

**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ**

**CURSO: MATEMÁTICA 1º ANO do ENSINO MÉDIO
4º BIMESTRE DE 2013**

Tarefa 1: Plano de trabalho
Tema: Função Exponencial

Cursista: Waine Vieira Junior
Tutor: Rodolfo Gregorio de Moraes

**Rio de Janeiro
Novembro de 2013**

Sumário

Introdução	Pág. 3
Atividades	
Atividade 1	Pág. 5
Atividade 2	Pág. 8
Atividade 3	Pág. 12
Avaliação	Pág. 14
Bibliografia	Pág. 15

Introdução:

Neste plano de trabalho, buscaremos tratar das funções exponenciais, adotando como contra-ponto as equações exponenciais. Nesse sentido, consideramos que a abordagem deste conteúdo matemático busca contemplar quatro aspectos essenciais: 1) introdução do tema, traçando uma conexão direta entre as propriedades operatórias da potenciação enquanto operação aritmética e sua adequação ao contexto de desenvolvimento de funções; 2) os aspectos operatórios algébricos em si, onde trataremos especificamente das funções exponenciais; 3) a construção do gráfico da função, seus pontos-chave e elementos fundamentais; e, por fim, 4) a contextualização do tema em problemas e aplicações diversas. O foco deste plano de trabalho é o cumprimento da parte **conceitual** da implementação da idéia de funções exponenciais, que entendemos cobrir **as três etapas iniciais**.

Neste sentido, proporemos uma revisão das propriedades das potências, relembando seus principais aspectos operacionais. Para tanto, além de enumerarmos e demonstrarmos as principais propriedades, iremos nos utilizar das atividades contidas no **Roteiro de Ação 2**, onde procuraremos reavivar estas propriedades em nossa memória com o auxílio da canção criada pelo Prof. André Silva. Em seguida, concluiremos esta etapa com uma rápida bateria de exercícios simples e diretos, unicamente com o intuito de reavivar as etapas para o cálculo de potências.

Após esta etapa, passaremos à definição de funções exponenciais, onde observaremos como se dá seu comportamento peculiar. Para esta etapa, também nos utilizaremos do **Roteiro de Ação 1**, que nos permitirá analisar de modo bastante fluido este comportamento em questão.

Num segundo momento, embora nesta mesma etapa, apresentaremos as equações exponenciais vinculadas ao contexto de funções exponenciais – que observamos ser mais amplo (ao menos nos aspectos operatórios). Propomos aqui um breve debate sobre os aspectos conceituais que diferenciam equação de função exponencial. Assim, acreditamos que daremos conta de observar as duas primeiras etapas a que nos propomos tratar.

Para a etapa seguinte pretendemos trabalhar com as atividades presentes no site da UFF/CDME voltadas para as funções exponenciais (<http://www.uff.br/cdme/exponencial/exponencial-html/EP1.html>). O objetivo é demonstrar ao aluno como os elementos fundamentais do gráfico da função exponencial podem influenciar a construção do mesmo.

Para a implementação deste plano de trabalho, serão necessários 6 tempos de cinquenta minutos, e sua avaliação se dará ao longo da execução das atividades propostas, com destaque para a confecção dos relatórios propostos na atividade 2 e 3.

Vamos Relembrar

Definição: A potenciação é a operação escrita sob a notação a^n , envolvendo dois números: a base a e o expoente n , onde a multiplicação da base a por ela mesma se dá tantas vezes quanto indicar o expoente n , isto é:

$$a^n = \underbrace{a \times \cdots \times a}_n,$$

Lembrou? Então vamos nos lembrar de algumas propriedades úteis para a operação de potenciação e *entre* potências.

1. Toda potência de base 1 é igual a 1.

$$\text{Ex: } 1^2 = 1; 1^6 = 1; 1^0 = 1; 1^{100} = 1; 1^n = 1$$

2. Toda potência de expoente 1 é igual à base.

$$\text{Ex: } 2^1 = 2; 3^1 = 3; 5^1 = 5; 0^1 = 0; a^1 = a$$

3. Toda potência de expoente zero vale 1.

$$\text{Ex: } 1^0 = 1; 2^0 = 1; 50^0 = 1; a^0 = 1, \text{ para todo } a \text{ diferente de zero.}$$

4. Toda potência de base igual a zero e expoente diferente de zero, vale zero.

$$\text{Ex: } 0^1 = 0; 0^3 = 0; 0^5 = 0; 0^n = 0 \text{ para todo } n \text{ diferente de zero.}$$

Vejamos agora algumas propriedades que se apresentam ao operarmos uma potência com outra.

