FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ

PLANO DE TRABALHO

1º ANO - 3º BIMESTRE

Trigonometria na Circunferência

COLÉGIO: CIEP BRIZOLÃO 337 BERTA LUTZ

PROFESSORA: RAQUEL CRUZ CABRAL TOLEDO

[raquelcruztoledo@yahoo.com.br]

MATRICULA: 00925676-9 / 5010146-8
SÉRIE: 1° ANO DO ENSINO MÉDIO
TUTOR: MARCELO RODRIGUES
GRUPO: 3B_1S_2013

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo da trigonometria na Circunferência e suas aplicações no cotidiano em sala de aula têm por objetivo levar o educando a perceber que não é apenas uma coleção de fórmulas prontas e que a mesma está presente em diversas áreas do conhecimento, modelando matematicamente situações cotidianas e auxiliando o homem em suas atividades.

A trigonometria trata da resolução de problemas envolvendo triângulos. A origem dessa palavra é grega: trigonos significa triângulo e metrein significa medir. Inicialmente considerada como extensão da geometria era estudada para resolver problemas práticos de Astronomia, de Navegação e de Agrimensura. O primeiro trabalho de trigonometria foi o "tratado dos triângulos", escrito pelo matemático Johann Muller. Atualmente a trigonometria não se limita apenas a estudar triângulos. Sua aplicação se estende a outros campos da matemática, como a Análise, e a outros campos da atividade humana como a Eletricidade, a Mecânica a Acústica, a Música, a Topologia, a engenharia Civil e etc. Tem um enorme valor prático em variados campos, como engenharia, Arquitetura, navegação marítima ou aérea e Astronomia e da Eletrônica. Do ponto de vista da Matemática, o desenvolvimento da trigonometria está associado à descoberta de constantes nas relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

Olhando a nossa volta encontramos muitas formas circulares, como por exemplo, a microscópica alga forma um círculo quase perfeito. Rolos de filme e engrenagens apresentam circunferência. Num primeiro momento vamos intercalar no nosso plano de trabalho a resolução de triângulos acutângulos e obtusângulos, com o estudo da lei dos senos e cossenos desse modo, o aluno pode aplicar seus conhecimentos de trigonometria em contextos geométricos.

A esse tema deve ser dado o mesmo tratamento conferido aos demais. Procurando uma abordagem intuitiva, experimental e o mais concreta possível. Sem subestimar suas bases concretas, procurando avançar nas abstrações e no encadeamento lógico para que não deixem de ser abordados. Onde tais indagações levem o aluno a pensar, observar e ao mesmo tempo interagir com o tema abordado buscando suas próprias soluções para as resoluções das questões apresentadas.

Através do trabalho com os descritores, podemos observar os distratores que precisam de mais atenção no processo de aprendizagem dos alunos.

Descritores: baseando-se nas atividades propostas, poderemos identificar estabelecer a relação entre duas grandezas quando ao efetuamos a divisão da circunferência pelo seu diâmetro relacionando seus elementos **(H09)**, contextualizamos as situações problemas contextualizando as relações métricas do triângulo retângulo e seu posicionamento na circunferência dentro do estudo das funções **(H61).**

Distratores: geralmente os alunos apresentam dificuldades em realizar os cálculos que envolvem as operações devido a alguma deficiência de conteúdo no que envolve as quatro operações matemáticas, além de situações que envolvam estabelecer semelhanças e diferenças mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade **(H12).**

ESTRATÉGIAS ADOTADAS

As estratégias adotadas para a realização das atividades propostas visam levar o aluno a vivenciar de forma lúdica a situação proposta, trabalhando os conceitos apresentados e, ao mesmo tempo compartilhar suas hipóteses com a de seus colegas. Nas atividades propostas estará inserido o uso de alguns jogos para enriquecer as atividades que serão propostas, além de exercícios de verificação e pesquisa (com ou sem a utilização do livro didático). Estas por sua vez, não serão o único instrumento de avaliação a ser utilizado, mais sim o canal pelo qual o aluno viabilizará para conclusão dos fatos observados. A idéia principal é despertá-lo para as outras tarefas a serem cumpridas em cada tópico, aguçando a sua curiosidade e percebendo que brincando também se aprende.

