FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: C. E. Senador Sá Tinoco
PROFESSOR: Flávia Rosa do Nascimento Azevedo
MATRÍCULA: 0920535-2 e 0951275-7
SÉRIE: 2º série - Ensino Médio – Grupo 2
TUTOR (A): Edeson dos Anjos Silva

PLANO DE TRABALHO SOBRE FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Flávia Rosa do Nascimento Azevedo
flaviarnazevedo@hotmail.com

1. Introdução:

Os logaritmos foram inventados única e exclusivamente como instrumento para facilitar cálculos. Mas é evidente que, com o advento dos computadores e das calculadoras científicas, a finalidade inicial perdeu toda a sua importância. Porém, podemos notar o grande valor intrínseco dos logaritmos em um conceito que, nem o tempo e nem as grandes invenções conseguem tornar o seu aprendizado insignificante: o de função logarítmica.

De fato, com o desenvolvimento da Matemática e das ciências, verificou-se que muitos fenômenos físicos, biológicos e econômicos podem ser representados, de algum modo, por essa função. Sendo, portanto, um instrumento de interpretação da natureza e das relações humanas, a função logarítmica jamais perderá a sua importância.

Esse plano de trabalho busca mostrar a importância desse conteúdo e trabalha as definições e conseqüências dos logaritmos, preparando o aluno para o estudo posterior da função logarítmica.

2. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

Para identificar os conhecimentos prévios e intuitivos dos alunos no que diz respeito à potenciação e suas propriedades, conteúdos que auxiliam na compreensão dos conceitos de logaritmos, o professor fará uma revisão sobre o assunto e os alunos farão atividades relacionadas à potenciação em uma folha entregue aos mesmos.

Através dos estudos de fractais, os alunos perceberão e construirão o conceito de definição de logaritmo com uma atividade de construção do Triângulo de Sierpinsky. Para aplicarem os conhecimentos adquiridos, eles realizarão exercícios em folha xerocada e, como forma de avaliação, será aplicado um trabalho com questões para serem resolvidas em duplas.

Atividade 1:

- **Habilidade relacionada:**

Calcular potências com números reais.

- **Pré-requisitos:**

Potenciação e suas propriedades.

- **Tempo de Duração:**

2 horas-aulas.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

Folha de atividades

Quadro branco

- **Organização da turma:**

Os alunos realizarão a atividade em duplas.

- **Objetivos:**

Revisão do conceito de potenciação.

- **Metodologia adotada:**

O professor irá expor no quadro branco uma pequena revisão do conceito de potenciação para os alunos copiarem em seus cadernos. Após a explicação do conteúdo, os alunos realizarão as atividades na folha distribuída pelo professor. Com isso, ele poderá observar se os alunos carregam dúvidas em relação ao conteúdo ou se já o dominam sem grandes dificuldades.

- REVENDO POTENCIAÇÃO

Potência com expoente natural

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$, com $m \geq 2$, denomina-se **potência** de base a e expoente m o número a^m, que corresponde ao produto de m fatores iguais a a.

Exemplos

- $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
- $(-3,1)^3 = (-3,1) \cdot (-3,1) \cdot (-3,1) = -29,791$
- $(-4)^0 = 1$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

Potência com expoente inteiro

Dado $a \in \mathbb{R}^{*} e\ m \in \mathbb{N}$, temos: $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

Exemplos

- $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \frac{64}{27}$

Potência com expoente racional

Podemos escrever potências de base positiva e expoente fracionário por meio de radicais e vice-versa.

Dado $a \in \mathbb{R}_{+}^{*}$ e o número racional $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}\ e\ n \in \mathbb{Z}_{+}^{*}$, temos $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Exemplos

- $6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$
- $12^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{12^3}$
- $\sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac{2}{5}}$

Propriedades das potências

1ª propriedade: Uma multiplicação de potências de mesma base pode ser escrita como uma única potência. Basta repetir a base e somar seus expoentes.

Exemplo

- $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$

2ª propriedade: Uma divisão de potências de mesma base (não nula) pode ser escrita como uma única potência. Basta repetir a base e diminuir seus expoentes.

Exemplo

- $6^5 : 6^3 = 6^{5-3} = 6^2$

3ª propriedade: Em uma multiplicação de dois ou mais fatores elevados a um expoente, podemos elevar cada um dos fatores a esse mesmo expoente.