5. Multiplicação de potências de mesma base:

Nos casos em que estivermos multiplicando uma potência por outra(s), procederemos assim: Conservamos a base e somamos seus os expoentes.

$$\text{Ex: } 2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8$$

$$3^7 \cdot 3^2 = 3^{7+2} = 3^9$$

$$3^2 \cdot 3 = 3^{2+1} = 3^3$$

6. Divisão de potências de mesma base:

De modo análogo ao anterior, mas considerando que se tratam de operações inversas, procederemos assim: Conservamos a base e subtraímos seus os expoentes.

$$\text{Ex: } 2^3 \div 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$$

$$\frac{10^3}{10^2} = 10^{3-2} = 10^1 = 10$$

7. Potência de potência:

Neste caso, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

$$\text{Ex: } (2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$$

$$(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$$

$$(2^5)^2 = 2^{5 \cdot 2} = 2^{10}$$

8. Potência com expoente negativo (inversão)

Toda potência com expoente negativo corresponde à inversão

$$a^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)$$

$$\text{Ex: } 2^{-2} = (1/2)^2$$

$$(3/8)^{-4} = (8/3)^4$$

9. Potência com expoente fracionário (transformação de potência em raiz – e vice versa)

Toda potência com expoente negativo corresponde à equivalência

$$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$$

$$\text{Ex: } \sqrt[4]{8^3} = 8^{3/4}$$

Atividade 1

- **Habilidade Relacionada: H52:** Resolver problemas com números reais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação).
- **Pré-Requisitos:** capacidades operatórias básicas.
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Aparelho de som, folha de exercícios.
- **Organização da turma:** Duplas.
- **Objetivos:** Recapitular o processo operatório de propriedades da potenciação através de *um método lúdico de memorização destas propriedades*.
- **Metodologia:** Organizados em duplas, distribuiremos a letra da música *Potencializando*, do professor André Silva e a folha de exercício, presentes no Roteiro de Ação 2. Em seguida tocaremos a música algumas vezes, para que os alunos se familiarizem com a letra. Ao fim, os alunos deverão escrever em cada caixa de texto presente na folha de exercícios a propriedade a que se refere a respectiva estrofe da música, exemplificando-a.

Potencializando

(André Silva)



*Eu somo os expoentes na
multiplicação
Eu os subtraio se for uma
divisão
Potência de potência multiplico
os expoentes
Se o número é raiz o expoente é
uma fração
Quando elevado a zero, o
resultado é um
Se o expoente é negativo a base
inverte a posição
A regra é clara, se não for da
mesma base
Eu não faço nada eu não faço
nada não
A regra é clara, se não for da
mesma base
Eu não faço nada eu não faço
nada não
Mas, tem a exceção do mesmo
expoente,
As bases vou multiplicar, vou
dividir,
Mas, tem um cuidado para não
cair,
Só vale se o expoente é igual ao
que eu já vi.
Mas, tem um cuidado para não
cair,
Só vale se o expoente é igual ao
que eu já vi.*

Preencha agora o formulário abaixo, com base na letra da música que acabamos de ouvir e cantar, destacando qual a propriedade em questão, e exemplificando-a:

Versos	Propriedades
Eu <i>somo</i> os expoentes na multiplicação	
Eu os <i>subtraio</i> se for uma divisão	
Potência de potência <i>multiplico</i> os expoentes	
Se o número é raiz o expoente é uma <i>fração</i>	
Quando elevado a zero o resultado é <i>um</i>	
Se o expoente é negativo a <i>base inverte a posição</i>	
Regra é clara se não for da mesma base	
Mas tem a exceção do mesmo expoente	
As bases vou <i>multiplicar</i> vou <i>dividir</i>	

Agora que já nos lembramos das propriedades, vamos encarar alguns exercícios?