ATIVIDADES

1ªAtividade: Redescobrindo o valor aproximado de π calculando o comprimento da circunferência

- **Habilidade relacionada:**

- **H09** Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

C1 - Diferenciar circunferência de círculo.

C2 - Reconhecer em uma circunferência o diâmetro, o raio e a corda.

C3 - Relacionar os elementos de uma circunferência

- **Pré-requisitos:**

- Estabelecer relações entre duas grandezas.

- **Tempo de Duração:**

Duração: 2 aulas

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

- Caderno do aluno
- lápis
- folha sulfite
- variedade de objetos circulares e cilíndricos

- fita métrica, trena ou barbante

- **Organização da turma:**

- As tarefas serão realizadas em pequenos grupos ou em duplas.

- **Objetivos:**

- Calcular que o comprimento da circunferência em função do seu raio é 2π vezes maior;

- Identificar o número π.

- Relacionar as medidas do diâmetro e do raio para determinar suas medidas;

- Determinar a região dos pontos internos e a região dos pontos externos a uma circunferência;

- **Metodologia adotada:**

1. Iniciar o assunto com a seguinte pergunta:

Você sabia...

Que a medida da borda de um copo é maior que todo o seu tamanho?

2. Pegar uma fita métrica e fazer as medições e demonstrá-las a turma.

3. Em seguida utilizar-se de vários objetos que estarão expostos sob a mesa.

4. Orientar os alunos para que peguem um objeto cilíndrico qualquer, como a latinha de refrigerante.

5. Depois, usar uma fita métrica ou trena para contornar a lata, obtendo as duas medidas, dividir o comprimento C da circunferência pelo comprimento 2r do seu diâmetro, encontrando uma aproximação do número irracional π, isso ocorre sempre, qualquer que seja a circunferência.

6. Montar a fórmula:

$$\boxed{\frac{C}{2r} = \tau \Rightarrow C = 2r.\tau \Rightarrow C = 2\tau r}$$

7. Perceber que essa fórmula permite calcular o comprimento de qualquer circunferência conhecido o comprimento *r* do seu raio.

8. Em seguida, marque a medida necessária para esse contorno.

10. Por último, registre a medida do comprimento da circunferência que contorna os objetos e registre na tabela abaixo:

OBJETO	$\frac{C}{d}$	π
Garrafa de água		
Lixeira		
Cilindro		
Garrafa de suco		
Vidro de remédio		
Garrafa de cloro		
Durex		
Corretor		

Moeda		

11. Em seguida calcule cada objeto de acordo com seu comprimento e diâmetro.

12. Responda as seguintes questões:

a) A medida utilizada em cada caso é igual? Por quê?

b) Se você dividir o número que expressa o comprimento da circunferência que contorna os objetos pelo número que expressa a medida do diâmetro, qual o número que você irá encontrar como resultado?

Deixar que os alunos encontrem possíveis

aproximações do número π = 3,1415...

13. Utilizar objetos cilíndricos de tamanhos variados e deixar que procedam como no modo acima.

2ª Atividade: A ... ios ângulos

- **Habilidade relacionada:**

- Identificar o nome de figuras planas**.**

- Resolver as questões utilizando cálculo algébrico.

- Noções de grandezas proporcionais.

- **Pré-requisitos:**

- Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica como linguagem das ciências, necessária para expressar as relações de grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da Matemática.

- **Tempo de Duração:**

Duração: 4 aulas

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

- Caderno do aluno

- lápis

- folha sulfite

r = 10 cm

- **Organização da turma:**

- Dividir os alunos em duplas.