Exemplo

- $(4 \cdot 3)^2 = 4^2 \cdot 3^2$

4ª propriedade: Em uma divisão elevada a um expoente, podemos elevar o dividendo e o divisor a esse mesmo expoente.

Exemplo

- $\left(\frac{15}{7}\right)^3 = \frac{15^3}{7^3}$

5ª propriedade: Uma potência elevada a um expoente pode ser escrita como uma única potência. Basta repetir a base e multiplicar os expoentes.

Exemplo

- $(7^2)^3 = 7^{2 \cdot 3} = 7^6$

COLÉGIO ESTADUAL SENADOR SÁ TINOCO Boa Ventura - Itaperuna-RJ	*Aluno(a):*	*Ano: 2º / 2001*
	Professor(a): Flávia Rosa do Nascimento Azevedo	*Data:*
	Ensino Médio	
	Disciplina: Matemática	

ATIVIDADES SOBRE PROPRIEDADES DA POTENCIAÇÃO

1- Aplicando as propriedades, resolva as potências abaixo na forma de uma só potência:

a) $7^4 \cdot 7^2 =$

b) $10^9 : 10^6 =$

c) $3^4 \cdot 3^5 =$

d) $\frac{5^x}{5^{-3x}} =$

e) $7^5 : 7^3 =$

f) $(-3)^2 : (-3)^{-3} =$

g) $(2^{-3})^4 =$

h) $(3^2 \cdot 5)^3 =$

i) $7^3 \cdot 7^2 \cdot 7 =$

j) $5^x \cdot 5^2 =$

k) $5^3 : 5^2 =$

l) $10^x : 10^{-2} =$

m) $(-2^{-2})^{-3} =$

n) $(8^2)^5 =$

0) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 =$

p) $(8^2)^3 =$

q) $8^x : 8^{x-5} =$

r) $\frac{10^3}{10^5} =$

s) $6^2 : 6^{-6} =$

t) $(5^2)^{-4} =$

u) $\left(\frac{2^4}{3}\right)^{-3} =$

v) $2^2 \cdot 2^{-6} \cdot 2^3 =$

w) $2^{2x} \cdot 2^{-x} =$

x) $2^{x+2} : 2^{x-2} =$

2- Calcule as expressões, aplicando as propriedades:

a) $[(2^{-1} \cdot 2^{4})^{-2}]^{-1} =$

b) $(2^{3} \cdot 4^{2} : 16^{-3})^{-1} : 8 =$

c) $2^{-4} \cdot (2^{3})^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$

d) $\frac{128:\ 4^{3}}{16} =$

e) $(2^{4} \cdot 2^{-7})^{-2} =$

f) $\left(\frac{2}{2^{-1}}\right)^{2} =$

g) $\frac{9^{3} \cdot 27^{4} \cdot 3^{-7}}{3^{-1} \cdot 243^{2}}$

Atividade 2:

- **Habilidade relacionada:**

Efetuar operações utilizando as propriedades operatórias do logaritmo.

- **Pré-requisitos:**

Potenciação

- **Tempo de Duração:**

4 horas-aulas.

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

Folha de atividades.

Régua.

Tesoura.

Lápis de cor.

- **Organização da turma:**

Turma disposta em grupos de dois a três alunos.

