SECRETARIA DE EDUCAÇÃO DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
FUNDAÇÃO CICIERJ – CONSÓRCIO CEDERJ

BIANKA SOARES LOPES

CURSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA
MATEMÁTICA – 4 º BIMESTRE / 2013
TUTOR: MARCELO RODRIGUES

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

PETRÓPOLIS / RJ
NOVEMBRO – 2013

Introdução

Neste plano de trabalho, utilizarei objetos de fácil acesso encontrados no cotidiano, como modelo para conhecer e explorar algumas atividades matemáticas tornando as aulas mais atrativas e dinâmicas para o melhor entendimento sobre Trigonometria na Circunferência.

O aluno do 1º ano do ensino médio ira perceber , compreender e atribuir significados ao que está fazendo, descobrindo relações existentes entre as partes resultando em um aprendizado mais significativo.

As atividades escolhidas fazem um convite aos alunos a encontrar a relação existente entre a matemática com os contextos reais.

Desenvolvimento

<u>Atividade 1</u>

Duração prevista: 100 minutos.

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Trigonometria

Objetivos: Introduzir o estudo da função tangente, utilizando a geometria para resolução de uma situação problema que envolva medição;

Pré-requisitos: Geometria do triângulo retângulo; Material necessário para construção do medidor de ângulos: Papel cartão; Régua; Transferidor; Tesoura; Calculadora; Canudo; Fita adesiva; Peso (para o fio de prumo); Linha de costura (ou barbante); Fita métrica ou trena.

Organização da classe: Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.

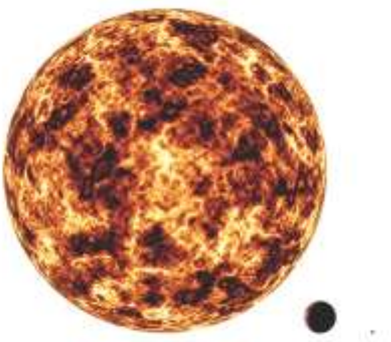
Descritores associados:

H14 – Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos.

H21 – Utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos.

Falta muito? É longe?

Você sabe qual é a distância da Terra ao Sol? Como terá sido medida essa distância?



A preocupação em medir distâncias acompanha o homem da antiguidade até os dias de hoje. Calcular pequenas distâncias é um problema de fácil solução. Mas muitos problemas interessantes envolvem a medida de distâncias inacessíveis.

Sejam estas medidas acessíveis ou inacessíveis, praticamente todas, podem ser obtidas com o auxílio da trigonometria. Na essência, o problema que está presente em quase todas as situações é a resolução de um triângulo.

Você seria capaz de fornecer exemplos de instrumentos de medidas?

1. Cite quais grandezas são possíveis de serem medidas com os instrumentos citados?

2. Imagine se o instrumento de medida citado pode ser usa-do para determinar as seguintes medidas: distância entre dois planetas, espessura de um fio de cabelo, altura do Morro do Pão de Açúcar, distância de uma margem a outra da Baía de Guanabara, largura do rio Paraíba do Sul.

3. Suponha que você deseja saber a distância do planeta Terra ao Sol. Como poderemos fazer isso? Quais são os instrumentos mais adequados? Quais são as dificuldades? Discuta com seus colegas.

4. Você conhece o teodolito? Para que ele serve?

O funcionamento do Teodolito baseia-se em conceitos de Trigonometria. As figuras abaixo mostram um pouco desse importante instrumento de medida de distâncias inalcançáveis:

Figura: Teodolito em uso.

http://m3.ime.unicamp.br/portal/Mi

Figura: Teodolito em uso.

No site http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ExperimentosM3 Matematica/a_altura_da_arvore/,existe um guia para construção de um destes teodolitos improvisados.

Vamos ver como é?

Para construção do teodolito improvisado (ou ainda, do medidor de ângulos),devemos seguir os seguintes passos:

Passo 1. Recorte um pedaço (20 cm × 10 cm) do papel cartão. Ele será a base do seu teodolito.

Passo2. Fixe o transferidor neste pedaço de papel usando a fita transparente, como vemos na figura, dando destaque ao segmento de reta que passa pela marca do ângulo de 90°, como na figura a seguir.