- **Objetivos:**

- Identificar relações entre duas grandezas;

- Verificar a noção de função por meio de exemplos práticos;

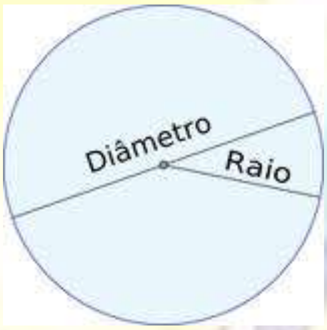
- Determinar a lei de formação que define uma função;

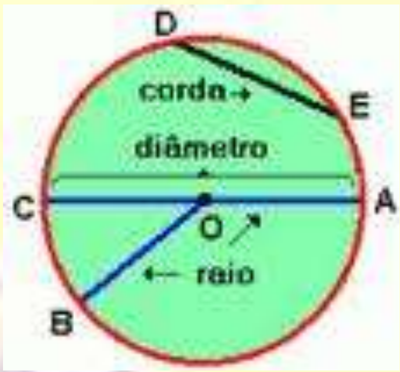
- Utilizar os conhecimentos sobre função para resolver as situações-problema apresentadas.

- **Metodologia adotada:**

1. Organizar os alunos em duplas e conduzi-los a desenhar a circunferência usando a medida dada para o raio.

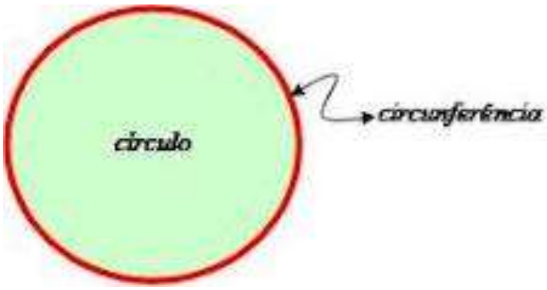
Assim:





2. Deixar os alunos conversarem e orientá-los a registrar, tanto por meio do desenho como com a elaboração de um texto, o significado que atribuem para pontos internos e externos à circunferência, bem como os pontos para a própria circunferência.

3. Perceber que toda circunferência determina no plano duas regiões distintas: a região interna denominada círculo e a região externa.



4. Solicitar aos alunos que indiquem, de forma prática, possíveis valores para o ponto P, estando ele externo à circunferência, interno à circunferência e na circunferência.

5. De mãos dadas, organizarem uma grande roda, formando uma circunferência.

6. Escolher três alunos: cada aluno vai representar algumas das possíveis posições que o ponto P pode assumir de acordo com uma das três condições (externo à circunferência, interno à circunferência, um ponto da circunferência).

7. Orientar a classe a localizar os pontos e a posicionar os três alunos em relação ao círculo que formaram, obedecendo as condições anteriores.

8. Assim os pontos forem localizados, e os alunos posicionados de acordo com essa localização, peça aos três alunos que mudem de posição pelo menos três vezes, mas sempre atendendo às condições indicadas.

9. Ao fim dessa atividade, solicitar aos alunos que voltem a se reunir com um colega, mantendo as duplas iniciais, e registrem, na circunferência que desenharam inicialmente, todas as posições que escolheram para o ponto P na atividade prática.

10. Os alunos podem responder, apresentando suas conclusões e observações com base tanto na atividade prática que realizaram quanto aos desenhos e representações que fizeram nos cadernos, sempre tendo como referência que o raio da circunferência do exercício possui a medida de 10 cm.

11. Propor as seguintes indagações:

a) Qual deve ser o valor de x para que o ponto P seja externo à circunferência?

Após a realização da atividade prática e das reflexões suscitadas pelo exercício, os alunos já devem perceber que o ponto P externo à circunferência pode assumir posições infinitas. Assim, podem inferir que, se o raio tem 10 cm, todos os pontos que passaram de 10 cm serão externos à circunferência; concluindo, portanto, que o ponto P será externo à circunferência quando x for maior que 10 cm.

b) Qual deve ser o valor de x para que o ponto P seja interno à circunferência?

Aqui, os alunos podem verificar que o ponto P interno à circunferência pode assumir múltiplas posições. Se o raio tem

10 cm, todos os pontos internos à circunferência necessariamente terão de ter menos de 10 cm. Portanto, o ponto P será interno à circunferência sempre que x for menor que 10 cm.

c) Qual deve ser o valor de x para que o ponto P seja ponto da circunferência?

