação anterior:

$$z(t) = \frac{F_0}{Mz_1} e^{i\omega't} \quad (7.25)$$

Comparando as duas expressões, vemos que:

$$z_1 = \omega_0^2 - \omega'^2 + i\omega'\gamma \quad (7.26)$$

Na Equação 7.26,  $z_1$  é um número complexo escrito na forma  $z_1 = a + ib$  com  $a = \omega_0^2 - \omega'^2$  e  $b = \omega'\gamma$ . Podemos também escrever  $z_1$  na forma polar  $z_1 = re^{i\theta}$ .

## Exercício 7.4

Mostre que  $z_1 = re^{i\theta}$  com

$$r = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega'^2)^2 + \gamma^2\omega'^2} \quad (7.27)$$

$$\tan\theta = \frac{\gamma\omega'}{\omega_0^2 - \omega'^2} \quad (7.28)$$

Substituindo  $z_1$ , na forma polar, na Equação 7.25, temos

$$z(t) = \frac{F_0}{Mr e^{i\theta}} e^{i\omega't} = \frac{F_0}{Mr} e^{i(\omega't - \theta)} \quad (7.29)$$

ou ainda, substituindo  $r$ ,

$$z(t) = \frac{F_0}{M\sqrt{(\omega_0^2 - \omega'^2)^2 + \gamma^2\omega'^2}} e^{i(\omega't - \theta)} \quad (7.30)$$

Vamos tomar a parte real da Equação 7.30 para encontrar  $x_{particular}$ :

$$x_{particular} = \frac{F_0}{M\sqrt{(\omega_0^2 - \omega'^2)^2 + \gamma^2\omega'^2}} \cos(\omega't - \theta) \quad (7.31)$$

com  $\theta$  dado pela Equação 7.28.

Finalmente! Agora você já pode dormir sossegado, pois acaba de compreender como encontrar a solução para um oscilador harmônico forçado e amortecido. Como você já tinha entendido antes a interpretação física de cada um dos termos que compõem a solução, não falta mais nada. Podemos, agora, passar para os exercícios complementares.

## Resumo

Nesta aula, encontramos a equação diferencial que explica o comportamento de um oscilador forçado (amortecido ou não). Vimos que a solução mais geral para esta equação é dada pela soma da solução da equação homogênea associada a ela com uma solução particular da equação não-homogênea e aprendemos a encontrar essas soluções. Aprendemos, também, que existe uma frequência da força aplicada para a qual a amplitude do movimento é máxima. Essa frequência é chamada de frequência ressonância.

## Exercícios complementares

Vamos colocar em prática o que você aprendeu nesta aula, sobre oscilações forçadas. Para resolver os problemas a seguir, lembre-se de que a solução geral para um oscilador forçado (ou seja, para uma equação diferencial não-homogênea) é dada pela soma da solução para um oscilador equivalente não-forçado com uma solução particular do oscilador forçado. É sempre uma boa idéia usar, como solução particular, uma função que tenha a mesma dependência temporal da força externa.

1. Um oscilador subamortecido está sujeito a uma força externa constante  $F_0$ . Encontre  $x(t)$ .
2. Um oscilador não-amortecido está sujeito a uma força que decai exponencialmente com o tempo  $F = F_0 e^{-\alpha t}$ , em que  $\alpha$  é uma constante positiva. Encontre  $x(t)$ .
3. Um bloco de massa  $M$  está preso a uma mola de massa desprezível e constante elástica  $k$ . A mola é presa a um suporte e o sistema

é colocado sobre uma mesa, na horizontal. O coeficiente de atrito, cinético e estático, entre a mesa e o bloco é  $\mu$ . O bloco é deslocado de  $x_0 = 10\left(\frac{\mu Mg}{k}\right)$  de sua posição de repouso, distendendo a mola e solto. Encontre  $x(t)$ . Aviso: como a força de atrito está sempre na direção contrária ao movimento, é preciso tratar separadamente o movimento em cada direção.

### Auto-avaliação

Esta é uma das aulas mais difíceis sobre oscilações. Se você teve dificuldades nos problemas ou não entendeu alguma coisa, releia a aula mais uma vez. Discuta com seu tutor os trechos mais difíceis. Até a próxima aula!



## Aula 8 – Osciladores acoplados

### Meta da aula

- Estudar o efeito do acoplamento entre osciladores.

### Objetivo

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Entender o movimento de dois osciladores harmônicos acoplados.

### Introdução

Até agora, nós estudamos sistemas oscilantes nos quais apenas um corpo oscila, como no caso do pêndulo simples, pêndulo físico ou de uma massa presa a uma mola. Neste último caso, sempre consideramos a mola presa a um suporte fixo, ou, de modo equivalente, presa a uma massa infinita. O que acontece se consideramos que a mola está presa de um lado a uma massa, como antes, mas do outro lado temos também uma massa finita? Este será o assunto abordado nesta aula.

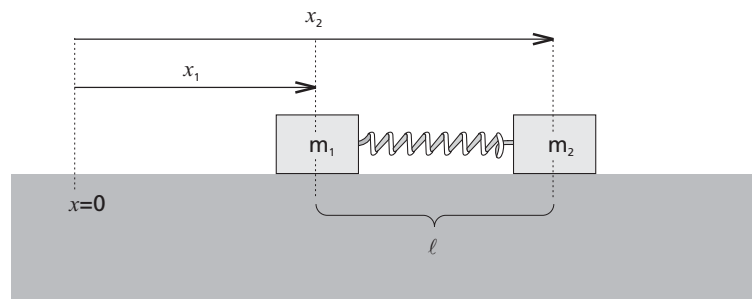
Como você já pode imaginar, estudar o problema de dois corpos que oscilam acoplados deve ser mais difícil do que estudar apenas um corpo oscilando, como nós fizemos até agora. Vamos ver, nesta aula, como transformar o problema de dois osciladores acoplados em dois problemas de um corpo.

Ainda assim, você deve estar se perguntando por que estudar este problema, qual o interesse em dois osciladores acoplados? Na natureza, ocorre com frequência o acoplamento de osciladores em que não podemos considerar uma das massas como infinita. Por exemplo, pense na molécula diatômica mais simples, a de hidrogênio ( $H_2$ ). Ela é composta por dois átomos de hidrogênio, com a mesma massa. A energia potencial de interação entre esses dois átomos, como função da distância entre eles, pode ser aproximada por uma parábola, para pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio. Dessa maneira, podemos imaginar estes átomos como se fossem massas ligadas por uma mola de massa nula. Mesmo quando temos moléculas diatômicas compostas por elementos diferentes, como por exemplo, CO ou HCl, os átomos que as compõem têm massas comparáveis e não podemos considerar que a mola virtual que liga os dois átomos está fixa em uma das extremidades. Vamos ver agora como tratar este problema.

Molécula diatômica →  
molécula formada por dois  
átomos

## Oscilações de duas partículas

Vamos considerar dois blocos, um de massa  $m_1$  e o outro de massa  $m_2$ , ligados por uma mola de constante elástica  $k$ , comprimento  $\ell$ , quando relaxada, e massa desprezível. Os dois blocos podem se mover sobre uma superfície horizontal, como mostra a Figura 8.1. Vamos escolher um ponto fixo sobre a superfície como origem do sistema de referência. Como o movimento se dará ao longo da linha que une estes blocos, vamos escolher o eixo  $x$  ao longo desta linha e orientá-lo: positivo para a direita. Vamos chamar  $x_1$  a distância da origem até o centro de massa do bloco de massa  $m_1$  e  $x_2$  a distância da origem até o centro de massa do bloco de massa  $m_2$ .



**Figura 8.1:** Osciladores acoplados.

Lembrando que o comprimento da mola é  $\ell$  e olhando para a figura, vemos que, quando a mola está relaxada,  $x_2 - x_1 = \ell$ . Quando a mola não está relaxada, podemos escrever a distensão ou compressão como

$$x = (x_2 - x_1) - \ell \quad (8.1)$$

onde o sinal positivo indica que a mola foi distendida e o negativo que ela está comprimida.

Agora que encontramos a compressão da mola, podemos escrever a força que atua sobre cada um dos blocos,

$$F_1 = kx = -F_2 \quad (8.2)$$

o sinal indicando a orientação das forças, de acordo com o eixo que escolhemos na figura. Não deve ser surpresa para você que elas sejam iguais e opostas (por quê?).

Vamos, mais uma vez, usar a segunda lei de Newton. Para cada um dos blocos, temos

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_1 \quad (8.3)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_2 \quad (8.4)$$

ou, substituindo  $F_1$  e  $F_2$ , encontrados na expressão 8.2,

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = kx = k(x_2 - x_1 - \ell) \quad (8.5)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx = -k(x_2 - x_1 - \ell) \quad (8.6)$$

Analisando as equações anteriores, vemos que a aceleração do bloco 1 depende não só de sua posição ( $x_1$ ), mas também da posição do bloco 2 ( $x_2$ ), o mesmo acontecendo para o bloco 2. Em outras palavras, nós temos duas equações diferenciais acopladas. Como resolver este problema? Em vez de descrever o movimento do sistema usando as coordenadas de cada um dos blocos,  $x_1$  e  $x_2$ , vamos usar a coordenada relativa  $x$ , que aparece nas expressões 8.5 e 8.6, e também a coordenada do centro de massa do sistema.

Você se lembra da coordenada do centro de massa, não é mesmo, já que você estudou o curso de Física I? A posição  $X$  do centro de massa deste sistema é dada por

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (8.7)$$

Podemos escrever a aceleração do centro de massa, derivando duas vezes a Equação 8.7,

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2}}{M} \quad (8.8)$$

onde  $M$  é a massa total do sistema:

$$M = m_1 + m_2 \quad (8.9)$$

### Exercício 8.1

Mostre que:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0 \quad (8.10)$$

Dica: Some as Equações 8.5 e 8.6.

Isto está bem claro, para você? Se não, faça uma revisão sobre centro de massa, no curso de Física 1. Se está claro, parabéns!

Você acaba de mostrar que a aceleração do centro de massa é nula. Isto ocorre porque o somatório das forças externas é nulo. Temos, então, que a velocidade do centro de massa  $V$  é constante, ou seja, o centro de massa do sistema está parado ou em movimento retilíneo uniforme.

Vamos ver o que acontece com a coordenada relativa  $x$ . De forma semelhante ao que fizemos acima, vamos usar as Equações 8.5 e 8.6. Faça o exercício a seguir!

### Exercício 8.2

Mostre que:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \frac{d^2 x_2}{dt^2} \right) = kx \quad (8.11)$$

Dica: multiplique a Equação 8.5 por  $m_2$  e a Equação 8.6 por  $m_1$  e subtraia uma da outra.

Lembrando-se da definição de  $x$  (Equação 8.1), vemos que sua segunda derivada é dada por

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 x_2}{dt^2} - \frac{d^2 x_1}{dt^2} \quad (8.12)$$

Vemos também que é útil definir

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (8.13)$$

Esta grandeza é chamada **massa reduzida**.

### Exercício 8.3

Qual é a unidade da massa reduzida?

Vamos agora substituir a definição de massa reduzida (Equação 8.13) e a aceleração da coordenada relativa  $x$  (Equação 8.12) na Equação 8.11, que encontramos no Exercício 8.2. Ficamos com a expressão

$$\mu \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (8.14)$$

O que esta equação nos diz? Que a coordenada relativa  $x$  se comporta como a coordenada de uma partícula de massa  $\mu$  realizando movimento harmônico

simples! A solução para a Equação 8.14 é nossa velha conhecida,

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (8.15)$$

onde agora a frequência angular é dada por

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (8.16)$$

e, conseqüentemente, o período fica

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} \quad (8.17)$$

Em resumo, nós vimos que, para descrever a oscilação de dois corpos acoplados, em vez de usar a coordenada de cada um dos corpos ( $x_1$  e  $x_2$ ), podemos usar a coordenada do centro de massa do sistema ( $X$ ) e a coordenada relativa  $x$ . Vimos também que, quando a soma das forças externas é nula, o centro de massa permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme ( $V$  é constante), enquanto a coordenada relativa ( $x$ ) realiza movimento harmônico simples (Equação 8.14).

## Considerações sobre a energia

Vamos agora estudar o que acontece com a energia deste sistema. Começemos olhando para a energia cinética  $K$ . Ela é a soma da energia cinética de cada um dos blocos:

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (8.18)$$

Vamos, mais uma vez, usar as coordenadas relativa e do centro de massa. Derivando a expressão para a coordenada do centro de massa (Equação 8.7), encontramos a velocidade do centro de massa

$$V = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{M} \quad (8.19)$$

Fazendo o mesmo para a coordenada relativa (Equação 8.1), temos a velocidade relativa

$$v = v_2 - v_1 \quad (8.20)$$

### Exercício 8.4

Mostre que:

$$v_1 = V - \frac{\mu}{m_1}v \quad \text{e} \quad v_2 = V + \frac{\mu}{m_2}v \quad (8.21)$$

Podemos escrever a energia cinética em termos da velocidade do centro de massa  $V$  e da velocidade relativa  $v$ . Para isso, vamos substituir na Equação 8.18 as expressões para  $v_1$  e  $v_2$  em função de  $V$  e  $v$ , encontradas no exercício anterior:

$$K = \frac{1}{2}m_1(V - \frac{\mu}{m_1}v)^2 + \frac{1}{2}m_2(V + \frac{\mu}{m_2}v)^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 \quad (8.22)$$

### Exercício 8.5

Demostre, passo-a-passo, a expressão acima.

A energia cinética pode ser separada em dois termos: um termo devido ao movimento do centro de massa do sistema e outro devido ao movimento da coordenada relativa.

E a energia potencial? Podemos escrevê-la em termos da compressão da mola:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad (8.23)$$

A energia total do sistema é dada pela soma das energias cinética e potencial

$$E = K + U = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (8.24)$$

Podemos reescrever essa energia como

$$E = E_{CM} + E_{int} \quad (8.25)$$

onde

$$E_{CM} = \frac{1}{2}MV^2 \quad (8.26)$$

é a energia do centro de massa do sistema, e

$$E_{int} = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (8.27)$$

é a energia total interna.  $E_{CM}$  e  $E_{int}$  se conservam separadamente: a translação do centro de massa não afeta a oscilação da coordenada relativa. A energia de oscilação  $E_{int}$  é idêntica a de um oscilador de massa  $\mu$  e deslocamento  $x$ .

## Resumo

Nesta aula, você estudou o movimento de dois osciladores acoplados e foi apresentado ao conceito de massa reduzida. Você viu que a descrição do movimento fica bastante simplificada se a fazemos usando a coordenada do centro de massa e a coordenada relativa.

## Exercícios complementares

Vamos agora, mais uma vez, fazer alguns exercícios sobre os conceitos que acabamos de aprender.

1. A massa do hidrogênio é aproximadamente igual a 1 u.m.a. (unidade de massa atômica). Determine a massa reduzida da molécula de hidrogênio, nesta unidade.
2. Ainda utilizando a unidade de massa atômica, determine a massa reduzida das seguintes moléculas diatômicas:  $O_2$ ,  $CO$  e  $HCl$ .
3. A molécula de  $HCl$  vibra com a frequência fundamental  $\nu = 8,7 \times 10^{13}$  Hz. Qual a constante elástica efetiva  $k$  para as forças de acoplamento entre o átomo de hidrogênio e o de cloro? Você diria que esta *mola* é mais dura que aquelas que você usou em suas experiências caseiras e no pólo?

## Auto-avaliação

Esta foi a última aula sobre oscilações. Esperamos que você tenha gostado! Se você teve dificuldades em alguma parte da aula, releia a aula mais uma vez. Discuta com seu tutor os trechos mais difíceis.

A seguir, você poderá encontrar uma lista de exercícios que engloba toda a matéria abordada neste módulo. Ao conseguir fazer os problemas, você terá um bom indicativo de que compreendeu bem os pontos abordados.





## Aula 9 – Aula de exercícios

Você vai encontrar, a seguir, uma lista com 9 problemas, que englobam toda a matéria vista no módulo de oscilações. Nem todos têm o mesmo grau de dificuldade. Faça primeiro os mais fáceis e, depois que compreendê-los bem, passe aos intermediários, deixando os mais difíceis para o fim. Para que você possa distinguir cada um deles, os problemas com grau de dificuldade intermediário estão identificados com • e os mais difíceis com ••. Não se esqueça de que os tutores poderão ajudá-lo. Bom trabalho!

1. (a) Mostre que o período e a frequência de qualquer movimento harmônico simples linear podem ser escritos como

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{x}{a}} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{a}{x}}$$

onde  $a$  é a aceleração linear e  $x$  o deslocamento linear.

- (b) Mostre também que o período e a frequência de qualquer movimento harmônico simples angular podem ser escritos como

$$T = 2\pi\sqrt{-\frac{\theta}{\alpha}} \quad \text{e} \quad \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\frac{\alpha}{\theta}}$$

onde agora  $\alpha$  e  $\theta$  são a aceleração e o deslocamento angulares.

2. Um corpo oscila em movimento harmônico simples e sua posição como função do tempo é dada por

$$x(t) = 9 \cos(3\pi t + \pi/3)$$

onde  $x$  é dado em metros, o tempo em segundos e os ângulos em radianos. Determine:

- (a) a frequência;
- (b) o período;
- (c) a fase do movimento.

Para  $t = 2,0$  s, determine também:

- (d) o deslocamento;
- (e) a velocidade;
- (f) a aceleração.

3. Uma partícula de massa  $M = 1,0 \text{ kg}$  é presa a uma mola e oscila em movimento harmônico simples. Sua posição como função do tempo é dada por

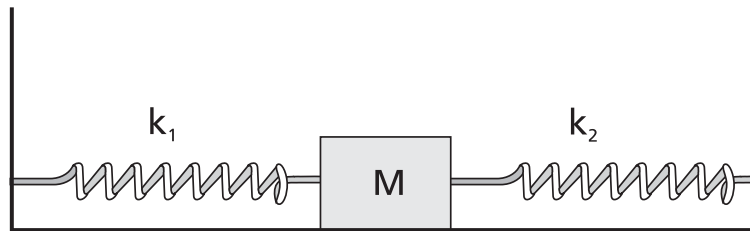
$$x(t) = 4 \cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

onde  $x$  é dado em metros, o tempo em segundos e os ângulos em radianos. Determine a constante elástica da mola.

4. Prendemos duas molas de constantes  $k_1$  e  $k_2$  em uma massa  $M$ , uma de cada lado. O sistema está na horizontal. Prendemos, agora, a outra extremidade de cada mola a um suporte fixo e colocamos o sistema para oscilar, como mostra a Figura 9.1 Considere que o atrito pode ser desprezado. Mostre que a frequência de oscilação é dada por

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}$$

Você verá em Física III que dois capacitores combinados em série formam um sistema elétrico análogo a este.

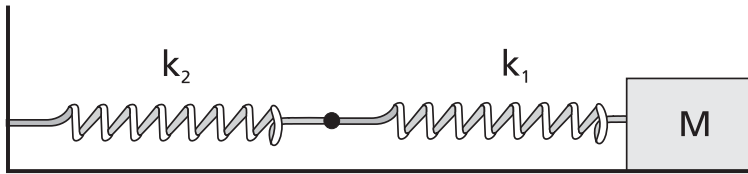


**Figura 9.1:** Massa  $M$  presa às molas  $k_1$  e  $k_2$ .

5. • Prendemos uma mola de constante  $k_1$  em uma massa  $M$  e a esta mola prendemos outra mola de constante  $k_2$ . Note que, diferente do que tínhamos no problema anterior, agora temos uma mola após a outra, ambas do mesmo lado da massa, mas o sistema permanece na horizontal. Prendemos, agora, a outra extremidade da mola de constante  $k_2$  a um suporte fixo e colocamos o sistema para oscilar, como mostra a Figura 9.2. Considere, ainda, que o atrito pode ser desprezado. Mostre que a frequência de oscilação é dada por

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) M}}$$

Você verá em Física III que dois capacitores combinados em paralelo formam um sistema elétrico análogo a este.

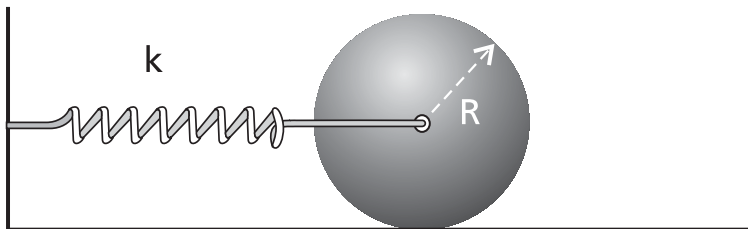


**Figura 9.2:** Massa  $M$  presa à mola  $k_1$ , que está presa à mola  $k_2$ .

6. •• Uma esfera maciça de massa  $M$  e raio  $R$  é ligada a uma mola (de massa nula e constante elástica  $k$ ) presa a um suporte. A esfera pode **rolar sem deslizar** em uma superfície horizontal (Figura 9.3). Inicialmente, deslocamos o sistema até que a mola esteja distendida de  $x_0$  e soltamos a esfera. Determine:
- (a) a energia cinética de rotação, quando a esfera passa pela posição de equilíbrio;
  - (b) a energia cinética de translação, quando a esfera passa pela posição de equilíbrio;
  - (c) mostre que o centro de massa da esfera executa movimento harmônico simples com período dado por:

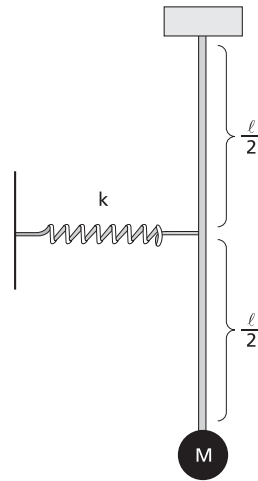
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{7M}{5k}}$$

Lembrete: o momento de inércia de uma esfera maciça de massa  $M$  e raio  $R$ , em torno de seu diâmetro, é  $I = \frac{2}{5}MR^2$ .



**Figura 9.3:** Esfera maciça de massa  $M$  e raio  $R$  ligada a uma mola de constante elástica  $k$ .

7. • Uma barra de comprimento  $\ell$  e massa desprezível é presa ao teto em uma extremidade e uma massa  $M$  é suspensa em sua outra extremidade. Uma mola horizontal, de constante elástica  $k$ , é presa ao ponto médio da barra. Sua outra extremidade é fixa e a mola está relaxada quando o pêndulo está em equilíbrio, na vertical, conforme mostra a Figura 9.4. Calcule a frequência  $\nu$  para pequenas oscilações no plano vertical.



**Figura 9.4:** Massa  $M$  presa a uma barra de comprimento  $\ell$ . No ponto médio da barra há uma mola de constante elástica  $k$ .

8. Uma partícula de massa  $M = 1,0 \text{ kg}$  é presa a uma mola e oscila em movimento harmônico amortecido. Sua posição como função do tempo é dada por

$$x(t) = 4 e^{-3t} \cos\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$$

onde  $x$  é dado em metros, o tempo em segundos e os ângulos em radianos. Determine:

- (a) a constante elástica da mola;
  - (b) a força de amortecimento que atua sobre a massa  $M$ .
9. ●● Um bloco de massa  $M = 1,0 \text{ kg}$  é preso a uma mola de massa desprezível e constante elástica  $k = 10,0 \text{ N/m}$ . A mola é fixa em sua outra extremidade e o sistema se encontra na horizontal. Preso à massa está um disco que é mergulhado em um fluido, de modo que o atrito não pode ser desprezado. Veja a Figura 9.5. O bloco é deslocado de sua posição de equilíbrio até  $x_0 = 10,0 \text{ cm}$  e então é solto a partir do repouso. Considerando que o atrito é proporcional à velocidade e que o coeficiente de proporcionalidade é  $b = 0,32 \text{ kg/s}$ , determine o número de oscilações que o bloco efetua no intervalo de tempo necessário para que a amplitude caia a um quarto de seu valor inicial.



**Figura 9.5:** Bloco preso a uma mola em um sistema com atrito proporcional à velocidade.

## Módulo 2 – Ondas

### Apresentação do módulo

Bem-vindo ao Módulo **Ondas**! Você já deve ter percebido que está sempre cercado por fenômenos ondulatórios: um som é emitido por uma corda de violão que vibra, ondas eletromagnéticas fazem parte do nosso dia-a-dia (luz, rádio, televisão, telefonia celular, ....).

Como fizemos no Módulo I, vamos consultar o dicionário do Aurélio Buarque de Hollanda Ferreira. Nele, você poderá encontrar, entre outras, as seguintes definições de uma onda:

- porção de água do mar, lago ou rio, que se eleva.
- perturbação periódica mediante a qual pode haver transporte de energia de um ponto a outro de um material ou do espaço vazio.

O Aurélio define também vários tipos de ondas, nem sempre com rigor científico: caminhanças (progressivas e regressivas), estacionárias, planas, esféricas, de gravitação, de pressão, de choque, longitudinais, transversais, materiais, monocromáticas, sonoras, sísmicas, portadoras, moduladas, eletromagnéticas etc.

Fenômenos complexos como interferência, difração, batimento, efeito Doppler somente são explicados invocando o conceito de onda. A dualidade *onda-corpúsculo* é a base da Mecânica Quântica, que descreve e explica o comportamento da matéria em nível microscópico (moléculas, átomos e partículas elementares).

Trata-se aqui de fornecer a você os conhecimentos básicos que abrirão as portas da Física Ondulatória.

Ao longo deste módulo, você vai encontrar referências ao Módulo I, ao conteúdo de outras Disciplinas, seja Física ou Matemática, a livros didáticos e à apostila *Tópicos de tratamento de dados experimentais*. Quando você se deparar com uma dessas referências, não perca a oportunidade de consultá-las, de fazer uma breve revisão.

E agora ... vamos *surfar* nessas ondas!



## Aula 10 – Ondas em uma dimensão: conceitos e definições

### Meta da aula

- Introduzir conceitos fundamentais sobre ondas e movimento ondulatório.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Produzir pulsos longitudinais e transversais.
- Observar sua propagação e suas reflexões.
- Produzir e observar ondas estacionárias transversais.
- Entender os conceitos ligados a essas observações.

### Introdução

Até agora, observamos e estudamos sistemas oscilantes caracterizados por grandezas físicas variando com o tempo em torno de uma posição de equilíbrio, não ocorrendo nenhuma **propagação** desses sistemas ou dessas grandezas. De fato, nenhum dos nossos pêndulos passeava pelo laboratório durante as experiências! Vamos dar um passo à frente e estudar um novo e importante conceito, o de **onda**. De maneira talvez um pouco simplista, podemos definir onda como uma **oscilação que se propaga no espaço**. Agora, você já imaginou um mundo de oscilações sem ondas ou de ondas sem oscilações? Seria um mundo bem estranho, com barcos oscilando verticalmente num mar sem ondas ou com orquestras tocando sem emitir nenhum som! A realidade é outra, com vibrações gerando ondas que se propagam e provocam novas vibrações. Assim, as vibrações da membrana de um pandeiro geram ondas sonoras que se propagam no espaço e, ao incidirem no nosso tímpano, o fazem vibrar. Da mesma forma, osciladores geram ondas eletromagnéticas que viajam até receptores, como aparelhos de rádio ou de televisão.

Embora nosso universo, macroscópico e não relativista, esteja confinado num espaço de três dimensões, as ondas podem se propagar em uma, duas ou três dimensões. Obviamente, a complexidade matemática do formalismo

que descreve essas ondas aumenta com o número de dimensões consideradas. Outrossim, não é trivial observar ondas em três dimensões! Vamos então começar pelo mais simples e observar ondas em uma e duas dimensões. As experiências propostas a seguir, caseiras ou no pólo, servirão também à introdução de vários conceitos importantes em Física ondulatória.

### EC3 - Onda longitudinal em uma dimensão: o efeito dominó

Você deve ter um conjunto de **dominós** em algum lugar da sua casa. Pois bem; coloque-os em pé, em cima de uma mesa, separados um do outro por aproximadamente 1 cm e aplique um peteleco no primeiro dominó à esquerda da fileira. Os dominós vão cair sucessivamente da esquerda para a direita, **sem sair do lugar**.

Ótimo, você acaba de produzir uma **onda longitudinal progressiva**, na qual a **grandeza que se propaga é um impulso**, ou seja, o peteleco que você deu. Aplicando um peteleco no primeiro dominó do lado direito, o mesmo fenômeno é observado em sentido oposto: a onda longitudinal progressiva se propaga da direita para a esquerda. A palavra **longitudinal** deve-se ao fato de que a direção do impulso é paralela à sua direção de propagação.

Observe que não há transporte direto de matéria, mas somente uma **propagação do ponto de contato** entre o último dominó que caiu e o dominó atingido por este. Sua experiência é parecida com a da Figura 10.1 a seguir, não é?

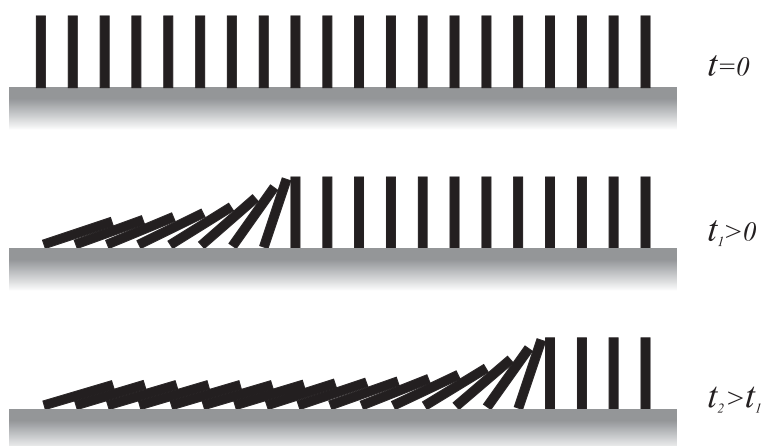
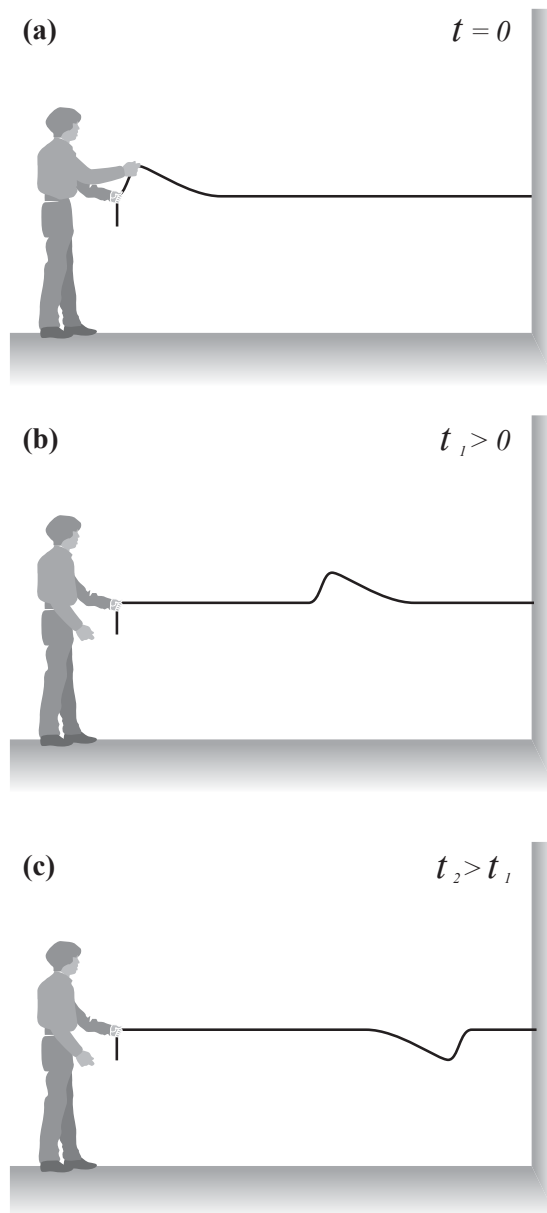


Figura 10.1: A queda dos dominós.



