FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: CIEP 321 – DR. ULYSSES GUIMARÃES
CURSISTA: Luciene Maria Baptista Ventura
MATRÍCULA: 00/0919826-8
POLO: Metropolitana VI
SÉRIE: 1º ano
TUTOR (A): Marcelo Rodrigues

Ciclo Trigonométrico

TURMA: 1º ano - 4º Bimestre

Luciene Maria Baptista Ventura

exataslu@yahoo.com.br

Novembro 2013

Sumário

Introdução

Devemos estudar os Ciclos Trigonométricos, e mostrar aos alunos suas aplicações no dia-a-dia, já que a matemática é uma matéria aplicável. Os Ciclos podem ser vistos na natureza, estação do ano, fases lunares, movimentos de rotação e translação, no comportamento das marés, na física em ondas sonoras ou dos mares e em muitas outras situações. Deste modo, aproximar a matemática da realidade do aluno é uma missão, que ao ser cumprida melhorará o desempenho dos discentes. Jogos de desafios desenvolvem o raciocínio lúdico, que ativa a criatividade, versatilidade, improviso e estratégia, mídias, programas e games matemáticos, já tem melhorado o desempenho de alunos, tais instrumentos de aprendizagem já são realidades no Sesi-RJ e SENAC-RJ.

As aulas de vídeos, também desempenha papel fundamental na vida do aluno, permitindo que os alunos verifiquem de uma forma fácil e dinâmica, os conceitos, aplicações e de forma ilustrada onde é aplicado o Ciclo Trigonométrico, além de fazer resgate histórico.

Para plotar gráficos, papel quadriculado ou milimetrado podem ser usado de forma útil, pois permite que as distâncias sejam correspondentes e fica mais claro a compreensão do gráfico. Quando as construções de gráficos são feitas a régua, nem sempre ficam bem apresentáveis, pois cada aluno tem seu jeito próprio de fazer, uns são mais cuidadosos e outros menos, mas o mais importante é que ambos cheguem ao objetivo, a consolidação do aprendizado.

Acredita-se que a leitura seja o fator norteador de desenvolvimento intelectual do ser humano, já que interpretar é fundamental a todos os seres. Sem a interpretação não se pode adotar padrão a ser seguido, pois uma boa leitura permite seguir caminhos, os quais nem sempre são iguais, mas que levam a um mesmo resultado, e isso só será possível através da compreensão.

A melhor forma de compreender, é continuar lendo e interpretando, parece tarefa fácil, mas é tema de debate e discussão, por vários estudiosos da educação e da língua portuguesa. Para entender a matemática é importante se familiarizar com o que ela quer transmitir e para isso é importante ter adquirido uma grande habilidade, compreender o que ela quer de nós e o que podemos criar e proporcionar a humanidade com a ajuda da matemática, quando conseguimos realmente compreende-la.

- **Habilidade relacionada:**

Ciclo Trigonométrico

- **Pré-requisitos:**

Estudo dos sinais, Trigonometria no triângulo retângulo, Ângulos, Ângulos notáveis, Regra de três, Estudo de fração, Expressões algébricas, Equações e etc...

- **Tempo de Duração:**

300 minutos

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

Folha de atividades, utilização da internet como meio de pesquisa e de adquirir novos conhecimentos com a orientação do professor, Cabri, GeoGebra, Maple V, NOVO TELECURSO, Livro Paradidático – O Homem que Calculava e arquivos disponíveis.

- **Organização da turma:**

Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e cooperativo

- **Objetivos:**

Apresentar as várias formas de analisar o comportamento do Ciclo Trigonométrico, e fazer com que observem atentamente suas propriedades, como são importantes e interferem em nossa vida positivamente. Permitindo aos alunos analisarem a partir de exemplos os períodos existentes na natureza e relacioná-lo ao Ciclo Trigonométrico. Além de observar o comportamento oscilante e periódico dos gráficos, e que todas as situações que serão citadas têm ligação direta com a matemática e como estas fases e períodos interferem em nosso planeta. Transformar ângulos para radianos e vice-versa, além de identificação dos arcos, quadrantes e as correspondências dos ângulos em cada quadrante, e análise de sinais que possuem os quadrantes dependendo das correspondentes sen (x), cos (x) e tg (x). Além de especificar cada tipo de função existente, seu comportamento gráfico, e suas propriedades.

- **Metodologia adotada:**

Com aulas expositivas, dinâmica de grupo, tutoria entre alunos, mídias, utilização de livros paradidáticos, vídeos, apostilas, atividades extras, avaliações – atividades em aula, trabalhos, teste e prova.

Atividade 1.

Ciclo Trigonométrico

Na natureza encontramos vários exemplos de ciclos, períodos, fases, as quais estabelecem uma constante de repetição, uma razão igual a k. As fases da lua, estação do ano, dia-noite, mês, movimentos de rotação, translação, comportamento das marés, assim, como ondas sonoras, na física e em vários ramos da vida podemos observar, que sempre tem um início e fim, ou melhor nunca acaba, já que é um ciclo, sempre vai e volta, mantendo um intervalo padrão.