Agora, os alunos verificam que o ponto P posicionado na circunferência também pode assumir múltiplas posições, mas sempre estando a uma mesma distância do centro O. Como viram que o raio é qualquer segmento que une o centro O a um ponto da circunferência, e no exercício é dado r=10 cm, logo concluirão que o ponto P será ponto da circunferência sempre que x for igual a 10 cm.

3ª Atividade: Trabalhando com o ciclo trigonométrico

- **Habilidade relacionada:**

- Transitar pelo ciclo trigonométrico reconhecendo posições, arcos e ângulos e relacionar com correção as unidades de medida de arcos e ângulos e medir seus comprimentos.

- Identificar congruências e simetrias no ciclo, além de outras regularidades e estender as definições das razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente).

- Reconhecer no ciclo os eixos das cotangentes, das secantes e das cossecantes, definindo as condições de existência.

- Usar a semelhança de triângulos para encontrar algumas relações entre as trigonométricas.

- Usar a lei dos senos e a lei dos cossenos para resolver problemas diversos, como os de distâncias impossíveis de serem medidas diretamente.

- Construir, ler e interpretar gráficos de funções trigonométricas e determinar o período, o domínio e o conjunto imagem de funções trigonométrica.

- **Pré-requisitos:**

- Reconhecer e utilizar a linguagem algébrica como linguagem das ciências, necessária para expressar as relações de grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da Matemática.

- **Tempo de Duração:**

Duração: 4 aulas

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

--Papel miimetrado

- lápis
- folha sulfite
- noteboock
- livros para pesquisa
- datashow
- quadro branco
- cd
- objetos cilíndricos

- **Organização da turma:**

- Reunir os alunos em duplas para discutir e analisar e responder as questões propostas.

- **Objetivos:**

- O objetivo dessa aula é trabalhar de maneira intuitiva trigonometria na circunferência e função trigonométrica.
- Procurar abordar assuntos relacionados a diferentes áreas do conhecimento.
- Diferenciar a relação de função trigonométrica.

- Interpretar diferentes representações, como gráficos, sentenças, esquemas e equações.
- Observar a simetria da função.

- **Metodologia adotada:**

O trabalho será realizado através de exercícios diversificados para fixação do assunto abordado. Também irei utilizar o datashow para visualizar a construção de gráficos e o livro didático para que haja um melhor aprendizado.

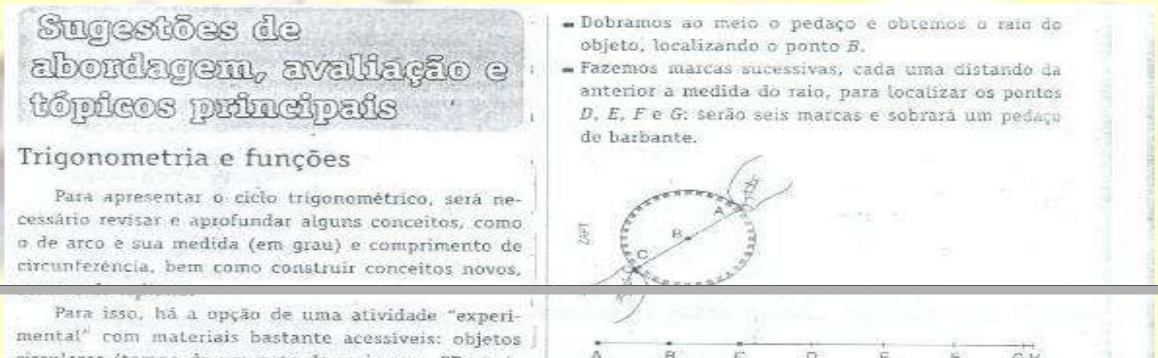
Para iniciar o estudo da trigonometria na Circunferência e funções trigonométricas faremos uma revisão sobre medidas de arcos e ângulos em uma circunferência, apresentando uma nova unidade de medida: o radiano. Em seguida introduzimos a circunferência (ou ciclo) trigonométrica, associando os números reais $x(0 \leq x \leq 2\pi)$ a pontos da circunferência correspondentes à extremidade final de um arco de medida x radianos.

Para apresentar o ciclo trigonométrico, será necessário aprofundar alguns conceitos, como o de arco e sua medida (em grau) e comprimento de circunferência, bem como construir conceitos novos, como o de radiano.