**EC4 - Onda transversal em uma dimensão: a corda vibrante**

Dê um pulo ao armarinho vizinho da sua casa e compre cinco metros de elástico roliço. Fixe uma das extremidades, por exemplo, na maçaneta de uma porta; segure a outra extremidade com a mão esquerda (supondo que você seja destro!) e recue três metros. Com o elástico imóvel, estique-o verticalmente, aproximadamente 20 cm para cima, com sua outra mão, como indicado na Figura 10.2 a seguir, soltando-o em seguida.



**Figura 10.2:** Propagação de um pulso transversal: (a) formação do pulso, (b) pulso antes da reflexão e (c) pulso refletido.

O que você observa?

- Você está notando que o pulso transversal vertical se propaga do lado de cima do elástico até a extremidade presa na maçaneta e volta em direção a você, agora do lado de baixo?
- Quando o pulso refletido atinge sua mão esquerda, você sente um pequeno impacto?
- Você vê que o pulso, após reflexão na sua mão, está indo, de novo, do lado de cima do elástico em direção à maçaneta, onde sofre uma nova reflexão, voltando do lado de baixo em direção a você etc., etc., etc.?

Muito bem, vamos resumir! Você produziu um **pulso transversal**, observou sua **propagação ao longo de um eixo** materializado pelo elástico e suas **reflexões com inversões** nas extremidades **fixas**. Você notou também que a **amplitude** desse pulso estava diminuindo progressivamente, caracterizando uma perda de energia do sistema?

Agora, com a ajuda de um amigo, você pode passar do **qualitativo** para o **quantitativo**. Faça de novo a experiência; peça a seu amigo para medir o tempo  $\Delta t$  decorrido entre a produção do pulso e a **quinta** volta à sua mão (o pequeno impacto nos seus dedos deve ajudar a contar o número de reflexões). Medindo o comprimento  $L_1 \pm \sigma_{L_1}$  do elástico **esticado**, você pode calcular a velocidade de propagação do pulso:

$$v_1 = \frac{10 L_1}{\Delta t}$$

Obviamente, sendo um físico sério, você vai estimar as incertezas sobre  $\Delta t$  e  $L_1$ , propagá-las para calcular o desvio padrão da velocidade  $v_1$  e obter um resultado digno de ser apresentado sob a forma  $(v_1 \pm \sigma_{v_1})$ ! Deu branco na memória? Não há problema; consulte sua apostila *Tópicos de tratamento de dados experimentais*! Tente medir  $v_1$  algumas vezes para verificar que os resultados das suas medidas são compatíveis com o desvio padrão  $\sigma_{v_1}$  que você determinou.

Já que você está gostando da brincadeira, determine a velocidade  $(\bar{v}_i \pm \sigma_{v_i})$  de propagação do pulso, para 3 novos comprimentos  $L_i = (L_{i-1} + 1.5) \text{ m}$  do elástico **esticado**.

Aplicando a Lei de Hooke, já enunciada na Equação 2.1 da Aula 2 do Módulo I, ao elástico de comprimento natural  $L_0$ , você sabe que

$$T_i = -k \Delta L_i$$

onde  $T_i$  é a tensão mecânica do elástico de constante de Hooke  $k$ , e  $\Delta L_i$  seu alongamento  $L_i - L_0$ .

De posse de  $\sigma_{v_i}$ , você sabe calcular a incerteza  $\sigma_{v_i^2}$  sobre o quadrado da velocidade. Pois bem, você pode, então, construir um gráfico de  $v_i^2$  contra  $\Delta L_i$ , sem esquecer as barras de erro  $2\sigma_{v_i^2}$  e  $2\sigma_{\Delta L_i}$ . Seus dados são compatíveis com uma dependência **linear** entre o quadrado da velocidade de propagação do pulso transversal e o alongamento, isto é, a tensão do elástico? Acreditamos que sim! Caso contrário, não entre em depressão e vá ao pólo para refazer esta experiência com a ajuda de um tutor. Mas, por que essa dependência? Com um pouco de paciência, você poderá satisfazer sua curiosidade quando estudar a equação do movimento de uma corda vibrante, na Aula 3 deste módulo.

Chega de ondas transversais! Basta uma pequena corrida até seu pólo para realizar uma experiência parecida com pulsos **longitudinais**.

#### EP4 - Onda longitudinal em uma mola

Chegou ao pólo a pleno vapor? Ótimo! Procure um tutor, pois nesta experiência você vai precisar de ajuda para medir de novo a velocidade de propagação de um pulso longitudinal em uma mola de comprimento  $L_0$  de aproximadamente 2 metros.

Fixe uma das extremidades da mola na parede e estique-a horizontalmente até obter um comprimento  $L_1 = 3.5\text{ m}$ .

Segure firmemente a outra extremidade com, por exemplo, sua mão esquerda; espere alguns instantes até a mola ficar perfeitamente imóvel, comprima uma meia dúzia de espiras entre o polegar e o indicador da sua mão direita e solte essas espiras.

O que você observa?

- Você está notando que a pequena região onde as espiras encontram-se comprimidas se propaga até a extremidade presa na parede e volta em direção a você? Cada espira, atingida pela volta da espira anterior à sua posição de equilíbrio, desloca-se ligeiramente e volta também à sua posição de equilíbrio: você está observando um **efeito dominó** um pouco mais complicado que o da experiência EC3!
- Quando o pulso refletido atinge sua mão esquerda, você sente um pequeno impacto?

- Você vê que o pulso, após reflexão na sua mão, está indo de novo em direção à parede onde sofre uma nova reflexão, voltando em direção a você etc., etc., etc.?

O que você aprendeu?

- Que o **pulso longitudinal de deslocamento** propaga-se ao longo de um eixo materializado pela mola esticada e **reflete-se** nas suas extremidades **fixas**, presas à parede e à sua mão.
- Você notou também que o impacto na sua mão era menos forte após várias reflexões, indicando que a **amplitude** do pulso estava diminuindo progressivamente, caracterizando uma perda de energia do sistema, como no caso da propagação de pulsos transversais em um elástico?

O que você ainda não sabe é que esta experiência é o primeiro passo no caminho que leva ao estudo da propagação de ondas em fluidos compressíveis, como, por exemplo, a de ondas sonoras, que será estudada mais adiante no seu curso (Aula 14).

Agora, com a ajuda do seu tutor, você pode medir o tempo  $\Delta t$  decorrido entre a produção do pulso e sua **quinta** volta à sua mão (de novo, o pequeno impacto no seus dedos deve ajudar a contar o número de reflexões). Medindo o comprimento  $L_i \pm \sigma_{L_i}$  do elástico **esticado**, você pode calcular a velocidade de propagação do pulso para 4 valores de  $L_i = (L_{i-1} + 1.5) m$

$$v_i = \frac{10 L_i}{\Delta t}$$

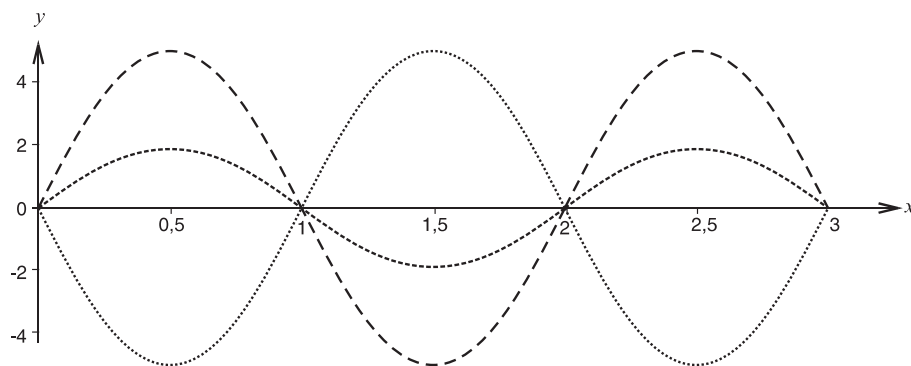
A partir de agora, usando de novo a Lei de Hooke e adotando um procedimento experimental idêntico ao da experiência EC4 anterior, você deve ser capaz de verificar a proporcionalidade entre o quadrado da velocidade de propagação do pulso longitudinal e a tensão da mola. Bom trabalho e até ... sua casa, onde fará mais uma experiência!

### EC5 - Onda estacionária transversal em uma corda vibrante

Até agora, seja em casa, seja no pólo, você produziu um único pulso, transversal em um elástico ou longitudinal em uma mola, observando sua propagação e suas reflexões. Vamos ver se você possui coordenação motora! Volte a esticar seu elástico e comece a imprimir **pequenas** oscilações horizontais de **baixa frequência** à extremidade que está na sua mão: você gera

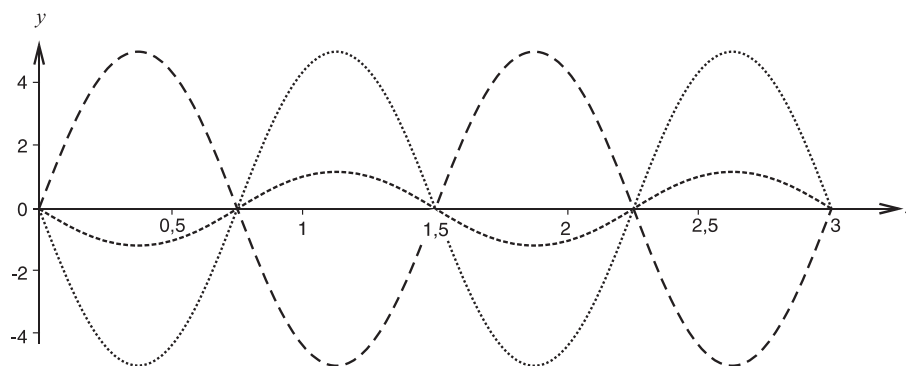
assim uma sucessão de pulsos que se propagam e se refletem! A superposição desses pulsos resulta em um movimento muito caótico e em nada interessante para merecer sua atenção. Entretanto, aumentando lentamente a frequência dessas **oscilações forçadas**, você pode observar que o elástico, de repente, oscila de modo **bem comportado**, sem **nenhuma propagação aparente**. Parabéns! Você acaba de produzir uma **onda transversal estacionária**, sem dúvida parecida com a da Figura 10.3 a seguir, cujas características mais notáveis são a existência de:

- **nodos** onde o elástico está sempre em repouso, isto é, onde a amplitude da onda é **nula** e
- **ventres** (ou **antinodos**) onde a amplitude da onda é **máxima**.



**Figura 10.3:** Perfis de uma onda estacionária transversal em três instantes diferentes. Os nodos encontram-se nas posições 0, 1, 2 e 3 e os ventres em 0,5, 1,5 e 2,5. As escalas são arbitrárias.

Observe também a presença de dois nodos **extremos**, um na extremidade presa na maçaneta da porta e outro na extremidade que você está chacoalhando com uma **amplitude pequena**. Você deve sentir como é difícil manter “viva” essa onda estacionária, pois qualquer mudança de ritmo no movimento da sua mão a “mata”. Entretanto, essa dificuldade tem um lado bom: ela sugere **fortemente** que a existência de uma onda estacionária depende do valor da frequência da oscilação forçada que a provoca, uma vez fixados os outros parâmetros do sistema físico (comprimento e tensão mecânica do elástico). A confirmação dessa hipótese está na sua mão, pois aumentando o **ritmo** das suas chacoalhadas, o movimento do elástico torna-se de novo caótico e, de repente, para uma **certa** frequência de oscilação, uma nova onda estacionária, parecida com a da Figura 10.4, aparece.



**Figura 10.4:** Perfis de uma onda estacionária transversal em três instantes diferentes. Os nós encontram-se nas posições 0, 0,75, 1,5, 2,25 e 3 e os ventres em 0,375, 1,125, 1,875 e 2,625. As escalas são arbitrárias.

Um conceito muito importante, o de **comprimento de onda**  $\lambda$ , pode ser introduzido observando com atenção as Figuras 10.3 e 10.4. Nessas figuras, as curvas tracejadas indicam o **perfil instantâneo** do elástico oscilando, como se uma fotografia tivesse sido tirada em um determinado instante. Aliás, você poderia tentar tirar essa fotografia com a ajuda de um amigo! Você concorda que o comprimento de onda é igual ao **dobro da distância entre dois nós (ou antinodos) sucessivos**?

Sendo  $L$  o comprimento do elástico sob tensão, você pode verificar nessas figuras que

$$L = 3 \frac{\lambda_3}{2} \quad (\text{na Figura 10.3})$$

$$L = 4 \frac{\lambda_4}{2} \quad (\text{na Figura 10.4})$$

Para os que preferem a teoria à experiência, pedimos um pouco de paciência. As duas últimas equações serão deduzidas de maneira geral, para um número  $n$  de antinodos,  $\lambda_n$  sendo o comprimento de onda do  $n$ -ésimo modo estacionário de vibração de uma corda vibrante presa nas suas duas extremidades:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad (10.1)$$

Podemos dizer que o comprimento de onda é, para a coordenada espacial  $x$ , ao longo da qual uma onda se propaga, o que o período de uma oscilação é para o tempo. Nesse sentido, o comprimento de onda traduz a periodicidade **espacial** de uma onda.

Você deve ter observado que todas as ondas que produziu precisam de um meio material para se propagarem, como a mola ou o elástico, por exemplo. Estas ondas que se propagam em meios materiais recebem o nome de

**ondas mecânicas.** Nem todas as ondas precisam de um meio material para se propagarem; as ondas eletromagnéticas, como a luz, podem se propagar no vácuo.

## Resumo

A observação e a produção de ondas em casa e no pólo permitiram a introdução dos seguintes conceitos:

- onda
- onda mecânica
- ondas logitudinais e transversais
- ondas progressivas e estacionárias
- ventres e nodos
- pulso
- amplitude
- perfil de uma onda

## Exercício complementar

Você pode brincar à vontade e tentar obter os quatro ou cinco primeiros modos de vibração do seu elástico. Bom trabalho!

## Auto-avaliação

Você gostou desta aula? Ela foi seu primeiro contato com as ondas e, por isso, sem muita matemática. Apesar da descontração, vários conceitos foram apresentados a você. Olhe para a lista apresentada no Resumo e reveja cada conceito. Eles estão bem claros? Muito bem! Você está pronto para seguir adiante.





# Aula 11 – Ondas em uma dimensão: a equação de onda

## Meta da Aula

- Introduzir a equação de onda em uma dimensão.

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender o formalismo matemático do movimento ondulatório unidimensional.
- Entender e aplicar a equação de onda.

## Pré-requisitos

- Para acompanhar esta aula, você precisará relembrar os conceitos de Derivadas parciais e a Regra da cadeia.

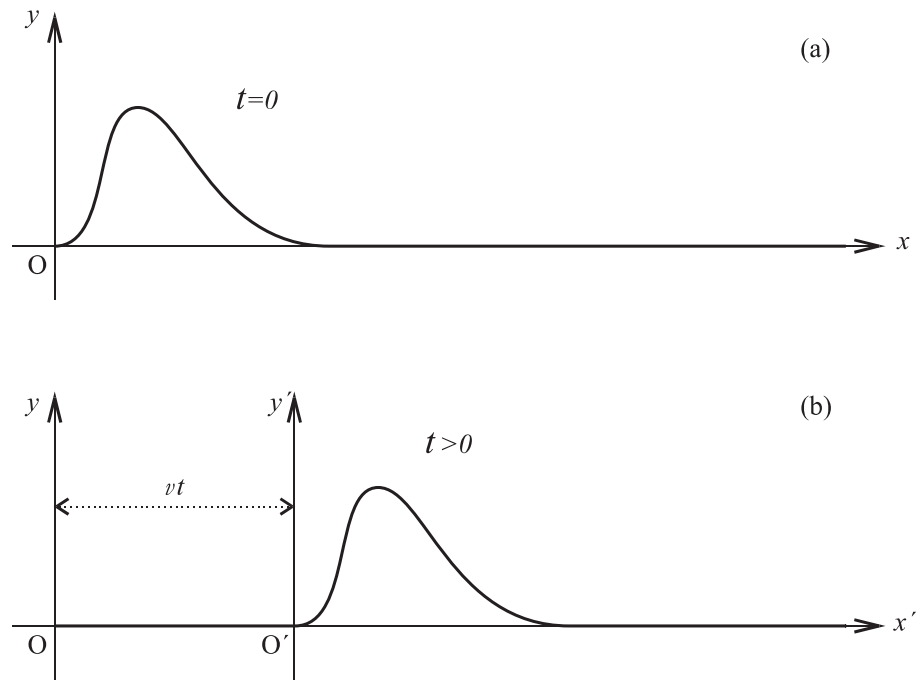
## Introdução

Na aula anterior, você produziu diversos tipos de onda e pôde, a partir da observação de suas experiências, compreender vários conceitos fundamentais ligados ao movimento ondulatório.

Vamos, agora, estudar a **matemática** que explica a propagação de uma onda. Como esta matemática pode ser muito complexa, vamos nos restringir ao caso unidimensional. Começaremos estudando a propagação de uma onda transversal em uma dimensão.

## Ondas progressivas

Observe, na Figura 11.1, a forma  $f(x)$  **arbitrária** do elástico esticado, quando atingido por um pulso transversal no instante inicial  $t = 0$ . Em um instante  $t$  posterior, este pulso animado de uma velocidade  $v$ , encontra-se a uma distância  $vt$  da origem  $O$ , na direção  $x$  positiva.



**Figura 11.1:** (a) Pulso em  $t = 0$ : os referenciais  $(x, y)$  e  $(x', y')$  coincidem. (b) Pulso em  $t > 0$ : o referencial  $(x', y')$ , que se move junto com o pulso, encontra-se, agora, na posição  $vt$ .

Em um novo referencial inercial  $(x', y')$  que se move junto com o pulso, a forma deste último, obviamente, não depende do tempo, o que podemos traduzir escrevendo

$$y'(x', t) = y'(x', 0) = f(x')$$

Os dois referenciais  $(x, y)$  e  $(x', y')$  são relacionados pela **Transformação de Galileu**, a seguir:

$$y' = y \quad \text{e} \quad x' = x - vt$$

Portanto,

$$y(x, t) = f(x - vt) \quad (11.1)$$

Usando a relação

$$\Delta x = v\Delta t$$

na Equação 11.1, temos

$$y(x + \Delta x, t + \Delta t) = f(x + \Delta x - v(t + \Delta t)) = f(x - vt) = y(x, t) \quad (11.2)$$

Esta última relação traduz o fato de que o pulso se propaga com a velocidade  $v$ , na direção  $x$  positiva, **sem mudar de forma**. Um ponto  $P$

qualquer do pulso, que estava na posição  $x$  no instante  $t$ , encontra-se na posição  $x + \Delta x$  no instante posterior  $t + \Delta t$ .

Obviamente, para um outro pulso qualquer de forma arbitrária  $g(x)$ , deslocando-se na direção  $x$  negativa, temos

$$y(x, t) = g(x + vt) \quad (11.3)$$

**OBSERVAÇÃO:** A dependência  $(x \pm vt)$ , deduzida após termos observado e estudado a propagação de ondas unidimensionais **transversais**, é geral e característica de **ondas unidimensionais**, sejam elas **transversais** ou **longitudinais**.

## Onda progressiva harmônica (OPH)

### • Conceitos e definições

Seja uma função  $f(x - vt)$  do tipo cossenoidal. Neste caso, a Equação 11.1 escreve-se:

$$y(x, t) = Y \cos[k(x - vt) + \delta] \quad (11.4)$$

ou seja,

$$y(x, t) = Y \cos[kx - \omega t + \delta] \quad (11.5)$$

com uma frequência angular de oscilação em um ponto  $x$  qualquer

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau} = kv \quad (11.6)$$

Nas equações anteriores,  $\nu$  e  $\tau$ , são, respectivamente, a frequência e o **período temporal**.

Considerando a Equação 11.5 em um instante determinado qualquer  $t_0$ , podemos definir um **período espacial**  $\lambda$  tal que:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (11.7)$$

A constante  $k$  é chamada **número de onda** e  $\lambda$  **comprimento de onda**. Você lembra que o conceito de comprimento de onda, isto é, de periodicidade espacial, foi introduzido no final da experiência EC5?

Para terminar as definições, podemos dizer que:

$\delta$  é a **constante de fase**,

$Y$  a **amplitude**, e

$\phi(x, t) = kx - \omega t + \delta$  a **fase** da onda.

A Figura 11.2a mostra os perfis de uma onda transversal harmônica em dois instantes  $t_0$  e  $t_0 + \Delta t$ . Em um ponto  $x_0$  qualquer, o deslocamento transversal varia com o tempo, de acordo com a Figura 11.2b.

Por que diabo, este nome de onda progressiva **harmônica**? Por uma razão simples: ela é produzida por um **movimento harmônico simples (MHS)** aplicado a uma extremidade de uma corda de **comprimento infinito**, pois, fazendo  $x = 0$  na Equação 11.5, obtemos a solução geral da equação do MHS (se sua memória falhar, viaje de volta no tempo e consulte de novo a Aula 2 do Módulo 1!):

$$y(0, t) = Y \cos(-\omega t + \delta) = Y \cos(\omega t - \delta)$$

#### Exercício 11.1

Por que o comprimento da corda vibrante tem de ser **infinito**?

#### • Velocidade de fase

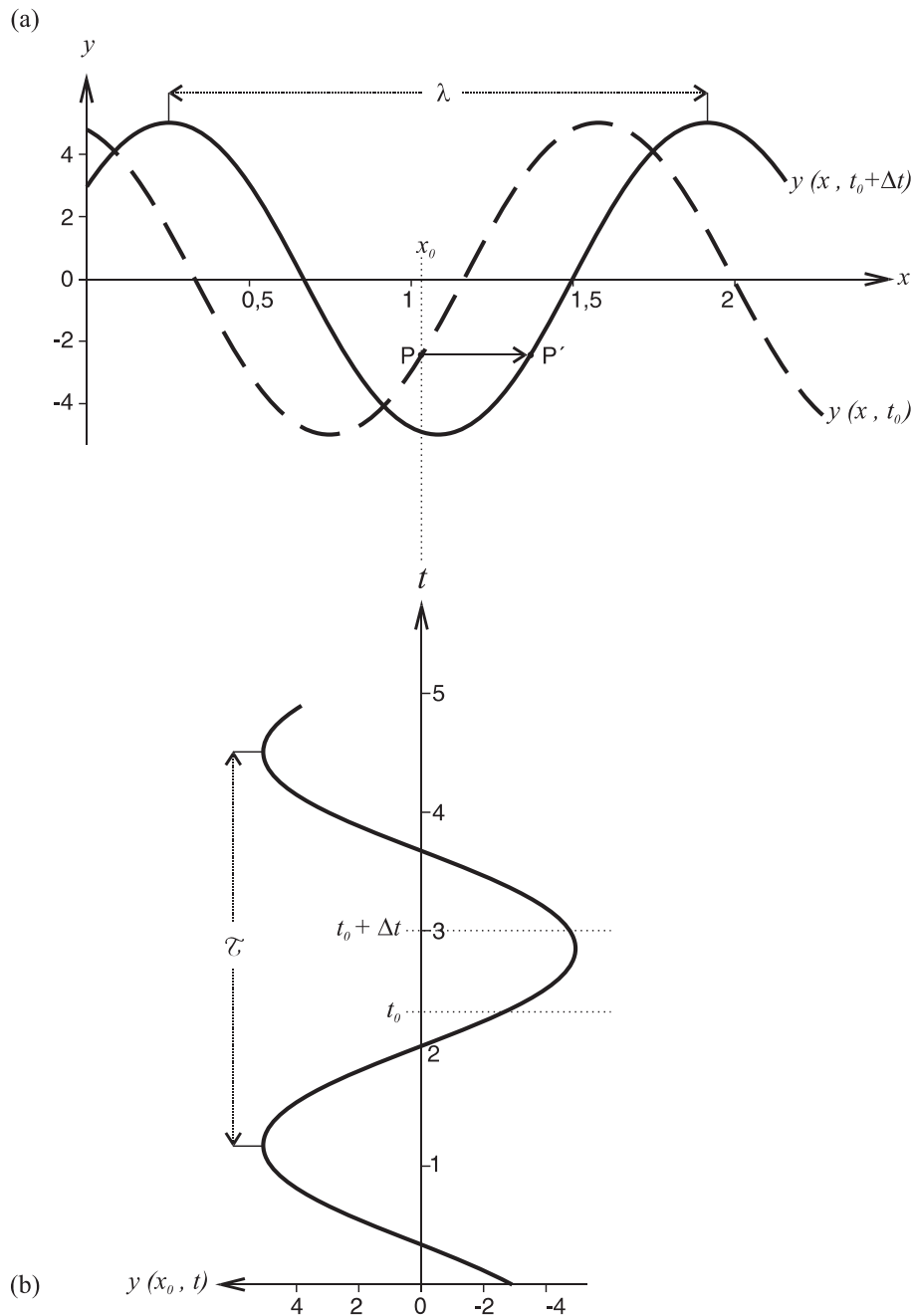
Volte a examinar a Figura 11.2a e considere, no instante  $t_0$ , o ponto  $P$  da corda vibrante. Este ponto, cuja fase é  $\phi(x_0, t_0)$ , encontra-se na posição  $P'$  no instante posterior  $t_0 + \Delta t$ . Obviamente, a fase  $\phi(x_0 + \Delta x, t_0 + \Delta t)$  do ponto  $P'$  é igual à fase do ponto  $P$ . Portanto, podemos escrever:

$$k(x_0 + \Delta x) - \omega(t_0 + \Delta t) + \delta = kx_0 - \omega t_0 + \delta$$

Obtemos, assim, a expressão da velocidade de um ponto qualquer de **fase definida e, portanto, constante**, ou **velocidade de fase** da onda:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k} \quad (11.8)$$

Compare as Equações 11.6 e 11.8!



**Figura 11.2:** (a) Onda progressiva em dois instantes diferentes:  $t_0$  e  $t_0 + \Delta t$ . (b) Dependência temporal do deslocamento transversal da onda no ponto  $x_0$ . As escalas são arbitrárias.

## Equação de onda em uma dimensão

Considere, de novo, a forma mais geral de uma onda progressiva propagando-se na direção  $x$  positiva:

$$y(x, t) = f(x') = f(x - vt)$$

Você se lembra do conceito de **derivada parcial de uma função de várias variáveis** e da **regra da cadeia**? Muito bem! Podemos, então, continuar.

A velocidade  $v_y$  **transversal** de um ponto qualquer da corda vibrante é, por definição:

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial t} = -v \frac{df}{dx'} \quad (11.9)$$

pois

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x - vt) = -v$$

De maneira análoga, podemos calcular a aceleração  $a_y$  **transversal** desse ponto:

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) = -v \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{df}{dx'} \right) = -v \frac{d}{dx'} \left( \frac{df}{dx'} \right) \frac{\partial x'}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 f}{dx'^2} \quad (11.10)$$

Agora, derivando  $y(x, t)$  em relação à variável espacial  $x$ , obtemos:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \quad (11.11)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{d}{dx'} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dx'^2}$$

pois  $\frac{\partial x'}{\partial x} = 1$

Combinando a Equação 11.10 e a segunda das Equações 11.11, podemos ver que o deslocamento  $y(x, t)$  satisfaz a seguinte **equação a derivadas parciais linear de segunda ordem**:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (11.12)$$

Essa equação, muito importante na Física e chamada **equação de onda em uma dimensão**, contém um termo  $v^2$ . Sendo assim, uma função do tipo  $y(x, t) = g(x + vt)$ , que descreve uma onda progressiva propagando-se na direção  $x$  **negativa**, é **também** solução dessa equação de onda.

#### Exercício 11.2

Você pode explicar a afirmação anterior?

Como a equação de onda 11.12 é uma equação de segunda ordem, sua **solução geral** contém **duas** funções **arbitrárias** determinadas pelas **condições iniciais** impostas ao sistema físico. No caso do movimento de uma corda, essas condições são o deslocamento e a velocidade transversal de cada ponto da corda no instante  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= \Phi(x) \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} &= \Psi(x) \end{aligned} \quad (11.13)$$

onde  $\Phi(x)$  e  $\Psi(x)$  são escolhidas arbitrariamente.

A **linearidade** da equação de onda e o **Princípio de Superposição** fazem com que a função

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad (11.14)$$

seja também uma solução dessa equação. Como a função 11.14 depende de **duas** funções arbitrárias  $f$  e  $g$ , que descrevem ondas progressivas propagando-se nas direções  $x$  positivo e negativo, respectivamente, ela **é a solução geral** da equação de onda unidimensional.

**OBSERVAÇÃO:** A forma da equação de onda unidimensional (Equação 11.12) é a consequência matemática direta da dependência espacial e temporal ( $x \pm vt$ ) de qualquer função susceptível de representar uma onda que se propaga em uma dimensão.