Na matemática os ciclos serão utilizados para observar o comportamento dos ângulos e como as possíveis relações de sinais variam conforme seus quadrantes. Esse estudo ajuda a observarmos gráficos de oscilação como os de batimento cardíaco, encefalogramas e eletrocardiograma, medição da intensidade dos terremotos, observando as oscilações nas escalas específicas para isso (escala padrão). O qual através da oscilação permite dizer a amplitude do terremoto, maremoto ou qualquer catástrofe natural, já que para isso existe escala para medir tais fenômenos suas intensidades, logo esse estudo ajuda na área de medicina, física, biologia, geologia, geografia, metrológica, oceanografia, dentre muitos ramos de estudo que envolvem gráficos de oscilação. A oscilação nem sempre é constante, mas pode ser, e estaremos vendo este segundo caso onde há uma constante fixa envolvida, já que os ângulos possuem correspondentes em todos os quadrantes.

O Ciclo Trigonométrico é uma circunferência de raio unitário com centro na origem do sistema de eixos cartesianos. O qual estará sendo estudado mais abaixo, falando sobre alguns tópicos iniciais importantes.

Atividade 2.

Arco de circunferência

Neste momento inicial vamos definir alguns padrões importantes para o entendimento deste capitulo. Temos que arco de uma circunferência é cada uma das partes em que uma circunferência fica dividida por dois de seus pontos como na figura abaixo.

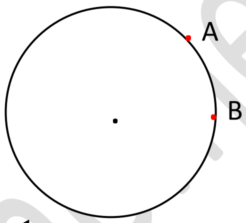


Fig - 1

Temos dois arcos um no sentido horário e outro no sentido anti-horário, ambos com indicação $\widehat{AB}$. Há arcos que correspondem a uma meia circunferência (arco de meia volta) ou uma circunferência (arco de uma volta completa).

Ângulo central

O ângulo central pode ser observado, quando se limita os extremos a ele relacionados a reta $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$, esse foi o ângulo central escolhido da circunferência. É importante saber que o ângulo central mede o mesmo que o arco da circunferência, eles são correspondentes.

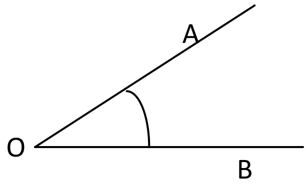


Fig – 2

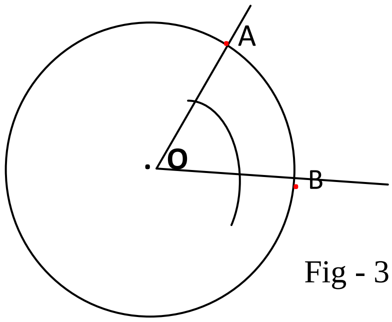


Fig - 3

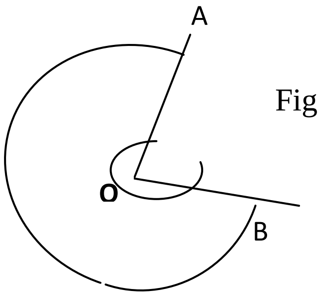


Fig – 4

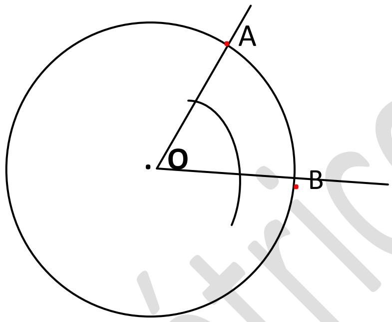
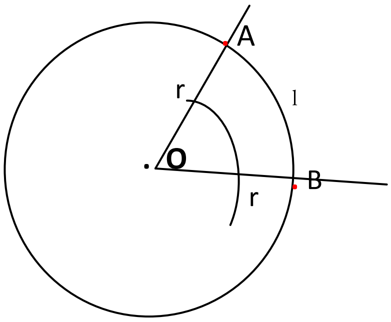


Fig – 5

Para a medição de arco e ângulos, usamos o grau (º) e radiano (rad). Usamos a circunferência e a dividimos em 360 partes iguais, a qual terá como respondência 1º, já que a circunferência completa possui 360º. Esse cálculo é feito baseado que a terra era redonda como uma circunferência, logo matemáticos, físicos, astrônomos, e estudiosos da época utilizavam tal idéia e que o ano iniciara depois de 360 dias corridos. Daí dividir em 360 em 360 partes, daria a correspondente em dias. E usaram essa idéia até hoje para estudarmos os ciclos trigonométricos. Depois de muito tempo, descobrira que ela era oval, e que o ano tem atualmente 365 dias, mas 360 acabou sendo mantida como padrão.

Radiano

É o arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que o contém.



$$\text{med}\,(\widehat{AB}) = \frac{l}{r}$$

Unidade Fundamental	Amplitude				
Grau	0º	90º	180º	270º	360º
Radiano	0 rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3.\pi}{2}$ rad	2.π.rad

Atividade 3.