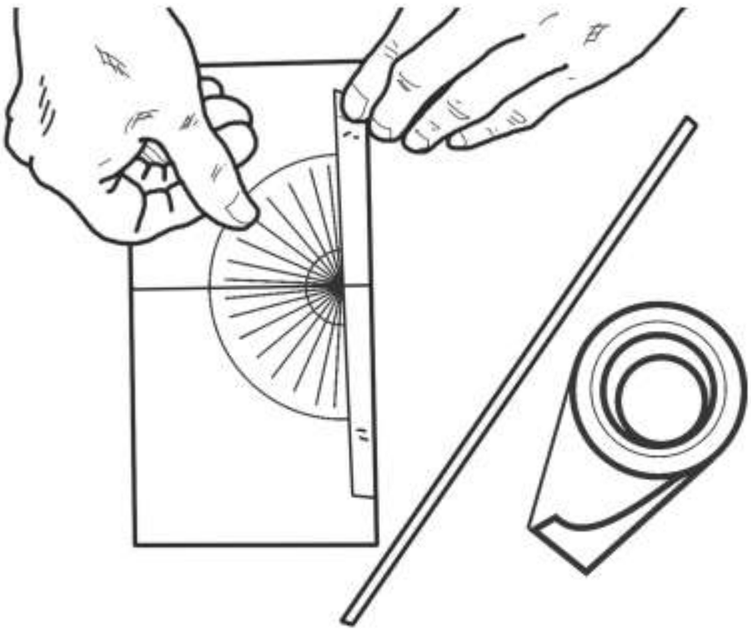


Figura: Teodolito em construção

Passo 3. Agora precisamos prender o canudo com o barbante e o peso no transferidor. Tenha bastante atenção para que o canudo coincida com a linha de fé do transferidor (a linha que passa pelo 0° e pelo 180°), e o barbante já deverá estar preso ao canudo (amarrado) de maneira que o nó coincida com o centro do transferidor. As figuras abaixo ilustram isso.

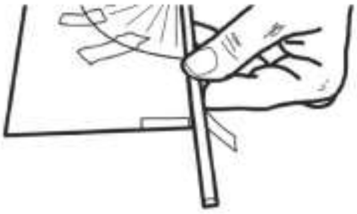


Figura: teodolito em construção

Figura: Teodolito em construção

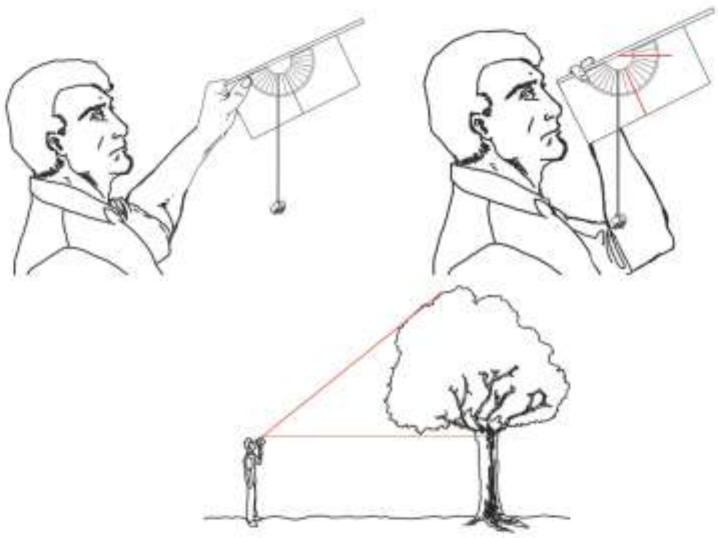
De posse do nosso medidor de ângulos, que tal medirmos a altura de algo inacessível na escola? Procure na escola alturas difíceis de serem medidas, como a do telhado, da cobertura da quadra, do segundo pavimento, de uma árvore ou de uma torre de transmissão de celular, por exemplo.

5. Que altura você vai medir?

6. Agora que você escolheu que altura deseja medir, posicione-se a uma distância conhecida do objeto cuja altura você vai determinar (você pode medir antes a distância). A que distância você está do objeto cuja altura você pretende verificar?