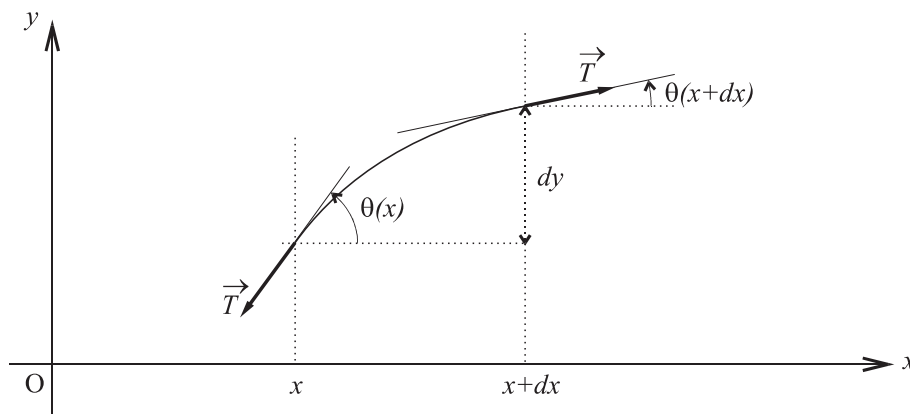
A grandeza  $y(x, t)$ , que até agora era o deslocamento transversal de uma corda vibrante, pode, de fato, representar qualquer grandeza física propagando-se em uma dimensão como, por exemplo:

- a compressão de um grupo de espiras ao longo de uma mola (onda longitudinal);
- o deslocamento de partículas, as variações de densidade e de pressão em um fluido dentro de um tubo (ondas sonoras longitudinais);
- os campos elétrico e magnético em ondas eletromagnéticas planas (ondas transversais) etc.

A **densidade linear de massa** é a quantidade de massa por unidade de comprimento:  $\mu = \frac{dm}{dx}$ .

## Equação do movimento de uma corda vibrante

A equação de onda unidimensional foi obtida usando-se muita Matemática e pouca Física, fato que a torna bastante geral e universal. Porém, é interessante obter essa equação a partir de argumentos **físicos**, o que vamos fazer, aplicando a Segunda Lei de Newton a um elemento  $dx$  de uma corda **uniforme** (como a de um violão) distendida e submetida a forças transversais. Quando a corda encontra-se em repouso ao longo do eixo  $x$ , qualquer ponto é submetido a duas forças iguais em módulo e de sentidos opostos, chamadas forças de **tensão**, ou simplesmente **tensões**. Seja  $T$  o módulo da tensão e  $\mu$  a **densidade linear de massa** da corda. Vamos agora considerar um **pequeno** deslocamento da corda em um plano  $(x, y)$ , como ilustrado na Figura 11.3. O deslocamento tem de ser pequeno, de maneira a podermos desprezar tanto o alongamento da corda como a variação da tensão  $T$ .



**Figura 11.3:** Tensões aplicadas em um elemento infinitesimal de corda.

As componentes verticais das tensões aplicadas ao elemento infinitesimal  $dx$  da corda, nos pontos  $x$  e  $x + dx$ , são expressas por:

$$T \sin(\theta) \simeq T \operatorname{tg}(\theta) = T \frac{\partial y}{\partial x}$$

pois um pequeno deslocamento implica  $\theta \ll 1$ .

A força vertical resultante  $dF_y$  aplicada ao elemento  $dx$  é, portanto,

$$dF_y = T \frac{\partial y(x + dx, t)}{\partial x} - T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = T dx \frac{\frac{\partial y(x + dx, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}}{dx}$$

ou, usando a definição da derivada segunda,

$$dF_y = T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx$$



Essa força, aplicada ao elemento de corda de massa  $\mu dx$ , provoca uma aceleração vertical

$$a_y = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}$$

A Segunda Lei de Newton,  $dF_y = \mu dx a_y$ , fornece a equação do movimento da corda:

$$\mu dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx$$

ou

$$\frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (11.15)$$

Essa última equação, obtida por Euler e D'Alembert, em meados do século XVIII, é idêntica à equação de onda unidimensional (11.12), com uma velocidade de fase

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (11.16)$$

O matemático, filósofo e homem de literatura Jean Le Rond d'Alembert nasceu em Paris em 1717 e morreu em 1783.

### Exercício 11.3

Calcule a velocidade de fase de uma onda numa corda de massa  $m = 5 \text{ g}$ , comprimento  $l = 60 \text{ cm}$ , submetida a uma tensão  $T = 10 \text{ N}$ .

## Potência transportada por uma OPH

Um oscilador que produz um MHS realiza trabalho e transmite energia à corda, que passa a oscilar. Essa energia, obviamente, não fica armazenada em algum ponto da corda, mas, sim, propaga-se com a onda. A força transversal restauradora aplicada, no ponto  $x$ , a um elemento  $dx$  da corda sob tensão  $T$ , é, como pode ser observado na Figura 11.3,

$$-T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x}$$

O produto dessa força pela velocidade transversal da corda no ponto  $x$ , isto é, o trabalho por unidade de tempo, ou **potência instantânea**, é:

$$P(x, t) = -T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}$$

No caso de uma onda progressiva harmônica (OPH), como a descrita pela Equação (11.5), obtém-se:

$$P(x, t) = \omega k T Y^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta)$$

## Exercício 11.4

Demonstre o resultado anterior.

Isso mostra que a **potência instantânea propaga-se** também ao longo da corda, com uma velocidade igual à velocidade de fase desta ( $v = \frac{\omega}{k}$ ). Calculando a média dessa potência em um período  $\tau$  de oscilação, obtém-se a **potência média**  $\overline{P}$  da OPH, também chamada de **Intensidade**  $I$ :

$$I = \overline{P} = \frac{1}{2} \omega k T Y^2 = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 Y^2 \quad (11.17)$$

pois sabemos que, de acordo com as Equações 11.6 e 11.16,

$$\begin{aligned} \omega &= kv \\ T &= \mu v^2 \end{aligned}$$

## Exercício 11.5

Demonstre o resultado (11.17).

Lembre-se da definição do valor médio de uma função de uma variável contínua e a relação trigonométrica a seguir!

$$\overline{P} = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} P(x, t) dt$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$$

Seja  $\Delta E$  a energia armazenada em um elemento  $\Delta x$  da corda:

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x$$

A potência transportada pela onda, durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , é, então,

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\partial E}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v \frac{\partial E}{\partial x}$$

Portanto, a potência **média** dada pela Equação 11.17 pode ser reescrita sob a forma

$$\overline{P} = v \overline{\frac{\partial E}{\partial x}} \quad (11.18)$$

onde  $\overline{\frac{\partial E}{\partial x}}$  é a **densidade linear média de energia total** da onda:

$$\overline{\frac{\partial E}{\partial x}} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 Y^2 \quad (11.19)$$

Esse último resultado pode ser encontrado como segue, lembrando que a energia mecânica total de um sistema manifesta-se sob as formas de energias cinética e potencial. No caso presente, a corda esticada possui energia **cinética**  $K$ , porque ela está se movendo, e **potencial**  $U$ , porque ela está deformada sob a ação da onda que a percorre. A energia cinética instantânea de translação vertical de um elemento  $dx$  de massa  $\mu dx$  é

$$dK = \frac{1}{2} \mu dx \left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]^2$$

A densidade linear dessa energia é, portanto,

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{1}{2} \mu \left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]^2$$

Usando a Equação 11.5, temos

$$\left[ \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]^2 = Y^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta)$$

Em consequência,

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{1}{2} \mu Y^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta)$$

Você conseguiu resolver o Exercício 11.5? Claro que sim! Então, você vai poder verificar facilmente que o valor médio da densidade linear de energia cinética, ou **densidade linear média de energia cinética**, escreve-se

$$\overline{\frac{\partial K}{\partial x}} = \frac{1}{4} \mu \omega^2 Y^2 \quad (11.20)$$

Mostra-se que a **densidade linear média de energia potencial** é igual à **densidade linear média de energia cinética**. Esse resultado é uma surpresa para você? Acharmos que não, pois você resolveu o Exercício 2.11 da Aula 2 do Módulo I! De qualquer maneira, vamos provar isso no caso da nossa corda vibrante. O elemento de corda  $dx$ , quando deslocado da sua posição de equilíbrio situada no eixo  $x$ , é submetido, **no ponto**  $x$ , a uma força **restauradora** vertical  $F_y$  (ver a Figura 11.3):

$$F_y = -T \frac{\partial y}{\partial x}$$

que derive de um potencial.

Portanto, podemos escrever

$$dU = - \int dF_y \, dy$$

ou

$$\frac{\partial U}{\partial x} = - \int \frac{\partial F_y}{\partial x} \, dy = \int T \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] \, dy = T \int \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \frac{\partial y}{\partial x} \, dx$$

ou, ainda,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = T \int \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) \, d \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{T}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Lembrando que

$$y(x, t) = Y \cos(kx - \omega t + \delta)$$

obtemos

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2} T k^2 Y^2 \sin^2(kx - \omega t + \delta)$$

Usando, de novo, as dicas do último exercício, chegamos à expressão da densidade linear média de energia potencial:

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{1}{4} \mu \omega^2 Y^2 \quad (11.21)$$

igual, portanto, à densidade linear média de energia cinética.

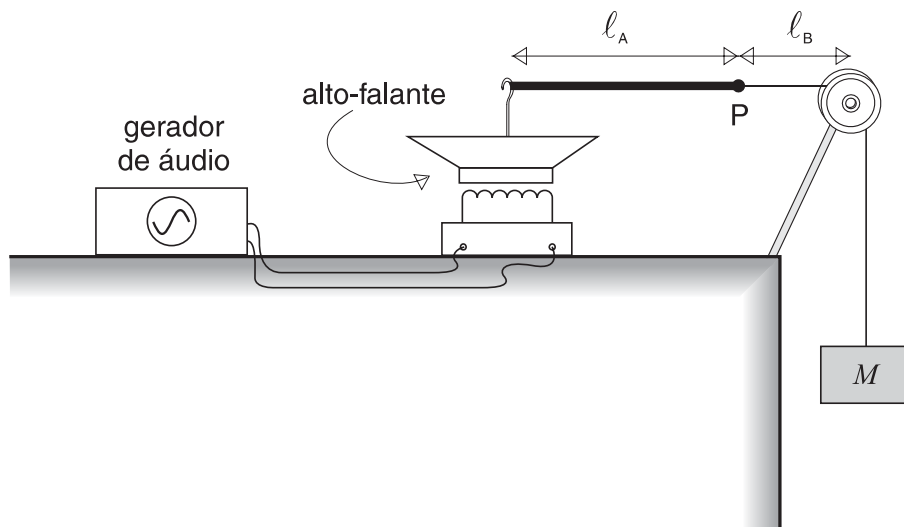
Somando essas densidades lineares médias de energia cinética (Equação 11.20) e potencial (Equação 11.21), encontramos a densidade linear média de energia total dada pela Equação 11.19.

## Resumo

Um pulso que se propaga sem deformação ao longo da direção  $x$  pode ser descrito por uma função do tipo  $f(x \pm vt)$ , onde  $v$  é a velocidade de fase da onda. Ondas progressivas harmônicas são aquelas em que a função  $f(x \pm vt)$  é cossenoidal. Essas ondas satisfazem à equação de onda em uma dimensão. Finalmente, a potência transmitida por uma onda harmônica simples é proporcional ao quadrado do produto da frequência angular pela amplitude da onda.

## Exercícios complementares

1. Dois fios, de comprimentos  $\ell_A$  e  $\ell_B$ , e de densidades lineares de massa  $\mu_a$  e  $\mu_B$ , respectivamente, estão dispostos de acordo com a figura a seguir. Sabendo-se que no fio A uma onda se propaga com velocidade  $v_A$  e frequência  $\nu_A$ , determine:



- a) a massa  $M$ ;
  - b) a velocidade  $v_B$ ;
  - c) a frequência  $\nu_B$ ;
  - d) o comprimento de onda  $\lambda_B$ ;
  - e) se  $\ell_A = 2\ell_B$ , a condição entre  $\mu_A$  e  $\mu_B$  para que o ponto de junção entre as cordas fique permanentemente parado e a massa  $M$  seja a menor possível.
2. Mariana está brincando com a corda que serve para secar roupas no varal. Ela desamarra uma das extremidades da corda e faz a extremidade oscilar para cima e para baixo, como na EC2. Esta oscilação é senoidal, tem frequência de 20 Hz, amplitude de 0,075 m e a velocidade da onda é de 12,0 m/s. A corda do varal é muito longa, e podemos supor que nenhuma onda seja refletida durante o intervalo de tempo em que observamos Mariana brincar. Escolhendo o instante inicial  $t = 0$  como aquele no qual a extremidade na mão de Mariana possui um deslocamento nulo e começa a se mover para cima ( $y$  positivo), determine as seguintes características da onda produzida por Mariana:
- a) a frequência angular;

- b) o período;
- c) o comprimento de onda;
- d) o número de onda;
- e) a potência instantânea máxima;
- f) a taxa de transferência média de energia que Mariana fornece à corda.

### Auto-avaliação

Esta aula é bem mais difícil que a anterior, não é mesmo? Mas é assim mesmo, algumas vezes a dificuldade é maior; o importante é não desanimar. Você entendeu bem os conceitos introduzidos nesta aula? Compreendeu bem a equação de onda? Ela foi apresentada a você de duas maneiras, no caso geral e na corda vibrante. Assim, com “repeteco”, as idéias envolvidas devem ficar mais claras. Funcionou? Muito bem, siga adiante! Ainda não? Releia a aula com calma e refaça os exercícios do meio da aula e os complementares também. Não esqueça que tutores podem ajudá-lo. Até a próxima aula!

## Aula 12 – Ondas em uma dimensão: interferência

### Meta da Aula

- Introduzir o fenômeno de interferência.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Entender o fenômeno de interferência.
- Conhecer ondas estacionárias.
- Entender o fenômeno de batimento.
- Compreender o conceito de velocidade de grupo.
- Compreender a reflexão de ondas.

### Introdução

Na Aula 1 deste módulo, você realizou algumas experiências caseiras com sistemas **unidimensionais** de extensão **finita** (fileira de dominós, e elástico submetido a oscilações transversais). Além da sua propagação, você observou a reflexão e a superposição de pulsos, chegando a produzir ondas estacionárias. Entretanto, todas as considerações matemáticas da Aula 2 foram feitas com cordas vibrantes de comprimento **infinito**: ondas eram geradas em um certo ponto e se propagavam indefinidamente, seja na direção  $x$  positiva ou negativa. Graças ao **Princípio de Superposição**, sabemos que qualquer combinação linear de ondas que se propagam em uma corda é uma onda que, também, pode caminhar nessa corda. Ao longo desta aula, você vai estudar alguns casos muito importantes de superposição de ondas.

## Superposição de OPH de mesma frequência

### Propagação no mesmo sentido

Sejam duas ondas progressivas harmônicas (OPH)

$$y_1(x, t) = Y_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) = Y_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2(x, t) = Y_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2) = Y_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

onde

$$\varphi_1 = -(kx + \delta_1)$$

$$\varphi_2 = -(kx + \delta_2)$$

A onda resultante  $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$  pode ser escrita

$$y(x, t) = Y \cos(\omega t + \varphi_1 + \beta)$$

com

$$Y^2 = Y_1^2 + Y_2^2 + 2Y_1Y_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = Y_1^2 + Y_2^2 + 2Y_1Y_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)$$

$$\text{sen}\beta = \frac{Y_2}{Y} \text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{Y_2}{Y} \text{sen}(\delta_2 - \delta_1) \quad (12.1)$$

#### Exercício 12.1

Demonstre os resultados anteriores.

**Refresque sua memória e consulte o Exercício 5.2 da Aula 5 do Módulo I.**

Você se lembra da Equação 11.17, que define a **intensidade** da onda e mostra que essa intensidade é proporcional ao **quadrado da sua amplitude**? Pois bem, sendo assim e levando em consideração que as OPH  $y_1(x, t)$  e  $y_2(x, t)$  possuem a mesma frequência angular  $\omega$ , é trivial mostrar, usando a primeira das Equações 12.1, que:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos(\delta_2 - \delta_1) \quad (12.2)$$

onde  $I$  é a intensidade da OPH resultante, e  $I_1$  e  $I_2$  são as intensidades das OPHs componentes.



## Exercício 12.2

Mostre que

para interferência **construtiva** ( $\delta_2 - \delta_1 = 2n\pi$  ;  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

- a intensidade da resultante é  $I_{max} = (\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2})^2$ , e que

para interferência **destrutiva** ( $\delta_2 - \delta_1 = (2n + 1)\pi$  ;  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ )

- essa intensidade é  $I_{min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$

Faça um gráfico de  $I$  como função da diferença de fase  $\delta_2 - \delta_1$  entre as OPH componentes.

## EC6- Ondas na praia

Para falar a verdade, a experiência proposta aqui não é uma experiência “caseira”! Trata-se, se for possível, de **observar ondas chegando na areia de uma praia**, antes de elas arrebentarem. Essas ondas podem, em primeira aproximação, ser consideradas como ondas progressivas transversais propagando-se em uma dimensão na água do mar. Com um pouco de paciência, você vai notar que, em intervalos de tempo bastante regulares, uma série de ondas de maior amplitude aparece. Da mesma maneira e com periodicidade parecida, ocorrem momentos de calmaria com ondas de pequena amplitude. Essa alternância, à primeira vista um pouco surpreendente, é simplesmente uma manifestação experimental da superposição de ondas progressivas de **mesma frequência** propagando-se no mesmo sentido: se a diferença de fase entre as ondas componentes varia de maneira **periódica**, a amplitude das ondas resultantes passa alternadamente por máximos e mínimos, de acordo com a Equação 12.1 e os resultados do último exercício proposto nesta aula. Os surfistas aproveitam esse fenômeno para descansar um pouco e esperar a chegada de uma série de ondas boas!

### Propagação em sentidos opostos

Consideramos, agora, a corda vibrante percorrida por duas ondas progressivas harmônicas (OPH), de mesma amplitude  $I$  e de constantes de fase  $\delta_2 = \delta_1 = 0$ , propagando-se em sentidos **opostos**:

$$y_1(x, t) = Y \cos(kx - \omega t)$$

$$y_2(x, t) = Y \cos(kx + \omega t)$$

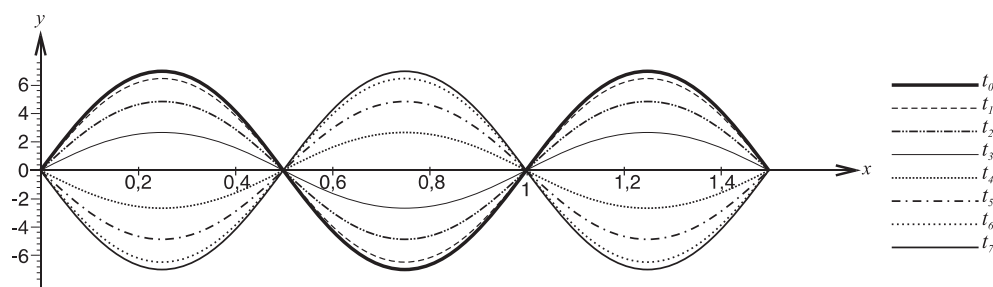
É trivial mostrar que a onda resultante é descrita pela equação

$$y(x, t) = 2Y \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (12.3)$$

#### Exercício 12.3

Demonstre o resultado anterior.

Essa onda resultante **não se propaga** e, por este motivo, é chamada de **onda estacionária**, aquela mesma que você produziu e observou durante sua experiência caseira EC5. Examinando, na Figura 12.1, o perfil da corda representado pela Equação 12.3 em diversos instantes  $t_i$ , você pode se convencer de que não existe propagação: todos os pontos se deslocam somente na direção vertical.



**Figura 12.1:** Perfis transversais de uma corda presa nas suas extremidades em 8 instantes de tempo diferentes. As escalas são arbitrárias.

## Exercício 12.4

Na Figura 12.1, sendo  $\tau$  o período das OPHs,

- qual o perfil da corda nos instantes  $t = \frac{\tau}{4}$ ,  $t = \frac{5\tau}{8}$  e  $t = \tau$ ?
- onde estão os **nodos** e os **antinodos** da onda estacionária?

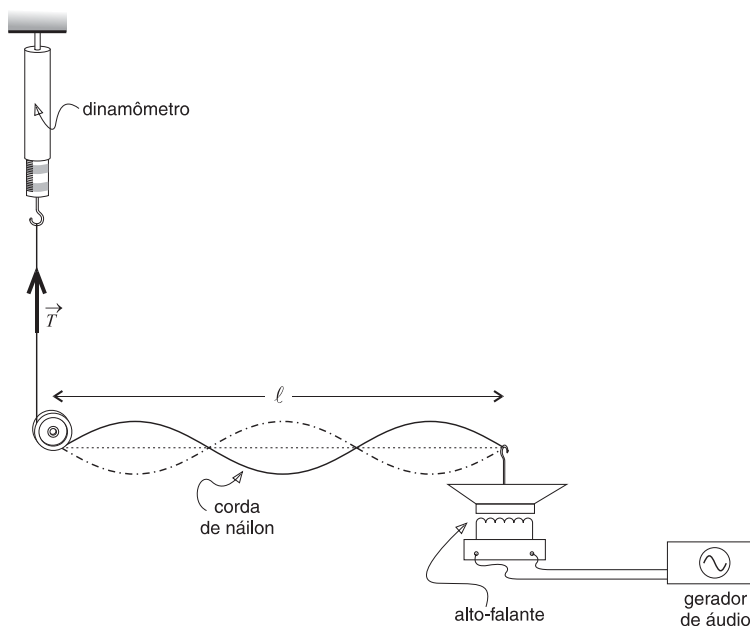
## EP5 - Ondas estacionárias transversais em uma corda vibrante

Fiéis ao nosso princípio de alternância “teoria-experiência”, sugerimos uma visita ao seu pólo para produzir, observar e analisar ondas estacionárias transversais em uma corda vibrante. A primeira tarefa consiste em montar seu arranjo experimental, com a ajuda de seu tutor. Você vai precisar de um gerador de onda senoidal, de um alto-falante, de cordas de náilon de vários diâmetros, de um dinamômetro e ... de paciência. Por que tudo isso?

O gerador produz um **MHS de voltagem** cujas amplitude e frequência podem ser ajustadas. Este MHS “elétrico” é transformado em oscilação harmônica simples **vertical** pela membrana do alto-falante. A extremidade da corda de náilon, presa no gancho solidário da membrana do alto-falante, é assim submetida a oscilações harmônicas simples. A corda, de comprimento  $L$ , massa linear  $\mu$  e sob tensão  $T$  medida pelo dinamômetro, é então percorrida por uma OPH que sofre múltiplas reflexões nas suas extremidades (materializadas pelo ponto de tangência entre a corda e a roldana e pela ponta presa no gancho), provocando, assim, ondas transversais verticais que, em geral, são **caóticas**.

**Observação:** O papel do conjunto **gerador-alto-falante** é o mesmo que o da sua mão durante as experiências EC4 e EC5. Você se lembra de como era difícil obter e manter uma onda estacionária no elástico?

A Figura 12.2 ilustra o princípio da sua experiência.



**Figura 12.2:** Esquema de montagem da EP2.

E agora? Aí entra a paciência do experimentador! Regule o gerador de maneira a obter um sinal elétrico de amplitude máxima e de frequência mínima: isto se traduz por um som **alto** e **grave**. Aumente **muito lentamente** a frequência, observando sua corda **lateralmente**. Para uma certa frequência  $\nu_n$ , aparecerá uma onda estacionária, com  $n$  ventres (ou antinodos) e conseqüentemente  $n + 1$  nós. Anote esses valores e continue aumentando **muito lentamente** a frequência, até obter uma nova onda estacionária com  $n + 1$  ventres para uma frequência  $\nu_{n+1}$ . Tente obter, pelo menos, 4 ondas estacionárias diferentes e, de posse das medidas, construa a tabela de dados a seguir:

n				
$\nu_n \text{ (s}^{-1}\text{)}$				
$\nu_n^2 \text{ (s}^{-2}\text{)}$				
$\frac{\nu_n^2}{n^2} \text{ (s}^{-2}\text{)}$				

Duas perguntas surgem:

- o que fazer com esses dados?
- os valores numéricos da última linha da sua tabela são iguais, dentro das incertezas experimentais?

Vamos ver que a resposta à última pergunta **deve ser “sim”** e explicar por quê!

As ondas estacionárias que você acaba de observar sugerem que a relação entre os comprimentos de onda  $\lambda_n$  e o comprimento  $L$  da corda de náilon é dada pela Equação 10.1, ou seja,

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

Você se lembra de que a experiência caseira EC5 já lhe sugeriu isto? Ótimo, podemos então continuar! Combinando as Equações 11.6 e 11.7, mostra-se facilmente a relação entre comprimentos de onda  $\lambda_n$ , velocidade de fase  $v$  e frequências  $\nu_n$ :

$$\lambda_n = \frac{v}{\nu_n}$$

Usando as duas equações anteriores, temos

$$L = \frac{n}{2} \frac{v}{\nu_n}$$

Mas sabemos que (ver a Equação 11.16)

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Portanto, podemos escrever

$$\zeta_n \equiv \frac{\nu_n^2}{n^2} = \frac{1}{4L^2} \frac{T}{\mu} \equiv \eta \quad (12.4)$$

Usando uma balança de precisão, você pode medir a massa de um comprimento arbitrário de fio de náilon de **mesmo diâmetro** que aquele usado para observar as ondas estacionárias e obter, assim, sua massa linear  $\mu$ . Agora, tendo medido  $L$  com uma trena e  $T$  com o dinamômetro, você pode calcular o valor  $\eta$  do segundo membro da Equação 12.4 (atenção às unidades!) e seu desvio padrão  $\sigma_\eta$ , dado pela equação a seguir, **desprezando** a incerteza sobre a massa linear  $\mu$ :

$$\sigma_\eta = \frac{1}{4\mu} \frac{T}{L^2} \sqrt{\frac{\sigma_T^2}{T^2} + 4 \frac{\sigma_L^2}{L^2}}$$

## Exercício 12.5

Com ou sem a ajuda da Tabela 1 da apostila **Tópicos de tratamento de dados experimentais**, demonstre a equação anterior.

Se você observou 4 ondas estacionárias diferentes, o valor médio de conjunto  $\bar{\zeta}$  das suas medidas  $(\zeta_n)_{i=1,4}$  é dado por

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 (\zeta_n)_i$$

e o desvio padrão de conjunto, de acordo com a Equação 6 da apostila **Tópicos de tratamento de dados experimentais**, por

$$\sigma_{\zeta} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^4 (\zeta_n)_i^2 - \frac{4}{3} (\bar{\zeta})^2$$

**Observação:** Cuidado para não confundir o número  $n$  de **antínodos** das ondas estacionárias com o índice  $i$ , que identifica cada uma dessas ondas!

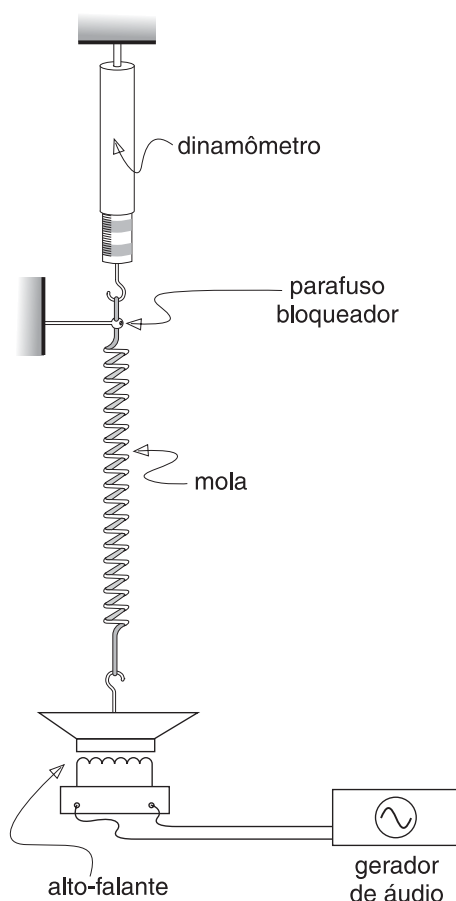
Agora, você tem tudo para discutir a compatibilidade entre  $\bar{\zeta}$  e  $\eta$  e afirmar que suas medidas estão de acordo com a Equação 12.4.

Você está curtindo o ambiente do laboratório? Esperamos que sim, já que você vai refazer a mesma experiência usando um fio de náilon de diâmetro diferente! Bom trabalho!

Se tudo correu bem, suas experiências foram um sucesso, pois você produziu e observou ondas estacionárias transversais e entendeu a física que está por trás das suas observações. Parabéns! Se não, não desanime! Refaça sua experiência e lembre-se de que você pode pedir ajuda a seu tutor.

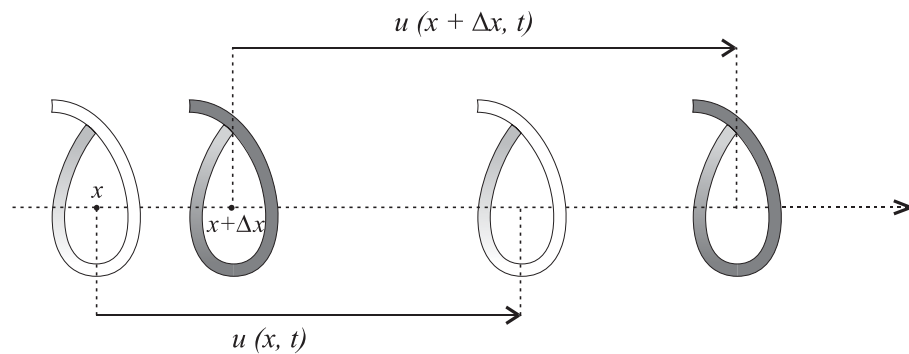
**EP6 - Ondas estacionárias longitudinais em uma mola**

Já que você gosta de aprender realizando experiências, sugerimos uma outra prática com ondas estacionárias, agora **longitudinais**. Basta, no seu arranjo anterior, trocar o fio de náilon por uma mola, como indicado na Figura 12.3.



**Figura 12.3:** Esquema de montagem da experiência EP3. O parafuso bloqueador deve ser apertado após a medida da tensão da mola e antes de ligar o gerador de áudio.

O procedimento experimental é o mesmo que o recomendado na experiência EP5 anterior. Se tudo der certo, você deve observar  $n + 1$  **nodos de compressão** da mola, materializados por **espiras imóveis**, e separados por  $n$  conjuntos de espiras vibrando, cada uma em torno do seu ponto de equilíbrio. Os  $n$  antinodos encontram-se na posição da espira cuja amplitude de vibração é máxima. Essas ondas estacionárias de compressão resultam da superposição de OPHs de compressão longitudinal que se propagam na mola e se refletem nas suas duas extremidades **fixas**. A **matemática** que descreve essas ondas é a mesma que a das ondas transversais, sendo que, agora,  $u(x, t)$  é o **deslocamento longitudinal** de uma espira. Na Figura 12.4, nota-se que as espiras que estão nas posições  $x$  e  $x + \Delta x$ , no instante  $t$ , encontram-se nas posições  $x + u(x, t)$  e  $(x + \Delta x) + u(x + \Delta x, t)$ , após o deslocamento.