- 1- Reduza a uma só as potências abaixo, utilizando as propriedades que acabamos de ver:

a) $(6)^2 \cdot (6)^3$
b) $(-3)^6 \cdot (-3)^2$
c) $(7) \cdot (7)^{12}$
d) $(-8)^{-2} \cdot (-8)^{-4} \cdot (-8)^8$
e) $(-5)^3 \cdot (-5) \cdot (-5)^2$

a) $(-3)^4 : (-3)^2$
b) $(-5)^7 : (-5)^9$
c) $(3)^5 : (3)^2 : (3)^7$
d) $y^3 : y^2$
e) $a^{12} : a^{15}$

a) $[(3)^3]^2$
b) $[(5)^1]^3$
c) $[(-1)^4]^2$
d) $[(-2)^2]^3$
e) $[(10)^2]^2$

Vamos agora lidar diretamente com a idéia de função exponencial

Vamos novamente relembrar a idéia de função: uma regra ou relação, que liga um conjunto domínio (conjunto de entrada) com um conjunto contradomínio (conjunto de valores de saída) de tal maneira que:

- 1) Cada elemento do domínio está associado a **apenas um** elemento do contradomínio;
- 2) **Todos** os elementos do domínio possuem um correspondente no contradomínio, de modo que não sobre ninguém sozinho no domínio.

Para o nosso caso, as funções exponenciais se definem por todas as funções na forma

$$f(x) = a^x$$

Onde **$a > 0$ e $a \neq 1$** , pois:

- Se **$a = 0$** , e x for **negativo**, não existiria **a^x**
- Se **$a < 0$** , e $x = 0,5$, por exemplo, também não poderia existir **a^x**
- Se **$a = 1$** , e x for qualquer número real, **a^x** seria uma função constante.

Atividade 2

- **Habilidade Relacionada: H52:** Resolver problemas com números reais envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação); **H58:** Resolver problemas envolvendo a função exponencial.
- **Pré-Requisitos:** capacidades operatórias básicas.
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de exercícios.
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Apresentar a função exponencial trabalhando a diferença entre o crescimento exponencial e o crescimento proporcional.
- **Metodologia:** Apresentar a função exponencial a partir de um problema bastante conhecido no meio matemático: o problema do jogo de xadrez, mostrando a diferença entre o crescimento exponencial e o crescimento proporcional.

A lenda do Jogo de Xadrez



Há uma lenda sobre o jogo de xadrez que conta que um rei empolgado com as tramas possíveis de serem construídas com esse jogo, pede ao sábio responsável por sua invenção que escolha qualquer coisa do seu reino como forma de gratificação. O sábio pede como prêmio grãos de trigo. O rei, bastante surpreso pela simplicidade do pedido, pergunta imediatamente qual é a quantidade desejada. O sábio, deixando o rei ainda mais assustado e intrigado, pede ao soberano 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta, 16 pela quinta, e assim por diante, dobrando sempre o número de grãos de trigo na passagem de cada casa. O rei fica perplexo e não entende a simplicidade do pedido.

1ª Parte – Entendendo o pedido do sábio

- 1) O rei parece perplexo com o pedido. E você? Qual a sua opinião sobre o pedido do sábio? A quantidade de grãos pedida poderia ser paga pelo rei? Discuta com seus colegas sobre essa questão.
- 2) Vamos entender o pedido do sábio inventor do jogo de xadrez? Para isso, preencha a Tabela 1 até a 10ª casa do tabuleiro, seguindo as orientações do texto.

Casa do tabuleiro	Grãos Recebidos
1	1
2	2
3	4
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

- 3) O que está acontecendo com a quantidade de grãos a cada casa do tabuleiro? E com as casas do tabuleiro de xadrez, elas seguem a mesma regra? Converse com seu colega.
- 4) Reescreva cada quantidade de grãos encontrada no item 2 como uma potência de base 2. O preenchimento da tabela a seguir irá ajudá-lo.

Grãos recebidos	Potências de Base 2
1	
2	
4	
8	

- 5) É possível estabelecer alguma relação entre o número de grãos de trigo com as casas do tabuleiro? Escreva uma fórmula que relacione o número de grãos (y) com as casas do tabuleiro (x).

2ª Parte – A contra proposta do rei

Preocupado com o sábio, o rei resolveu fazer uma contra proposta. Ele ofereceu dois grãos pela primeira casa e ao invés de dobrar a quantidade de trigo a cada casa do tabuleiro, ele sugeriu que fossem somados dois grãos na passagem das casas. Ou seja, seriam colocados 2 grãos na primeira casa, 4 grãos na segunda, 6 grãos na terceira, 8 grãos na quarta, 10 grãos na quinta e assim sucessivamente até a 64ª casa.