Ciclo no nosso dia-a-dia

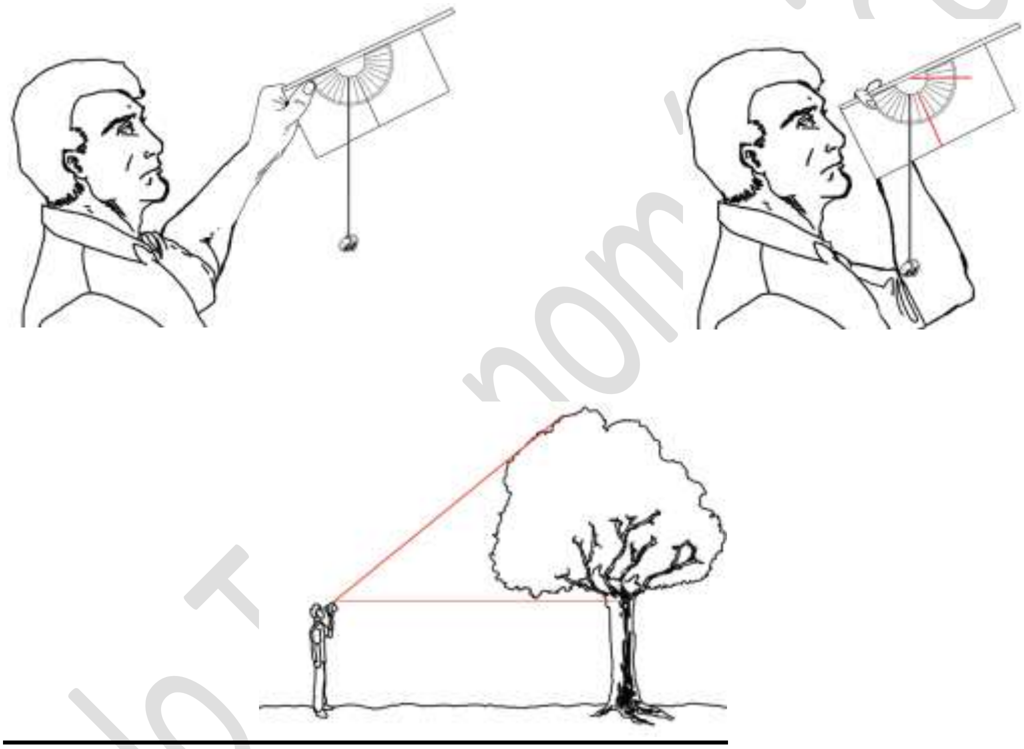
A trigonometria permite que façamos cálculos que parecem impossíveis, como medir a distância da margem de um rio a outra margem, distância da Terra ao Sol, assim como, a altura de um prédio em relação a um objeto, ou a um ponto fixo, para isso é necessário saber manipular ângulos e trabalhar com triângulos. O ciclo trigonométrico tem relação com essa estrutura já que nele podemos formar vários tipos de ângulos e deles conseguimos obter vários tipos de funções como: sen(x), Cos(x) e Tg(x).

As medidas indiretas permitem que seja feito calculo de distâncias inacessíveis, visto que, as acessíveis pode ser medida de modo direta, pegar o instrumento e medir. Aqui é justamente o caso contrário, o objeto não pode medir seu início e fim, consequentemente precisa-se de instrumentos como Teodolito (olhar longe), modelos matemáticos para fazer tais cálculos, ou com o auxilio de instrumentos de fácil acesso, transferidor (mede ângulos), papel cartão, pêndulo adaptado e canudo.

Teodolito mede distâncias, alturas, ângulos (horizontais e verticais), usados por profissionais como - arquitetos, engenheiros, técnicos em construção de estradas e há vários tipos de Teodolito para diferentes tipos de usos, precisões e alcances.

No site http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ ExperimentosM3Matematica/a_altura_da_arvore/, existe um guia para construção de um destes teodolitos improvisados. Vamos ver como é?

Observe o procedimento com um instrumento que exerce a mesma função de um Teodolito, este esquema é uma adaptação para uma sala de aula. E perceba como é feito esse cálculo.



Figuras: usando o teodolito para medira a altura de uma árvore

Se chamarmos de “ângulo de observação” ao ângulo BÂC do esquema abaixo, qual a sua medida? Quanto medem ainda a distância do observador (você) ao objeto observado e a altura do observador (a sua própria altura)?