**Figura 12.4:** Deslocamento longitudinal de duas espiras de uma mola.

**Observação:** Para evitar qualquer confusão, é preferível reservar a notação  $u(x, t)$  para ondas longitudinais e  $y(x, t)$  para ondas transversais.

Repita passo a passo, com a mola, o que você fez com o fio de náilon na experiência EP2: produza e observe ondas estacionárias de deslocamento longitudinal, adquira e trate seus dados experimentais e ... verifique que esses dados são compatíveis com a Equação 12.4, isto é, que essa equação traduz o comportamento de ondas estacionárias transversais ou longitudinais.

#### Exercício 12.6

Faça um relatório claro e objetivo das experiências EP2 e EP3.

## Superposição de OPH de frequências diferentes: Batimentos

Você se lembra da Aula 5 do Módulo I e, mais particularmente, da matéria sobre **batimentos**? Pois bem, sendo assim, você vai poder acompanhar o que segue sem nenhuma dificuldade! Sejam, então, duas OPHs propagando-se numa corda vibrante, no **mesmo sentido**, mas com frequências **ligeiramente** diferentes. Para simplificar o lado “matemático” da sua vida, vamos supor que as amplitudes das ondas sejam iguais e que as cons-



tantes de fase sejam nulas:

$$y_1(x, t) = Y \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$y_2(x, t) = Y \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Assumindo que,

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \ll \bar{\omega} = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)$$

$$\Delta k = k_2 - k_1 \ll \bar{k} = \frac{1}{2}(k_2 + k_1)$$

e aplicando as relações trigonométricas já utilizadas no estudo dos batimentos obtidos pela superposição de MHS paralelos (Aula 5), chegamos rapidamente ao seguinte resultado:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = \Xi(x, t) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t) \quad (12.5)$$

onde

$$\Xi(x, t) = 2Y \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \quad (12.6)$$

### Exercício 12.7

Demonstre o resultado anterior.

O que as Equações 12.5 e 12.6 ensinam? Em primeiro lugar, que a onda representada pela função  $y(x, t)$  oscila no tempo com uma frequência  $\bar{\omega}$  e que sua amplitude  $\Xi(x, t)$  oscila também no tempo, mas com uma frequência  $\Delta\omega/2$   **muito mais baixa** . Em segundo, que existem **duas** propagações **simultâneas**: a da onda resultante  $y(x, t)$ , com **velocidade de fase**

$$v = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \quad (12.7)$$

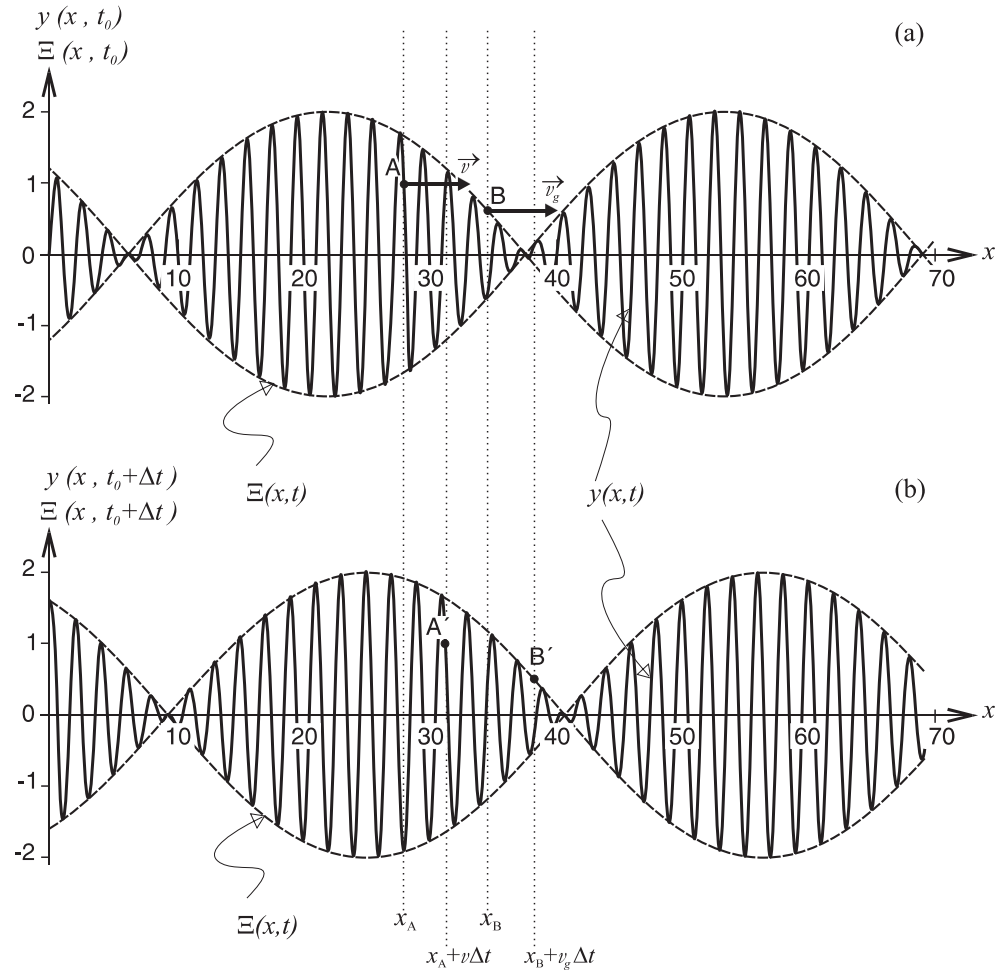
e a da sua **envoltória**  $\Xi(x, t)$ , com **velocidade de grupo**

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (12.8)$$

que pode ser aproximada por

$$v_g \approx \frac{d\omega}{dk} \quad (12.9)$$

O ponto A da onda resultante  $y(x, t)$ , de abscissa  $x_A$  no instante  $t_0$  na Figura 12.5a, aparece em  $A'$  no instante posterior  $t_0 + \Delta t$  (Figura 12.5b), na posição  $x_A + v \Delta t$ . Durante o mesmo intervalo de tempo, um ponto B da envoltória no instante  $t_0$  (Figura 12.5a) percorre a distância  $v_g \Delta t$  e encontre-se em  $B'$  (Figura 12.5b).



**Figura 12.5:** Onda resultante  $y(x, t)$  e sua envoltória  $\Xi(x, t)$  em dois instantes de tempo diferentes. As escalas são arbitrárias.

Em uma corda vibrante **homogênea**, de massa linear  $\mu$  e submetida a uma tensão  $T$ , sabemos que a velocidade de fase  $v$  de qualquer OPH é constante (ver a Equação 11.16):

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Portanto, usando a definição dessa velocidade (11.8), temos

$$\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$$

ou seja, as OPH que provocam o batimento e a onda resultante  $y(x, t)$  viajam na direção  $x$  positiva com a mesma velocidade de fase.

### Exercício 12.8

Demonstre o resultado anterior.

Outrossim, a partir da definição da velocidade de grupo (Equação 12.8), é fácil provar que

$$v_g = v$$

isto é, que no caso particular de batimentos em uma corda vibrante homogênea, as velocidades de fase e de grupo são iguais. Conclusão: Todo mundo viaja junto!

### Exercício 12.9

Você sabe demonstrar esse último resultado?

As OPH componentes que se superpõem formam uma espécie de pacote ou grupo **contido** entre os nodos da envoltória  $\Xi(x, t)$ , o que justifica o nome de **velocidade de grupo** dado à **velocidade de propagação dessa envoltória**.

Como as variações espacial e temporal da **amplitude da onda resultante**  $y(x, t)$  são expressas pela função  $\Xi(x, t)$ , a velocidade de grupo pode, também, ser chamada de **velocidade de propagação da amplitude** da onda resultante.

Finalmente, lembrando que a energia de uma onda é proporcional ao quadrado da sua amplitude, você pode entender por que a **velocidade de propagação da energia é a velocidade de grupo** e não a de fase.

As Figuras 12.5a e 12.5b ilustram as explicações e as equações desta secção, no caso particular de velocidades de fase e de grupo iguais.

**Observação:** No caso mais geral de meios definidos como **dispersivos**, a velocidade de fase **não é constante**, mas, sim, função do comprimento de onda (isto é, do número de onda). Nesse caso,

$$\omega = kv(k)$$

e temos, usando a Equação 12.9,

$$v_g = v(k) + k \frac{dv}{dk} \quad (12.10)$$

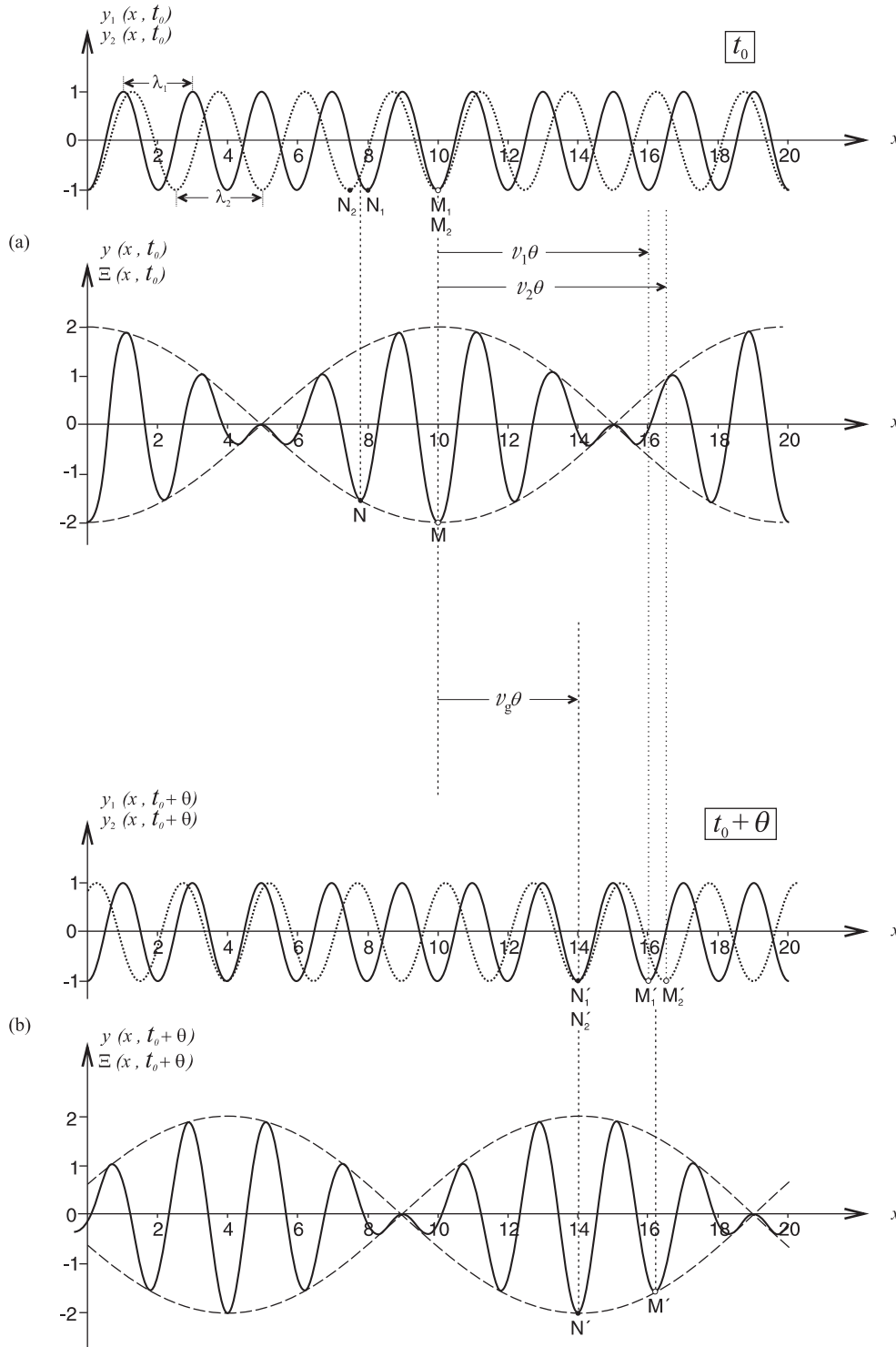
o que mostra que, nesses meios, a velocidade de grupo é **diferente** da velocidade de fase.

O fenômeno de dispersão é muito importante com ondas de luz (isto é, ondas eletromagnéticas), propagando-se em um meio material: como a cor da luz é determinada pelo comprimento de onda da radiação, observa-se que, em um meio material dispersivo, a velocidade de fase varia com essa cor e que, em consequência, a velocidade de grupo é diferente da velocidade de fase.

A Figura 12.6 permite deduzir a Equação 12.10 de maneira simples.

Sejam duas OPHs de comprimentos de onda **pouco** diferentes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 = \lambda_1 + d\lambda_1$ , propagando-se na direção  $x$  positiva com velocidades de fase  $v_1$  e  $v_2 = v_1 + dv_1$ . Suponhamos que, no instante  $t_0$ , os antinodos  $M_1$  e  $M_2$  estejam na mesma posição  $x_0$ . Obviamente, essa coincidência espacial não ocorrerá num instante posterior qualquer  $t_0 + \Delta t$ ! Entretanto, podemos escolher o intervalo de tempo  $\theta$  de maneira a obter, no instante  $t_0 + \theta$ , uma coincidência espacial entre os antinodos  $N'_1$  e  $N'_2$ .

O antinodo  $M$  da **envoltória** (ou máximo de amplitude da OPH resultante), com **velocidade de grupo**  $v_g$  e que se encontrava em  $x_0$  no instante  $t_0$ , está em  $N'$  na posição  $x_0 + \Delta x$  no instante  $t_0 + \theta$ . O mesmo ponto  $M$ , considerado agora como ponto da **OPH resultante**, com **velocidade de fase**  $v$ , encontra-se em  $M'$  no instante  $t_0 + \theta$ .



**Figura 12.6:** Perfis das ondas componentes ( $y_1$  e  $y_2$ ), de sua resultante ( $y$ ) e envoltória ( $\Xi$ ) em um meio dispersivo. (a) Perfil em  $t = t_0$  e (b) em  $t = t_0 + \theta$ , onde  $\theta$  é determinado pela Equação 12.11. As unidades são arbitrárias.

Observando cuidadosamente a Figura 12.6, podemos deduzir que

$$v_g\theta = v_1\theta - \lambda_1 = v_2\theta - \lambda_2$$

Usando as equações anteriores, obtém-se facilmente o valor de  $\theta$ :

$$\theta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{v_2 - v_1} \quad (12.11)$$

e portanto da velocidade de grupo:

$$v_g = v_1 - \lambda_1 \frac{v_2 - v_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = v_1 - \lambda_1 \frac{\Delta v}{\Delta \lambda}$$

Tomando o limite  $\Delta \lambda \rightarrow 0$ , a última equação pode ser reescrita sob a forma

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (12.12)$$

que é idêntica à Equação (12.10). Isto parece estranho? Claro que não, uma vez resolvido o exercício a seguir!

#### Exercício 12.10

Mostre que as Equações 12.10 e 12.12 são idênticas.

Lembre que  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  !

Se  $\frac{dv}{d\lambda}$  for positiva, a velocidade de fase  $v$  da onda resultante  $y(x, t)$  é maior que a velocidade de grupo da envoltória  $\Xi(x, t)$ . Neste caso, as ondas que compõem o grupo avançam com uma velocidade  $v$  de fase maior que a velocidade  $v_g$  do grupo (ver a Equação 12.12). Você pode observar este fenômeno realizando a experiência a seguir.

#### EC7 - Uma pedra na água

Tente encontrar uma área de, pelos menos, alguns metros quadrados de água **calma** e jogue uma pequena pedra nesse laguinho. Você vai observar a formação de um trem de ondas **circulares bi-dimensionais** na superfície da água-trem que se propaga com uma **velocidade de grupo** menor que a velocidade **de fase** das ondas individuais que o compõem. Não fique assustado com essas ondas em duas dimensões que não são **nem longitudinais nem transversais**; elas serão estudadas em disciplinas mais avançadas no seu curso de Física. O importante aqui é poder entender experimentalmente o significado de velocidades de fase e de grupo!

Um fenômeno semelhante ocorre quando um barco avança na água calma de um lago ou de um rio, criando um trem de ondas em forma de **V**: tais ondas são muito mais parecidas com as ondas unidimensionais, que você conhece bem.

Durante suas experiências EC4 e EP4, você observou as reflexões de ondas progressivas transversais ou longitudinais, mas, até agora, sem se preocupar em analisar o que acontecia nos pontos de reflexão. Essa “falha” vai ser corrigida a seguir.

## Reflexão de ondas transversais em uma dimensão

Consideramos um pulso transversal propagando-se em uma corda vibrante de dimensão **finita** na direção  $x$  negativa e representado pela função

$$y(x, t) = g(x + vt)$$

de acordo com a Equação 11.3.

Vamos examinar o que acontece quando este pulso atinge a extremidade da corda em duas situações possíveis: presa ou livre.

### Extremidade presa

Assumimos que a **extremidade presa** está localizada no ponto  $x = 0$ . Esta **condição de contorno**, em qualquer instante, é expressa por

$$y(0, t) = 0$$

Sabemos, desde a Aula 2, que a equação de onda 11.12 é uma equação de segunda ordem e que, portanto, sua **solução geral** (Equação 11.14) contém **duas** funções **arbitrárias**. O caso presente não escapa dessa regra e a função de onda

$$y(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

satisfaz, **qualquer que seja o instante  $t$** , a condição de contorno

$$f(-vt) + g(vt) = 0$$

Portanto, a função  $f(\alpha)$ , onde  $\alpha$  é uma variável qualquer, é univocamente determinada:

$$f(\alpha) = -g(-\alpha)$$

Equação de onda:  

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

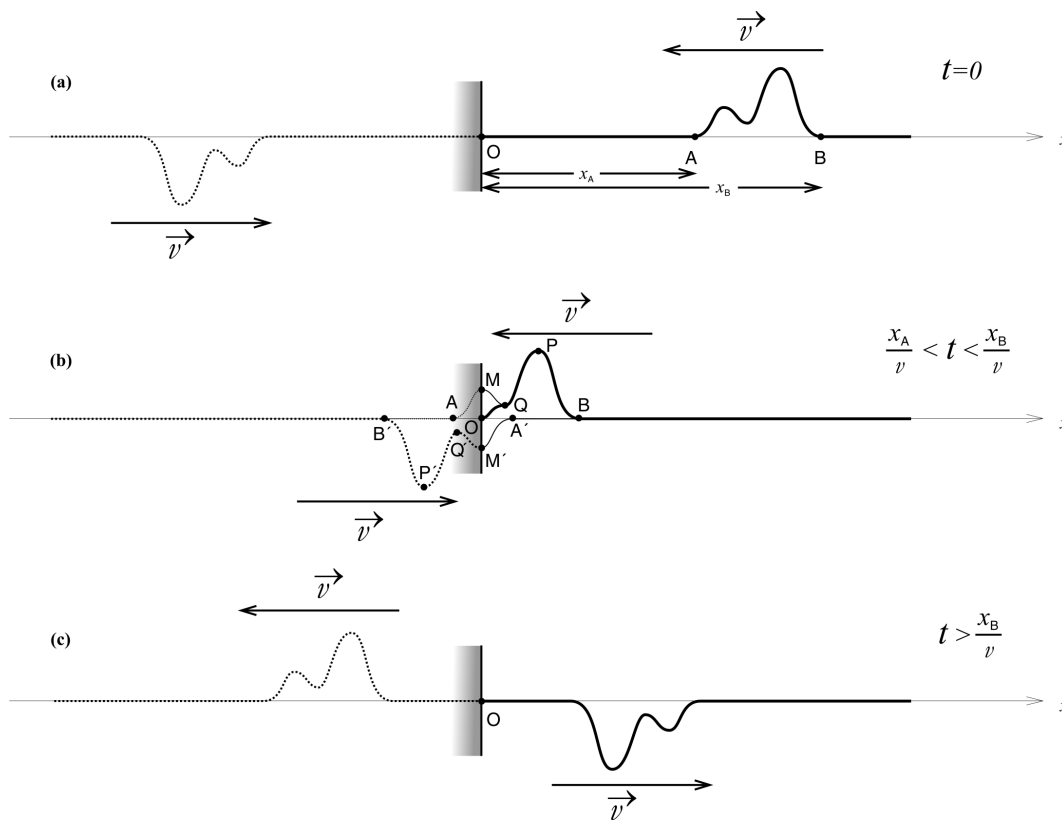
Assim, nosso pulso é representado por

$$y(x, t) = -g(vt - x) + g(x + vt) \quad (12.13)$$

Como interpretar este resultado? De maneira muito simples, como ilustrada na Figura 12.7, a seguir.

- **Antes** de ocorrer a reflexão em  $x = 0$  (Figura 12.7a), o segundo termo representa o pulso **incidente real** situado **na parte positiva** do eixo  $x$  propagando-se na direção  $x$  **negativa**; o primeiro termo, um pulso **virtual invertido** situado **na parte negativa** do eixo  $x$  propagando-se na direção  $x$  **positiva**.
- Após a reflexão (Figura 12.7c), os papéis se invertem e, enquanto o segundo termo passa a representar um pulso **virtual** situado **na parte negativa** do eixo  $x$  propagando-se na direção  $x$  **negativa**, o primeiro termo representa o pulso **refletido, real e invertido**, situado **na parte positiva** do eixo  $x$  propagando-se na direção  $x$  **positiva**.
- Durante a reflexão (Figura 12.7b), a parte  $AM$  do pulso incidente passa a ser **virtual** e, portanto, sem sentido físico, e a parte  $M'A'$  do pulso refletido torna-se **real**, isto é, com sentido físico. Mas, **cuidado**, pois a parte  $MQPB$  do pulso incidente e a parte  $M'A'$  do pulso refletido não representam o movimento real. Este **movimento real** é dado pela **superposição** descrita pela Equação 12.13 e ilustrada pela parte  $OQPB$  da Figura 12.7b.





**Figura 12.7:** Reflexão de um pulso em uma extremidade presa. Perfil da corda, antes (a), durante (b), e depois (c) da reflexão no ponto fixo  $O$ .

Podemos concluir que a reflexão em uma **extremidade fixa** provoca uma **defasagem de 180 graus**, pois  $e^{i\pi} = -1$ .

O que acontece quando a extremidade está livre? Vamos estudar isto agora.

### Extremidade livre

Quando a extremidade está livre, a tensão neste ponto não pode ter nenhuma componente  $T_y$  na direção  $y$  perpendicular à direção  $x$  da corda em repouso, o que traduzimos pela nova condição de contorno

$$-T \frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = 0$$

#### Exercício 12.11

Você pode justificar o sinal de menos na equação anterior?

Aplicando essa condição à solução geral (Equação 11.14), obtemos, em qualquer instante  $t$ ,

$$\left. \frac{\partial f(x - vt)}{\partial x} \right|_{x=0} + \left. \frac{\partial g(x + vt)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

Essa relação é satisfeita, desde que

$$f(x - vt) = g(-x + vt)$$

#### Exercício 12.12

Demonstre o resultado acima.

e a forma geral de pulso torna-se, assim,

$$y(x, t) = g(vt - x) + g(x + vt) \quad (12.14)$$

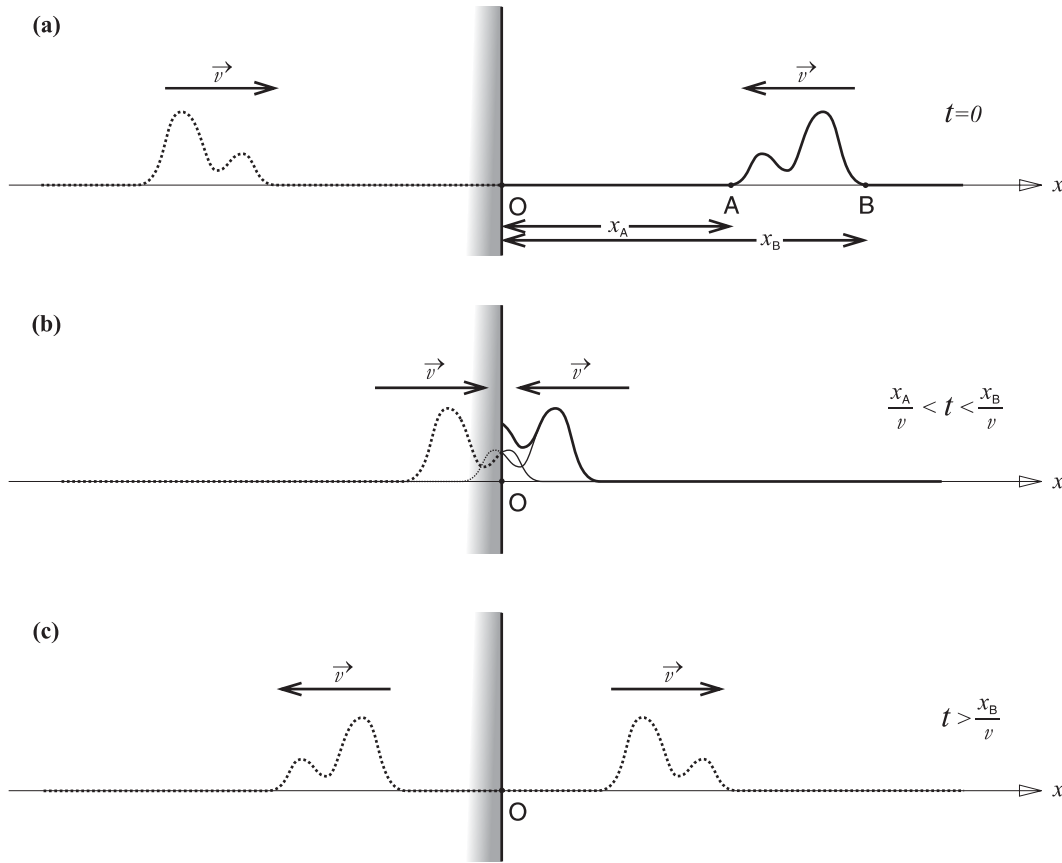
Isso mostra que, quando ocorre uma reflexão numa extremidade livre, um pulso se reflete sem sofrer inversão, isto é, sem mudança de fase. A Figura 12.8 ilustra uma reflexão de um pulso transversal na extremidade livre de uma corda.

#### Exercício 12.13

Observe atentamente a Figura 12.8 e

- indique qual parte do eixo  $x$  corresponde ao mundo físico real;
- identifique, com letras, o perfil do pulso **real** durante a reflexão (Figura 12.8b).

**Dica:** Inspire-se na análise da Figura 12.7.



**Figura 12.8:** Reflexão de um pulso em uma extremidade livre. Perfil da corda, antes (a), durante (b) e depois (c) da reflexão na extremidade livre.

## Modos normais de vibração

A formação de ondas estacionárias em uma corda vibrante de comprimento  $L$  presa nas suas extremidades pode ser descrita por OPHs refletindo-se nessas extremidades. Pode-se, também, usar um formalismo alternativo, o dos **modos normais de vibração**, descrito a seguir.

O que define um modo normal de vibração  $y_n(x, t)$  é o fato de que todos os pontos da corda oscilam de maneira única, a dependência **temporal** da oscilação sendo, por exemplo, do tipo  $\cos(\omega t + \delta)$ . A dependência **espacial**, ou amplitude de oscilação de cada ponto, é uma função  $Y_n(x)$  característica do modo de vibração identificado pelo índice  $n$ .

Estamos com meio caminho andado e só falta descobrir a forma das funções  $Y_n(x)$ , o que faremos usando as condições de contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad (12.15)$$

válidas em qualquer instante  $t$ .

Tratando-se de ondas estacionárias, a função

$$y_n(x, t) = Y_n(x) \cos(\omega t + \delta)$$

deve ser solução da equação de ondas (11.12).

Portanto, sendo a velocidade de fase da onda resultante  $y_n(x, t)$  igual a  $v$ , temos,

$$\frac{d^2 Y_n(x)}{dx^2} + k^2 Y_n(x) = 0 \quad \text{com} \quad k = \frac{\omega}{v}$$

#### Exercício 12.14

Demonstre o resultado anterior.

É claro que você sabe! Pois usou esta solução geral para resolver os exercícios complementares da Aula 6 do Módulo 1, lembra?

Sabe-se (Se você não souber, dê uma olhada no seu curso de Matemática sobre equações diferenciais lineares de segunda ordem) que a solução geral desta última equação pode ser escrita

$$Y_n(x) = \alpha_n \cos(kx) + \beta_n \sin(kx)$$

Usando a primeira das condições de contorno (12.15), é imediato ver que

$$Y_n(x = 0) = \alpha_n = 0$$

Portanto,

$$Y_n(x) = \beta_n \sin(kx)$$

e a segunda condição de contorno conduz a

$$Y_n(L) = \beta_n \sin(kL) = 0$$

Descartando a solução trivial e sem interesse,  $\beta_n = 0$ , pode-se dizer, então, que

$$kL = n\pi \quad \text{com} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Assim, descobrimos por que o índice  $n$  foi introduzido a priori, sem razão aparente!

O número de onda  $k$  só pode ter valores definidos pela relação

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

e o modo normal de vibração de ordem  $n$  é descrito pela equação

$$y_n(x, t) = \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}vt + \delta_n\right) \quad \text{com} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (12.16)$$

As constantes de fase  $\delta_n$  são arbitrárias.

Concluindo, podemos afirmar que os únicos modos possíveis de oscilação de uma corda vibrante de comprimento  $L$ , massa linear  $\mu$ , sob tensão  $T$  e presa nas suas extremidades, são os descritos pela Equação 12.16. Os comprimento de onda e frequência possíveis são

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{2L}{n} \\ \nu_n &= \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \end{aligned} \quad (12.17)$$

#### Exercício 12.15

Demonstre as Equações 12.17.

O modo **fundamental** é caracterizado por  $n = 1$  e os outros modos são chamados modos **harmônicos de ordem**  $n$ .

O período do modo fundamental é, portanto,

$$\tau_1 = \frac{1}{\nu_1} = \frac{2L}{v} \quad (12.18)$$

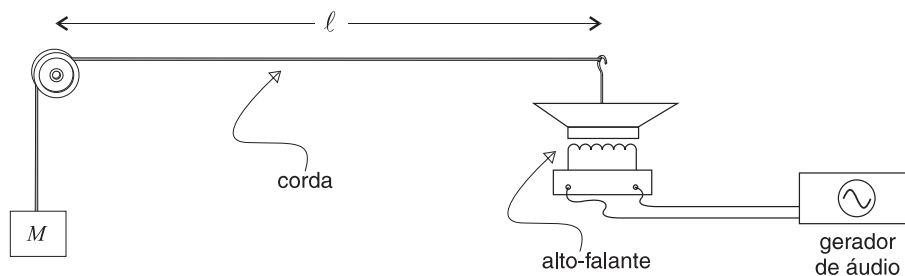
**Observação:** É importante notar que os modos normais unidimensionais que aparecem no caso particular de uma corda vibrante presa nas suas extremidades são, de fato, característicos de ondas de qualquer tipo (transversal ou longitudinal), confinadas em uma região limitada do espaço tridimensional. Um domínio muito importante de aplicação dos modos normais é o dos instrumentos musicais.

