



FUNÇÕES POLINOMIAIS DO SEGUNDO GRAU

Curso de Formação Continuada

Aluna: Silvana e Silva
Junior

Tutor: Emílio

Sumário

Sumário	1
Introdução.....	2
Roteiro de Ação 1 – Introdução ao Estudo das Funções Quadráticas	3
Roteiro de Ação 2 – Muito prazer, eu sou a Parábola!	6
Roteiro de Ação 3 – Identidade Geométrica da Parábola.....	9
Avaliação	19
Referências Bibliográficas.	20

Introdução

O objetivo deste plano de trabalho é permitir que os alunos percebam o conceito de função quadrática ou polinomial do segundo grau partindo de situações comuns do seu cotidiano. Além de poderem identificar nas mesmas uma ferramenta com aplicações em outras áreas do conhecimento tais como: Física, Biologia, química, etc.

A presente proposta visa enfatizar a ideia de variação, ou grandezas que variam, uma dependendo da outra através de gráficos, tabelas e fórmulas. Para que o estudo das funções seja completo é necessário destacar noções de variável, dependência, regularidade e generalização. Assim como outros conceitos envolvidos no estudo das funções polinomiais do segundo grau. Será necessário a revisão de alguns pré-requisitos como: equações do segundo grau, coordenada cartesiana, construção de gráfico entre outros.

Para o desenvolvimento do trabalho foram utilizados os roteiros de ação 1, 2 e 3.

Atualmente, é de suma importância o aluno saber analisar um gráfico e fazer sua leitura. Várias situações do cotidiano são representadas através dessa ferramenta e veiculadas através das mídias. Essas representações gráficas visam retratar os dados numéricos de situações como se fosse um “retrato” da parte algébrica que está por trás das informações levantadas através de pesquisas feitas por determinados órgãos específicos.

Roteiro de Ação 1 – Introdução ao Estudo das Funções Quadráticas

Duração :100 minutos.

Introduzir o estudo das funções quadráticas a partir da abordagem de resolução de problemas e modelagem matemática.

Pré-Requisitos: Noções de proporcionalidade; conceito de função.

Folha de atividades, apresentada em arquivo anexo; calculadora comum.

Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.

Descritores Associados: H43 – Resolver problemas envolvendo equações do 2º grau. H49 – Reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função polinomial do 2º grau.

H111 – Identificar uma equação do 2º grau que expressa um problema.

Metodologia

Nessa atividade queremos mostrar ao aluno que os diversos conceitos matemáticos podem ser encontrados em situações corriqueiras do dia-a-dia. Mais particularmente, utilizamos uma situação de frenagem de um automóvel como exemplo motivador para o estudo de funções quadráticas.

Leia a história em quadrinhos, em seguida responda às questões:

(A história será entregue aos alunos em tamanho maior do que está representado aqui no trabalho)





a. Se o veículo estivesse na velocidade indicada pelo motorista, qual deveria ser o comprimento aproximado das marcas dos pneus no asfalto? Discuta com seus colegas, explicitando seu raciocínio.

b. Na tabela abaixo encontram-se os valores estimados para as distâncias percorridas (em metros) por um veículo de passeio após o acionamento dos freios e até a sua completa parada, e associados às velocidades (em quilômetros por hora) do veículo no momento em que o motorista aciona os freios. Observe-a.

	40	60	80	100	120
	16	36	64	100	144

Compare os valores da tabela com a resposta dada no item anterior. Ela está certa? Por quê?

c. Existe alguma relação entre a resposta dada no item (a) e o valor indicado na tabela do item (b)? Qual é essa relação?

d. Observe na tabela as distâncias associadas às velocidades de 40 km/h e 80 km/h. Qual a relação entre esses valores? Essa relação está ligada de alguma forma ao fato de que 40 é a metade de 80? E com as distâncias associadas às velocidades de 60km/h e 120km/h, existe alguma relação? Essa relação é igual ou diferente da relação existente entre 40km/h e 80km/h?

e. Agora, compare as distâncias associadas às velocidades de 40km/h e 120km/h. O que você observa?