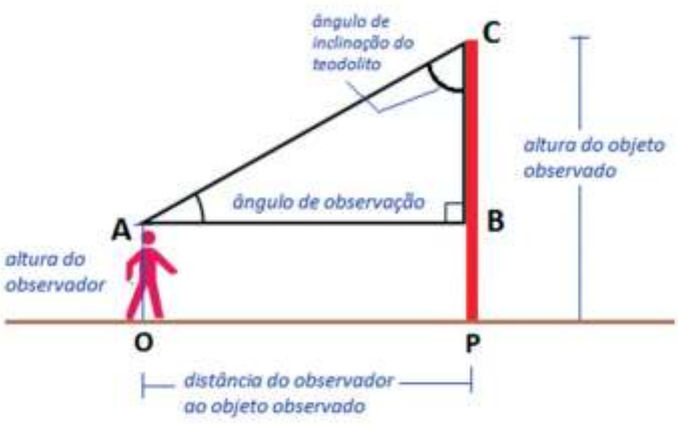


Figura: esquema indicativo das medidas encontradas no experimento

É importante observar com os alunos que a leitura do teodolito não corresponde imediatamente ao ângulo de observação, mas sim ao ângulo de inclinação do canudo do teodolito construído. Geometricamente, esse ângulo de inclinação e o ângulo de observação são complementares por essa razão ele não deve ser usado de maneira imediata, salvo se for considerado no outro ângulo agudo do triângulo retângulo que representa essa situação (ângulo ACB). Lembre-se: o segmento BC indicado no esquema acima representa apenas uma parte da altura procurada. A altura total será o resultado da soma da medida do segmento BC com a sua própria altura, certo?

A razão trigonométrica mais adequada para resolver este problema, é a tangente (porque não conhecemos nada sobre a medida da hipotenusa, nem desejamos conhecer). A relação obtida no triângulo retângulo formado no plano vertical será:

Tg (ângulo observado) = $\frac{altura}{distância} = \frac{m(BC)}{m(AB)}$ ou Tg (ângulo de inclinação) = $\frac{altura}{distância} = \frac{m(AB)}{m(BC)}$

(Proposta – Formação Continuada de Professores / Roteiro de Ação 2)

Atividade 4.

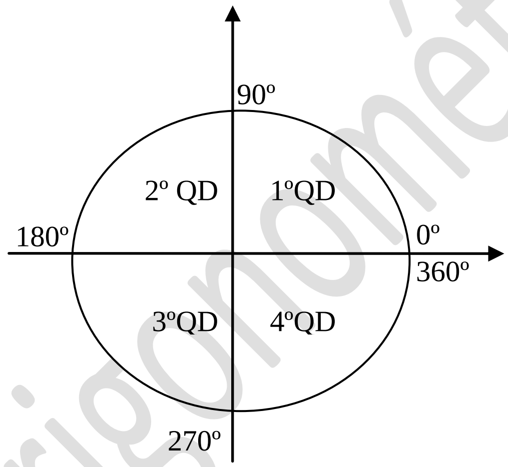
Ângulos notáveis

	30º	45º	60º
Sem	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

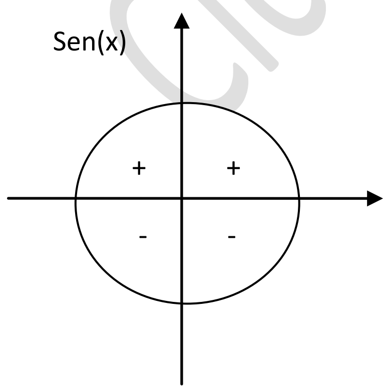
Cálculo: Ângulos - Correspondentes / Congruentes			
1º QD	**2º QD**	**3º QD**	**4º QD**
30º	**180º-30º**	**180º+30º**	**360º-30º**
45º	**180º-45º**	**180º+45º**	**360º-45º**
60º	**180º-60º**	**180º+60º**	**360º-60º**

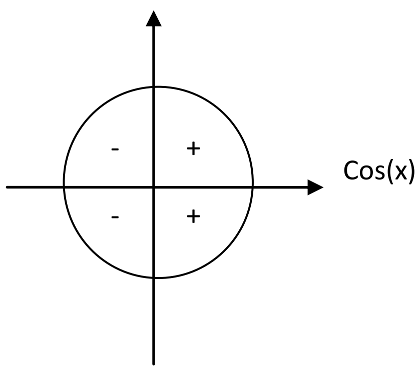
Ângulos - Correspondentes / Congruentes			
1º QD	**2º QD**	**3º QD**	**4º QD**
30º	**150º**	**210º**	**330º**
45º	**135º**	**225º**	**315º**
60º	**120º**	**240º**	**300º**

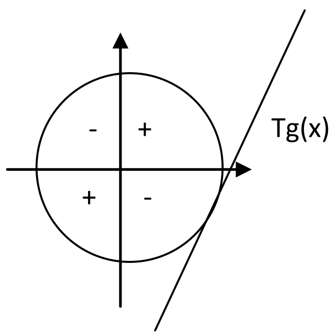
Identificação dos Quadrantes



Sinais dos Quadrantes - Função[Sen(x) , Cos (x) e Tg (x)]







Atividade 5.

Funções Trigonométricas

Função Seno ou senóide

y = sen (x)

D = R

Im =]-1,+1[

Período = 2π

sen x = sen (x + 2k π), k∈ *z*

f(-x) = - f(x) => Como sen (- x) = - sen(x), para todo x real, podemos afirmar que a função seno é impar.

Função Cosseno ou cossenóide

y = cos (x)

D = R

Im =]-1,+1[

Período = 2π

cosx = cos (x + 2kπ), k∈ z

f(-x) = f(x) => Como cos (- x) = cos (x), para todo x real, podemos afirmar que a função cosseno é par.