Estendemos os conceitos de razões trigonométricas (seno , cosseno e tangente) para arcos de primeira volta tomados no sentido positivo. A compreensão plena do ciclo trigonométrico.

Outras razões trigonométricas são apresentadas no ciclo; cotangente, secante e cossecante, bem como a relação entre elas , ainda lembrando a importância da semelhança de triângulos para mostrar as relações entre as razões trigonométricas.

1) Atividade experimental em sala de aula:



Sugestões de abordagem, avaliação e tópicos principais

Trigonometria e funções

Para apresentar o ciclo trigonométrico, será necessário revisar e aprofundar alguns conceitos, como o de arco e sua medida (em grau) e comprimento de circunferência, bem como construir conceitos novos,

Para isso, há a opção de uma atividade "experimental" com materiais bastante acessíveis: objetos

- Dobramos ao meio o pedaço e obtemos o raio do objeto, localizando o ponto *B*.
- Fazemos marcas sucessivas, cada uma distando da anterior a medida do raio, para localizar os pontos *D*, *E*, *F* e *G*: serão seis marcas e sobrará um pedaço de barbante.

Após esta primeira experiência estamos em condições de apresentar o ciclo trigonométrico e sugerimos e faremos esse trabalho em duas etapas 0 a 2 (1ª. Volta) e, depois que aluno já adquiriu certa familiaridade com o ciclo, estender para demais voltas , em qualquer sentido.

Familiaridade como: correta leitura do seno, do cosseno e da tangente de um número real x, reconhecer simetrias e regularidades no ciclo; reduzir corretamente ao primeiro quadrante etc.

2) Introduzir as funções seno ,cosseno e tangente, bem como o conceito de período de função. Dando importância

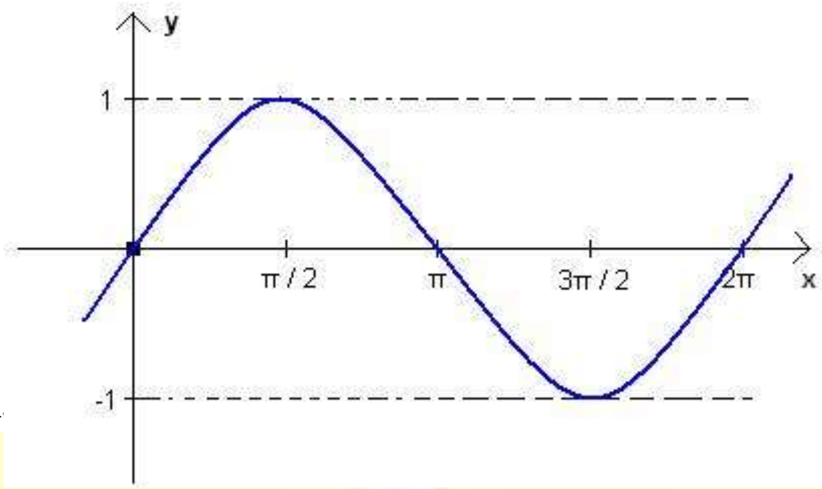
a função trigonométrica e construindo e analisando gráficos, examinando domínio, imagem e período das funções.

- ## Função seno

Chamamos de função seno a função **f(x) = sen x.** O domínio dessa função é R e a imagem é Im [-1,1] ; visto que, na circunferência trigonométrica o raio é unitário e, pela definição do seno, –1 £ sen x £ 1, ou seja:

Domínio de f(x) = sen x; D(sen x) = R.