7. Leve o seu teodolito à altura dos seus olhos e observe, através do canudo, o topo do objeto do qual você pretende determinar a altura. Peça a um colega que olhe no seu teodolito, enquanto você observa pelo canudo o topo do seu objeto, qual a menor indicação para a medida do ângulo do barbante no transferidor. Qual foi o ângulo que o seu colega viu?

8. As imagens abaixo mostram a realização deste experimento, onde o objeto cuja altura está sendo determinada é uma árvore.



Figuras: usando o teodolito para medira a altura de uma árvore

Correlacione essas imagens com o que você fez e com o ângulo lido pelo seu colega. Se chamarmos de “ângulo de observação” ao ângulo BÂC do esquema abaixo, qual a sua medida? Quanto mede ainda a distância do observador (você) ao objeto observado e a altura do observador (a sua própria altura)?

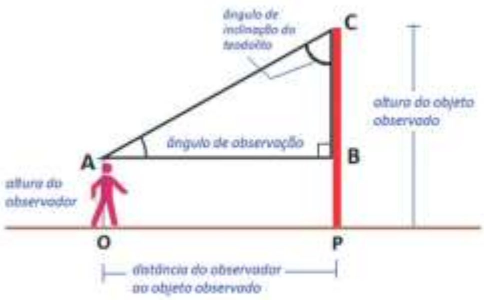


Figura: esquema indicativo das medidas encontradas no experimento

9. Use agora os seus conhecimentos sobre razões trigonométricas para determinar a altura do objeto que você observou pelo teodolito. Mas lembre-se: o segmento BC

indicado no esquema acima representa apenas uma parte da altura procurada. A altura total será o resultado da soma da medida do segmento BC com a sua própria altura, certo? Mãos à obra!

Atividade 2

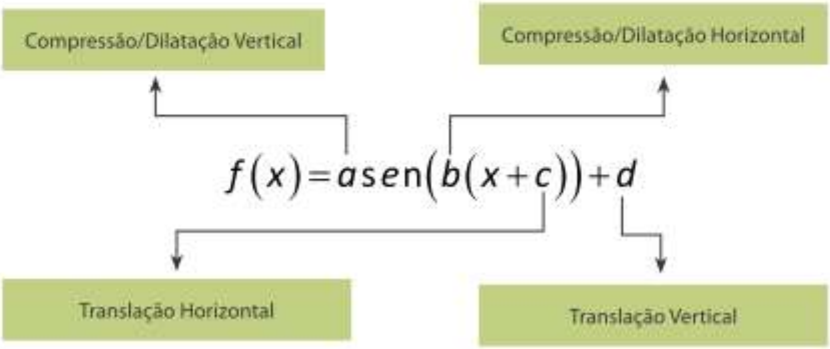
O Movimento da Roda Gigante e as Transformações no Gráfico da Função Seno.

Duração prevista: 100 minutos
Área de conhecimento: Matemática
Assunto: Trigonometria
Objetivos: Estudar o gráfico da função seno em um contexto real.
Pré-requisitos: Conhecer as propriedades analíticas elementares das funções seno, cosseno e tangente.
Material necessário: Software geogebra; folha de atividades; laboratório de informática (opcional) / projetor multimídia e notebook do professor.
Organização da classe: Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.

Descritores:
H – Aplicar o conhecimento de transformações gráficas nas funções trigonométricas para resolver problemas significativos.