Função Tangente ou Tangenóide

y = tg (x)

D = {x ∈ $R| \; x \; \neq \frac{\pi}{2} + \; k$π, k∈ z }

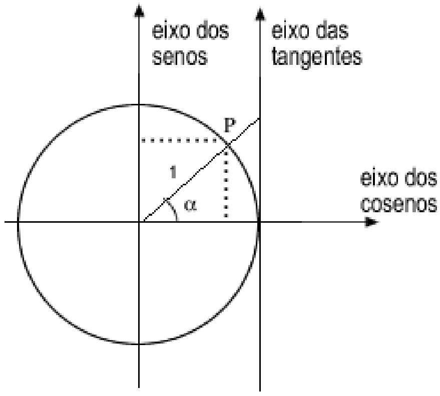
Im =]- ∞, + ∞[

Período = π

Tg (x + k π) = Tg x, k∈ z

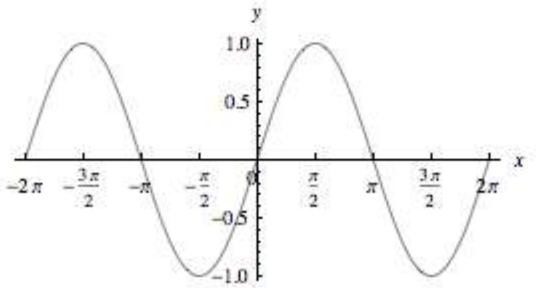
f(-x) = - f(x) => Como tg (- x) = - tg (x), para todo número real x≠ $\frac{\pi}{2} + \; k$π, k∈ z, a função é ímpar.