- **Objetivos:**

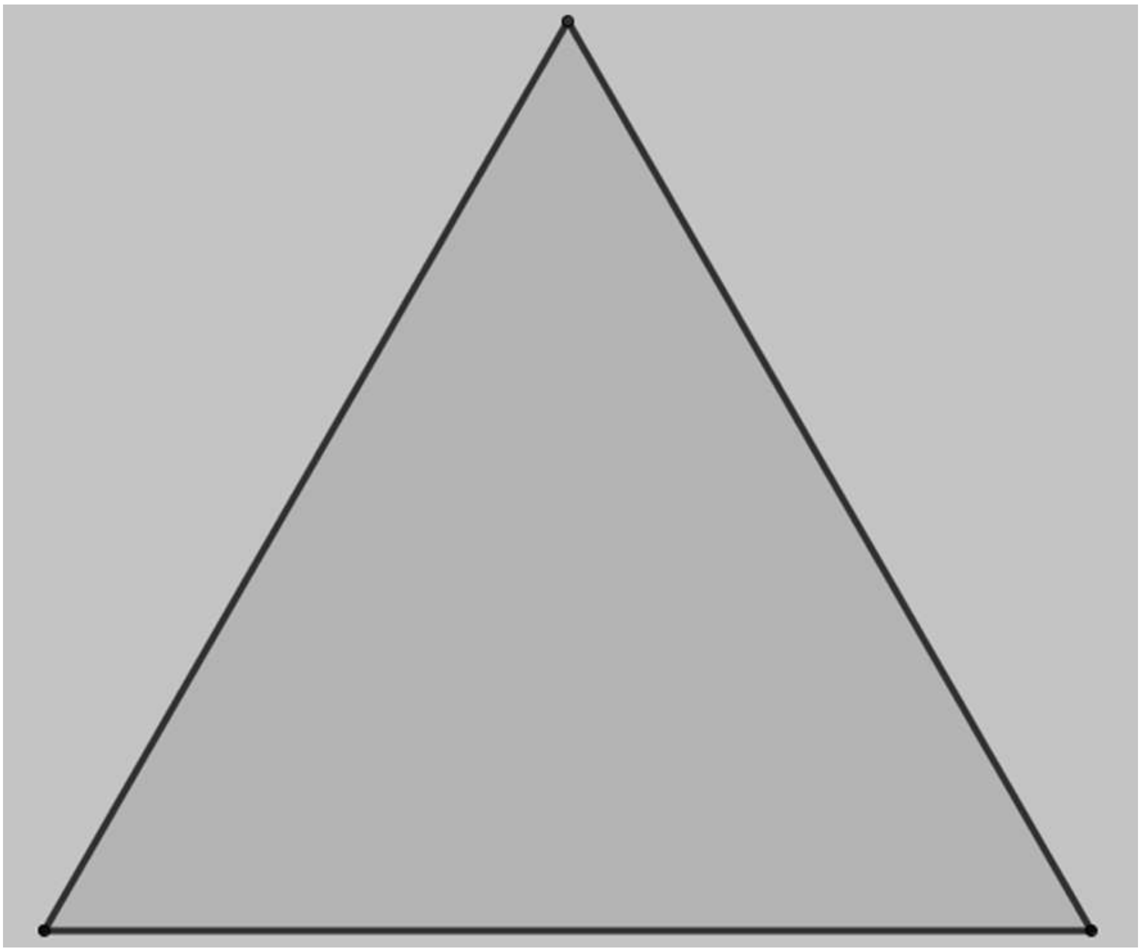
Apresentação do conceito de logaritmo.

- **Metodologia adotada:**

Essa atividade propõe apresentar o conceito de logaritmo a partir do estudo dos fractais. O professor distribuirá a folha de atividades para os alunos contendo um triângulo eqüilátero. Os alunos deverão construir um fractal bastante conhecido que é o Triângulo de Sierpinsky, com o triângulo da folha, seguindo o passo a passo da mesma. Após a construção do fractal, os alunos deverão realizar as tarefas da folha de atividades para que a construção do conceito de logaritmo seja definida através da evolução das atividades realizadas.

ATIVIDADES

Triângulo Equilátero



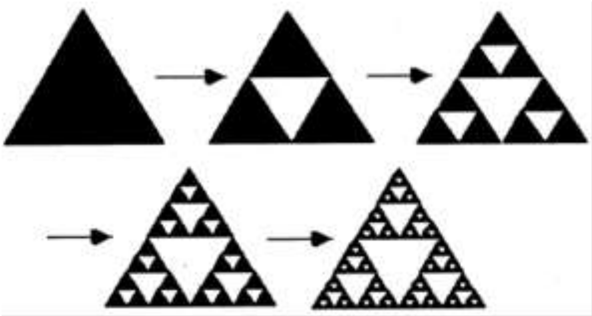
Um fractal bastante conhecido é o Triângulo de Sierpinsky. Ele é obtido a partir de um triângulo equilátero e após sucessivas repetições dos passos descritos abaixo.

1) Obtenha o ponto médio de cada um dos lados do triângulo equilátero disponibilizado pelo seu professor.