- 6) E aí? Essa é uma boa proposta? Você acha que a quantidade de grãos recebidos será maior, menor ou igual? Por quê? Discuta com seu colega.
- 7) Para ajudar na comparação com a outra forma de se obter os grãos, preencha a Tabela 3 de acordo com a regra proposta pelo rei e diga em qual situação o sábio ganharia mais grãos.

Casa do tabuleiro	Grão recebido
1	2
2	4
3	6
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

- 8) O que está acontecendo com a quantidade de grãos de trigo?

- 9) Podemos afirmar que ao dobrar a casa do tabuleiro, também dobramos a quantidade de grãos? E se fosse outro múltiplo (triplo, quádruplo), o que aconteceria?
- 10) Como podemos relacionar a quantidade de grãos com as casas do tabuleiro? Escreva uma fórmula que relacione a quantidade de grãos (y) com a casa do tabuleiro (x).
- 11) Que tipo de função caracteriza a nova regra?

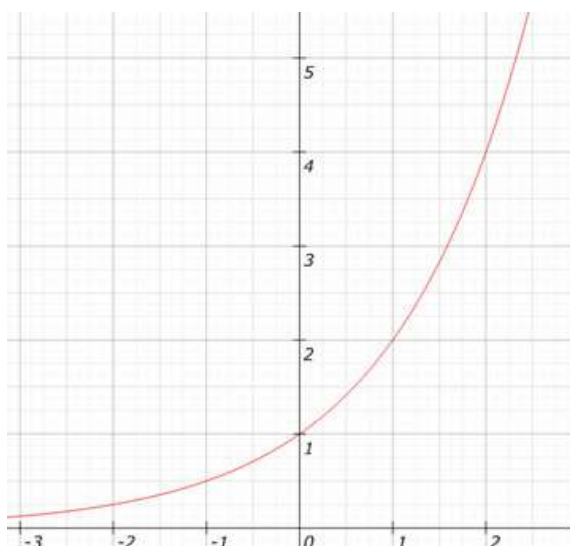
O Gráfico da função exponencial

Como vimos na atividade anterior, uma função exponencial representa situações em que a taxa de crescimento ou de decrescimento, ou seja, a variação é considerada muito grande (é o caso, por exemplo, do decaimento radioativo de substâncias químicas, de rendimentos financeiros sob juros compostos, proliferação de culturas de bactérias ou outros micro-organismos, etc).

Toda função pode ser representada através de um gráfico. No caso exponencial, temos de observar com cuidado duas situações: $a > 0$ e $0 < a < 1$. O caso é que, para o primeiro caso ($a > 0$) a função é **crescente**. Para o segundo caso ($0 < a < 1$), **decrescente**.

Vamos observar o gráfico da função $f(x) = 2^x$. Como sabemos que a, nesse caso é maior que 0, teremos uma função crescente. Observe os valores na tabela, e o comportamento do gráfico da função.

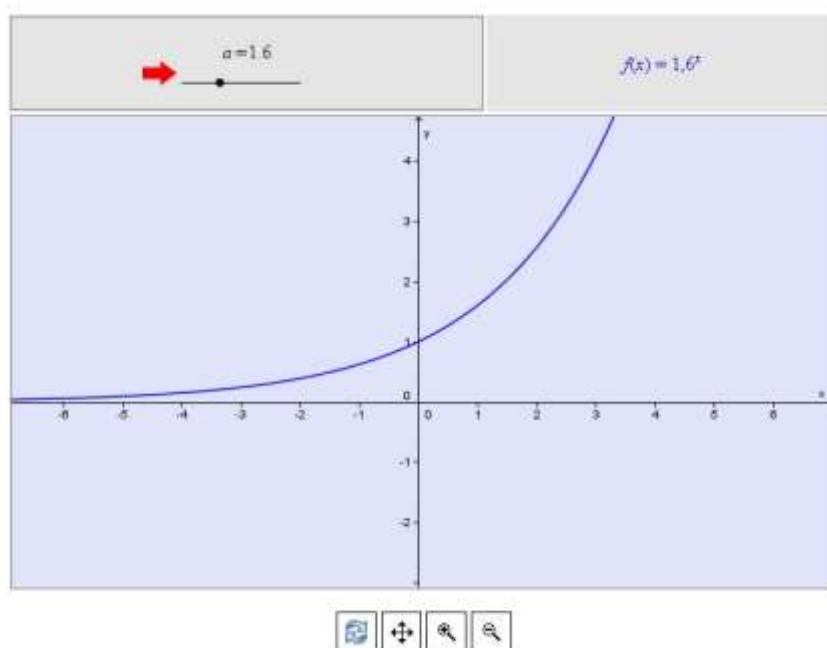
$f(x)$	x
1/8	-3
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3