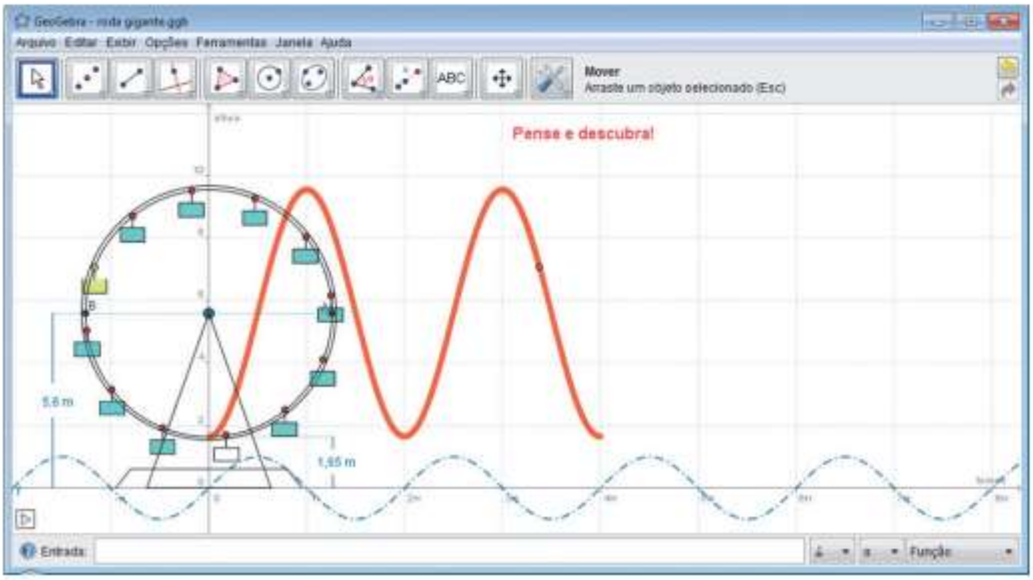
Você já conhece algumas transformações que podem ocorrer no gráfico da função seno. No esquema abaixo apresentamos a transformação causada por cada um dos coeficientes a, b, c, e d da função:

$$f(x)=a\,sen(b(x+c))+d\,.$$



Vamos treinar essas habilidades?

1. Comecemos observando Roda Gigante que seu professor disponibilizou.



Com os botões do canto inferior esquerdo da tela você pode iniciar (▷) ou parar (▯▯) a animação a qualquer momento.

2. Neste arquivo há no canto inferior esquerdo um botão. Clique nele para a animação dos elementos desse arquivo. Observe o movimento da Roda gigante e do Ponto laranja.

3. Observe que o ponto laranja descreve a altura do ponto de sustentação do acento amarelo considerando que a velocidade da roda gigante é de uma volta a cada π2 segundos (cerca de 6,28 segundos).

4. Considerando a Roda Gigante uma Circunferência e o diâmetro AB, paralelo ao eixo x (chão), podem representar arcos com extremidades em A e no ponto de sustentação do acento amarelo. Pensando desta forma qual a medida deste arco quando o tempo t é zero? E quanto o tempo é π?

5. Observando as alturas assinaladas na roda gigante qual é a altura mínima do ponto de sustentação do acento amarelo? E a altura máxima desse ponto?

No Geogebra a função seno é escrita por "sin(x)".

6. Nesse arquivo há uma função f definida por f(x) = sen(x). Seu gráfico é a linha azul pontilhada que aparece logo abaixo da roda gigante. Descubra a expressão da função cujo gráfico coincide com o rastro do ponto laranja. Com um clique duplo sobre o gráfico desta função reescreva a definição da função f como essa função. Quando você acertar no lugar do texto "Pense e Descubra" você verá "Parabéns você acertou!!!".

<u>Atividade 3.</u>

Descobrindo a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos

Duração prevista: 100 minutos

Área de conhecimento: Matemática

Assunto: Trigonometria

Objetivos: Estudar a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.

Pré-requisitos: Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Material necessário: Folha de atividades.

Organização da classe: Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.

Descritores:

H90 – Resolver problemas usando a Lei dos Senos ou a Lei dos Cossenos.

A Lei dos Senos

Praia do Flamengo, Rio de Janeiro.

Praia de Icaraí, Niterói.

Você conhece a Praia do Flamengo, no Rio de Janeiro, e a Praia de Icaraí, em Niterói? São duas belas regiões de nosso Estado que encontram-se separadas pela Baía de Guanabara.