## Resumo

Ondas harmônicas simples que se propagam em sentidos opostos podem dar origem a ondas estacionárias. Estas ondas estacionárias foram produzidas em uma corda vibrante e em uma mola, em experimentos no pólo. A superposição de ondas de frequências diferentes, mas próximas, dão origem ao fenômeno de batimentos. Modos normais de vibração permitem descrever, de maneira alternativa, a reflexão de ondas.

## Exercícios complementares

- Colocamos um amplificador ligado a dois alto-falantes que emitem ondas senoidais **em fase**. Um dos alto-falantes está a  $1\text{ m}$  à direita do amplificador e o outro a  $2\text{ m}$  à esquerda. Na frente do amplificador, a distância de  $4\text{ m}$ , colocamos um detector. Sabendo que a velocidade do som é de  $350\text{ m/s}$ , determine:
  - Para que frequências ocorre interferência destrutiva no detector?
  - Para que frequências ocorre interferência construtiva no detector?
- Uma corda ligada a um alto-falante que vibra com frequência de  $20\text{ Hz}$  passa por uma polia e tem, em sua extremidade, um bloco, como mostra a figura a seguir. A densidade da corda é  $7,6 \times 10^{-3}\text{ kg/m}$  e o comprimento  $\ell$ , do alto-falante até a roldana, é  $6\text{ m}$ .



- Qual deve ser a massa do bloco, para que haja ressonância, sabendo-se que não existe nenhum nodo entre a roldana e o gancho?
- Qual deve ser a massa, para que existam 2 nodos entre a roldana e o gancho?

## Auto-avaliação

Você deve estar mareado, depois de tanto tempo passado em cima de ondas! Pois bem, chegou a hora de descansar um pouco e fazer uma auto-avaliação. O que você achou desta aula? Achou tudo muito fácil? Nem tanto? Se você conseguiu fazer todos os exercícios do meio da aula e acompanhou todos os pontos abordados, está pronto para seguir adiante. Se teve dificuldades, refaça, com muita paciência e disposição, todo o caminho que o trará de volta a esta mesma auto-avaliação. Em seguida, na próxima aula, você entenderá por que demos tanta importância às ondas **harmônicas**. Até breve!





## Aula 13 – Análise de Fourier

### Meta da aula

- Introduzir a análise de Fourier.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Aplicar o princípio de superposição.
- Descobrir a **simplicidade de ondas complicadas**.

### Introdução

Até agora, estudamos e combinamos ondas harmônicas representadas pelas funções **seno** ou **coseno**, como se tudo na Natureza fosse **senoidal**, o que, obviamente, não é o caso. Então, por que essa **fixação** por esse tipo de funções? A resposta está vindo aí, e podemos agradecer ao **princípio de superposição** e ao matemático francês **Joseph Fourier**, que mostrou, em 1807, que qualquer (ou quase!) função  $y(x)$  pode ser expandida em uma série infinita trigonométrica, chamada hoje **Série de Fourier**, sob a condição óbvia de que a série seja uma **série convergente**. Que sorte!

O barão Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em 1768, na França. Além de estabelecer a análise de Fourier, deu importantes contribuições ao estudo da difusão de calor. Morreu em Paris, em 1830.

### Série de Fourier

Fourier mostrou que uma função  $f(x)$  que possui um número **finito** de descontinuidades, de máximos e de mínimos em um intervalo  $[0, X]$ , pode ser expressa, **neste intervalo**, sob a forma da série infinita

$$f(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{sen}(n\varpi x) + b_n \operatorname{cos}(n\varpi x)) \quad (13.1)$$

onde  $\varpi = \frac{2\pi}{X}$ .

Os coeficientes  $a_i$  e  $b_i$  são dados pelas expressões

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{1}{X} \int_0^X f(x) dx \\ b_n &= \frac{2}{X} \int_0^X f(x) \cos(n\pi x) dx \\ a_n &= \frac{2}{X} \int_0^X f(x) \sin(n\pi x) dx \end{aligned} \quad (13.2)$$

Observa-se que o coeficiente  $b_0$  é o valor médio da função  $f(x)$  no intervalo  $[0, X]$ .

### Exercício 13.1

Será que J. Fourier, ou a gente, esqueceu de fornecer a expressão de  $a_0$ ? Justifique sua resposta.

Perfeito; mas o que o senhor Fourier tem a ver com a propagação de ondas? Vamos ver que tem tudo a ver!

De fato, você deve lembrar que os modos normais de vibração de uma corda de comprimento  $L$  presa nas suas extremidades são descritos pelas Equações 12.16

$$y_n(x, t) = \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}vt + \delta_n\right) \quad \text{com} \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (13.3)$$

que dependem de constantes arbitrárias  $\beta_n$  e  $\delta_n$  (se você esqueceu isso, dê uma olhada na aula anterior).

O **Princípio de Superposição** nos ensina que qualquer combinação linear dessas soluções é também uma solução da equação de ondas, o que significa que a superposição de modos normais é também um modo normal. Assim, podemos concluir que o movimento **mais geral** de uma corda vibrante é representado pela superposição de uma **infinitude de modos normais**, ou seja,

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}vt + \delta_n\right) \quad (13.4)$$

As condições **iniciais** deste movimento (Equações 11.13) escrevem-se, no intervalo  $0 \leq x \leq L$ :

$$\begin{aligned} y(x, 0) &= \Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos(\delta_n) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} &= \Psi(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{n\pi}{L} v \sin(\delta_n) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned} \quad (13.5)$$

e permitem determinar as constantes  $\beta_n$  e  $\delta_n$  como segue.

### Exercício 13.2

Demonstre os resultados anteriores.

Observe atentamente as condições iniciais (13.5) e compare-as à expressão geral da Série de Fourier (13.1), em que  $X$  pode ser substituído por  $2L$ . Você concorda que essas condições são Séries de Fourier com coeficientes do tipo  $a_n$  (ver as Equações 13.2)? Ótimo, assim você pode obter rapidamente, por identificação, as expressões a seguir:

$$\begin{aligned} \beta_n \cos(\delta_n) &= \frac{2}{L} \int_0^L \Phi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ -\beta_n \frac{n\pi}{L} v \sin(\delta_n) &= \frac{2}{L} \int_0^L \Psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{aligned} \quad (13.6)$$

e determinar, assim, todas as constantes  $\beta_n$  e  $\delta_n$ .

### Exercício 13.3

Usando as Expressões 13.5 mostre que, de fato,

$$\begin{aligned} \overline{\Phi(x)} &= \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \Phi(x) dx = 0 \\ \overline{\Psi(x)} &= \frac{1}{2L} \int_0^{2L} \Psi(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (13.7)$$

Podemos também estudar a dependência **temporal** do movimento geral de um ponto particular de abscissa  $x = x_0$ . A Equação 13.4 pode ser reescrita sob a forma:

$$y(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}vt + \delta_n\right)$$

ou ainda,

$$y(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Xi_n(x_0) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (13.8)$$

com

$$\Xi_n(x_0) = \beta_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \quad \text{e} \quad \omega_n = 2\pi\nu_n = \frac{n\pi}{L}v \quad (13.9)$$

Você lembra que o domínio **espacial** da função  $y(x_0, t)$ , cuja expressão é dada pela Série de Fourier (13.8) e considerada como função da coordenada **espacial**  $x_0$ , é **finito** e definido pelo intervalo  $0 \leq x_0 \leq L$ , ou seja, pelo comprimento  $L$  da corda? Pois bem! Agora, dois fatos merecem atenção. Em primeiro lugar, o domínio **temporal** da função  $y(x_0, t)$ , considerada agora como função do **tempo**, é **infinito**. Outrossim, essa função é **periódica**, com período **temporal** igual ao período  $\tau_1$  do modo normal fundamental de vibração da corda. Surpreendente ... porém verdadeiro, pois, usando a equação para o período fundamental  $\tau_1$  e a segunda das Equações 12.17, podemos escrever

$$\tau_1 = \frac{1}{\nu_1} = \frac{2L}{v}$$

$$2\pi\nu_n(t + \tau_1) = 2\pi\nu_n t + 2\pi\frac{\nu_n}{\nu_1} = 2\pi\nu_n t + 2\pi n$$

o que prova que  $\tau_1$  é o período **comum** a todos os modos normais de vibração.

Observação: Cuidado! O fato de  $\tau_1$  ser comum a todos os modos normais de vibração não significa que todos os modos de vibração possuem o mesmo período, mas somente que o período do movimento geral da corda é igual ao período do modo normal fundamental.

Essa periodicidade temporal pode ser prevista com o auxílio da Trigonometria! De fato, podemos escrever a Equação 13.8 sob a forma

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen}[k_n(x - vt) - \delta_n] + \operatorname{sen}[k_n(x + vt) + \delta_n] \quad (13.10)$$

onde o número de onda  $k_n$  é, como vimos na aula anterior, por definição, dado por

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

## Exercício 13.4

Demonstre a Equação 13.10.

Assim, vemos que cada modo de vibração resulta da superposição de ondas progressivas harmônicas (OPH) propagando-se em sentidos opostos. Sabemos que ocorrem reflexões com inversão de sinal em cada extremidade da corda. Portanto, após **duas** reflexões, encontramos de novo as OPHs originais propagando-se no mesmo sentido, isto é, observamos uma situação idêntica à situação inicial.

Podemos escrever de maneira simbólica que, **antes de qualquer reflexão**,

$$y(x, t_0) = OPH_2(-) + OPH_1(+)$$

após o **primeiro par de reflexões**,

$$y(x, t_1) = -OPH_2(+) - OPH_1(-)$$

e após o **segundo par de reflexões**,

$$y(x, t_2) = OPH_2(-) + OPH_1(+)$$

Complicado? A Figura 13.1 vai ajudar a entender tudo isso mais facilmente.

Dois pulsos transversais produzidos, no instante  $t = 0$ , no meio de uma corda de comprimento  $L$ , propagam-se com uma velocidade  $v$  em direção às extremidades  $A$  e  $B$  **fixas**.

Em um instante  $t_0$  posterior (Figura 13.1a), os pulsos  $OPH_1(+)$  e  $OPH_2(-)$  encontram-se nas posições  $l_0$  e  $(L - l_0)$ , respectivamente.

A primeira reflexão em  $A$  inverte o pulso  $OPH_1(+)$ , transformando-o em um pulso  $-OPH_1(-)$  que se dirige em direção à extremidade  $B$ . Da mesma maneira, o pulso  $OPH_2(-)$ , ao se refletir em  $B$ , torna-se um pulso  $-OPH_2(+)$  caminhando em direção à extremidade  $A$ . No instante

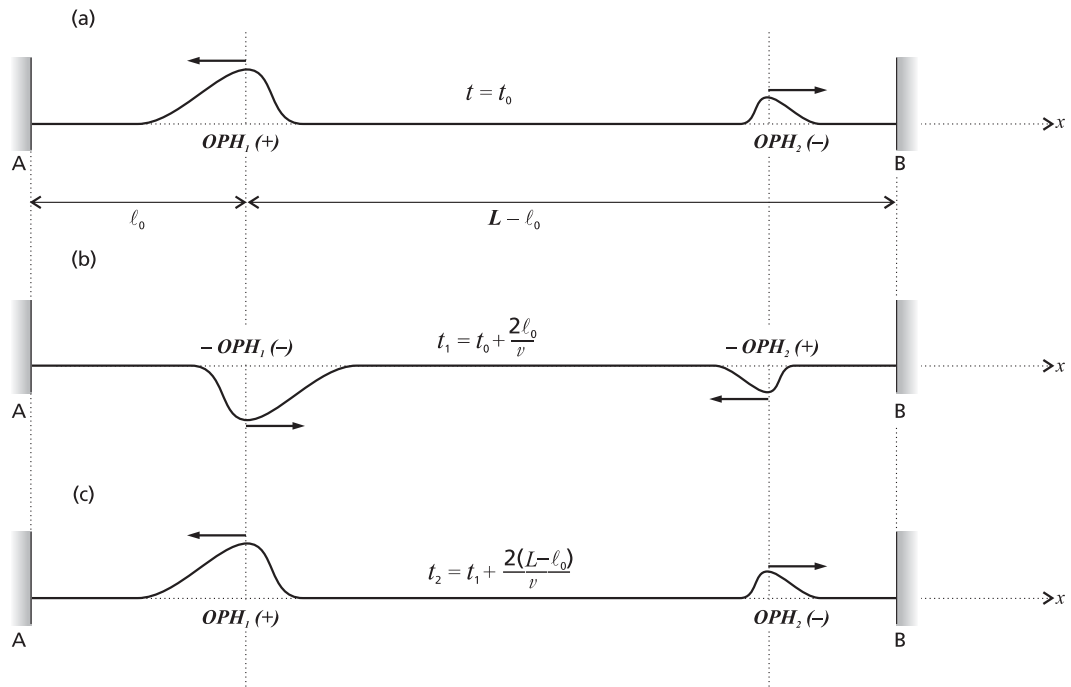
$$t_1 = t_0 + \frac{2l_0}{v}$$

os pulsos invertidos podem ser observados, na Figura 13.1b, nas posições  $l_0$  e  $(L - l_0)$ .

Esses pulsos  $-OPH_1(-)$  e  $-OPH_2(+)$ , após uma segunda reflexão em  $B$  e em  $A$ , respectivamente, invertem-se de novo e voltam a ser idênticos aos pulsos originais  $OPH_1(+)$  e  $OPH_2(-)$ . A Figura 13.1c mostra o perfil da corda no instante

$$t_2 = t_1 + \frac{2(L - \ell_0)}{v}$$

perfil esse idêntico ao observado no instante  $t_0$ , na Figura 13.1a.



**Figura 13.1:** Reflexões sucessivas de OPHs transversais, nas extremidades  $A$  e  $B$  fixas.

O menor intervalo de tempo que separa as duas situações **idênticas** ilustradas nas Figuras 13.1a e c, por definição o **período** do movimento, é igual a

$$\tau = \frac{2L}{v}$$

de acordo com o resultado encontrado para o período **temporal**  $\tau_1$  do modo fundamental de vibração de uma corda vibrante.

## Resumo

Ondas harmônicas são muito importantes: qualquer onda pode ser escrita como uma superposição de ondas harmônicas por meio da chamada Série de Fourier.

## Exercícios complementares

1. A função dente-de-serra é freqüentemente usada em Eletrônica. Ela tem a forma:

$$y(t) = \frac{\omega}{2\pi}t - \frac{1}{2} \quad \text{para } 0 < t < \frac{2\pi}{\omega}$$

$$y(t) = \frac{\omega}{2\pi}t - \frac{3}{2} \quad \text{para } \frac{2\pi}{\omega} < t < \frac{4\pi}{\omega}$$

$$y(t) = \frac{\omega}{2\pi}t - \frac{5}{2} \quad \text{para } \frac{4\pi}{\omega} < t < \frac{6\pi}{\omega}$$

e, assim, sucessivamente.

a) Faça um esboço do gráfico desta função.

b) Escreva a Série de Fourier para esta função.

2. Mostre que, se uma função  $f(x)$  se anula para  $x = 0$  e sua derivada  $\frac{df}{dx}$  se anula em  $x = L$ , ela pode ser representada, entre  $x = 0$  e  $x = L$ , por uma série de senos, contendo apenas os termos de ordem ímpar:

$$f(x) = \sum_{n=1,3,\dots} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

**OBSERVAÇÃO :** Esse exercício requer uma certa maturidade matemática ...

## Auto-avaliação

Você está dominando a análise de Fourier? Sabe bem para que serve, como usar e como extrair dela um grande número de informações sobre as suas ondas? Que ótimo! Se teve dificuldades, lembre-se de que existem outras fontes que podem auxiliá-lo; este tópico é tratado com muito cuidado no Moisés, na Seção 5.8, por exemplo. Talvez você ache interessante dar uma olhada lá também.





## Aula 14 – O som

### Meta da aula

- Explicar a natureza física do som.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá:

- Saber que o som é uma onda.
- Entender como o som se propaga.
- Compreender o que é a intensidade de uma onda.

### Pré-requisitos

Para melhor desempenho nesta aula, é importante que você tenha claros os conceitos de Hidrodinâmica e Termodinâmica.

### Introdução

Desde a primeira aula deste módulo, você tem visto diversos exemplos de sistemas ondulatórios e até produziu algumas ondas, seja empurrando uma pedra de dominó que gera uma fila de dominós caindo; esticando um elástico e provocando um deslocamento transversal que se propaga; produzindo um pulso longitudinal em uma mola etc.

Nestes casos, você **viu** a onda. Nós, agora, vamos falar de outro tipo de ondas, que você não poderá ver, mas poderá **ouvir**: as ondas sonoras. O som é uma onda mecânica e, portanto, precisa de um meio material para se propagar. Este meio pode ser sólido, líquido ou gasoso como, por exemplo, o ar que respiramos.

### EC8- Batendo panela

Vá até a cozinha da sua casa e pegue uma panela. Se você pegar uma colher de pau e bater no fundo da panela, imitando seu amigo da Figura 14.1, você vai escutar um barulho.



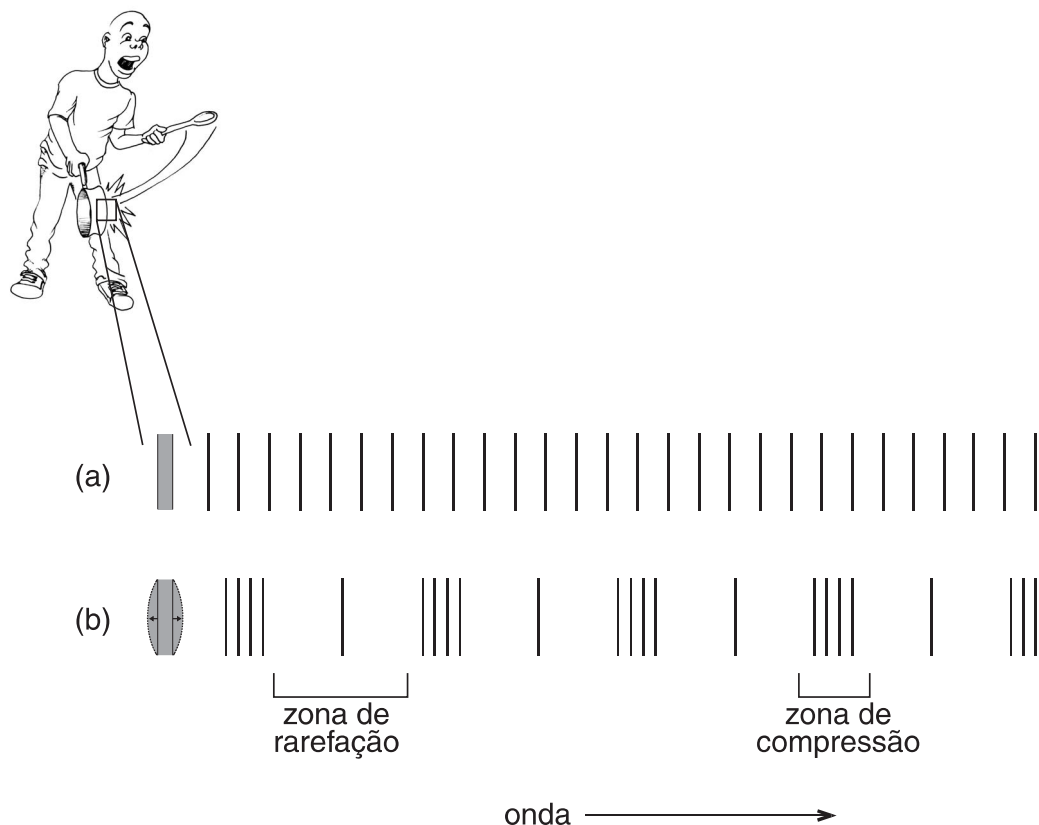
**Figura 14.1:** Batendo panela!

Ao bater no fundo da panela, você a empurra para trás. Este deslocamento é pequeno e você, muito provavelmente, não consegue nem notar. Depois de se mover para trás, o fundo da panela oscila em torno de sua posição de equilíbrio. Este deslocamento do fundo da panela faz com que o ar à sua frente seja comprimido e rarefeito, gerando ondas de compressão e rarefação do ar que chegam até o seu ouvido e você reconhece como som.

Você pode pedir para outra pessoa bater no fundo da panela e se colocar em diversas posições: você pode ficar na frente de quem está batendo a panela, atrás, ao lado, pode subir numa cadeira, deitar no chão... em todas as posições você continua escutando o som. Isto prova que as ondas sonoras se propagam em todas as direções.

O tratamento matemático de ondas tridimensionais é bem mais complicado do que o das ondas unidimensionais que estudamos até agora. Para entender como o som se propaga, vamos olhar o que acontece na direção de propagação perpendicular ao fundo da panela, como ilustra a Figura 14.2. Desta forma, recairemos no caso unidimensional e poderemos entender os conceitos físicos envolvidos na propagação do som sem a necessidade de um

formalismo matemático muito mais complicado. No entanto, é preciso sempre ter em mente que o som se propaga em três dimensões.



**Figura 14.2:** Pequeno pedaço do fundo da panela e fatias com a mesma quantidade de ar, (a) antes de bater e (b) depois de bater.

Na Figura 14.2a, temos um pedaço do fundo da panela, antes da batida. Os traços verticais dividem o ar à frente da panela em fatias, todas contendo a mesma quantidade de ar. Na Figura 14.2b, temos uma representação do que ocorre depois que você bate na panela. Quando o fundo da panela vai para trás, ele cria, logo à sua frente, uma região onde o ar é mais rarefeito. É necessário uma fatia de ar mais larga para que tenhamos a mesma quantidade de ar que havia na fatia, antes da batida. Quando o fundo da panela anda para a frente, ele comprime o ar, e temos então uma região mais densa. Numa fatia mais fina que a original, temos a mesma quantidade de ar.

O movimento de vai-e-vem, ou oscilação, do fundo da panela faz com que várias destas regiões de rarefação e compressão sejam criadas e se desloquem. Temos, assim, ondas de compressão e rarefação de ar propagando-se.

Nas regiões onde o ar é mais denso, ocorre um aumento de pressão, enquanto nas regiões em que o mesmo é rarefeito, há diminuição. A existência

Este diagrama foi proposto na seção 6.1, Moysés II: dê uma olhada!

de regiões vizinhas com pressões diferentes faz com que o ar se desloque de uma região para a outra. O deslocamento do ar, por sua vez, gera uma mudança de densidade. Este processo pode ser resumido no diagrama a seguir.

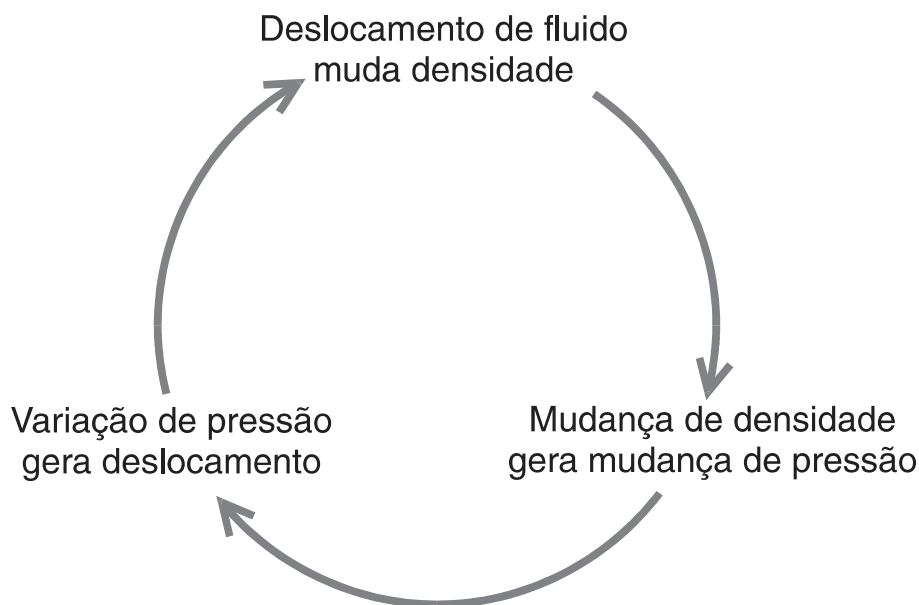


Figura 14.3: Diagrama: “como o som se propaga”.

## Experiências com ondas sonoras no pólo

### EP7 - Som e vibração

Você se lembra das experiências EP5 e EP6, durante as quais você estudou ondas estacionárias transversais numa corda e longitudinais numa mola? Você deve também lembrar que essas ondas eram produzidas por um gerador de áudio acoplado a um alto-falante, e que um som, não muito agradável, acompanhava suas observações. Pois bem, você vai, agora, usar três dos seus cinco sentidos, a audição, o tato e a visão, para entender a relação íntima que existe entre vibração e som. Como? De maneira muito simples.

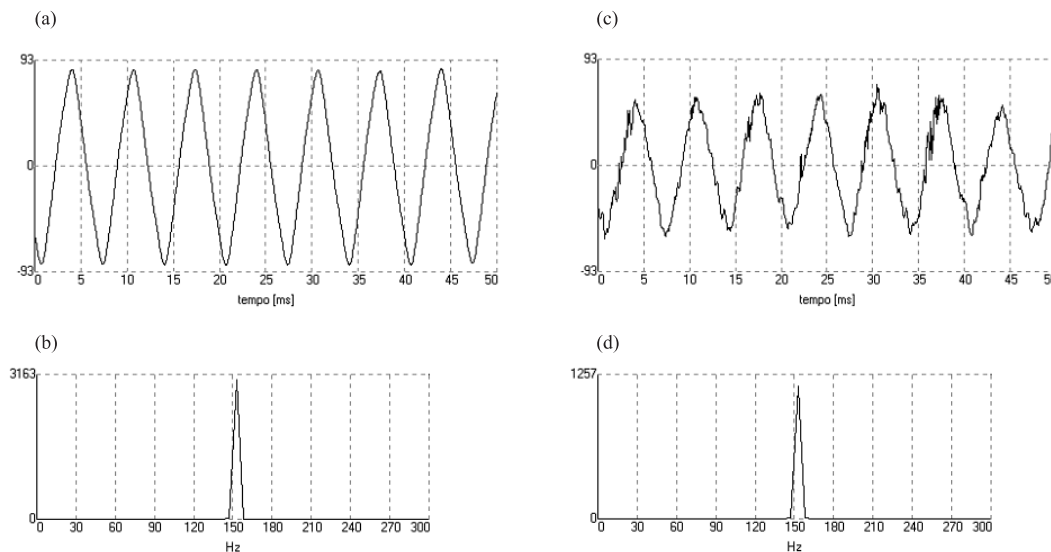
Em primeiro lugar, ligue o gerador de áudio e ajuste sua frequência em torno de 150 Hz: você deve **ouvir** um som... não muito agradável. Usando o microfone ligado à entrada da placa de som do computador e o *software Experimentos acústicos/Cidepe*, você pode **ver** o som na tela do computador: a onda sonora excitou vibrações mecânicas no microfone, que foram transformadas em oscilações de voltagem.

## Exercício 14.1

Responda às seguintes questões:

- Qual é a forma da onda que você observa no gráfico superior da tela?
- Essa onda é a onda sonora? Cuidado para não cair na armadilha! Justifique sua resposta!
- Qual é a sua frequência?

Compare seu resultado com o obtido por meio de um processo matemático chamado de **Transformada de Fourier Rápida** (sigla *FFT* em inglês) e mostrado na Figura 14.4.



**Figura 14.4:** (a) Dependência temporal da onda sonora emitida pelo alto-falante e captada pelo microfone e (b) sua Transformada de Fourier. Idem (c) e (d), com a folha de papel em cima do alto-falante.

Coloque, agora, uma folha de papel de 20 x 20 cm<sup>2</sup> sobre o alto falante e pressione-a levemente com um dedo. Com o gerador de áudio desligado, você não deve sentir nada de especial no seu dedo, nem ouvir som algum saindo do alto-falante! Na tela do computador, nenhuma onda deve aparecer (desde que haja silêncio absoluto no laboratório!). Ótimo! Ligue, então, o gerador, **mantendo a frequência anterior**,...descreva suas sensações tátil, auditiva e visual.

## Exercício 14.2

- O que você observou na tela do computador está parecido com as Figuras 14.4c e 14.4d?
- Qual a causa das vibrações da folha de papel?
- Por que o som ficou mais feio ainda?
- Por que a dependência temporal da voltagem ficou bem **tumultuada**?
- A frequência mudou?

Faça um relatório objetivo das suas observações.

Você está curtindo esse som? Então, vamos em frente!

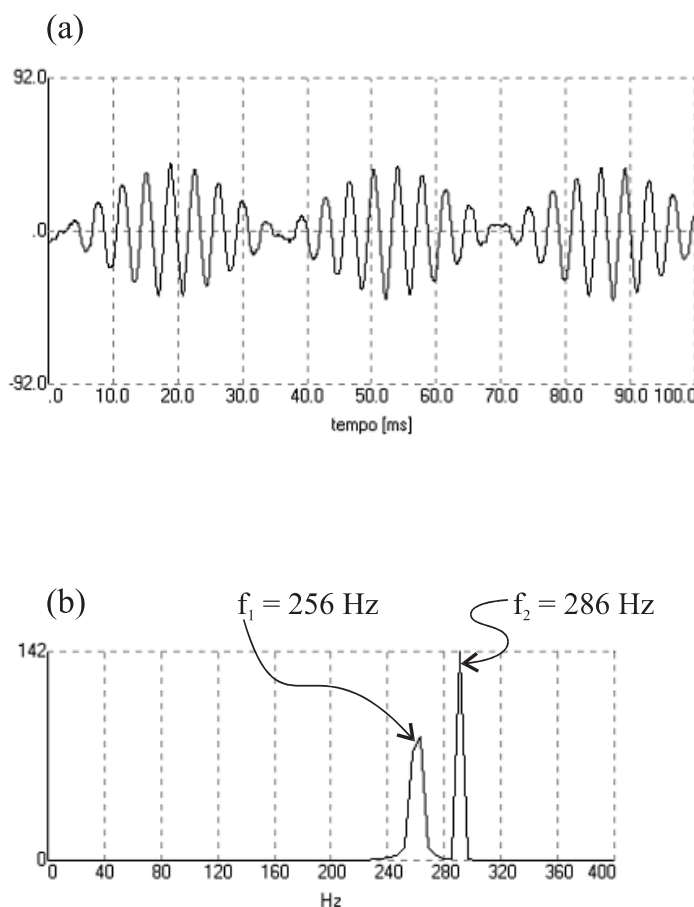
## EP8 - Batimentos sonoros

Estudamos **teoricamente** batimentos durante a Aula 3. Podemos observá-los, usando apenas os sentidos auditivo e visual. Para isso, conecte os dois canais do gerador de áudio a dois alto-falantes distantes 40 cm um do outro, igualando volumes e frequências. Use uma frequência de 256 Hz, que corresponde à nota *dó*. O microfone, equidistante dos alto-falantes e o *software Experimentos acústicos/Cidepe* permitem, de novo, **visualisar o som**.