f. Supondo que a tabela e a proporção utilizada nela estejam corretas, você seria capaz de estimar a distância associada a uma velocidade de 200km/h? Qual é essa distância?

g. As velocidades de 40km/h e 60km/h relacionam-se de maneira que 60 é uma vez e meia maior que 40. Considerando esse fato, determine a relação entre as distâncias percorridas para essas velocidades.

h. Faça o mesmo para as velocidades de 80km/h e 100km/h.

i. Você saberia fazer o mesmo considerando, agora, as velocidades de 40km/h e 70km/h? Tente! Troque ideias com seus colegas e discuta a estratégia usada para a resolução.

j. Agora que você já deve ter percebido que a distância percorrida após o acionar dos freios pelo motorista e a velocidade do veículo neste momento se relacionam, escreva uma fórmula para este problema. Para tanto, considere uma velocidade v qualquer, em km/h, maior que 40km/h e determine a distância d de frenagem que está associada a ela a partir da distância associada a 40km/h.

Nesta atividade queremos que o aluno crie por si mesmo a “regra” que compõe a fórmula da distância de frenagem de qualquer velocidade v maior que 40km/h. Para isso, ele deverá ser capaz de compreender que qualquer velocidade v maior que 40km/h pode ser relacionada à velocidade de 40km/h com constante de proporção maior que 1. A fórmula final deverá ficar parecida com a seguinte:

$$\text{distância de frenagem} = \left(\frac{v}{(40\text{km/h})} \right)^2 \cdot 16\text{m}$$

k. Use a fórmula que você encontrou para completar essa tabela, verificando as distâncias percorridas após o acionar dos freios quando o veículo está a uma velocidade de 50, 70 e 90 km/h, completando a tabela abaixo:

40	16
50	
60	36
70	
80	64
90	
100	100
110	
120	144

Roteiro de Ação 2 – Muito prazer, eu sou a Parábola!

Duração: 100 minutos.

Área de conhecimento: Funções Quadráticas

Objetivos: Auxiliar o aluno a perceber o formato do gráfico da função quadrática.

Pré-requisitos: Plano Cartesiano; gráficos de funções.

Material necessário: Folhas de papel quadriculado ou milimetrado, software Geogebra, Laboratório de Informática / notebook do professor acompanhado de projetor multimídia.

Organização da classe: Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando organizado e colaborativo.

Descritores associados: H 49 – Reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função polinomial do 2º grau.

Metodologia:

Explorando outras situações de distâncias de frenagem...

- a. Acesse o link
http://www.estradas.com.br/new/distancia_de_parada/distancia_de_parada.asp Nele há uma animação interativa

que permite simular situação de frenagem, a velocidade (na cidade e na rodovia) e as condições da pista. Faça todas as simulações possíveis para pista molhada e seca, tabele os resultados e verifique as relações que você percebeu na atividade anterior na situação demonstrada no aplicativo. OBS: O site considera um tempo inicial fixo de 1segundo entre a observação do perigo a frente e o momento que o motorista pisa no freio, esse tempo é chamado de tempo de reação. A distância percorrida durante esse tempo de reação DEVE ser DESPREZADA na construção da tabela acima.

Esse item visa revisar o que foi visto no roteiro anterior. Repare que o aluno provavelmente não será capaz de realizá-lo sem antes ter percorrido grande parte do roteiro anterior. Essa é uma boa oportunidade não apenas para o aluno aprofundar seus conhecimentos iniciais sobre funções quadráticas como também de perceber uma aplicação prática do conhecimento matemático na vida cotidiana.

- b. Vamos nos lembrar da atividade “Dirigir e Matemática: tem a ver? estudada nas aulas anteriores? Como será que aquela situação ficaria representada graficamente no plano cartesiano?

- c. Na folha de papel quadriculado/milimetrado trace um par de eixos coordenados e identifique o eixo horizontal às velocidades (medidas em km/h) e o eixo vertical às distâncias de frenagem (medidas em m). Agora, utilize esse plano cartesiano para marcar os nove pontos associados à última tabela da atividade “Dirigir e Matemática: tem a ver?”