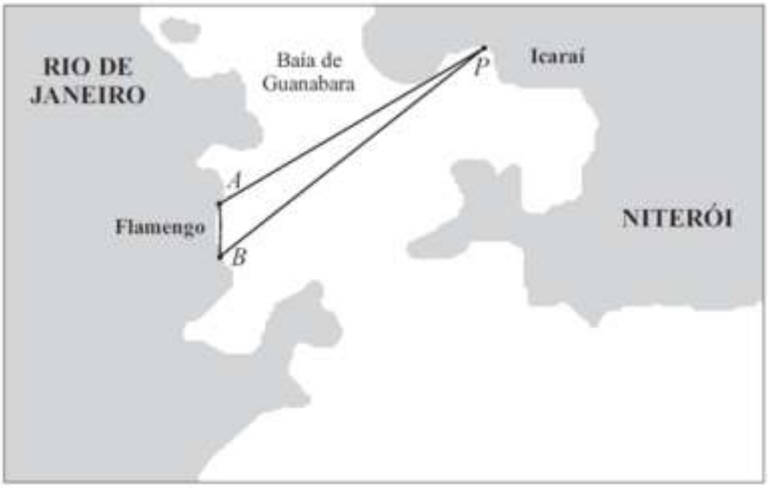
A praia do Flamengo é a praia que se estende por grande parte do parque Brigadeiro Eduardo Gomes (o aterro do Flamengo), no Rio de Janeiro, no Brasil. Era chamada pelos índios nativos tupinambás de “uruçumirim”, que significa “abelha pequena". Com a chegada dos portugueses, no século XVI, estes passaram a denominar a região de Aguada dos Marinheiros, por nela se situar a foz do rio Carioca, onde os navios costumavam se abastecer de água potável. Em 20 de janeiro de 1567, aconteceu, na região, a maior batalha da invasão francesa ao Rio de Janeiro. As forças portuguesas, comandadas por Estácio de Sá, destruíram a forte paliçada tupinambá que se havia erguido no local. Na batalha, foi ferido mortalmente Estácio. Posteriormente, a praia passou a ser chamada de praia da Carioca, em referência ao rio homônimo. Foi, ainda, conhecida como praia do Sapateiro. A origem do nome atual da praia vem da primeira invasão holandesa à cidade em 1599. Como o desembarque holandês ocorreu na praia, que era anteriormente chamada praia do Sapateiro, ela passou a ser chamada praia do Flamengo, pois originalmente a palavra flamengo indica a aquele que é original da região belga de Flandres. Na época da invasão, todos os habitantes dos Países Baixos falavam a língua holandesa, o que incluía os habitantes dessa região. Na década de 1960, com a construção do parque Eduardo Gomes e o consequente aterramento do litoral em frente à praia do Flamengo, a praia passou a se situar aproximadamente cinquenta metros a frente da antiga linha costeira. É uma praia de águas tranquilas, por se situar dentro da baía de Guanabara. Pelo mesmo motivo, não apresenta normalmente condições propícias para o banho, devido às águas poluídas da baía.

A praia de Icaraí situa-se na Baía de Guanabara também, mas na margem oposta à praia do Flamengo. A vista do Rio para Niterói é belíssima (e vice-versa). Icarahy em língua tupi significa água ou rio sagrado. Com a colonização européia, na Freguesia de São João de Carahy, parte integrante da chamada Sesmaria dos Índios, doada a Araribóia em 1568, desenvolveram-se duas grandes fazendas. No século XIX, a região integrou-se à recém-criada Vila Real da Praia Grande, futura cidade de Niterói. A sua praia constituía-se, à época, em um extenso areal, margeado por pitangueiras, cajueiros, cactos e vegetação típica de restinga. O seu efetivo povoamento iniciou-se a partir das décadas de 1840 e de 1850.

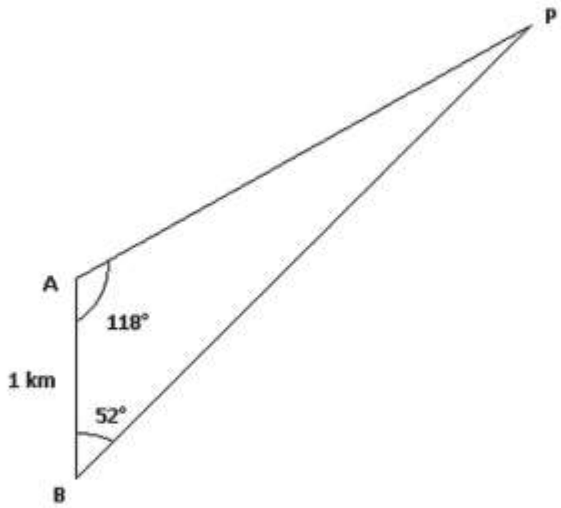
Em 1937, foi construído um trampolim em concreto armado no meio da praia, com recursos da Prefeitura, da Imprensa e do Clube de Regatas Icarahy. Esta estrutura foi dinamitada no final da década de 1960 por oferecer perigo aos banhistas. A partir de então, o bairro conheceu um “boom” imobiliário, que se consolidou a partir da década de 1970 com a construção e inauguração da Ponte Rio-Niterói. Atualmente, o bairro caracteriza-se pelos prédios luxuosos, de elevado padrão construtivo, erguidos na orla da baía.