- Para começar, ligue alternadamente canais: o que você está ouvindo e vendo na tela do computador?
- Ligue, agora, os dois canais de áudio: o que você está ouvindo e vendo na tela do computador?
- Pelo que pôde observar, as duas frequências são **rigorosamente iguais**? Por quê?
- Mude **uma das frequências** para obter uma diferença  $\Delta f = 1$  Hz: o que você está vendo na tela do computador e ouvindo? Você pode determinar a frequência do batimento, usando sua faculdade auditiva?

- Mude **uma das frequências** para obter uma diferença  $\Delta f = 4$  Hz: o que você está vendo na tela do computador e ouvindo?
- Mude **uma das frequências** para obter uma diferença  $\Delta f = 8$  Hz: o que você está vendo na tela do computador e ouvindo?
- Mude **uma das frequências** para obter uma diferença  $\Delta f = 30$  Hz: o que você está vendo na tela do computador e ouvindo? Qual a frequência do batimento? Como chegou lá?

Seu resultado parece com a Figura 14.5?



**Figura 14.5:** Batimentos sonoros obtidos pela superposição de duas ondas senoidais de frequências  $f_1 = 256$  Hz e  $f_2 = 286$  Hz. (a) Dependência temporal da onda sonora resultante e (b) sua Transformada de Fourier.

## EP9 - Reverberação

Chega de computador! Vamos curtir um som do jeito que ele existe no espaço tridimensional, isto é, um som que se propaga e se reflete várias vezes nas paredes, no chão e no teto do laboratório. Para isso, regule a frequência do gerador em, aproximadamente, 650 Hz e oriente o alto-falante em direção a um canto do laboratório. Fique atrás do alto-falante e não tenha medo de aumentar bastante o volume, pois sua experiência vai incomodar seus colegas durante pouco tempo, isto é, durante o tempo necessário à percepção do fenômeno de reverberação. Rodando sua cabeça alternadamente para a direita e a esquerda, você deve notar que o som parece vir de um desses lados, dependendo da posição da sua cabeça.

Vamos tentar entender o que está acontecendo. A onda sonora emitida pelo alto-falante sofre múltiplas reflexões e, em dois pontos diferentes do espaço (por exemplo, seus dois ouvidos), as interferências de todas essas ondas secundárias podem ser construtivas ou destrutivas, dependendo da posição. São essas interferências múltiplas, chamadas de reverberação, que parecem indicar que o alto-falante está se deslocando no laboratório.

Você deve poder observar reverberação no seu dia-a-dia: basta prestar atenção, sendo um físico, mesmo fora do laboratório!

## Como as ondas sonoras se propagam?

Agora você já “viu” e ouviu as ondas sonoras em suas experiências no pólo. Gostou? Esperamos que sim! Você está pronto para entender como as ondas se propagam! Vamos voltar ao diagrama 14.3 e analisar cada trecho do mesmo.

## Mudança de densidade gera mudança de pressão

De que maneira uma mudança de densidade gera uma mudança de pressão? Em geral, para uma dada massa de fluido  $M$  ocupando um certo volume  $V$ , um aumento de pressão ( $\Delta P > 0$ ) faz com que esta mesma massa  $M$  passe a ocupar um volume menor, ou seja,  $\Delta V < 0$ . Com isso, podemos definir uma grandeza chamada **módulo de compressibilidade do fluido**

$$K = -\frac{\Delta V/V}{\Delta P} \quad (14.1)$$

onde  $-\Delta V/V$  é a **magnitude da variação percentual do volume** e o sinal negativo aparece porque  $\Delta V < 0$ . Para uma dada variação de pressão,



quanto maior a variação do volume, maior é  $K$ , ou seja, mais **compressível** é o fluido.

Também é possível definir  $B$ , o **módulo de elasticidade** do fluido:

$$B = \frac{1}{K} = -V \frac{\Delta P}{\Delta V} \quad (14.2)$$

### Exercício 14.3

Qual é a unidade de  $K$  no sistema de unidades MKSA? E de  $B$ ?

A densidade do fluido é

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (14.3)$$

Podemos relacionar a variação de densidade com a variação do volume diferenciando a expressão acima:

$$\Delta \rho = -M \frac{\Delta V}{V^2} = -\rho \frac{\Delta V}{V} \quad (14.4)$$

Usando a expressão acima, podemos escrever  $B$  em função da densidade e sua variação:

$$B = \rho \left( \frac{\Delta P}{\Delta \rho} \right) \quad (14.5)$$

Numa onda sonora, as variações de pressão e densidade são muito pequenas. Podemos, então, escrever  $P$  e  $\rho$ , os valores dessas grandezas **na presença destas ondas**, como

$$\begin{aligned} P &= p_0 + p \\ \rho &= \rho_0 + \delta \end{aligned} \quad (14.6)$$

onde  $p_0$  e  $\rho_0$  são os valores não perturbados, ou seja, **na ausência de ondas**, e  $p$  e  $\delta$  são as mudanças nesses valores não perturbados que ocorrem quando a onda passa. Como dissemos há pouco, essas mudanças são pequenas:

$$\begin{aligned} |p| &\ll p_0 \\ |\delta| &\ll \rho_0 \end{aligned} \quad (14.7)$$

Desta forma, podemos escrever, então,

$$\frac{p}{\delta} = \frac{P - p_0}{\rho - \rho_0} = \frac{\Delta P}{\Delta \rho}$$

ou, ainda, já que a variação da densidade é muito pequena,

A **densidade volumétrica de massa**  $\rho$  é definida como massa por unidade de volume, como mostra a equação ao lado. Como não vamos usar outra densidade durante esse Módulo, vamos nos referir a ela apenas como **densidade**.

O limiar da dor no ouvido humano ocorre para  $\left| \frac{p}{p_0} \right| \approx 10^{-3}$

$$p = \delta \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_0 \quad (14.8)$$

Por que usamos uma derivada parcial na equação acima? Ora, você deve se lembrar de que a pressão não varia só com o volume ou a densidade, não é mesmo? Na Equação 14.8 também usamos o símbolo  $|_0$ . Você sabe o que isso quer dizer? Que a derivada deve ser calculada em torno dos valores de equilíbrio,  $p_0$  e  $\rho_0$ .

Pronto! Nós acabamos de entender como uma mudança de densidade gera uma mudança de pressão. Antes de dar o próximo passo em nosso diagrama, vamos usar um pouquinho de Termodinâmica.

Vamos supor, a partir de agora, que o fluido onde suas ondas se propagam, o ar, por exemplo, pode ser tratado como um gás ideal. Na sua experiência de bater panela, você pôde observar que as ondas sonoras se propagam rapidamente. Você não precisava esperar muito tempo após bater no fundo da panela, para escutar o barulho, não é mesmo? A propagação de ondas sonoras se dá tão rapidamente, que não há tempo para trocas de calor durante o processo. Com certeza, você se lembra de que processos em que não há trocas de calor são chamados **processos adiabáticos**. Como a densidade  $\rho$  é inversamente proporcional ao volume  $V$ , em um processo adiabático temos

$$P = b \rho^\gamma \quad (14.9)$$

onde  $b$  é uma constante e  $\gamma$  é a razão entre os calores específicos à pressão e a volume constantes.

Podemos, usando a Equação 14.9, encontrar a derivada da pressão em relação a  $\rho$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = b\gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \frac{P}{\rho} \quad (14.10)$$

Usando os valores em torno do equilíbrio na Equação 14.10 temos

$$\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_0 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}$$

Podemos, finalmente, encontrar o módulo de elasticidade para um gás ideal:

$$B = \rho \frac{\Delta P}{\Delta \rho} \simeq \rho_0 \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_0 = \rho_0 \gamma \frac{p_0}{\rho_0} = \gamma p_0 \quad (14.11)$$

Você se lembra de que a pressão também muda com a temperatura? Com certeza, sabe que, para um gás ideal  $PV = nRT$ ... Não? Essa é uma boa hora para você fazer uma revisão no seu módulo de Termodinâmica.

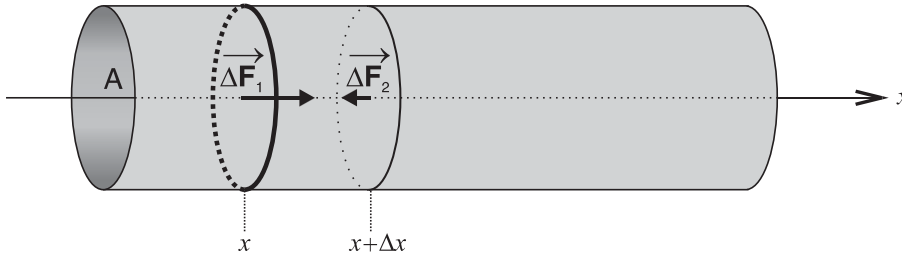
Você deve se lembrar de que, num processo adiabático

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} > 1$$

## Varição de pressão produz deslocamento

Vamos, agora, entender como uma variação de pressão produz um deslocamento. Para tanto, usaremos a Segunda Lei de Newton, nossa velha conhecida, e também a relação entre força e pressão. Voltando à nossa panela, podemos analisar o que acontece em uma pequena região que tem área transversal  $A$ , paralela ao fundo da panela, e que se estende perpendicularmente ao fundo desta, como mostrado na Figura 14.6. Vamos escolher o eixo  $x$  como sendo positivo para a direita.



**Figura 14.6:** Forças atuando sobre um elemento de volume do fluido.

Considere o elemento de volume do cilindro de seção reta  $A$  e compreendido entre  $x$  e  $x + \Delta x$ . A Figura 14.6 nos ajuda a visualizar as forças atuando sobre este elemento de volume. Podemos definir o vetor  $\hat{x}$  como um vetor unitário que aponta na direção de  $x$ , no sentido de  $x$  positivo.

À esquerda do cilindro, ou seja, em  $x$ , a força  $\overrightarrow{\Delta F_1}$  é dada pela pressão em  $x$  vezes a área, e aponta para a direita

$$\overrightarrow{\Delta F_1} = P(x, t) A \hat{x}$$

À direita do cilindro, ou seja, em  $x + \Delta x$ , a força  $\overrightarrow{\Delta F_2}$  é dada pela pressão em  $x + \Delta x$  vezes a área, e aponta para a esquerda

$$\overrightarrow{\Delta F_2} = -P(x + \Delta x, t) A \hat{x}$$

A força resultante é a soma das duas forças

$$\overrightarrow{\Delta F} = \overrightarrow{\Delta F_1} + \overrightarrow{\Delta F_2} = [P(x, t) - P(x + \Delta x, t)] A \hat{x}$$

que podemos reescrever, considerando agora somente o módulo da força resultante,

$$\Delta F = -A \Delta x \left[ \frac{P(x + \Delta x, t) - P(x, t)}{\Delta x} \right]$$

A essas alturas, você já está cansado de saber identificar o limite, para  $\Delta x$  muito pequeno, do termo entre colchetes com uma derivada, não é mesmo?

Lembrete: um vetor unitário é aquele que tem módulo igual a 1.

Você deve se lembrar de que a pressão é uma grandeza **escalar** igual ao **módulo** de uma força por unidade de área. Se precisa refrescar sua memória, dê uma olhada no módulo de Hidrodinâmica.

Mais do que isso, neste caso

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

de modo que

$$\Delta F = -A \Delta x \frac{\partial p}{\partial x} \quad (14.12)$$

#### Exercício 14.4

Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

Encontramos a força! Só faltam a massa e a aceleração, para aplicar a Segunda Lei de Newton. A massa deste elemento de volume pode ser escrita em termos do volume e da densidade não perturbada  $\rho_0$

$$\Delta m = \rho \Delta V \simeq \rho_0 A \Delta x \quad (14.13)$$

e sua aceleração é, por definição,

$$a = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (14.14)$$

onde  $u(x, t)$  designa o deslocamento da área transversal de coordenada  $x$  no instante  $t$ .

Seguindo a receita de Isaac Newton e utilizando as Equações 14.12, 14.13 e 14.14, temos

$$-A \Delta x \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = \rho_0 A \Delta x \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (14.15)$$

ou ainda,

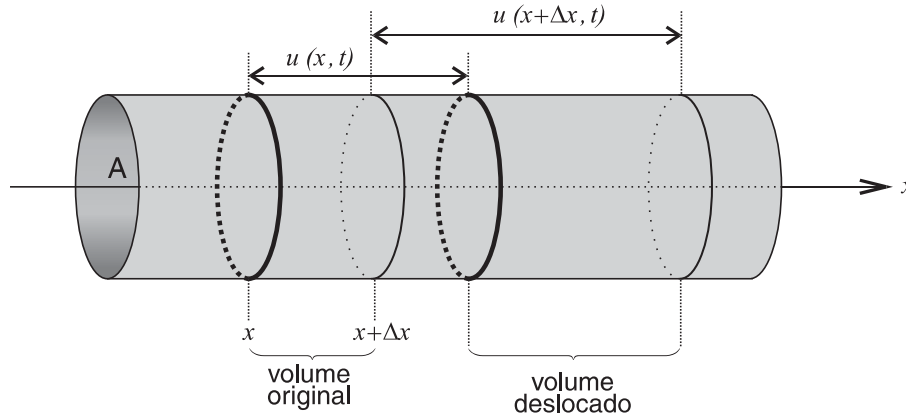
$$\rho_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \quad (14.16)$$

Vemos, assim, como o deslocamento resulta de uma variação de pressão.

## Deslocamento de fluido muda a densidade

Vamos entender o último trecho do diagrama da Figura 14.3, isto é, como o deslocamento de fluido muda a sua densidade.

O deslocamento  $u(x, t)$ , sofrido pelas partículas do fluido, está ao longo da direção de propagação da onda: é longitudinal. Podemos, com a ajuda da Figura 14.7, encontrar o volume ocupado por uma certa quantidade de fluido antes e depois do deslocamento.



**Figura 14.7:** Volume original de uma porção de fluido e volume deslocado pela onda sonora.

O volume antes do deslocamento, chamado **volume original**, é dado por:

$$V = A [(x + \Delta x) - x] = A \Delta x \quad (14.17)$$

Após o deslocamento, este volume passa a ser  $V + \Delta V$ :

$$V + \Delta V = A \{[(x + \Delta x) + u(x + \Delta x, t)] - [x + u(x, t)]\}$$

Essa equação pode ser simplificada:

$$V + \Delta V = A \{\Delta x + [u(x + \Delta x, t) - u(x, t)]\}$$

Vamos, agora, colocar  $\Delta x$  em evidência

$$V + \Delta V = A \Delta x \left\{ 1 + \frac{[u(x + \Delta x, t) - u(x, t)]}{\Delta x} \right\}$$

O que acontece? Você é capaz de reconhecer a derivada (parcial!) na equação acima, não é mesmo? Vamos, então, reescrevê-la ainda mais uma vez:

$$V + \Delta V = A \Delta x \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Finalmente, encontramos o **volume deslocado**  $\Delta V$

$$\Delta V = A \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} = V \frac{\partial u}{\partial x} \quad (14.18)$$

Mas, desde o começo, nós queremos saber como o deslocamento muda a densidade. Lembrando que (veja a Equação 14.4)

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = \frac{\delta}{\rho} \simeq \frac{\delta}{\rho_0} \quad (14.19)$$

temos, finalmente (agora, pra valer!)

$$\delta = \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (14.20)$$

equação que nos diz como um deslocamento  $u(x, t)$  causa uma mudança  $\delta$  na densidade.

## O som é uma onda

Completamos uma volta pelo nosso diagrama! Vamos fazer um resumo do que aprendemos com ele.

- Mudança de densidade gera mudança de pressão

A relação entre a mudança de densidade e a mudança de pressão em um fluido é dada pela Equação 14.8, que repetimos a seguir:

$$p = \delta \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_0$$

- Variação de pressão gera deslocamento

Também entendemos como a variação de pressão gera um deslocamento. A relação entre a  $p$  e  $u$  é dada pela Equação 14.16

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

- Deslocamento de fluido muda densidade

Por fim, vimos que a relação entre o deslocamento do fluido  $u$  e a mudança de densidade  $\delta$  é dada pela Equação 14.20

$$\delta = -\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

Tudo entendido? Ótimo! Então, por que podemos afirmar que o som é uma onda?

Vamos substituir  $\delta$ , dado pela Equação 14.20, na Equação 14.8

$$p = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_0 \delta = -\rho_0 \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_0 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (14.21)$$

Agora, vamos usar a Equação 14.16. Nela, aparece uma derivada parcial de  $p$  em relação a  $x$ , que vamos obter da equação anterior:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (14.22)$$

que é a **equação de onda** para o deslocamento  $u(x, t)$ ! Os deslocamentos de fluidos estão associados à existência de um som e obedecem a uma equação de onda, o que justifica o título desta seção: **o som é uma onda**.

A velocidade  $v$  desta onda é dada por (veja a Equação 14.11)

$$v = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_0} = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}} \quad (14.23)$$

#### Exercício 14.5

Mostre que  $p(x, t)$  e  $\delta(x, t)$  obedecem à mesma equação de onda.

Assim, podemos calcular a velocidade do som em diferentes meios. Vamos lá!

Ainda não? Não há problema; tenha paciência e releia a aula até este ponto, antes de seguir adiante.

## Velocidade do som

## • Água

Para encontrar a velocidade do som na água, vamos considerar 1 litro de água, à temperatura ambiente e, inicialmente, à pressão atmosférica. Ao aplicar uma pressão de 20 atmosferas  $= 2 \times 10^6 \text{ N / m}^2$ , vemos que o volume será reduzido em aproximadamente  $0,9 \text{ cm}^3$ . Lembrando que  $1 \text{ L} = 1000 \text{ cm}^3$ , temos

$$-\frac{\Delta V}{V} = 9 \times 10^{-4}$$

Assim,

$$B = -\Delta p \frac{V}{\Delta V} = \frac{2 \times 10^6}{9 \times 10^{-4}} \simeq 2,2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

Sabendo que a densidade da água é  $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$ , podemos usar a Equação 14.23 para encontrar a velocidade do som na água

$$v = 1.483 \text{ m/s}$$

## • Sólidos

Em sólidos, os valores típicos, tanto de  $B$  quanto de  $\rho_0$ , são bem maiores. Para o ferro, a  $20^\circ\text{C}$ ,  $v = 5.130 \text{ m/s}$ , por exemplo.

## • Gases

Para gases, é possível exprimir  $B$  em função de  $p_0$ , como vimos na Equação 14.11:  $B = \gamma p_0$ . Neste caso,

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad (14.24)$$

Para o ar a  $T = 0^\circ\text{C}$ , temos  $v = 331,3 \text{ m/s}$ , enquanto para o hidrogênio, temos  $v = 1.286 \text{ m/s}$  e, para o oxigênio,  $v = 317,2 \text{ m/s}$ .

## Ondas de deslocamento e ondas de pressão

Vamos estudar uma onda de deslocamento que se propaga para a direita:

$$u = f(x - vt)$$

Se a onda é do tipo harmônica simples, temos

$$u(x, t) = \mathcal{U} \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

Inicialmente, Newton supôs que o processo era isotérmico. Assim, ele chegou à conclusão que  $B = p_0$ , a velocidade determinada teoricamente sendo muito diferente da observada experimentalmente. Mais de um século depois, Laplace, assumindo que o processo era adiabático chegou a um resultado compatível com a experiência.



onde  $\mathcal{U}$  é a amplitude longitudinal de deslocamento.

Como vimos no nosso diagrama, uma variação de pressão produz um deslocamento, ou seja, pressão e deslocamento estão relacionados. **Será que uma onda de deslocamento vem acompanhada de uma onda de pressão?**

Vamos usar a expressão de  $B$  dada pela Equação 14.11

$$B = \rho \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_0 \simeq \rho_0 \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_0$$

Assim, podemos reescrever a Equação 14.21:

$$p = -B \frac{\partial u}{\partial x} \quad (14.25)$$

Desta forma, para uma onda de deslocamento harmônica,

$$p(x, t) = Bk\mathcal{U} \sin(kx - \omega t + \varphi) \quad (14.26)$$

Ora, essa é a expressão de uma **onda de pressão harmônica**. Podemos concluir, então, que **uma onda de deslocamento vem acompanhada de uma onda de pressão!**

#### Exercício 14.6

Encontre a expressão para a onda de densidade  $\delta(x, t)$ .

Podemos reescrever a expressão para a onda de pressão, substituindo  $B = v^2 \rho_0$  na Equação 14.26

$$p(x, t) = v^2 \rho_0 k \mathcal{U} \sin(kx - \omega t + \varphi) = \mathcal{P} \sin(kx - \omega t + \varphi) \quad (14.27)$$

onde

$$\mathcal{P} = k \rho_0 v^2 \mathcal{U} \quad (14.28)$$

é a **amplitude de pressão**.

Preste atenção na forma das ondas de deslocamento e de pressão:

$$p(x, t) = \mathcal{P} \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$u(x, t) = \mathcal{U} \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

Podemos ver que elas estão defasadas em  $\frac{\pi}{2}$ .

## Intensidade

Na Aula 11, quando estudávamos ondas unidimensionais, definimos a intensidade de uma onda como igual à sua potência média. Agora, que estamos tratando de ondas que podem propagar-se em mais de uma dimensão, vamos redefinir a intensidade: a intensidade de uma onda é igual à **potência média por unidade de área transmitida por esta onda**.

Vamos supor que tenhamos uma onda sonora propagando-se em um tubo de seção reta  $A$ , como, por exemplo, nas Figuras 14.6 e 14.7. Podemos escrever o módulo da força exercida sobre uma camada de fluido como

$$F = p(x, t) A = \mathcal{P} \sin(kx - \omega t + \varphi) A$$

A potência instantânea pode ser escrita como o produto de uma força por uma velocidade

$$P = Fv = F \frac{\partial u}{\partial t} = \omega A \mathcal{P} \mathcal{U} \sin^2(kx - \omega t + \varphi) \quad (14.29)$$

Não confunda! Estamos usando  $\mathcal{P}$  para a amplitude da pressão,  $p(x, t)$  para a variação de pressão e agora vamos voltar a usar  $P$  para a potência instantânea.

### Exercício 14.7

Mostre que a potência média é dada por

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \omega A \mathcal{P} \mathcal{U} \quad (14.30)$$

Finalmente, podemos escrever a intensidade  $I$

$$I = \frac{\overline{P}}{A} = \frac{1}{2} \omega \mathcal{P} \mathcal{U} \quad (14.31)$$

Podemos escrever a intensidade em função apenas da amplitude de deslocamento  $\mathcal{U}$ . Para tanto, vamos eliminar  $\mathcal{P}$  da equação anterior usando a Equação 14.28 e lembrando que  $\omega = vk$ . Temos, então,

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 v \omega^2 \mathcal{U}^2 \quad (14.32)$$

Eliminado, agora, a amplitude de deslocamento, temos

$$I = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{P}^2}{\rho_0 v} \quad (14.33)$$

O que essas duas expressões nos dizem? Em ambos os casos, a intensidade é proporcional ao quadrado da amplitude; no primeiro caso, à amplitude

de deslocamento e, no segundo caso, à amplitude de pressão. Qual a principal diferença? A intensidade, expressa em função da amplitude de pressão, é **independente da frequência**.

#### Exercício 14.8

O que é mais conveniente para medir a intensidade de uma onda sonora: usar detetores de variação de pressão ou de variação de deslocamento? Por quê?

### Variação da intensidade com a distância

No início desta aula, vimos que as ondas sonoras se propagam em três dimensões. Se tivermos uma fonte puntiforme, isso nos leva a uma intensidade que cai com o inverso do quadrado da distância. Vamos entender por quê!

A intensidade é a potência média por unidade de área. No caso de uma fonte puntiforme, as ondas que se propagam são esféricas, por razão de simetria. Logo, a intensidade a uma distância  $r$  da fonte é dada por

$$I = \frac{\overline{P}}{A} = \frac{\overline{P}}{4\pi r^2}$$

A Lei da Conservação da Energia nos diz que, quando nenhuma energia é absorvida, a potência não varia com a distância à fonte, de modo que, para duas distâncias  $r_1$  e  $r_2$ , temos:

$$\overline{P}(r_1) = \overline{P}(r_2)$$

Portanto,

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

ou seja,

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \quad (14.34)$$

Você se lembra de que a área de uma superfície esférica de raio  $r$  é dada por  $A = 4\pi r^2$ , não é mesmo?

### Escala Decibel

No dia-a-dia, em vez de nos referirmos à intensidade sonora, utilizamos o **nível da intensidade sonora** - designado pela letra grega  $\beta$  - que é medido em escala logarítmica. Isto é feito porque o ouvido humano é sensível num intervalo grande de intensidades.

Alexander Graham Bell nasceu em Edimburgo, na Escócia, em 1847, e morreu em 1922. Inventou o telefone em 1876.

A unidade usada para medir o nível da intensidade sonora é o decibel, que abreviamos por dB. O decibel corresponde a  $\frac{1}{10}$  do bel, uma unidade de medida criada em homenagem a Alexander Graham Bell.

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad \text{dB} \quad (14.35)$$

onde  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  é a intensidade padrão para a qual  $\beta = 0$ , que corresponde ao limiar da audição humana. Para uma intensidade  $I = 1 \text{ W/m}^2$ , o nível de intensidade sonora é 120 dB. Este corresponde ao limiar da dor para o ouvido humano.

## Resumo

O som é uma onda que se propaga em um meio material com velocidade que depende de características deste meio. As ondas de deslocamento e de pressão estão defasadas uma da outra em  $\pi/2$ . A unidade utilizada para medir o nível de intensidade sonora é o decibel.

## Exercícios complementares

1. O limiar da sensação dolorosa no ouvido humano ocorre para variações de pressão de cerca de  $30 \text{ N/m}^2$ . Calcule o deslocamento máximo correspondente a uma onda sonora, no ar, que tem frequência de 1000 Hz.
2. No limiar de audibilidade para uma frequência de 1000 Hz, a variação da amplitude de pressão vale aproximadamente  $2 \times 10^{-5} \text{ N/m}^2$ . Qual é a amplitude de deslocamento correspondente? O que você pode concluir sobre o ouvido humano?
3. Uma exposição de dez minutos a um som de 120 dB com uma frequência de 1000 Hz produz um desvio típico do limiar de audição de 0 dB para cerca de 28 dB, durante alguns segundos. Uma exposição a um som de 92 dB e mesma frequência, durante 10 anos, produz um desvio **permanente** do limiar também para 28 dB. A que intensidades correspondem 28 dB e 92 dB?

## Auto-avaliação

Esta foi sua primeira aula sobre som. Gostou? Esperamos que sim, pois aí vem mais... Entendeu bem a matéria, conseguiu resolver os problemas do meio e do fim da aula? Sim? Ótimo, siga em frente! Não? Não desanime; releia a aula e, se precisar de ajuda, procure seu tutor. Como a próxima aula também será sobre som, não é bom seguir adiante sem que tudo esteja claro. Até lá!



## Aula 15 – Sons musicais

### Meta da aula

- Apresentar sons musicais.

### Objetivos

Ao final desta aula, você deverá:

- Conhecer o tubo de Kundt.
- Saber a diferença entre música e ruído.
- Entender o funcionamento de algumas fontes sonoras.

### Introdução

Agora, que você já estudou a formação e propagação de ondas sonoras na aula anterior, você está pronto para entender um tipo especial de som: o som musical. Você gosta de ouvir música? Claro, quem não gosta?! Então responda por que é tão agradável ouvir uma música e tão desagradável ouvir um barulho qualquer? Tanto a música quanto o barulho são ondas sonoras que vêm bater no seu ouvido; por que tanta diferença? Você se lembra da EP7? Nela você estudou som e vibração. Volte aos resultados que você obteve naquela experiência. Como ficava a onda sonora quando você colocava uma folha de papel sobre o alto-falante? Meio “bagunçada”, não é mesmo? **A característica que distingue um som musical de um ruído é a periodicidade.** Uma onda de deslocamento, ou de pressão, gerada por um **som musical, é periódica!** Enquanto uma onda gerada por um **ruído não é.**

Observação: Uma onda harmônica é **um** exemplo de onda periódica, mas não é o **único** exemplo!

Além de conseguirmos distinguir um som musical de um ruído (depende um pouco de que música, mas vamos supor que todos nós temos bom gosto e essa diferença é bem clara!), existem outras qualidades que conseguimos distinguir num som musical: a intensidade, a altura e o timbre. Vamos, sem desafinar, estudar essas propriedades!

Alguma dúvida sobre intensidade? Volte à aula passada e faça uma revisão; nunca é demais!

## Intensidade, altura e timbre

- Intensidade

Depois da aula anterior, você já é um especialista em som e sabe bem o que é a intensidade de uma onda sonora. Como vimos, ela é proporcional ao quadrado da amplitude da onda.

- Altura

O que é a altura de um som musical? É a característica que nos permite distinguir entre sons graves e agudos. A voz do Tim Maia é mais grave que a voz da Gal Costa, e você não precisa de uma aula para saber isso. Mas, qual é a Física por trás disso? A altura de um som está relacionada com a sua frequência: quanto maior a frequência  $\nu$  de uma onda sonora, mais agudo será o som. Por outro lado, sons com frequência baixa são graves.