- d. Como ficou o seu gráfico? Você conseguiria traçar uma curva passando por esses pontos?

Nesses dois itens pretendemos que o aluno se ambiente com a disposição não-linear dos pontos marcados. É também um bom exercício para revisão do processo de marcação de pontos no plano cartesiano. Nesse momento, é importante que o professor não deixe de chamar atenção dos alunos para o fato de os pontos não estarem alinhados – não se esqueça: a opção pelo papel milimetrado/quadriculado está intimamente relacionada ao desejo de se perceber que os pontos não estão alinhados. Repare ainda que esse mesmo exercício pode ser adaptado para outra situação. Reforçamos a tese de que a ligação com a vida cotidiana, ou seja, com um problema prático, tem um fator atração que não deve ser ignorado; portanto, use e abuse da sua criatividade!

- e. Agora, em lugar de utilizar o papel, você utilizará o computador para marcar esse pontos. Para tanto, siga a sequência de passos descritas a seguir.
- Abra o software Geogebra.
 - Na caixa “Entrada”, na parte inferior da tela, insira os pontos da primeira tabela do roteiro 1, no formato (x,y), teclando “ENTER” ao final de cada um deles. Observe que o software nomeia os pontos, em ordem alfabética, na mesma ordem em que os inserimos no software.
 - Para podermos visualizar os pontos, temos que ajustar nossa janela gráfica, diminuindo o zoom. Para isso, clique no ícone no último menu de opções e clique sobre a janela gráfica para ajustar a janela de visualização de maneira que você consiga visualizar os pontos marcados.
 - Agora é a hora de pensar na curva passaria por todos esses pontos. Para tanto, escreva na caixa “Entrada”, na parte inferior da tela, o comando POLINÔMIO [A, B ,C, D, E]. Esse comando retorna o gráfico da função polinomial que passa pelos pontos que indicamos dentro dos colchetes (os nomes dos pontos são dados pelo próprio software). Agora, responda: 1. Como é esta curva? Descreva-a! 2 - Compare o resultado que você encontrou com o Geogebra com o que você havia feito à mão. Você percebe alguma semelhança? Discuta com seus colegas e tente registrar suas observações.
- f. Experimente marcar outros pontos, acima de 120 e abaixo de 40, sempre usando a fórmula obtida na atividade “Dirigir e Matemática: tem a ver?”. Faça isso tanto no seu gráfico em papel quanto no gerado pelo Geogebra. Esses pontos ficaram ainda sobre a curva que o software gerou? Você saberia explicar por quê?

É de se esperar que ele tenha percebido que a fórmula por ele obtida na execução do Roteiro 1 é um polinômio e, por isso, faz sentido escolher essa opção, pois ela esboça o gráfico de uma função dada por um polinômio da qual conhecemos pelo menos 3 pontos. Esta sequência de atividades leva o aluno a perceber qual é o formato do gráfico da curva polinomial que passa pelos pontos que marcamos, que são pontos de uma função quadrática – mas esse objetivo somente será alcançado com o auxílio do software!

- g. Vamos agora pensar numa outra situação. Imagine um jogador de vôlei sacando em uma partida. Considere que a altura atingida pela bola seja representada algebricamente por $h(t) = -t^2 + 8t$, onde h é a altura em metros e t o tempo, em segundos.
- h. Complete a tabela abaixo segundo a relação descrita acima.

Tempo (s)	0	2		6	
-----------	---	---	--	---	--

Altura(m)	0		16		0
-----------	---	--	----	--	---

- i. Utilizando o Geogebra, faça o mesmo procedimento transcrito no item c para traçar o gráfico dessa função.
- j. Agora responda: o que existe em comum entre as curvas? Elas são do mesmo tipo?