Que distância separa essas duas praias? Como podemos fazer para medir essa distância? Imagine que temos um ponto, que vamos chamar de ponto A, na praia do Flamengo, e um ponto P na praia de Icaraí (estes dois pontos estão em lados opostos do canal de entrada da Baía de Guanabara). De um ponto B, na praia do Flamengo, distante 1km do ponto A, também se avista o ponto P. Usando um teodolito, conseguiu-se medir os ângulos BAP, 118°, e ABP, 52°. Será que com essas informações conseguimos saber qual é a distância aproximada entre as duas praias? A figura abaixo apresenta uma representação do que falamos aqui...

r.

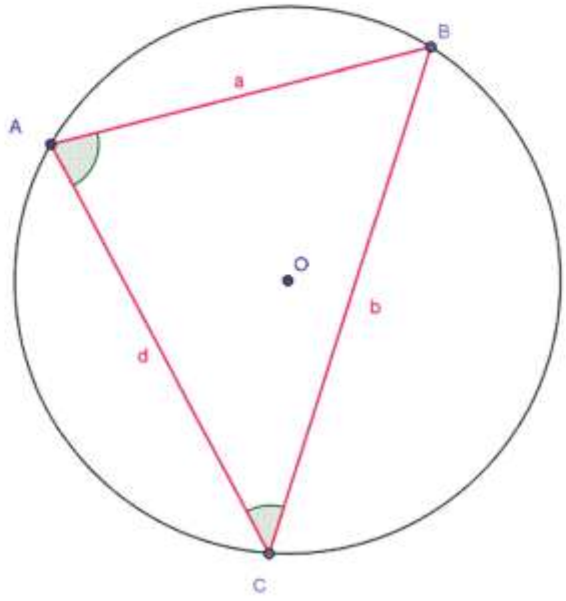


Temos então a seguinte situação, destacando o triângulo ABP:



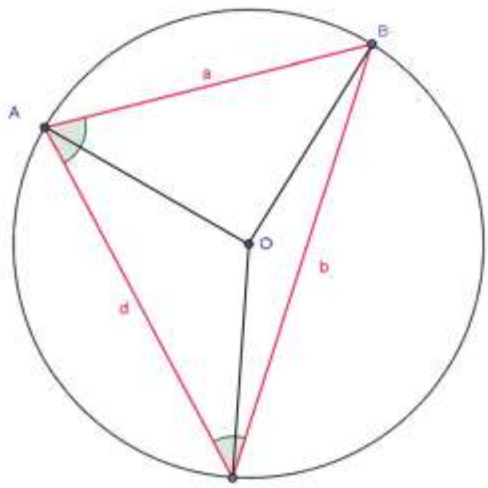
Precisamos determinar a distância de A até P. Mas como proceder? O triângulo não é retângulo, então não podemos usar as razões trigonométricas de seno, cosseno ou tangente, nem mesmo o Teorema de Pitágoras! E agora?

Para facilitar a nossa vida, vamos deixar esse problema guardado e tentar estudar um caso geral? Como todo triângulo pode ser inscrito em uma circunferência, vamos estudar o triângulo ABC inscrito em uma circunferência de raio r.

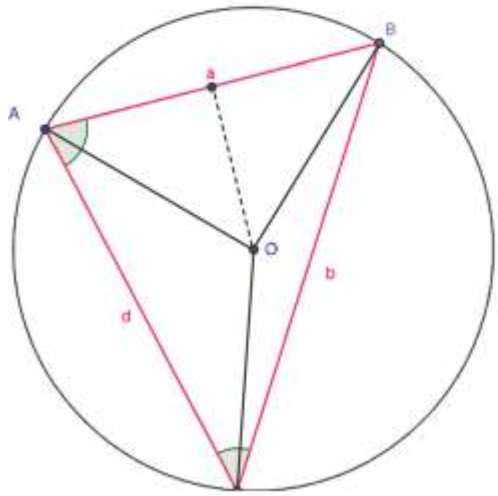


Vamos trabalhar isso junto? Então, siga as orientações abaixo e responda às perguntas que foram formuladas.