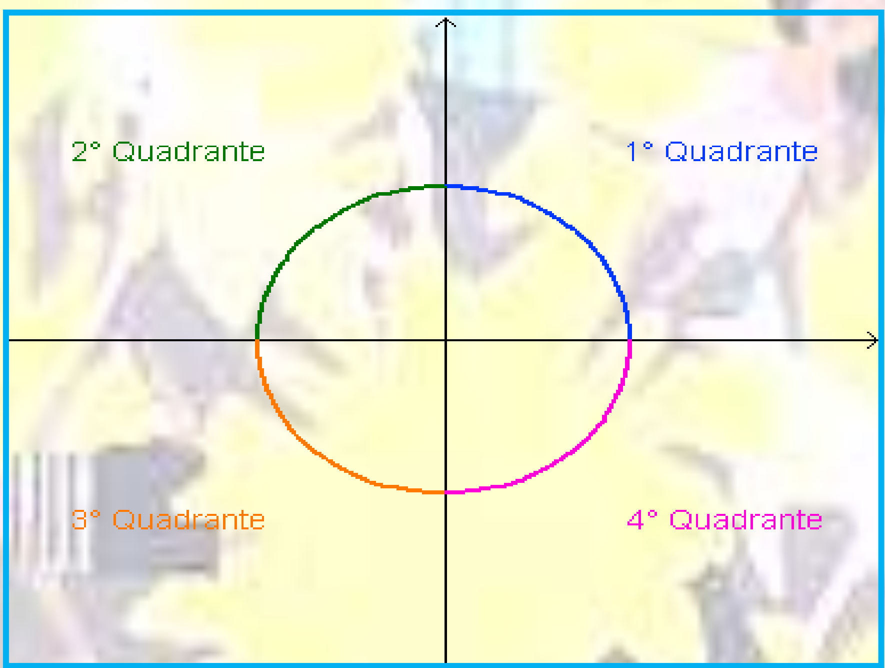
Imagem de f(x) = sen x; Im(sen x) = [-1,1] .



- **Sinal d** dade do arco:1

f(x) = sen x é positiva no 1° e 2° quadrantes (ordenada positiva)

f(x) = sen x é negativa no 3° e 4° quadrantes (ordenada negativa)



Observe que esse gráfico é razoável, Pois:

Quando $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, 1º quadrante, o valor de sen x cresce de 0 a 1.

Quando $x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, 2º quadrante, o valor de sen x decresce de 1 a 0.

Quando $x \in \left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$, 3º quadrante, o valor de sen x decresce de 0 a -1.

Quando $x \in \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, 4º quadrante, o valor de sen x cresce de -1 a 0.]

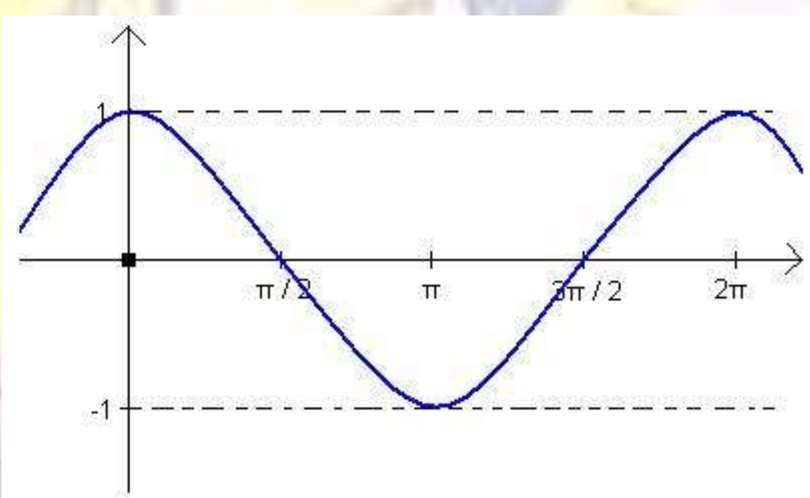
- ## Função cosseno

Chamamos de função cosseno a função **f(x) = cos x.**

O domínio dessa função é R e a imagem é Im [-1,1] ; visto que, na circunferência trigonométrica o raio é unitário e, pela definição do cosseno, –1 £ cos x £ 1, ou seja:

<u>Domínio de f(x)</u> = cos x; D(cos x) = R.