O objetivo dos itens (d), (e) e (f) é apresentar outra situação que seja descrita por uma função quadrática. Pretendemos que o aluno conclua que as curvas encontradas são do mesmo “tipo”, identificando inclusive uma importante propriedade: seu ponto extremo. Seria interessante que fosse feito um fechamento apresentando a parábola, sistematizando o que foi percebido até agora em relação às funções quadráticas. Nessa apresentação, os alunos devem ficar cientes de que a parábola pode ser côncava para cima ou para baixo. Esse fechamento deve ser conduzido por você, mas é muito interessante e enriquecedor que os alunos participem ativamente, inclusive ajudando na elaboração de um texto para ser anotado no caderno, como por exemplo:

Este tipo de curva é o que chamamos de PARÁBOLA. Esta é a curva que representa graficamente funções nas quais a variável encontra-se elevada ao quadrado, que chamamos de FUNÇÕES QUADRÁTICAS, sendo esta a maior potência possível para a variável.

Roteiro de Ação 3 – Identidade Geométrica da Parábola

Duração: 100 minutos.

Área: funções quadráticas

Objetivos: Relacionar a concavidade da parábola e o coeficiente a ; identificar o ponto $(0, c)$ como o ponto em que a parábola intersecta o eixo y ; perceber que o vértice da parábola corresponde ao ponto extremo da função quadrática. f

Pré-requisitos: Identificar a parábola como sendo o gráfico da função quadrática.

Material necessário: Folha de atividades.

Organização da classe: Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e cooperativo.

Descritores associados:

H 49 – Reconhecer a representação algébrica ou gráfica da função polinomial do 2º grau.

H50 – Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

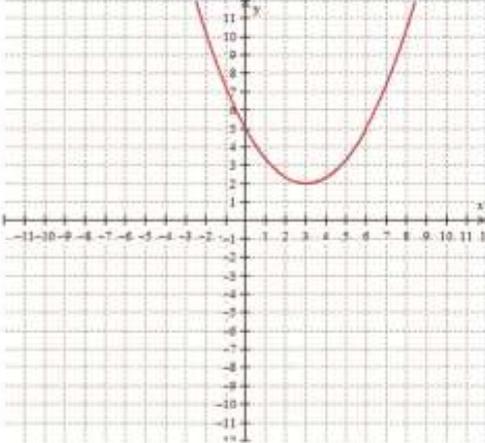
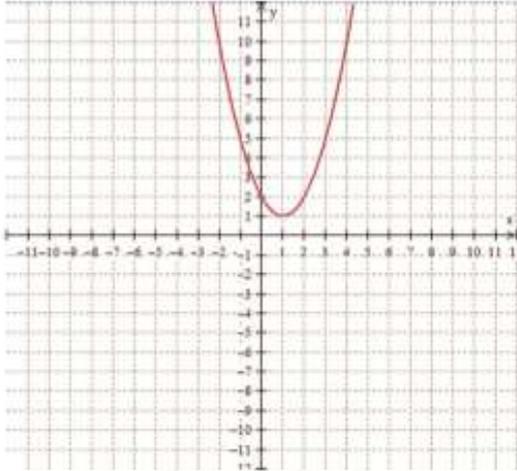
H 112 – Reconhecer o gráfico de uma função a partir de sua lei de formação.

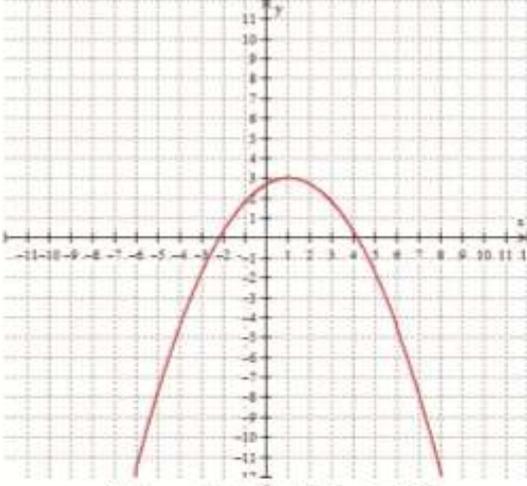
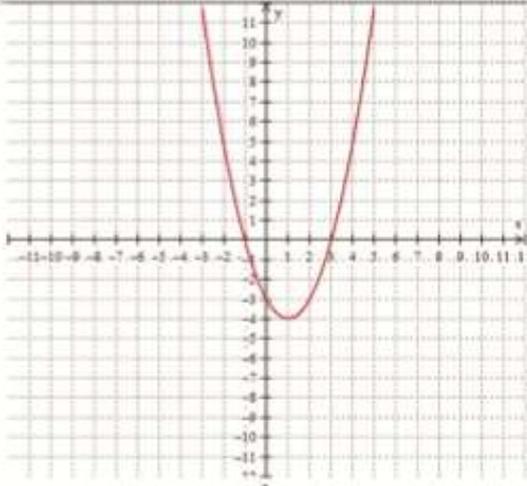
Metodologia