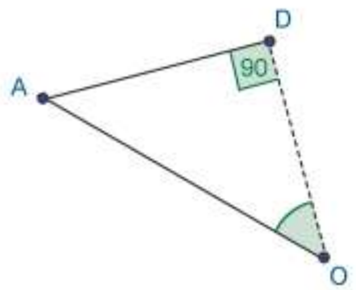
a. Trace os raios AO, OB e OC. Em quantos triângulos o triângulo ABC ficou dividido? Como você classificaria esses triângulos quanto aos lados? Quanto mede o ângulo AÔB, se considerarmos que o ângulo ACB mede $\propto$?



b. Vamos dividir ao meio o triângulo OAB? Como ele é um triângulo isósceles, essa é uma tarefa fácil: basta baixar uma perpendicular pelo ponto O ao segmento AB, que o encontrará no ponto D. Agora, observando o triângulo ADO, responda: quanto mede o ângulo ADO? E o ângulo DOA? E qual é a medida do lado OA? E do lado AD?



c. O triângulo ADO está destacado abaixo. Use o seno como razão entre o cateto oposto e a hipotenusa de um determinado ângulo agudo de um triângulo retângulo para determinar o seno do ângulo ABC, ou seja, o seno de $\propto$, que equivale à medida do ângulo AOD, conforme vimos acima. Depois, reescreva a expressão do seno de $\propto$ em função do lado AB e do raio r da circunferência.



d. Fazendo a mesma construção e dedução acima para os triângulos BOC e AOC, que relação encontramos entre o lado AC e o seno do ângulo ABC e ainda entre o lado BC e o seno do ângulo BAC? O que você pode concluir daí?

Essa é a Lei dos Senos! Ela é muito útil em situações em que conhecemos ângulos de um triângulo qualquer, mas apenas um dos lados, e precisamos determinar um outro lado. Ela pode ser descrita da seguinte maneira:

Em um triângulo qualquer, a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto a esse lado é constante e igual ao dobro do raio da circunferência que circunscreve esse triângulo.

Experimente agora usar a Lei dos Senos para calcular a distância entre as praias do Flamengo e de Icaraí! Use sen 52° = 0,79, sen
9°=0,16 e sen 119° = 0,87.

A Lei dos Cossenos

Júlio é piloto de um jatinho comercial, que foi fretado por um grupo de amigos que moram na cidade do Rio de Janeiro - RJ e na cidade de São Paulo – SP e trabalham em Brasília, de 2ª a 5ª feira. Normalmente eles fretam juntos o jatinho da empresa aérea BRARIOSP Táxi Aéreo, para a qual Júlio trabalha, e dividem as despesas da ida e da volta.

Eles combinaram o seguinte trajeto: como a BRARIOSP fica no Rio de Janeiro, RJ, primeiro ele busca, no aeroporto Santos Dumont, 4 desses amigos, percorre em linha reta a distância que separa São Paulo do Rio de Janeiro, de cerca de 385km, num voo direto até o aeroporto de Cumbica, em São Paulo – SP, onde busca mais 7 amigos. Aí segue direto, também em linha reta, até Brasília (DF), percorrendo mais cerca de 867 km. Apesar da distância do Rio até Brasília (cerca de 941 km) ser menor que a distância total percorrida pelos amigos que moram no Rio precisam voar até chegar a Brasília, a viagem acaba compensando porque o custo é parcialmente pago pelo grupo e parcialmente subsidiado pelo seu patrão, sempre muito generoso com despesas de passagens aéreas...

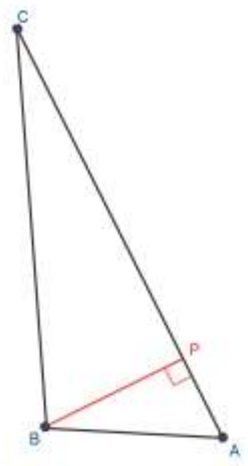
Essa é a primeira vez que Júlio vai fazer esta viagem, e ele precisa informar ao seu equipamento de vôo qual o ângulo entre a rota Rio-São Paulo e São Paulo – Brasília, mas anda meio esquecido dos seus conhecimentos de Trigonometria... Será que você pode ajudá-lo?