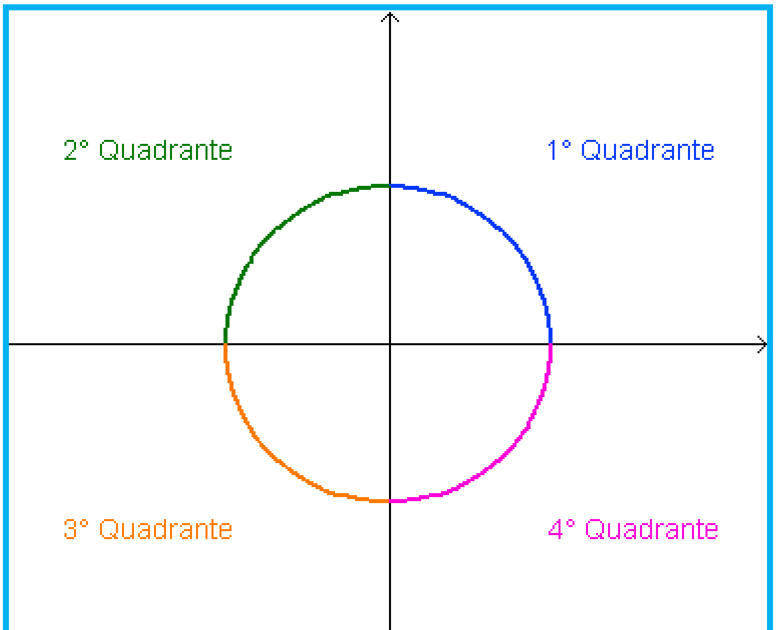
<u>Imagem de f(x)</u> = cos x; Im(cos x) = [-1,1] .



- **Sinal da Função:** Como cosseno x é a abscissa do ponto-extremidade do arco:

f(x) = cos x é positiva no 1° e 2° quadrantes (abscissa positiva)

f(x) = cos x é negativa no 3° e 4° quadrantes (abscissa negativa)



Observe que esse gráfico é razoável, Pois:

Quando $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 1º quadrante, o valor do cos x decresce de 1 a 0.

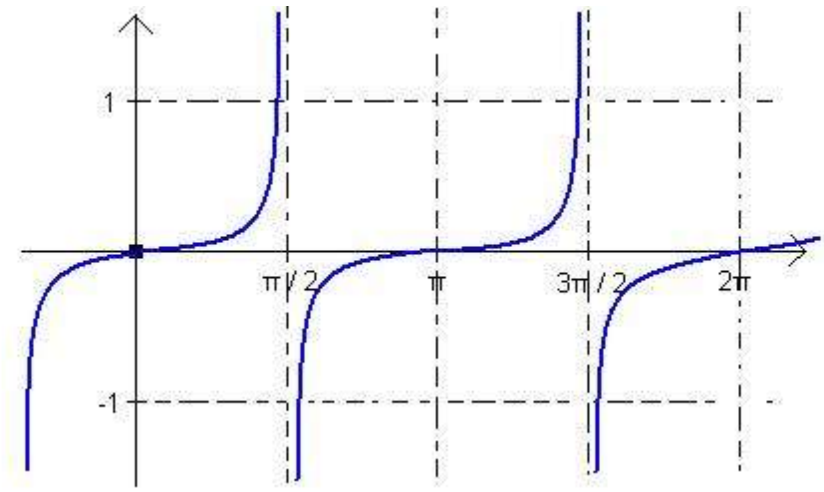
Quando $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 2º quadrante, o valor do cos x decresce de 0 a -1.

Quando $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, 3º quadrante, o valor do cos x cresce de -1 a 0.

Quando , $x \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ 4º quadrante, o valor do cos x cresce de 0 a 1.

- **Função tangente**

Chamamos de função tangente a função **f(x) = tg x.**



- **Sinal da Função:** Como tangente x é a ordenada do ponto T interseção da reta que passa pelo centro de uma circunferência trigonométrica e o ponto-extremidade do arco, com o eixo das tangentes então:

  f(x) = tg x é positiva no 1° e 3° quadrantes (produto da ordenada pela abscissa positiva)

  f(x) = tg x é negativa no 2° e 4° quadrantes (produto da ordenada pela abscissa negativa)

- ## Função secante

  Denomina-se função secante a função **f(x) = 1/cos x.**

- **Sinal da função:** Como a função secante é a inversa da função cosseno, então os sinais da função secante são os mesmos da função cosseno.