Lei de formação: Forma Geral Representação gráfica

Função quadrática		
Lei de formação: Forma Geral	Representação gráfica	
o.c.w	Parábola côncava para cima	Parábola côncava para baixo
		

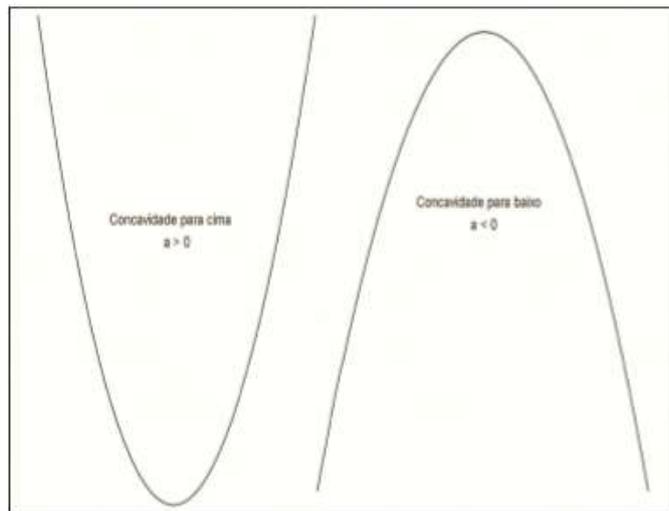
A seguir você encontra funções quadráticas representadas através da sua lei algébrica e também da sua representação gráfica. Identifique o sinal do coeficiente (positivo ou negativo) e a concavidade da parábola (para cima ou para baixo) em cada item proposto.

	Gráfico e Lei Algébrica	Concavidade da parábola	Coeficiente
I	 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5$		
II	 $f(x) = x^2 - 2x + 2$		

III	 $f(x) = -0,3x^2 + 0,6x + 2,7$		
IV	 $f(x) = x^2 - 2x - 3$		

- a. Observando a concavidade e o sinal do coeficiente a , você seria capaz de relacioná-los? Discuta com seus colegas e veja se vocês chegam a alguma conclusão. Escreva o que foi observado.

Depois dos alunos terem discutido tendo você como mediador e chegado às suas conclusões, é interessante que se organize a sistematização do que foi percebido. Nesse momento, você pode conduzir a aula de tal maneira que alguns grupos exponham as suas conclusões. Esperamos que eles tenham percebido a relação entre o sinal do coeficiente a e a concavidade da parábola. Uma anotação espontânea no caderno sobre isso, estimulada e guiada por você, é muito bem-vinda. Por que não deixar que os próprios alunos a façam? De todo jeito, não passe para o próximo item sem que fique claro que:



Determine a concavidade da parábola associada a cada uma das funções quadráticas a seguir:

Esse exercício é apenas de fixação do que foi observado anteriormente. Lembre-se que nosso objetivo neste momento é que o aluno relacione o valor do coeficiente a com a concavidade da parábola. Então, se você achar que seu aluno precisa de mais exercícios como esse, não hesite em propor!