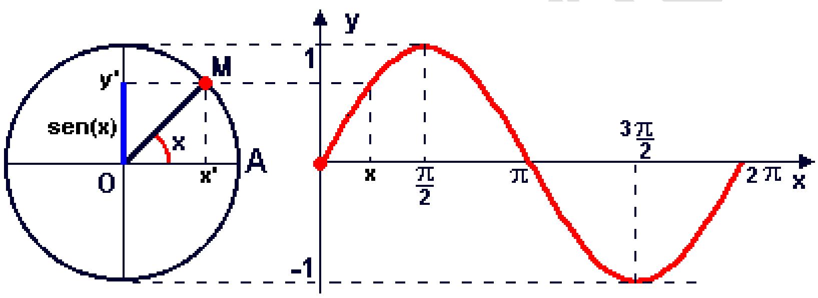
Eixos – Seno / Cosseno e Tangente

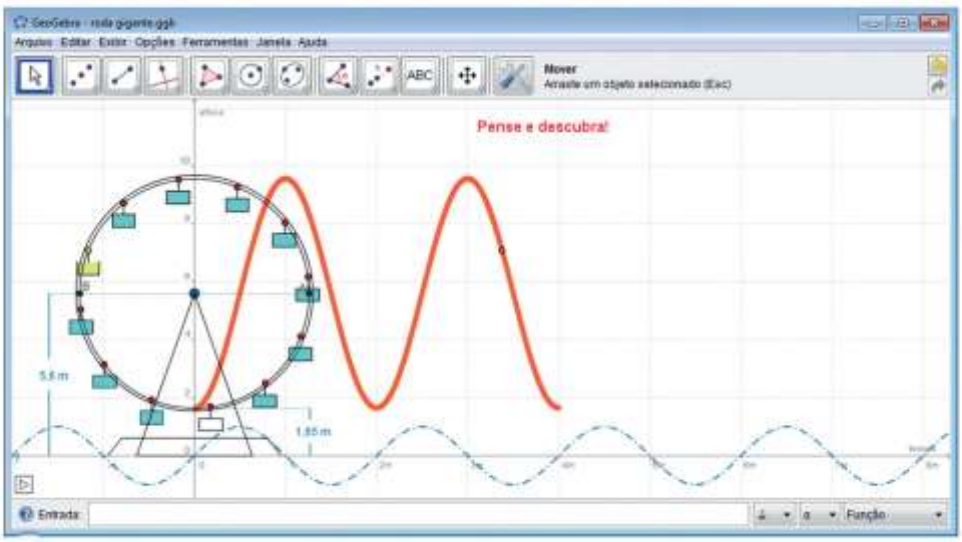


Gráficos de Funções

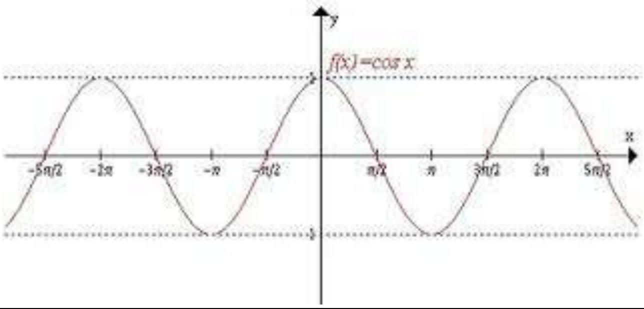
<u>Gráficos - Função Seno</u>

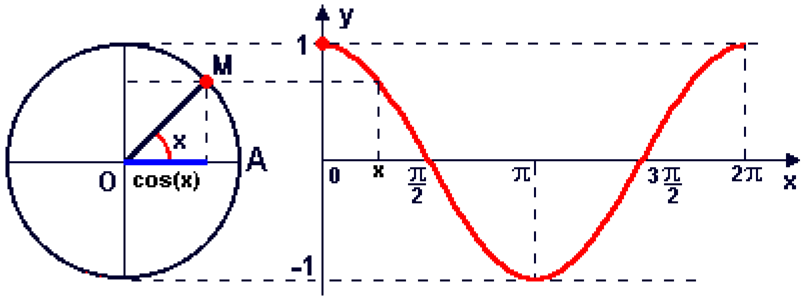


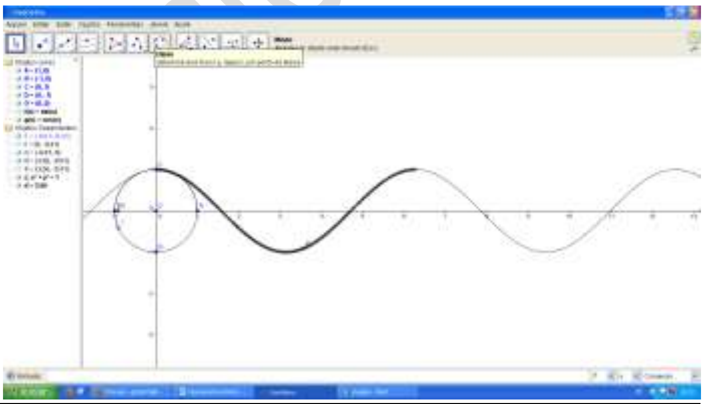




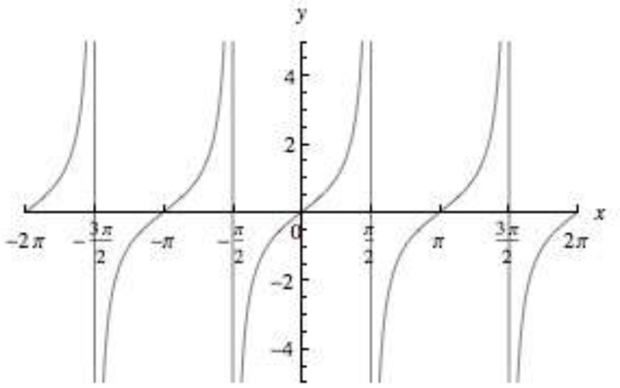
Gráficos – Função Cosseno

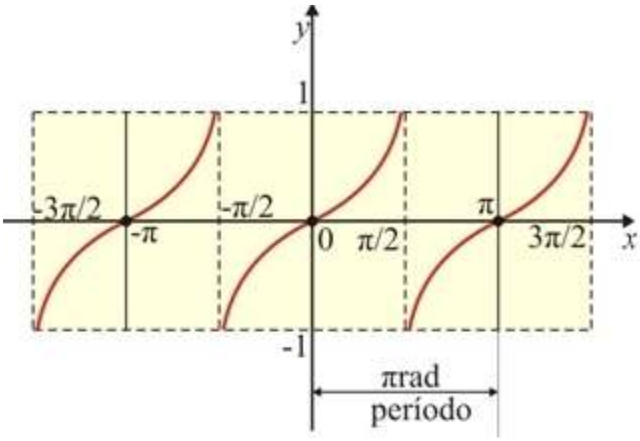






Gráficos – Função Tangente





Função - Inversa x Recíproca

Quando nos referimos ao inverso do número 3 estamos falando do número $\frac{1}{3}$. E dizemos inverso abreviando a expressão "inverso multiplicativo". Assim, sempre que um número *a* é diferente de zero, dizemos que seu inverso é o número $\frac{1}{a}$.

Com as funções é diferente. Dada uma função *f*, a função $\frac{1}{f}$, é chamada de ***função recíproca da função f*** e está definida apenas para os valores onde f não é zero. Já a função inversa da função *f* é aquela que associa y_0 a x_0 se, e somente se *f* associa x_0 a y_0. Veja o exemplo:

Se *f* é a função seno, temos que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, então $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Note que neste caso o ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$ pertence ao gráfico da função inversa f^{-1} se, e somente se, o ponto $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ pertence ao gráfico de *f*.

Se você está atento, certamente vai perceber logo que para determinar o gráfico da função inversa f^{-1} basta considerar os pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são obtidas tomando os pontos do gráfico de *f* e trocando *x* por *y*.

Lembre-se que as funções inversas e recíprocas são funções distintas!

<u>Função recíproca da função:</u>

Seno –> Cossecante / Cosseno –> Secante / Tangente –> Cotangente.

Cossecante x = $\frac{1}{Seno\ x}$ Secante x = $\frac{1}{Cosseno\ x}$ Cotangente x = $\frac{1}{Tangente\ x}$

Atividade 6.