- **Definição:** $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

  Logo, o domínio da função secante é

  $$\{x \in R \,/\, \cos x \neq 0\} = \left\{x \in R \,/\, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}.$$

- ## Função cossecante

Denomina-se função cossecante a função **f(x) = 1/sen x.**

- **Sinal da função:** Como a função cossecante é a inversa da função seno, então os sinais da função cossecante são os mesmos da função seno.

- **Definição:** $\text{cossec } x = \dfrac{1}{\text{sen } x}$.

  Logo, o domínio da função cossecante é $\{x \in R \,/\, \text{sen } x \neq 0\} = \{x \in R \,/\, x \neq k\pi, k \in Z\}$

- ## Função cotangente

  Denomina-se função cossecante a função **f(x) = 1/sen x.**

- **Sinal da função:** Como a função cossecante é a inversa da função tangente, então os sinais da função cotangente é a razão entre o cosseno e o seno.

  - $cot(\theta) = \dfrac{1}{tan(\theta)}$
  - $cot(\theta) = \dfrac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$

- ## Função cotangente

  Denomina-se função cossecante a função **f(x) = 1/sen x.**

- **Sinal da função:** Como a função cossecante é a inversa da função tangente, então os sinais da função cotangente é a razão entre o cosseno e o seno.

- $cot(\theta) = \dfrac{1}{tan(\theta)}$
- $cot(\theta) = \dfrac{cos(\theta)}{sen(\theta)}$

AVALIAÇÃO

Nos instrumentos de avaliação serão observados os objetivos previstos e estes usados de forma criteriosa e coerente mediante os procedimentos e participação dos alunos nas atividades, atreladas aos descritores do Currículo Mínimo.

A avaliação permitirá uma visão mais detalhada sobre o processo de ensinar e aprender devendo ser considerada como elemento articulador do processo de ensino-aprendizagem e pelo acompanhamento que faz das ações pedagógicas e de seus resultados junto aos alunos. Estimula a apresentação de raciocínios, interpretações e argumentos em situações complexas e reais.

Pensando neste sentido que usaremos como instrumento de avaliação não apenas a verificação do aproveitamento do aluno por meio de testes e provas, que poderão ser dissertativas ou objetivas, mas também a partir de:

- Pesquisas realizadas durante as aulas e como tarefa de casa, como por exemplo, reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações **(H09);**
- Relatório dos conteúdos apreendidos durante as aulas;
- Trabalhos realizados individualmente ou em grupos, calculando um dos lados de um triângulo retângulo em problemas contextualizados ou não, com o auxílio do seno, cosseno ou tangente dos ângulos de 30º, 45° e 60° (**H12** /C1);
- Auto avaliação;
- Portfólio, onde os melhores trabalhos dos alunos sejam relacionados;
- Trabalhos em dupla e/ou grupo Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°) **(H12);**
- Atividades complementares com o auxílio do livro didático (C1) Diferenciando circunferência de círculo, (C2) Reconhecendo em uma circunferência o diâmetro, o raio e a corda, (C3) Relacionando os elementos de uma circunferência.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETO FILHO, Benigno e Silva, Cáudio Xavier da, *Matemática aula por aula,* Volume únivo, FTD.2000.

GIOVANNI JR. E CARTUCCI, José Ruy e Benedicto. *A Conquista da Matemática*. ed. São Paulo: FTD, 2009.

SMOLE E DINIZ, Kátia Stocco e Maria Ignez. *Matemática Ensino Médio*. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

SOUZA, Jamir. *Novo Ohar Matemática Ensino Médio,*volume 1. Ed FTD, São Paulo, 2010, 1ª Ed.

PAIVA, Manoel. *Matemática Paiva Ensino Médio,* volume 1, Ed Moderna, São Paulo, 2009, 1ª Ed.

*Disponível pela internet nos sites abaixo e a*cessados *em 5 de setembro de 2013.*
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/geom-circ/geom-circ.htm
http://www.brasilescola.com/matematica/circulo-ou-circunferencia.htm
http://www.gnosisonline.org/curiosidades/brincadeiras-esotericas/