Bem, este é um problema de determinação de ângulo. Conhecemos todas as medidas dos lados do triângulo que tem como vértices os pontos A (representando a cidade do Rio de Janeiro), B (representando a cidade de São Paulo) e C (representando a cidade de Brasília). A figura abaixo mostra esse triângulo, destacado do mapa, para facilitar nosso estudo.

Precisamos calcular a medida do ângulo ABC, para podermos ajudar o Júlio... Mas como podemos fazer isso?

O que conhecemos até agora que relaciona lados e ângulos é a trigonometria no triângulo retângulo. Será que ela pode nos ajudar? Mas como, se esse triângulo não é retângulo (até que parece, mas como não temos certeza, não podemos partir dessa hipótese...).

Mas podemos usar outra estratégia: vamos fazer surgir triângulos retângulos nesse problema! Se tirarmos uma perpendicular por B, conseguimos dois triângulos retângulos! A figura a seguir mostra essa construção. Para facilitar nossos cálculos, vamos chamar o lado BC de a, o lado AC de b e o lado AB de c, sendo ainda $\propto$ a medida do ângulo CAB.



a. Ao traçarmos o segmento BP, perpendicular ao lado AC, dividimos o segmento AC em duas partes. Se a medida do segmento AP é x, como podemos indicar a medida do segmento CP?
b. Se olharmos só para o triângulo APB, podemos afirmar que ele é um triângulo retângulo? Por quê? E o triângulo CPB?
c. Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos APB e CPB, que relações obtemos? (Sugestão: Chame o segmento BP de h).
d. Isole 2 h nas duas expressões que você obteve acima e iguale-as. O que você encontra?

e. Qual é o cosseno do ângulo BAP? (Dica: Use as razões trigonométricas no triângulo retângulo para responder a essa pergunta!)
f. Você consegue determinar x em função de c de cosα?
g. se você substituir o que encontrou no item (e) na expressão que encontrou no item (d), o que você obtém?
h. Escreva, em língua portuguesa, o significado dessa relação que você determinou.

Essa relação que você encontrou é conhecida como a Lei dos Cossenos e apresenta a vantagem de relacionar todos os lados de um triângulo com um de seus ângulos. Retomando o nosso problema, temos o seguinte triângulo:

Como você pode usar a relação acima para determinar a medida do ângulo B? Lembre-se que, se você conhece o valor do cosseno de um ângulo, você conhece o ângulo! Basta consultar uma tabela de valores trigonométricos ou uma calculadora científica (como a que vem disponível no sistema operacional de nossos computadores...).

Então, responder a essa pergunta significa determinar qual é o cosseno do ângulo BAC. Você consegue responder?

Avaliação

A avaliação levará em conta a participação de cada aluno na realização e execução das atividades propostas, e entendimento do aluno perante os conteúdos apresentados.

A atividade em equipe leva o aluno à discussão na hora da resolução das atividades uns colaborando com o outro quando surgirem quaisquer dúvidas; podendo assim acompanhar a evolução do grupo e de cada aluno.

Referências Bibliográficas

ROTEIROS DE ACÃO 2,7 e 8 – **Trigonometria na circunferência** – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 1º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2013 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=128.

MATEMATICA Dante, 1o Ano/ Luiz Roberto Dante – 1o Edição – São Paulo: Ática, 2010.

Currículo Mínimo 2013

Imagens

ƒ Terra e Sol (p. 4)

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/1197175

ƒ Teodolito em uso (p. 8)

Fonte: http://www.sxc.hu/photo/420973

Imagens

Praias (p. 4)

http://www.flickr.com/photos/andreluisrjbr/3388455176

http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Praia_de_cara%C3%AD_e_MACjpg

Mapa (p6)

http://maps.google.com.br/

Mapa (p. 14)

http://maps.google.com.br/ ?ll=-19.373341,-45.285645&spn=10.641015,21.51123 &t=m&z=6&vpsrc=6