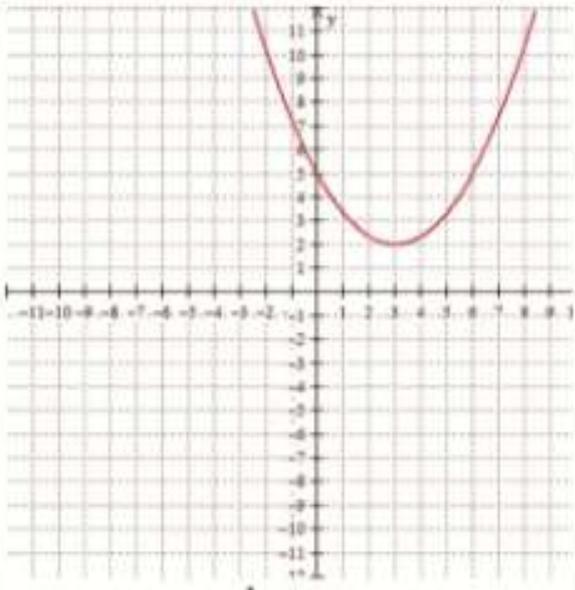
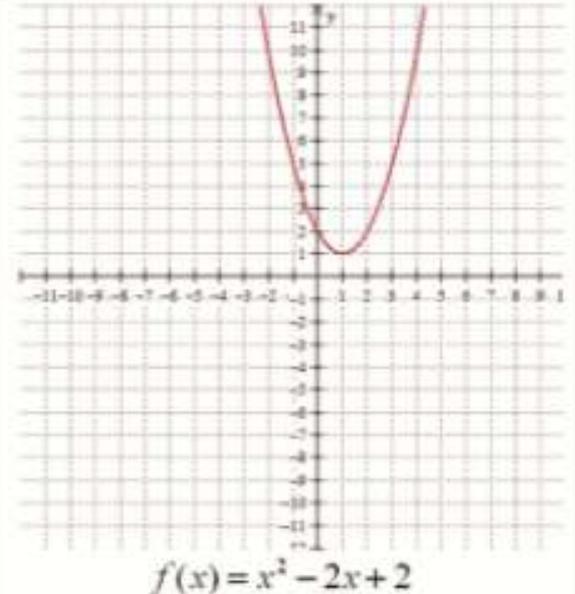
1 – $f(x) = x^2 - 2x$

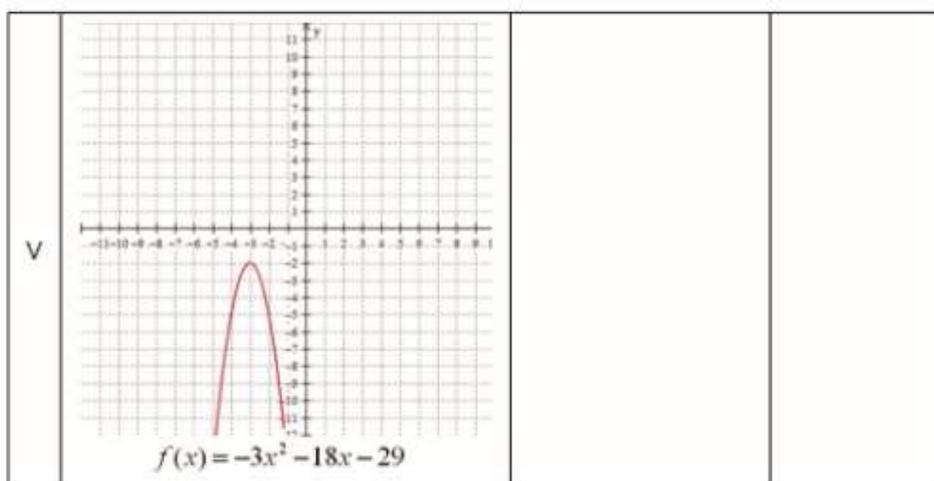
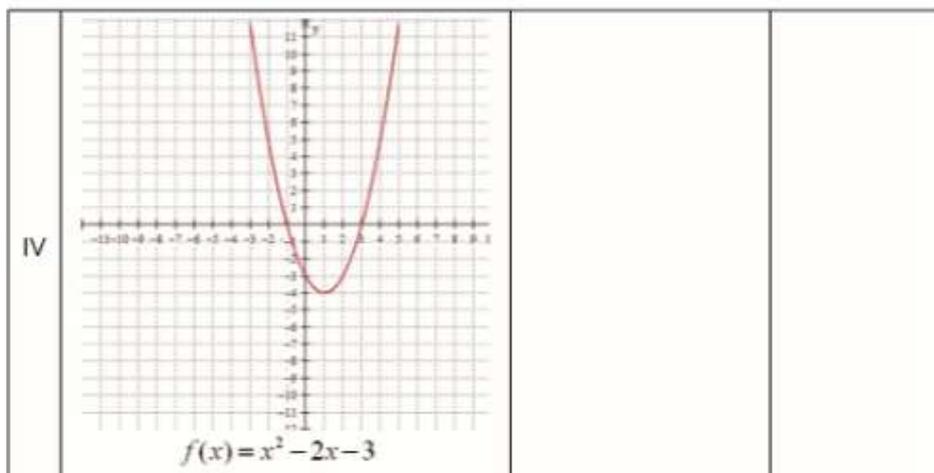
2 – $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$