Atividade 3

- **Habilidade Relacionada: H02** – Associar pontos no plano cartesiano às suas coordenadas e vice-versa; **H38** – Identificar o gráfico de uma função, a partir da correspondência entre duas grandezas representadas em uma tabela; **H63** – *Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.* **H66** – Reconhecer intervalos de crescimento/decrescimento e/ou zeros de funções reais representadas em um gráfico
- **Pré-Requisitos:** Potenciação, gráfico da função exponencial; habilidade básicas com computador em ambiente web; localizar e representar números reais no plano cartesiano.
- **Tempo de duração:** 100 min.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Laboratório de informática com internet e java instalado.
- **Organização da turma:** Duplas ou trios.
- **Objetivos:** Construir gráficos da função exponencial a partir de sua representação algébrica. Analisar crescimento e decrescimento dessas funções.
- **Metodologia:** Após uma pequena apresentação do site UFF/CDME, demonstrando suas funcionalidades proporemos as atividades a seguir, para análise e discussão posterior com preenchimento de relatório que será parte de nossa avaliação.

Clique e arraste o botão para variar o valor de **a** e verifique o que acontece com o gráfico da função exponencial correspondente (experimente valores de **a** maiores que 1 e entre 0 e 1). Responda às perguntas da página, e transcreva os resultados para o relatório.



Relatório:

- 1) O que acontece quando os valores de a são maiores que 1?
- 2) O que acontece quando os valores de a são menores que 1?
- 3) O que acontece quando os valores de a são iguais a 1?
- 4) Por que não é possível colocar valores negativos?
- 5) Pesquise na internet o que significa **assíntota**. Você acha que há algo nestes gráficos que nos levem a pensar em uma assíntota?

Avaliação:

Reconhecendo a etapa de avaliação como de vital importância para o processo ensino-aprendizagem, e de suma importância na fundamentação da boa execução do plano de trabalho, observamos que esta etapa deve não apenas envolver o conhecimento demonstrado pelo aluno na execução de um exame, mas todas as condições variantes envolvidas no processo de implementação do plano. Assim, entendemos que a avaliação deve ser tão abrangente quanto possa ser possível, de modo que professor e aluno se integrem nela conjuntamente. Observando o quanto, como, o que (e porque) se pode alcançar no desenvolvimento das competências relacionadas ao tema proposto.

Ao longo da implementação deste plano de trabalho, as atividades propostas devem ser executadas em dupla, o que exige a organização de etapas e responsabilidades na execução da atividade, além de possibilitar o debate de idéias e impressões de modo facilitar a interpretação dos dados apresentados pelos gráficos. O intuito dessas discussões é justamente de construir (e posteriormente refinar) as informações e argumentos em questão, e deverão ser levadas em conta na avaliação das atividades.

No caso dos exercícios propostos na **atividade 3**, estaremos avaliando a aplicação dos conceitos vistos. São atividades com teor mais abstrato, exigindo maior capacidade de desenvoltura conceitual bem como da interpretação dos gráficos e seus respectivos comportamentos de modo a consolidar no aluno o aparato conceitual em questão.

Além de também utilizar o relatório proposto ao cabo dos exercícios realizados ao longo das atividades 2 e 3 como instrumento efetivo de avaliação, cabe ressaltar que as habilidades e competências a serem desenvolvidas ao longo da implementação de todo o plano de trabalho, como dito ainda na introdução, são avaliadas no âmbito da execução das tarefas (individualmente e coletivamente).

Bibliografia:

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática – Volume único*. São Paulo: Ática, 2010.

IEZZI, Gelson e MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar*, vol. 1. São Paulo: Atual, 2004.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. *Roteiros de ação 1 e 2: Matemática na Escola - 4º bimestre - 1ª série - 2013*. Rio de Janeiro, 2013.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO. *Saerjinho 2012 – Matriz de Referência*. Rio de Janeiro, 2012.