Exercícios:

1) Para que serve o Teodolito?

2) Como se calcula distâncias que não se pode medir diretamente? Qual instrumento é usado para fazer tal cálculo?

3) Descreva por quais pontos passa a função seno, depois faça o mesmo para a função cosseno.

4) Compare o gráfico da função seno da função cosseno - (ver os gráficos no livro).

5) O gráfico seno e cosseno nos dá uma idéia de ciclo? E a da função tangente?

6) Você gostaria de saber uma distância, que fosse impossível de medir diretamente? Qual é essa distância?

7) Expresse 300º em radianos.

8) A roda de uma bicicleta tem 60 cm de diâmetro. Use $\pi = 3,14$.

a) Qual o comprimento da circunferência dessa roda?

b) Quantas voltas dará cada roda num percurso de 94,2m?

9) Um móvel, partindo do ponto A, percorre um arco de 1.690º na circunferência trigonométrica. Quantas voltas completas deu e em que quadrante parou?

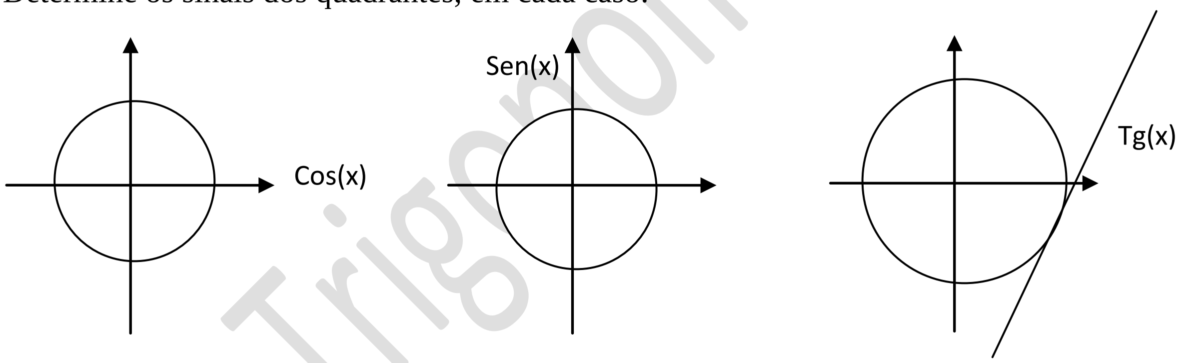
10) Quantas voltas completas dá e em que quadrante pára um móvel que, partindo da origem dos arcos, percorre, na circunferência trigonométrica, um arco de:

a) 1.810º b) 2.350º c) -1.200º d) $\frac{3\pi}{7}$ rad e) $5.\pi$rad f) $\frac{8\pi}{6}$rad

11) Determine o valor de:

a) sen (120º) b) Cos (315º) c) sen (420º) d) tg (300º)

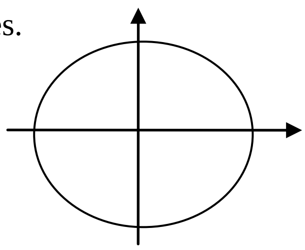
12) Determine os sinais dos quadrantes, em cada caso.



13) Preencha a tabela com os ângulos correspondentes aos respectivos quadrantes.

1º QD	2º QD	3º QD	4º QD
30º			
45º			
60º			

14) Indique a localização dos quadrantes.



15) Construa os gráficos das funções:

a) $y = \text{sen}x$ b) $y = \cos x$ c) $y = \text{tg } x$

16) Determine os valores em relação aos ângulos que ficam sobre os eixos.

Atenção! Pode haver casos em que não exista.

a) sen (0º) = b) sen (90º) = c) sen (180º) = d) sen (270º) =

e) cos(0º) = f) cos (90º) = g) cos (180º) = h) cos (270º) =

i) tg (0º) = j) tg (90º) = k) tg(180º) = l) tg(270º) =

17) Determine as correspondentes, das funções recíprocas:

a) Cotangente α = b) Secante α = c) Cossecante α =

Atividade 7.

Mídias e Leitura

As mídias tecnológicas - Maple e Geo Gebra serão usados como recursos matemáticos, e ministradas em algumas aulas com a finalidade de construir gráficos, observar o comportamento do mesmo, quanto a movimentação em relação aos eixos, oscilação, periodicidade, as constantes de intervalos. Permitir também analisar os diferentes tipos de gráficos, se tratando de sen (x), cos (x) e tg (x).