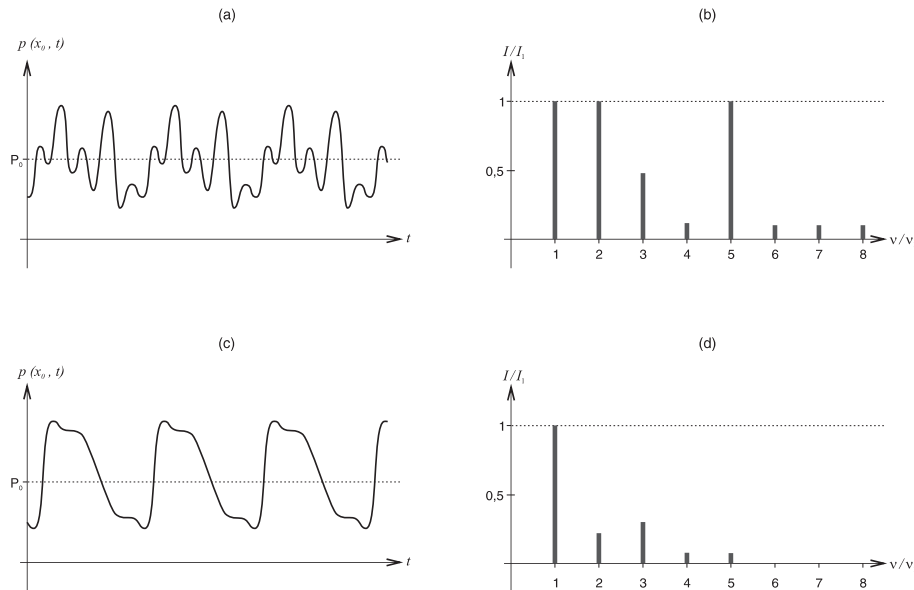
- Timbre

Se você escutar uma nota *lá* (que corresponde a uma frequência de 440 Hz) produzida por um piano, uma flauta, uma guitarra elétrica e um apito de trem, você vai conseguir dizer qual nota *lá* foi produzida por cada um dos “instrumentos”. Ninguém confunde um *lá* de uma flauta com o de uma guitarra, ou o de um piano com o de um apito trem! **Mesmo que as notas tenham exatamente a mesma intensidade e a mesma altura, ainda é possível distingui-las.** Mais uma vez, você não precisava de uma aula de Física para aprender isso, a experiência cotidiana já ensinou isso a você há muito tempo. O que você talvez não soubesse é que a qualidade que nos permite essa distinção é chamada **timbre**. O ouvido humano entende como uma nota *lá* qualquer nota que tenha  $\nu = 440$  Hz, independente do **perfil da onda**.

Você se lembra da Série de Fourier? É claro! Lembra-se também de que qualquer onda pode ser decomposta em termos de ondas harmônicas. Isso também vale para ondas associadas a um som musical. Uma nota emitida por um instrumento pode ser escrita como uma Série de Fourier que, além do **tom fundamental**  $\nu$ , contém, em geral, todos os **tons harmônicos**  $\nu_n = n\nu_1$  com  $n = 2, 3, \dots$ . **O timbre do som é definido pelas diferentes contribuições de cada um dos tons harmônicos para a Série de Fourier.** A Figura 15.1 vai ajudar você a entender



melhor o que é o timbre. Nela, você pode ver o perfil de uma onda de pressão de uma nota *lá* emitida por um violino (Figura 15.1a) e por um piano (Figura 15.1c). Note que o perfil das duas é bem diferente, mas o comprimento de onda, e conseqüentemente a frequência, são iguais nos dois casos. Você também pode ver a contribuição dos diferentes tons harmônicos, para o violino (Figura 15.1b): o tom fundamental, o segundo e o quinto harmônico contribuem com a mesma intensidade, enquanto para o piano (Figura 15.1d) o tom fundamental predomina.



**Figura 15.1:** Nota *lá* emitida por um violino (a) e por um piano (b) e intensidades relativas dos tons harmônicos para um violino (b) e para um piano (d).

Agora, que você já aprendeu algumas propriedades dos sons musicais, vamos estudar um pouco a Física que explica o funcionamento de algumas fontes sonoras. Vamos estudar fontes sonoras de três tipos: instrumentos de corda, instrumentos de sopro e instrumentos de percussão.

## A corda vibrante

Você certamente conhece um grande número de instrumentos de corda: violão, guitarra, violino, violoncelo, harpa, piano e tantos outros. O que todos eles têm em comum? **Cordas vibrantes!** As cordas variam de comprimento, tensão e material, de instrumento para instrumento, e também dentro de um mesmo instrumento. É isso que faz com que o som emitido por cada uma delas seja diferente.

Ficou com dúvidas? Dê uma olhadinha na Aula 12.

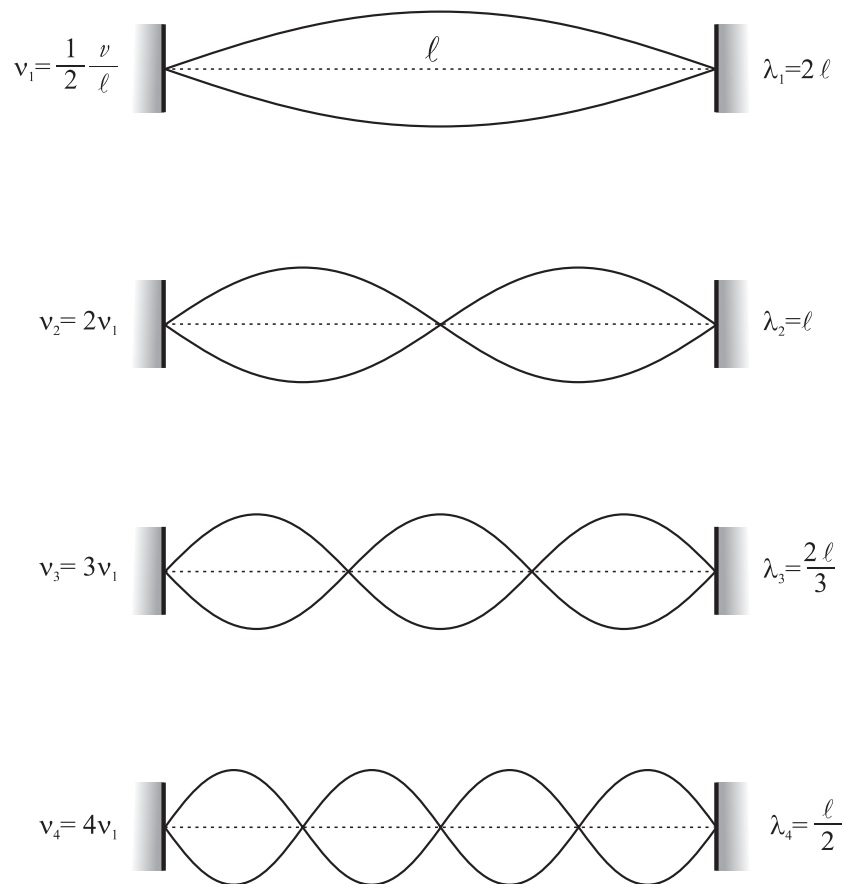
Mas você já sabe tudo sobre cordas vibrantes! Afinal de contas, você estudou os modos normais de vibração de uma corda vibrante, na Aula 12. Você viu que os únicos modos possíveis de oscilação de uma corda de comprimento  $\ell$ , massa linear  $\mu$  e tensão  $T$ , presa nas suas extremidades, tem comprimento de onda

$$\lambda = \frac{2\ell}{n}$$

e frequência

$$\nu_n = \frac{n}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{n}{2\ell} v$$

Na Figura 15.2, você pode ver os maiores comprimentos de onda que “cabem” em uma corda de comprimento  $\ell$  e as respectivas frequências.



**Figura 15.2:** Comprimento de onda  $\lambda$  e frequência  $\nu$  para o modo fundamental e os três primeiros harmônicos de uma corda de comprimento  $\ell$ .

Agora, vamos ver se você é bem esperto e responde a uma pergunta. Essas ondas em uma corda vibrante, representadas na Figura 15.2, são as ondas que chegam aos seus ouvidos?

As ondas produzidas na corda vibrante ficam “presas” à corda, portanto não chegam ao seu ouvido! No entanto, quando a corda vibra, faz com que o ar em torno dela vibre também. É essa vibração do ar que produz a onda sonora (como estudamos na aula anterior!) que você escuta.

## EP10 - O tubo de Kundt

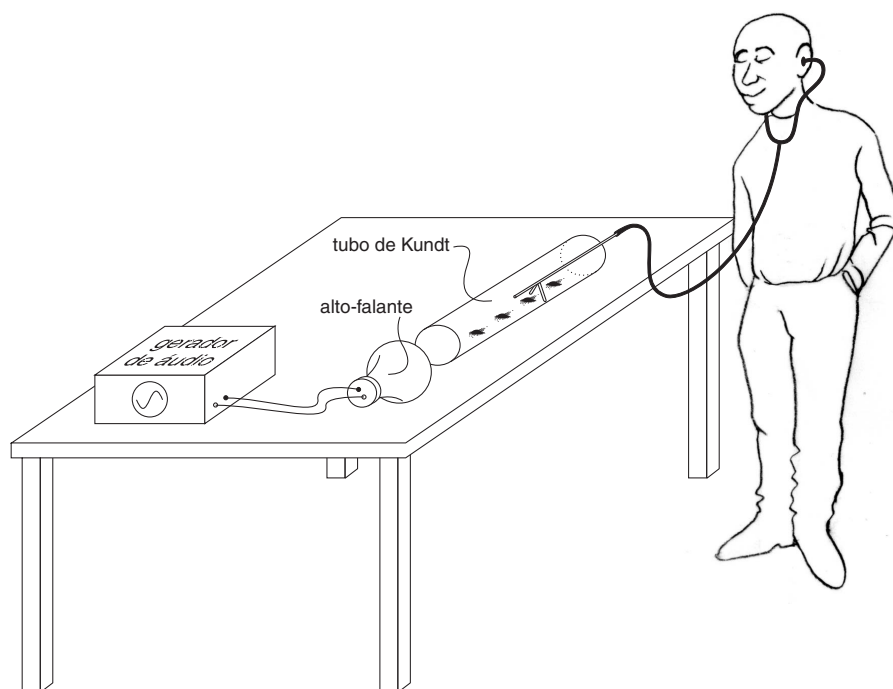
Durante as experiências EP1 e EP3 você produziu, observou e utilizou ondas mecânicas **longitudinais** em uma mola. Essas experiências devem facilitar o estudo de ondas sonoras em **fluidos compressíveis**, pois essas últimas são também **mecânicas**, uma vez que precisam de um meio material para se propagar, e **longitudinais**, já que fluidos (gases ou líquidos) **perfeitos** somente podem transmitir movimentos longitudinais. Essa última afirmação é uma consequência das equações gerais da hidrodinâmica para pequenos movimentos.

Antes de abordar o estudo teórico de ondas sonoras estacionárias longitudinais em **uma dimensão**, você vai realizar algumas experiências com o auxílio de um tubo de Kundt, que “obriga” as ondas sonoras **tridimensionais** produzidas pelo conjunto “gerador de áudio / alto-falante” a se tornarem **quase unidimensionais**. A palavra “quase” vem do fato de o diâmetro do tubo ser pequeno, se comparado com seu comprimento, mas não nulo! A Figura 15.3 mostra o Professor Careca preparando essas experiências para você.

O físico alemão August Adolph Kundt (1839-1894) inventou o tubo de Kundt, em 1866. Também deu contribuições sobre a dispersão de luz em líquidos, gases e metais.

## Tubo aberto nas duas extremidades

1. Em primeiro lugar, introduza **um pouco de pó de cortiça** ao longo do tubo e rode este último cerca de 30 graus em torno do seu eixo, de maneira a deixar o mínimo de pó na parte inferior. Coloque o alto-falante a 5 cm de uma das extremidades do tubo e deixe a outra extremidade aberta. Ajuste a frequência do gerador de áudio em 180 Hz. Ao ligar o gerador, uma onda sonora penetra no tubo.



**Figura 15.3:** Professor Careca usando o tubo de Kundt.

- O que você observa? O pó está sendo chacoalhado?

Mantendo o volume constante, aumente lentamente a frequência, sem tirar os olhos do pó.

- Para frequências em torno de 192, 384 e 576 Hz, você observa alguma coisa parecida com o que a Figura 15.3 está mostrando, isto é, uma alternância de regiões de grande agitação ou de calma?

- O pó está formando nodos e ventres no tubo?

- Qual a relação numérica entre essas frequências “mágicas”?

Vamos arriscar alguns palpites? Em primeiro lugar, podemos afirmar que a “dança do pó” deve estar ligada à presença do ar e à existência da onda sonora no tubo, pois sem ar (isto é, no vácuo) não há som, e sem som não há dança. Outrossim, o aparecimento de montinhos de pó, em determinadas posições ao longo do tubo e somente para certos valores bem definidos da frequência, sugere a formação de ondas estacionárias no tubo. É agora que é importante você se lembrar da experiência EP6, na qual você observou ondas estacionárias longitudinais numa mola onde espiras imóveis se alternavam com espiras animadas de vibrações longitudinais. No tubo de Kundt, o pó permite visualizar as **vibrações longitudinais das camadas de ar** quando ondas estacionárias sonoras são obtidas.

Podemos associar o centro de uma região onde o pó está imóvel a um nodo de deslocamento e o de uma região de grande agitação a um antinodo. Assim, podemos deduzir experimentalmente o que será demonstrado mais adiante nesta aula:

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}$$

quando o tubo de comprimento  $L$  está aberto em ambas as extremidades.  $\lambda_n$  é o comprimento de onda da onda estacionária e  $n$  o número de nodos **de deslocamento** no tubo, isto é, a ordem do harmônico.

### Exercício 15.1

- Demonstre a relação a seguir, entre a frequência  $\nu_n$  e a velocidade  $v$  do som:

$$\nu_n = n \frac{v}{2L}$$

- Faça um gráfico de  $\nu_n$  contra  $\frac{n}{2L}$  e encontre a velocidade do som. Qual a incerteza sobre esta velocidade? Relate seu procedimento experimental de maneira clara e objetiva; a apostila “Tópicos de tratamento de dados experimentais” vai lhe dar uma mãozinha!

2. Muito bem! Vamos dar mais um passo para a frente e “ouvir” essas ondas estacionárias. Deixe o gerador de áudio ligado com uma frequência de 192 Hz e **reduza** o volume do som, de maneira a ouvir quase nada no laboratório: **este conselho é muito importante para não estourar seus tímpanos!** Tome o lugar do Professor Careca e coloque o estetoscópio nos seus ouvidos, estando a extremidade livre do tubo de aço ligado ao estetoscópio na extremidade aberta do tubo de Kundt. Comece a enfiar **lentamente** o tubo de aço no tubo de Kundt.

- O que você está observando? Alternâncias de regiões silenciosas e sonoras?

- Faça um esboço do tubo, indicando as posições dos nodos e dos ventres de pó e das regiões silenciosas e sonoras.

- Quem coincide com quem?

- Sabendo que seu ouvido é sensível às variações de **pressão**, você pode dizer em que posições encontram-se os nodos e os ventres de **variação de pressão**?

Repita o procedimento anterior para as frequências de 384 e 576 Hz.

Relate sua experiência sem poupar figuras.

3. Agora, com o microfone e o computador substituindo seus ouvidos, como foi o caso nas experiências EP7 e EP8, você pode, de novo, aumentar o volume do som para facilitar suas observações! Repita o procedimento do item 2 e compare os resultados: como seu ouvido, o microfone responde a variações de pressão. Portanto, você deve observar no computador alternâncias de intensidade alta e baixa, parecidas com as das Figuras 15.4 e 15.5, quando o microfone estiver posicionado nos ventres ou nos nodos de **variação de pressão**, respectivamente.

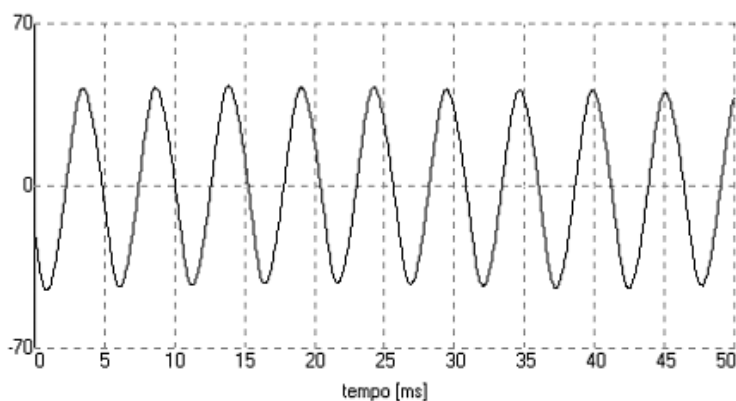


Figura 15.4: Intensidade alta.

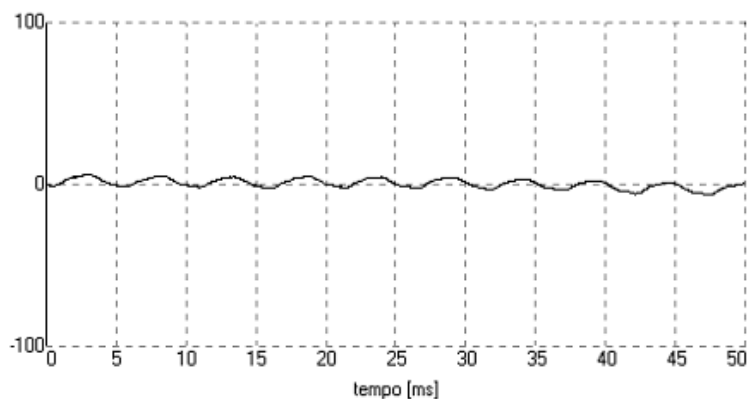


Figura 15.5: Intensidade baixa.

Mais uma vez, relate sua experiência cuidadosamente, usando desenhos e gráficos.

### Tubo aberto em uma extremidade e fechado na outra

Com a ajuda do seu tutor, feche a extremidade do tubo de Kundt que recebe o estetoscópio ou o microfone e repita, passo a passo, as experiências realizadas com o tubo aberto nas duas extremidades.

Entre outras descobertas, você vai perceber que, quando o tubo está fechado em uma extremidade e aberto na outra, a relação entre os comprimentos de onda das ondas estacionárias e comprimento do tubo é:

$$L = (2n - 1) \frac{\lambda_n}{4}$$

onde  $n$  é o número de nodos de deslocamento (ou ordem do harmônico observado).

#### Exercício 15.2

- Demonstre a relação a seguir, entre a frequência  $\nu_n$  e a velocidade  $v$  do som:

$$\nu_n = (2n - 1) \frac{v}{4L}$$

- Faça um gráfico de  $\nu_n$  contra  $\frac{2n - 1}{4L}$  e encontre a velocidade do som. Qual a incerteza sobre esta velocidade? Relate seu procedimento experimental de maneira clara e objetiva; a apostila “Tópicos de tratamento de dados experimentais” vai, de novo, ajudar você!

Uma observação interessante: em tubos abertos nas duas extremidades, **todos** os harmônicos estão presentes, mas em tubos abertos em uma extremidade e fechados na outra, somente harmônicos de ordem **ímpar** existem.

As ondas sonoras estacionárias em uma dimensão não têm mais segredo para você? Do ponto de vista experimental, esperamos que sim! Vamos ver, a seguir, o lado teórico dessa história.

## Colunas de ar

Quantos instrumentos de sopro você conhece? Flauta, clarinete, saxofone, órgão e tantos outros. Todos eles têm em comum a presença de colunas de ar. Depois de passar um tempo se divertindo com o tubo de Kundt, as colunas de ar não têm mais segredos para você, não é mesmo? Como você viu em suas experiências, o fato de manter uma extremidade aberta e uma fechada, ou as duas extremidades abertas, afeta o comprimento de onda e a frequência das ondas produzidas em um determinado tubo. Vamos estudar cada um deles separadamente.

### Tubo aberto nas duas extremidades

Quando você sopra em uma extremidade de uma flauta, por exemplo, a coluna de ar dentro da flauta começa a vibrar e podem ocorrer diferentes modos normais, assim como numa corda vibrante. A extremidade onde você sopra está aberta, logo a pressão na abertura é igual à pressão atmosférica: temos, então, um nodo de pressão. Como vimos antes, as ondas de pressão e deslocamento estão defasadas em  $\pi/2$ ; assim, teremos sempre um antinodo de deslocamento em uma extremidade aberta.

Para um tubo, como o de uma flauta, que é aberto nas suas duas extremidades, teremos sempre dois antinodos de deslocamento nas extremidades. Quantos períodos de onda conseguimos colocar em um tubo de comprimento  $\ell$ ? A Figura 15.6 e as experiências que você realizou com o tubo de Kundt, com as duas extremidades abertas, devem ajudar você a responder a esta pergunta!

Vemos que o maior comprimento de onda possível é

$$\lambda_1 = 2\ell$$

Comprimentos de onda menores, como os indicados na Figura 15.6, são possíveis

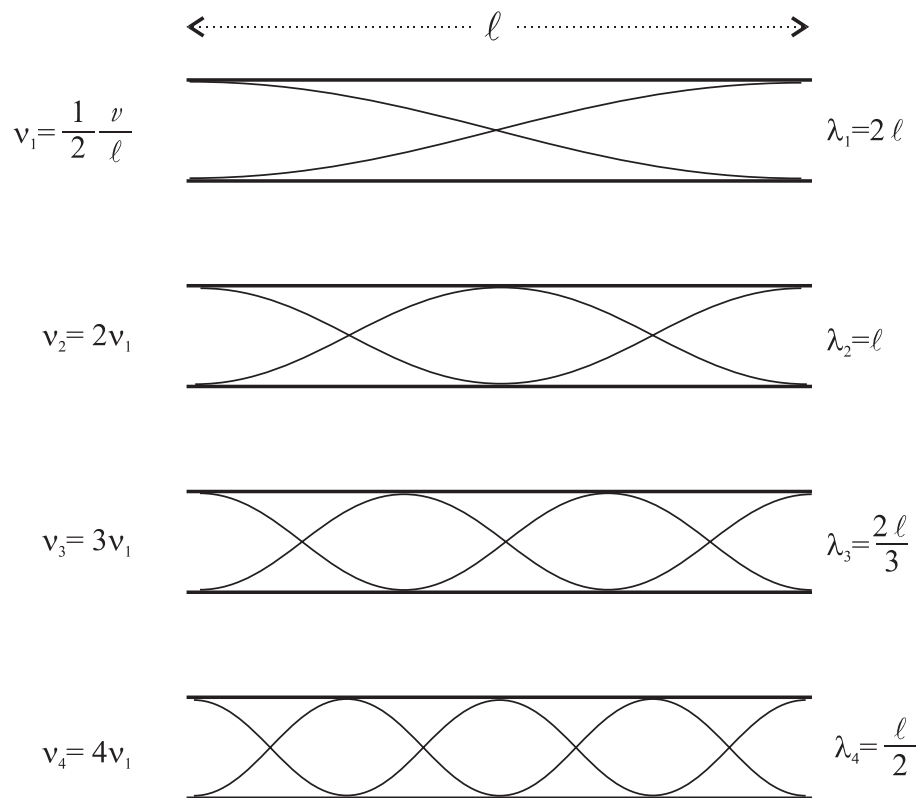
$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n} \quad (15.1)$$

onde  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Como conhecemos a relação entre comprimento de onda e frequência ( $\nu = v/\lambda$ ), podemos encontrar as frequências dos modos normais, como se segue

$$\nu_n = \frac{nv}{2\ell} \quad (15.2)$$

onde, mais uma vez,  $n = 1, 2, 3, \dots$





**Figura 15.6:** Comprimento de onda  $\lambda$  e frequência  $\nu$  para o modo fundamental e os três primeiros harmônicos em um tubo de comprimento  $\ell$  aberto nas duas extremidades. Os modos e antinodos são os de deslocamento.

### Tubo aberto em uma extremidade e fechado em outra

Você também já sabe o que acontece quando excitamos modos normais em um tubo com uma extremidade aberta e uma fechada. Afinal de contas, você fez essa experiência com um tubo de Kundt ainda há pouco! Vamos refrescar a sua memória.

Na extremidade que está aberta, temos um nodo de pressão e um antinodo de deslocamento. E na extremidade fechada, o que acontece? Nessa extremidade, temos um nodo de deslocamento. A Figura 15.7 nos ajuda a visualizar o que acontece em um tubo de comprimento  $\ell$ . O maior comprimento de onda que conseguimos colocar no tubo é

$$\lambda_1 = 4\ell$$

Como temos uma extremidade aberta e uma fechada, teremos sempre um nodo de deslocamento de um lado e um antinodo do outro lado; assim, os

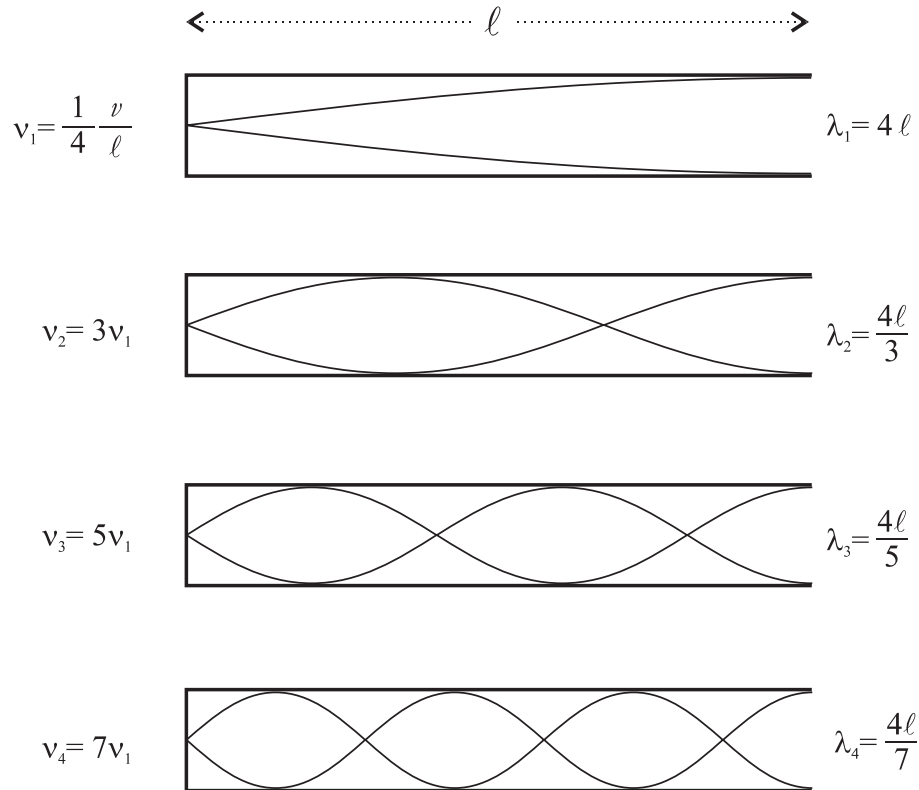
comprimentos de onda possíveis são

$$\lambda_n = \frac{4\ell}{2n-1} \quad (15.3)$$

onde, agora,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , e as frequências permitidas são

$$\nu_n = \frac{(2n-1)v}{4\ell} \quad (15.4)$$

Assim, concluímos que **apenas os harmônicos ímpares estão presentes**.



**Figura 15.7:** Comprimento de onda  $\lambda$  e frequência  $\nu$  para o modo fundamental e os três primeiros harmônicos em um tubo de comprimento  $\ell$  aberto em uma extremidade e fechado na outra. Os modos e antinodos são os de deslocamento.

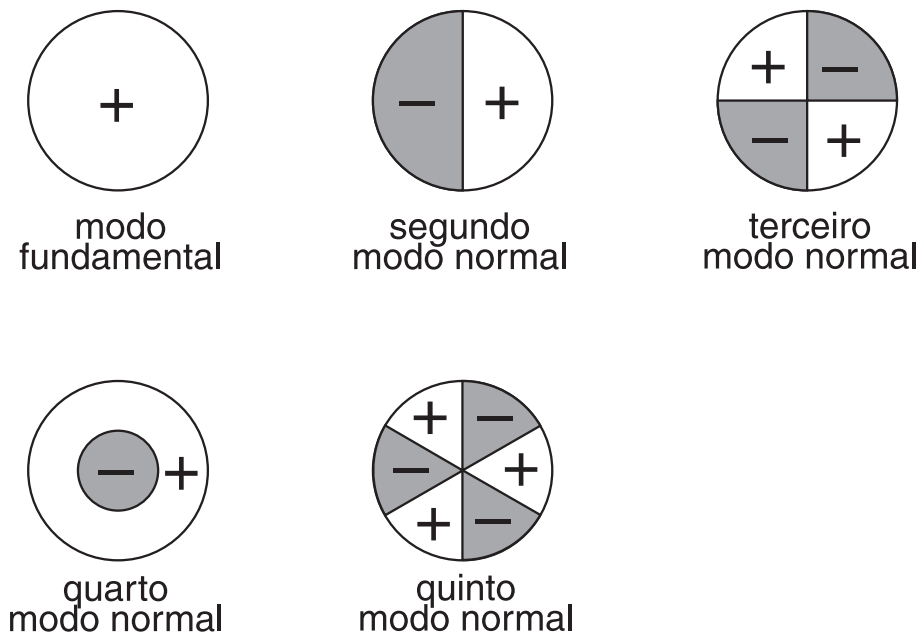
## Membranas e placas vibrantes

Os instrumentos de percussão, como tambores, bumbos etc., são formados por membranas esticadas ou placas. Quando batemos em um tambor, a deformação que geramos se desloca sobre a membrana, dando origem a um **pulso bidimensional**. Este pulso é refletido nas bordas do tambor e pode dar origem a **ondas estacionárias bidimensionais**. Como dissemos antes, a matemática envolvida na descrição de ondas bidimensionais é mais

complicada do que a que você viu até agora. Nós não vamos abordá-la já. Por outro lado, mesmo sem fazer a conta, queremos que você saiba algumas coisas sobre ondas bidimensionais.

A primeira delas, que discutimos há pouco, é que é possível formar ondas estacionárias bidimensionais. A segunda, é que os modos normais de vibração de uma membrana **não** são harmônicos do tom fundamental, ou seja, as frequências excitadas na membrana não são múltiplos do tom fundamental.

A Figura 15.8 mostra os cinco primeiros modos de vibração de um tambor. O sinal  $+$  indica as regiões da membrana que sobem e o sinal  $-$  indica as regiões que descem. No modo fundamental, a placa inteira sobe e desce, no segundo modo normal (à direita do primeiro, na figura) temos uma linha nodal separando uma região que sobe de uma que desce. A linha nodal é o equivalente bidimensional do nodo (unidimensional!) que você pôde observar em uma corda vibrante, por exemplo. No caso bidimensional, em vez de um único ponto em repouso, separando um vale de uma crista de onda, aqui temos uma linha inteira, separando uma região de vale (sinal  $-$ ) de uma região de crista (sinal  $+$ ).



**Figura 15.8:** Modos normais de vibração de uma membrana circular.

## Resumo

A característica que distingue um som musical de um barulho é a periodicidade das ondas. Pode-se distinguir a intensidade, a altura e o timbre em uma onda sonora. Cordas vibrantes, colunas de ar e placas ou membranas vibrantes são fontes sonoras, nas quais se podem produzir ondas estacionárias.