3 – $k(x) = 1 - x^2$

4 – $f(x) = -2(3 - x)(x - 4)$

Agora, você deve identificar o ponto em que cada parábola intercepta o eixo vertical e o valor do coeficiente das funções quadráticas.

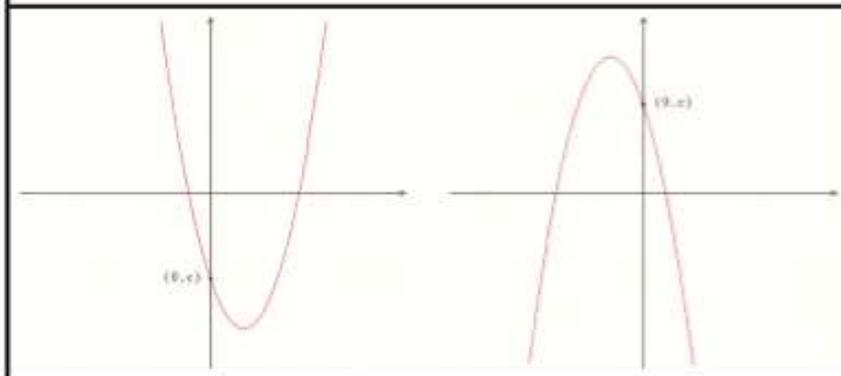
I	 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5$		
II	 $f(x) = x^2 - 2x + 2$		



Você seria capaz de escrever uma relação entre o coeficiente e a ordenada (y) do ponto de interseção entre a parábola e o eixo y? Tente!

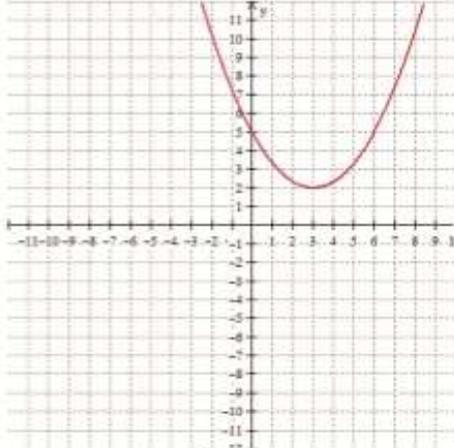
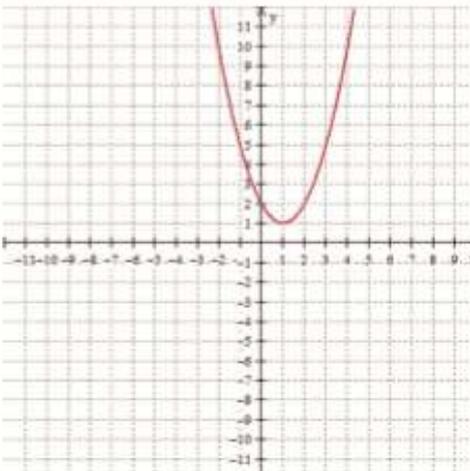
Novamente aqui é importante que o aluno sistematize suas observações tendo o seu auxílio como mediador. Estimule-os a fazer anotações espontâneas em seus cadernos que descrevam a relação percebida, evitando sempre dar a eles definições e relações prontas. Deixe que eles as descubram, guiando-os no que for preciso. A seguir, apresentamos uma sugestão de sistematização.