As aulas vídeos como NOVO TELECURSO é abordada de uma forma dinâmica, de fácil assimilação, a maneira que os assuntos são abordados envolvendo situações do dia-a-dia, permite ter uma visão que a matemática faz parte das relações sociais e que precisamos dela a todo instante. Propiciando a turma uma interação do conteúdo com uma visão mais esclarecida de onde tal matéria é aplicada ou útil em nosso cotidiano. As abordagens são bem interessantes, trazendo exemplos reais, fazendo com que o aprendiz reflita e questione as situações descritas. Já o Maple V, Geo Gebra, assim como o Cabri, permitem as construções de vários gráficos e uma agilidade que na lousa não possui, visto que com essas mídias, há a observação da movimentação dos gráficos, oscilação e periodicidade. Além de permitirem as mais variadas construções geométricas no ramo da geometria, da trigonometria nos dois últimos. Entretanto o Maple por sua abrangência permite que tal instrumento seja aplicado no ramo da álgebra também. As ilustrações gráficas fornecidas por esses instrumentos de desenho, facilitam na hora de plotar gráficos, já que ele calculam os espaçamentos proporcionalmente, e permitem a perfeição gráfica, o que é bem diferente quando os alunos se deparam com valores numéricos bem grandes e a construção do gráfico fica quase impossível. Tem se essas problemáticas quando: os números são astronômicos, ou as diferenças de intervalos entre eles são exagerados.

O Livro Paradidático será adotado, para que os alunos leiam e interpretem melhor um texto, ou enunciado, já que para resolver questões matemáticas á primeira coisa que a pessoa tem que dotar, é capacidade de interpretar. A interpretação e difícil já que precisa–se ter um olhar cuidadoso, para não cometer erros. A investigação é a base para um excelente resultado, já que possuindo atenção há de se ter bastante cuidado ao ler um texto, o que ele pede e do que ele está se tratando, uma visão ampla, já que o conhecimento é um todo. A leitura deve ser incentivada em todas as idades, pois é ajuda em todas as disciplinas, a língua portuguesa é primordial para a identidade de uma nação. Deve-se saber ler e escrever muito bem, pois estes são meios de comunicação que toda população deveria tomar posse, a qual permite conhecer novos pontos de vistas, de cultura, através da leitura e através da escrita são formuladas leis, a comunicação escrita, redação que averigua o nível de conhecimento das palavras e a imaginação de situações que se relaciona a produção intelectual e a criatividade. Mas para isso é preciso muito treino e raciocínio, para interpretar o mundo que se vive, e a matemática também faz parte desse todo, onde a criatividade e percepção retratam as linhas de raciocínio e a produção de argumentos.

As pesquisas na internet nada mais é relacionar o mundo virtual ao mundo real, já que estes estão bem presentes no mundo em que vivemos. O povo brasileiro usa muito o recurso da internet para vários fins, acredito que o estudo também possa ser enriquecedor já que o aluno quanto pessoa tem que analisar de forma crítica o mundo em que vivem. Cabendo a ele consultar, analisar e tirar uma conclusão do que foi pesquisado, e ao professor verificar se as conclusões que foram relacionadas a base de texto de consulta, condiz com o conteúdo que está sendo ministrado. O importante é entender que a internet ela pode nos auxiliar em pesquisas, devido a amplitude de informações que esta possui.

Avaliação

Mediarei o aluno entre o sujeito e o objeto do conhecimento, trabalhando de forma que, a partir dos conteúdos, dos conhecimentos apropriados pelos alunos, eles possam compreender a realidade, atuar na sociedade em que vivem e transformá-la. Assim, buscando que o conhecimento sobre o tema passe a ter um caráter significativo para o aluno.

Valores:

Trabalho (Temas transversais): 1,0 pontos.

Teste: 2,0 pontos.

Livro Paradidático: 1,0 pontos.

Saerj: 1,0 ponto.

Prova: 5,0 pontos.

Execução de Atividades: 0,0 pontos a 2,0 pontos. (*)

Obs: (*) Será avaliada a participação do aluno nos trabalhos em grupos e na realização dos trabalhos propostos para casa. O aluno será avaliado individualmente, podendo alcançar os dois pontos, porém isso dependerá de seu empenho em resolver questões na lousa ou em seu caderno, mostrar se empenhado em fazer as atividades pré-estabelecidas, de forma a aprimorar seu conhecimento. Além de participar das aulas fazendo perguntas e levantando novas idéias ou caminhos, para o desenvolvimento e apropriação do conteúdo, sendo agente do seu próprio saber.

Bibliografia:

IEZZY, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PERIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática ciência e aplicações, volume 1**. 6ªed. São Paulo: Saraiva. 2010.

SILVA, C.; FILHO, B. **Matemática: aula por aula 1ª série**. 2ªed. São Paulo: FTD. 2005.416p.

BRASIL. **Site Só Matemática**. < http://www.somatematica.com.br/>.

BRASIL. **Instituto de Matemática da UFRJ**.<http://www.im.ufrj.br/.

BRASIL. **Formação Continuada - Roteiro de Ação (1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7)** – Material de Estudo, 2013.

GIOVANNI, JOSÉ RUY.; BONJORNO, JOSÉ ROBERTO.; JR, GIOVANNI JOSÉ RUY.; **Matemática Fundamental – Uma nova abordagem, volume único.** São Paulo: FTD, 2002.

BARROSO, JULIANE MATSUBARA. **Conexões com a Matemática, volume 1.** São Paulo: Moderna. 2010

TAHAN, MALBA. **O Homem que Calculava, volume único**. 75ª ed. Rio de Janeiro. São Paulo: Record.2009