## Exercícios finais

1. O comprimento de uma corda de violino é 50 cm. Ela está fixada em seus extremos e sua massa é 2,0 g. A corda emite uma nota *lá* ( $\nu = 440$  Hz) quando não se exerce pressão sobre ela. Onde deve ser colocado o dedo para que a nota emitida seja *dó* ( $\nu = 528$  Hz)?
2. Encontre a frequência fundamental e a frequência de cada um dos três primeiros sobretons de um tubo de 45 cm de comprimento, sabendo que:
  - (a) o tubo possui as duas extremidades abertas;
  - (b) uma das extremidade do tubo está fechada.Use o valor  $v = 344$  m/s.
  - (c) Para cada um dos casos anteriores, qual é o número de harmônicos superiores que podem ser ouvidos por uma pessoa capaz de ouvir frequências no intervalo entre 20 Hz e 20.000 Hz?

## Auto-avaliação

Curtiu esta aula? Claro que sim! Pronto para tocar uma sinfonia com o que aprendeu? Claro que não! Mas você deve estar pronto, isso sim, a explicar para alguém como funcionam alguns instrumentos musicais! Se você se julga capaz de explicar para alguém, é porque realmente entendeu! Você conseguiu fazer as experiências e os problemas do fim da aula? Siga adiante! Caso contrário, você já deve saber que a perseverança é uma qualidade que deve ser cultivada! Volte ao início da aula e refaça seu caminho até aqui. Bom trabalho, e até a próxima aula!

# Aula 16 – Efeito Doppler e ondas de choque

## Meta da aula

- Explicar o que acontece quando as fontes sonoras entram em movimento.

## Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Compreender o Efeito Doppler.
- Saber o que é uma onda de choque e quando ela ocorre.

## Introdução

Até agora, nós estudamos a propagação de ondas sonoras que ocorriam com a fonte **em repouso**. O que acontece quando ela entra em movimento? E se o observador entrar em movimento? Você deve ter experimentado essas situações no seu dia a dia. Que tal tentar entender esses fenômenos?

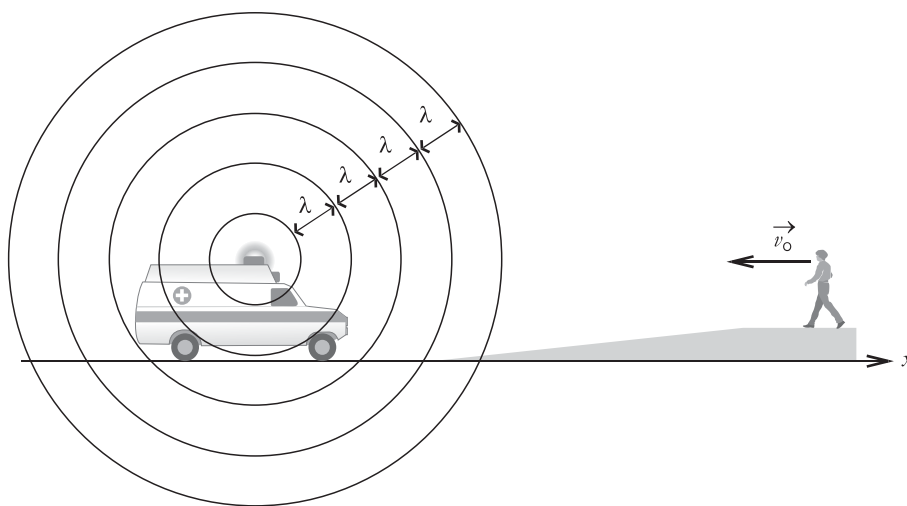
## Efeito Doppler

Você já deve ter notado, a partir de suas experiências andando pelas ruas da sua cidade que, quando uma ambulância se aproxima, a frequência do som aumenta; quando ela se afasta, a frequência diminui. Este fenômeno foi estudado, pela primeira vez, por **Christian Doppler** e, por isso, recebeu o nome de Efeito Doppler. Vamos entender o que está acontecendo, para os casos em que fonte e/ou observador se movem com velocidade constante, menor que a velocidade do som no meio onde ele se propaga e ao longo da linha que os une. Vamos supor, em ambos os casos, que a fonte é puntiforme, ou seja, emite ondas esféricas que se propagam em três dimensões.

O matemático Christian Andreas Doppler nasceu em 1803, na Áustria, e morreu em 1853, na Itália. Em 1842, estudando as cores de estrelas duplas, ele propôs que o movimento da fonte altera tanto a frequência de ondas sonoras como de ondas luminosas, o que ficou conhecido como Efeito Doppler. O exame Doppler, que utiliza o ultra-som para medir a velocidade da circulação sanguínea, especialmente no coração e no cérebro, tomou esse nome do matemático e físico austríaco. (Houaiss, 2001)

## Observador em movimento e fonte em repouso

Vamos estudar primeiro o caso em que o observador (você!) está em movimento uniforme, com velocidade  $v_o$ , e a fonte sonora (a ambulância) está parada, como mostra a Figura 16.1.



**Figura 16.1:** Você andando com velocidade constante  $\vec{v}_o$  em direção a uma ambulância parada com a sirene ligada.

Vamos encontrar, em primeiro lugar, o número  $n$  de cristas de onda que o observador receberia em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , se ele **não** estivesse em movimento. Você se lembra que o comprimento de onda  $\lambda$  é a distância entre duas cristas, não é mesmo? Então, é possível escrever  $n$  como a distância  $d$  percorrida pela onda durante um intervalo de tempo  $\Delta t$  dividida pelo comprimento de onda

$$n = \frac{d}{\lambda} = \frac{v \Delta t}{\lambda}$$

onde  $d = v \Delta t$  e  $v$  é a velocidade do som no meio em que ele está se propagando (neste caso, o ar!).

Como o observador está em movimento, em direção à fonte, ele recebe mais cristas de onda no mesmo intervalo de tempo. Quantas a mais?

$$n' = \frac{v_o \Delta t}{\lambda}$$

onde  $v_o$  é a velocidade com que ele se aproxima da ambulância e  $n'$  o número de cristas que o observador cruza, **supondo-se essas cristas imóveis**.

A frequência  $\nu$  emitida pela ambulância é diferente da frequência  $\nu'$  ouvida pelo observador. Essa última é dada pelo número de cristas que chegam ao observador por intervalo de tempo. Desta forma,

$$\nu' = \frac{n + n'}{\Delta t} = \frac{\frac{v \Delta t}{\lambda} + \frac{v_o \Delta t}{\lambda}}{\Delta t} = \frac{v + v_o}{\lambda}$$

Lembrando que  $\lambda = v/\nu$ , temos

$$\nu' = \nu \left( \frac{v + v_o}{v} \right) = \nu \left( 1 + \frac{v_o}{v} \right) \quad (16.1)$$

Se, em vez de se aproximar da fonte, o observador se afasta com velocidade  $v_o$ , ele vai receber um número menor de cristas de onda por unidade de tempo.

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{v_o}{v}\right) \quad (16.2)$$

Para **fonte em repouso e observador em movimento**, temos

$$\nu' = \nu \left(\frac{v \pm v_o}{v}\right) \quad (16.3)$$

onde o sinal  $+$  indica que o observador se aproxima e o sinal  $-$  que se afasta. O som é mais agudo (frequência maior) para a aproximação e mais grave (frequência menor) para o afastamento.

Entendeu como a frequência emitida por uma fonte em repouso é percebida por um observador em movimento? Não é tão complicado assim, não é mesmo? Mas o que será que acontece quando a fonte entra em movimento e o observador permanece parado? Vamos responder a essa pergunta agora!

### Fonte em movimento e observador em repouso

Para responder à pergunta anterior, vamos supor que o observador esteja em repouso (como havíamos combinado!) e que a fonte se mova com velocidade uniforme  $v_f$  em direção ao observador.

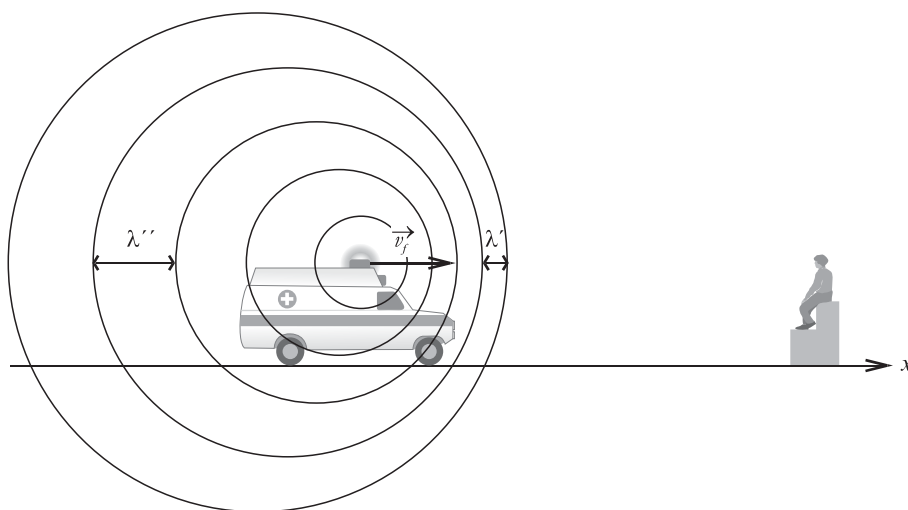
Se a fonte estivesse parada, o observador perceberia um comprimento de onda  $\lambda$

$$\lambda = \frac{v}{\nu}$$

que é o próprio comprimento de onda emitido pela fonte; mas, isso é óbvio para você!

No entanto, a fonte não está parada! A Figura 16.2 mostra diversas cristas de onda emitidas pela fonte em movimento **em intervalos de tempo  $\Delta t$  igualmente espaçados**. A fonte se aproxima do observador, andando a mesma distância  $d = v_f \Delta t$  a cada intervalo de tempo  $\Delta t$ . Desse modo, para um observador de quem a fonte se aproxima, o intervalo entre as cristas, ou seja, o comprimento de onda percebido é **menor** que o comprimento emitido pela fonte:

$$\lambda' = \frac{v - v_f}{\nu}$$



**Figura 16.2:** Observador em repouso e fonte em movimento.

Podemos encontrar a frequência percebida pelo observador, substituindo  $\lambda'$  obtido na equação anterior na equação para a frequência

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{(v - v_f)/\nu} \quad (16.4)$$

Quando a fonte está se aproximando do observador, a frequência aumenta (de acordo com a sua experiência cotidiana, não é mesmo?)

$$\nu' = \nu \left( \frac{v}{v - v_f} \right) \quad (16.5)$$

Quando a fonte está se afastando, o comprimento de onda percebido pelo observador é maior. Imagine um outro observador na Figura 16.2, sentado do outro lado da ambulância, e veja, também na Figura 16.2, o comprimento de onda  $\lambda''$  que ele perceberia. A frequência é menor que a original:

$$\nu' = \frac{v}{\lambda''} = \nu \left( \frac{v}{v + v_f} \right) \quad (16.6)$$

Para **fonte em movimento e observador em repouso**, temos

$$\nu' = \nu \left( \frac{v}{v \mp v_f} \right) \quad (16.7)$$

onde o sinal - indica que a fonte se aproxima e o sinal + indica que se afasta. O som é mais agudo para aproximação e mais grave para afastamento.



## Fonte e observador em movimento

Para os casos em que a fonte e o observador se movem, podemos juntar as equações para o observador em movimento (16.3) e para a fonte em movimento (16.7). Desta forma, temos

### Fonte e observador em movimento

$$\nu' = \nu \left( \frac{v \pm v_o}{v \mp v_f} \right) \quad (16.8)$$

onde o sinal  $+$ , no numerador, indica que o observador se aproxima e o sinal  $-$  indica que se afasta, enquanto o sinal  $-$ , do denominador, indica que a fonte se aproxima e o sinal  $+$  indica que a fonte se afasta.

Observação: Uma pessoa desatenta poderia pensar que os efeitos da fonte e do observador em movimento poderiam ser levados em conta usando a velocidade relativa de um em relação ao outro. Mas você não vai cair nessa armadilha, não é mesmo? As ondas sonoras são ondas mecânicas, logo precisam de um meio material para se propagarem. Com isso, a atmosfera se torna um referencial privilegiado para a propagação do som, portanto devemos levar em consideração as velocidades da fonte e do observador em relação ao ar!

## Ondas de choque

Você já deve ter ouvido falar do Concorde, um avião que voava com velocidades maiores do que a do som, ou seja, um avião supersônico. Você também deve ter ouvido falar no **estrondo supersônico**, que ocorre quando **a barreira do som** é quebrada. Essas coisas poderiam parecer muito misteriosas, mas agora, que você é um especialista em ondas sonoras, vai ver que tudo isso é, na verdade, muito simples de ser compreendido.

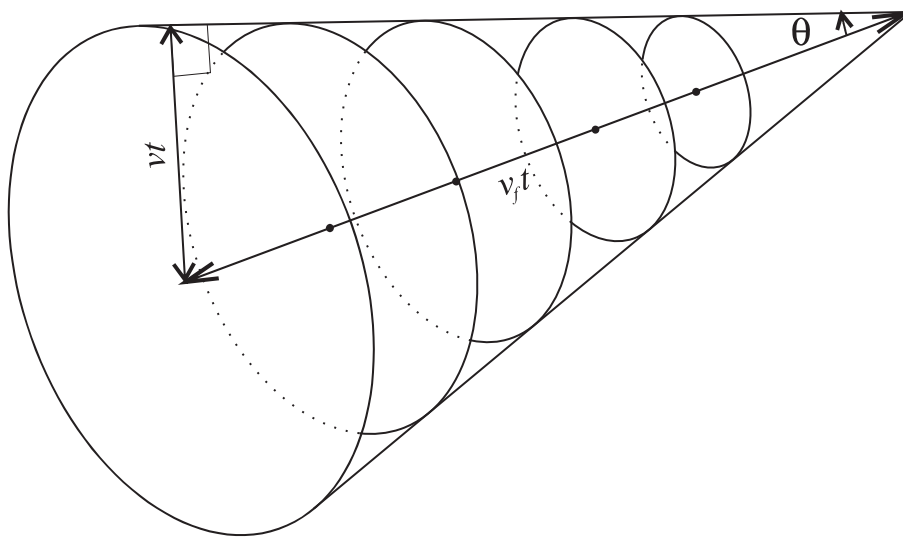
Vamos imaginar um Concorde, nossa fonte sonora que pode alcançar velocidades altas, voando, e você, o observador, parado, ouvindo-o e vendo-o passar. Vimos, há pouco, que o comprimento de onda percebido pelo observador, quando ele está em repouso e a fonte em movimento, é

$$\lambda' = \frac{v - v_f}{\nu}$$

Pela Equação anterior temos que, à medida que a velocidade da fonte  $v_f$  se aproxima da velocidade do som  $v$ , o comprimento de onda diminui. Para  $v = v_f$ , o comprimento de onda vai a zero e as cristas das ondas se agrupam. Quando isso ocorre, o ar agrupado exerce uma força enorme sobre a fonte e ocorre um aumento da resistência do ar: este é o fenômeno conhecido como **barreira do som**. Essa barreira era temida, nos anos 40, pelos pilotos de jatos que tentavam ultrapassá-la; o efeito era tão violento que alguns deles morreram, pois os aviões se quebravam.

Quando a fonte tem velocidade supersônica ( $v_f > v$ ), as equações do efeito Doppler deixam de ter significado físico (afinal de contas, um comprimento de onda negativo não faz sentido, não é mesmo?). Ao se mover, a fonte desloca o ar das vizinhanças e produz ondas sonoras. Estas ondas são emitidas pela fonte em todas as direções, dando origem a ondas esféricas, cujos centros coincidem com a posição da fonte no instante em que foram emitidas, de modo semelhante ao que acontece para uma sirene em movimento e um observador em repouso, que estudamos há pouco. Então, qual é a diferença entre a ambulância ( $v_f < v$ ) e o Concorde ( $v_f > v$ )? Para o Concorde, após um intervalo de tempo  $t$ , a onda emitida em um certo ponto se propagou em uma esfera de raio  $r = vt$ , enquanto que a fonte andou uma distância **maior**  $v_f t$ . Assim sendo, todas as ondas geradas pela fonte ficaram contidas em um cone, conhecido como Cone de Mach, como indicado na Figura 16.3.

Ernst Mach nasceu em 1838, na Áustria, e morreu em 1916. Físico, filósofo e psicólogo, realizou estudos sobre diversos temas, entre eles, a propagação de ondas, Óptica e Mecânica. Em 1887, estabeleceu os princípios da Supersônica e o Número de Mach.



**Figura 16.3:** Cone de Mach. Na figura, representamos apenas cortes das ondas esféricas emitidas pela fonte.

Na Figura 16.3, todas as ondas chegam ao mesmo tempo à reta que faz um ângulo  $\theta$  com a direção de propagação da fonte. Isso faz com que exista

uma **interferência construtiva**, que dá origem a uma onda com grande amplitude ao longo desta reta, conhecida como **onda de choque**.

O ângulo  $\theta$  é dado por

$$\text{sen } \theta = \frac{v}{v_f} \quad (16.9)$$

e a razão  $v_f/v$  chama-se **Número de Mach**.

A chegada desta onda de choque ao solo produz o chamado **estrondo sônico**, que você ouve depois que o Concorde passa acima de sua cabeça.

## Resumo

A frequência de uma fonte sonora em movimento é diferente da frequência percebida por um observador em repouso ou em movimento em relação à fonte. De maneira semelhante, um observador em movimento percebe uma frequência diferente da emitida por uma fonte em repouso. Este efeito é conhecido como Efeito Doppler. Ondas de choque são produzidas quando a velocidade da fonte ultrapassa a velocidade do som no meio em que este se propaga.

## Exercícios complementares

1. Um carro e uma ambulância andam em uma rua de mão dupla, em sentidos opostos. A sirene da ambulância está ligada e o motorista do carro percebe uma frequência que varia entre 593,8 Hz, quando estão se aproximando, e 416,7 Hz, quando estão se afastando. A velocidade do som no ar é de 340 m/s. Sabendo-se que a velocidade do carro é o dobro da da ambulância, calcule a velocidade do carro e a frequência da sirene.
2. Um Concorde está voando a Mach 1,75, a uma altura de 8000 m, onde a velocidade do som é igual a 320 m/s. Quanto tempo depois de o avião passar em cima da sua cabeça, você ouvirá o estrondo sônico?

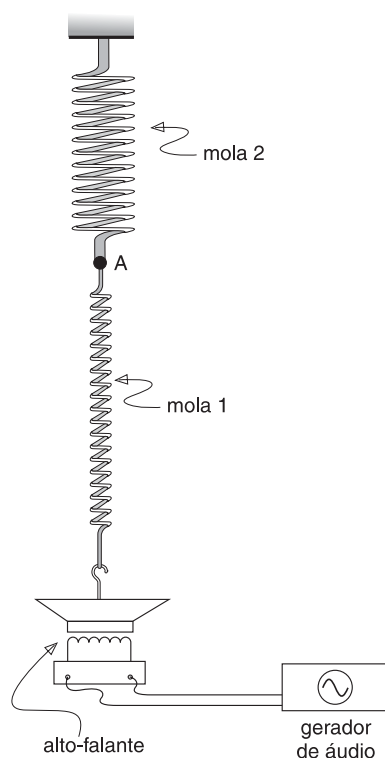
## Auto-avaliação

Você entendeu bem os conceitos apresentados nesta aula? Se ficou tudo bem claro, você deve ter conseguido fazer os exercícios sem pestanejar. Se teve dificuldades, já sabe, tenha paciência e volte ao começo da aula. Esta foi sua última aula deste módulo; esperamos que você tenha gostado! A seguir, você encontrará uma lista de problemas sobre ondas.

## Aula 17 – Aula de exercícios

Você vai encontrar, a seguir, uma lista com problemas variados, cobrindo toda a matéria vista no Módulo II. Como no módulo anterior, nem todos os exercícios têm o mesmo grau de dificuldade e, mais uma vez, para que você possa distingui-los, aqueles com grau de dificuldade intermediário estão identificados com ●, enquanto os mais difíceis, com ●●. Faça primeiro os mais fáceis; depois de compreendê-los bem, passe aos intermediários, deixando os mais difíceis para o fim. Não se esqueça de que os tutores poderão ajudá-lo. Bom trabalho!

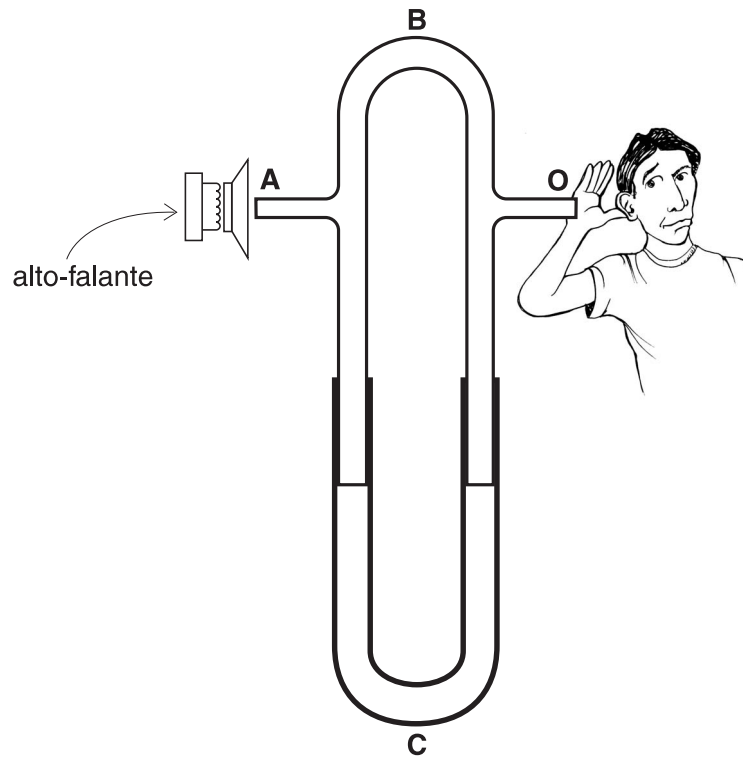
1. ●● Na Figura 17.1, mostramos uma mola, de constante elástica  $k_1$  e comprimento  $\ell_1$ , ligada a um alto-falante e a uma outra mola, de constante elástica  $k_2$  e comprimento  $\ell_2$  que, por sua vez, está presa ao teto. Sabendo-se que, na mola 1, uma onda se propaga com velocidade  $v_1$  e frequência  $\nu_1$ , determine:



**Figura 17.1:** Duas molas acopladas em série, uma delas ligada a um alto-falante.

- a) a velocidade  $v_2$  na mola 2;
- b) a frequência  $\nu_2$  na mola 2;
- c) a condição entre  $k_1$  e  $k_2$ , sabendo que  $\ell_1 = 2\ell_2$ , para que o ponto de junção entre as molas (A) fique permanentemente parado.

2. Na Figura 17.2, mostramos um interferômetro acústico, usado para demonstrar a interferência de ondas sonoras.  $A$  é um alto-falante que vibra com frequência  $\nu$ . Você coloca o seu ouvido em  $O$ . O comprimento do caminho  $ABO$  é fixo, mas o do caminho  $ACO$  pode ser variado.

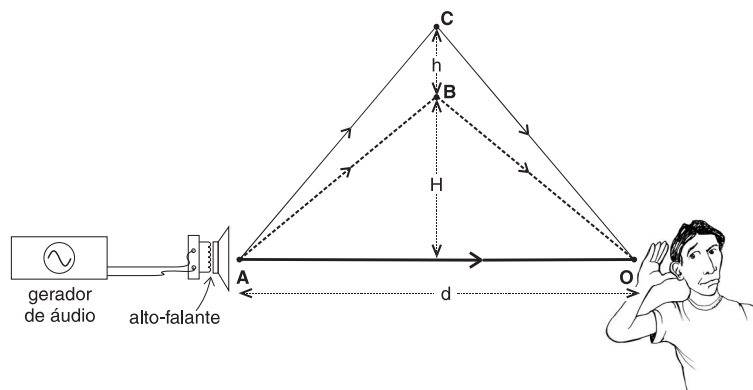


**Figura 17.2:** Interferômetro acústico.

O interferômetro contém ar, e verifica-se que a intensidade do som apresenta um mínimo de 100 unidades arbitrárias para certa posição de  $C$  e cresce continuamente até o máximo de 900 unidades arbitrárias para uma segunda posição de  $C$ , localizada a 1,65 m da primeira. Sabendo-se que a velocidade do som no ar é de 330 m/s:

- calcule a frequência  $\nu$  do som emitido pelo alto-falante;
- encontre a relação entre as amplitudes das ondas resultantes que chegam ao detetor na primeira e na segunda posição de  $C$ ;
- como é possível estas ondas resultantes terem amplitudes diferentes, se foram produzidas pela mesma fonte?

3. Um alto-falante  $A$  está a uma distância  $d$  de seu ouvido  $O$ . Verifica-se que uma onda recebida diretamente de  $A$  chega a  $O$  em fase com uma onda refletida por uma camada horizontal situada à altura  $H$ . Os raios incidentes e refletidos formam ângulos iguais com a camada refletora, como mostra a Figura 17.3. Se esta camada se elevar de uma distância  $h$ , nenhum sinal é recebido em  $O$ . Despreze a absorção no meio onde se encontra o alto-falante e determine a relação entre  $d$ ,  $H$ ,  $h$  e o comprimento de onda  $\lambda$ .



**Figura 17.3:** Percursos diferentes que a onda pode fazer.

4. Um morcego voa dentro de uma caverna, guiando-se pelo uso de “bips” ultra-sônicos. Suponha que a frequência da emissão do som do morcego seja de 39.000 Hz. Durante um voo em direção a uma parede plana, o morcego desloca-se com velocidade igual a  $1/40$  da velocidade do som no ar. Qual é a frequência da onda que ele ouve quando esta é refletida na parede?
5. A velocidade do som em um metal é  $V$ . Uma das extremidades de uma barra deste metal, de comprimento  $\ell$ , recebe um golpe forte. Uma pessoa, na outra extremidade, ouve dois sons, um oriundo da onda que se propagou pela barra e outro da onda que se propagou pelo ar.
- a) Se  $v$  é a velocidade do som no ar, qual o intervalo de tempo  $\Delta t$  que decorre entre os dois sons?
- b) Suponha  $\Delta t = 1$  s e que o metal seja o ferro. Determine o comprimento  $\ell$ .

6. Você dirige um carro do Corpo de Bombeiros em direção a um prédio, com velocidade  $v = 10 \text{ m/s}$ . A sirene está ligada e emite ondas sonoras com frequência de  $1000 \text{ Hz}$ .
- a) Qual a frequência do som que você ouve, proveniente diretamente da sirene?
  - b) Qual a frequência do som que você ouve, proveniente da reflexão no prédio?
  - c) Você consegue ouvir os batimentos?
7. • Um tubo fechado de órgão emite som nas vizinhanças de uma guitarra, fazendo uma de suas cordas vibrar com grande amplitude. Fazemos a tensão da corda variar até achar a amplitude máxima. A relação entre os comprimentos do tubo  $\ell_t$  e da corda  $\ell_c$  é conhecida:  $\ell_c = 0,8\ell_t$ . Sabendo-se que o tubo e a corda vibram com a mesma frequência fundamental, calcule a razão entre a velocidade de propagação da onda na corda e a velocidade de propagação do som no ar.
8. • Uma das cordas de uma guitarra, com comprimento de  $63,5 \text{ cm}$ , é afinada para produzir uma nota  $B_3$ , que tem frequência de  $245 \text{ Hz}$ , quando está vibrando no modo fundamental.
- a) Calcule a velocidade da onda transversal que percorre a corda.
  - b) Se a tensão da corda aumentar  $1\%$ , qual deve ser a nova frequência fundamental da corda?
  - c) Se a velocidade do som no ar for de  $344 \text{ m/s}$ , ache o comprimento de onda e a frequência da onda sonora produzida quando a corda vibra com a nota  $B_3$ .
  - d) Como se comparam a frequência e o comprimento de onda do item anterior com os obtidos para a onda estacionária na corda?



## Conclusão

Esperamos que você tenha gostado do módulo de ondas (e também do de oscilações!) e tenha se divertido observando osciladores e gerando ondas.

Você, agora, sabe que a natureza está repleta de osciladores e deve ter percebido que as ondas estão presentes em quase tudo à sua volta, desde ondas na superfície de uma lagoa até ondas sonoras de uma ambulância em movimento e tantas outras que você estudou durante este módulo.

Este foi seu primeiro contato formal com as ondas, mas não será o último! Como sempre, em uma primeira visita, muitas coisas não podem ser abordadas. Neste caso, tanto o tempo disponível quanto a complexidade matemática de alguns temas nos fizeram deixá-los de lado. Como mencionamos várias vezes, as ondas encontradas na natureza são, em sua grande maioria, tridimensionais, mas neste módulo estudamos apenas ondas unidimensionais (com uma pequena exceção “ilustrativa” na Aula 15: os modos normais de vibração de uma membrana).

Mas você ainda vai se deparar com ondas muitas vezes e terá a chance de aprender várias coisas que ficaram de lado agora. Você vai aprender sobre o caráter ondulatório da luz, sobre a dualidade partícula-onda, que é a base da mecânica quântica, e ainda muitas outras coisas interessantes ao longo das disciplinas que esperam por você.



## Referências bibliográficas

NUSSENZVEIG, H. Moysés. *Curso de física básica*. 3.ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

RESNICK, Robert; HALLIDAY, David. *Física* 4.ed. Rio de Janeiro: LCT, 1984.

RESNICK, Robert; HALLIDAY, David; KRANE, Kenneth S. *Física* 4.ed. Rio de Janeiro: LCT, 1996.



## Agradecimentos

Final de Disciplina...chegou a hora de agradecer:

– aos estudantes do Instituto de Física da UFRJ, Cristina Schoch Vianna, pela ajuda na realização das experiências, e Kazuyoshi Akiba, pela geração de gráficos no MAPLE;

– a Anna Maria Osborne, Ana Tereza de Andrade, Anna Carolina da Matta Machado e José Meyohas, pelas aulas de Português durante a revisão do texto;

– a Fabio Muniz, que criou o Professor Careca, pela competência na confecção das figuras;

– a Eduardo Bordoni, pela coordenação eficiente de ilustração;

– a Mirelle Mota, que, com muita paciência e competência, colocou figuras e texto no seu devido lugar, ganhando todas as batalhas contra o LATEX;

– ao CEDERJ, que nos deu a oportunidade de contribuir para o desenvolvimento do ensino a distância;

– a todos os funcionários do CEDERJ, elos da corrente entre os conteudistas e os alunos;

– antecipadamente, a esses alunos, que motivaram nossos esforços para escrever este livro.



ISBN 85-7648-115-4



9 788576 481157



**UENF**  
Universidade Estadual  
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense



**GOVERNO DO  
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



**Ministério  
da Educação**