Na função quadrática, de forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a , b e c são os coeficientes, o coeficiente c é a ordenada do ponto em que a parábola que representa essa função intersecta o eixo y . A figura a seguir exhibe esta relação.



Observe atentamente os gráficos apresentados na tabela, completando-a.

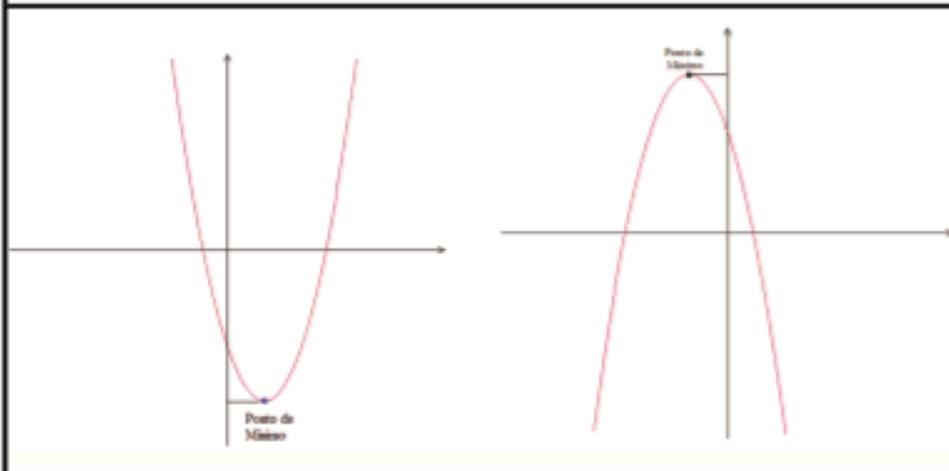
completando-a.

Gráfico e Lei Algébrica		Valores de x para os quais a função é crescente	Valores de x para os quais a função é decrescente	Ponto em que a função passa de crescente a decrescente (ou de decrescente a crescente)	Conjunto Imagem da Função Quadrática	Ponto mais alto/baixo da parábola	Reta x = ____ que divide a parábola verticalmente em duas partes iguais
I	 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 5$						
II	 $f(x) = x^2 - 2x + 2$						

O que você observa a partir de suas respostas?

A seguir, apresentamos uma ideia de sistematização que pode concluir a atividade acima. Mas cuidado: não a passe para o aluno sem que este tenha redigido, com seu auxílio em seu caderno antes as suas conclusões.

Na função quadrática, de forma geral $f(x) = ax^2 + bx + c$ e sempre representada por uma parábola, o vértice é o ponto onde a função passa de crescente a decrescente, se ela tem concavidade voltada para baixo, ou de decrescente a crescente, se ela tem concavidade voltada para cima. O vértice então será, nas parábolas com concavidade voltada para baixo, o ponto mais alto da função – PONTO DE MÁXIMO – e a sua ordenada será o maior valor assumido pela função quadrática – VALOR MÁXIMO. Da mesma maneira, se a concavidade é voltada para cima, o vértice será o ponto mais baixo – PONTO DE MÍNIMO – e sua ordenada será o menor valor assumido pela função – VALOR MÍNIMO.



Avaliação

A avaliação do conteúdo consistirá de atividades que contemplem as habilidades previstas no currículo mínimo. O próprio trabalho proposto servirá como uma avaliação qualitativa. Além disto, os alunos farão atividades propostas no livro adotado pela escola.

Será feito também uma prova individual com os mesmos objetivos trabalhados no plano de trabalho, avaliando a capacidade de utilização dos conteúdos apresentados.

Referências Bibliográficas.

Roteiro de Ação 1. Disponível em <
<http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=109>> Acesso em
15 de ago. de 2013

Roteiro de Ação 2 . Disponível em <
<http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=109>> Acesso em
17 de ago. de 2013

Roteiro de Ação 3. Disponível em <
<http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=109>> Acesso em
17 de ago. de 2013