2) Trace segmentos de reta unindo os pontos médios, obtendo quatro triângulos equiláteros.

3) Com o auxílio da tesoura, recorte o triângulo central.

4) Note que, ao retirarmos o triângulo central, temos agora três novos triângulos. Repita os passos anteriores com os triângulos restantes e obtenha o Triângulo de Sierpinsky em vários estágios, conforme podemos ver na figura abaixo.



5) Agora é com você! Vamos fazer uma pequena investigação e descobrir o número de triângulos no Triângulo de Sierpinsky a cada iteração. Para tal, preencha a tabela abaixo:

Iteração	0	1	2	3	4	5	6
Número de Triângulos	1	3	9				

6) Você seria capaz de escrever uma fórmula que relacione o número de triângulos na n-ésima iteração?

(Se os alunos apresentarem dificuldades em preencher a tabela, o professor deverá intervir de forma que o aluno perceba que o número de triângulos é expresso por uma sequência de potências de 3. Dessa forma, espera-se que o aluno relacione o número de triângulos com a interação n por meio da expressão *número de triângulos* = 3^n.

7) No século XVI, o matemático alemão Michael Stifel utilizou uma tabela como essa para efetuar multiplicações. A brilhante idéia de Stifel consiste na organização de uma tabela que associa duas sequências numéricas. Vamos utilizar a tabela, que construímos juntos, para entender melhor como podemos obter o resultado das multiplicações.

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441	1.594.323

Efetue as seguintes operações e veja se você percebe algum padrão, observando a tabela:

a) 2.187 X 27 =

b) 6.561 X 243 =

c) 177.147 ÷ 6.561 =

(É importante verificar se os alunos identificam os números da primeira linha da tabela como os expoentes, quando os números correspondentes na segunda linha são escritos como potência de 3. Os alunos deverão encontrar 59.049 como produto de 2.187 por 27 e observar, na tabela, que os números da 1ª linha correspondentes a 2.187 e 27 são, respectivamente 7 e 3 e que o número correspondente a 59.049 é 10 e, ainda, que 3 + 7 = 10.

Repare que na multiplicação, por exemplo, entre 27 e 2.187 o produto é 59.049. Note ainda que os números correspondentes na tabela de 27 e 2.187 são, respectivamente, 3 e 7, assim como 3 + 7 = 10 que é o número correspondente a 59.049 na tabela.

Repare que para encontrarmos o resultado do produto de 243 e 6.561, basta somar os números da primeira sequência correspondentes a 243 e 6.561 (5 + 8 = 13). O resultado esperado será o número correspondente a 13 na segunda sequência.

De forma similar, os alunos deverão encontrar o resultado da divisão entre os dois números. Por exemplo, ao dividir 177.147 por 6.561, deverão encontrar 27. Observando a tabela, deverão perceber que os números da 1ª linha correspondentes a 177.147 e 6.561 são, respectivamente 11 e 8 e que o número correspondente a 27 é 3 e, ainda, que 11 – 8 = 3. Resumindo, deverão perceber que: $3^3 \times 3^7 = 3^{3+7} = 3^{10}$

$3^5 \times 3^8 = 3^{5+8} = 3^{13}$

$3^{11} \div 3^8 = 3^{11-8} = 3^3$)

8) Agora, lembrando do que você aprendeu, utilize a tabela para efetuar as seguintes multiplicações e divisões:

a) 59.049 ÷ 6.561 =

b) 243 x 729 =

c) 2.187 x 81 =

d) 531.541 ÷19.683 =

Como você deve ter percebido, a segunda sequência de nossa tabela é formada pelas potências de 3 e a primeira sequência formada pelos respectivos expoentes.

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}	3^{13}
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441	1.594.323

As ideias de Stifel certamente influenciaram o matemático e teólogo escocês John Napier (1550-1617) na criação dos *logaritmos.*

A grande percepção de Stifel e Napier foi a observação de que o trabalho com o expoente dos números, quando escritos na forma de potência, se torna bastante simples.

Como, em nosso exemplo, a base das potências é 3, dizemos que:

- 2 é o logaritmo de 9 na base 3, ou seja, $\log_3 9 = 2$
- 5 é o logaritmo de 243 na base 3, ou seja, $\log_3 243 = 5$
- 10 é o logaritmo de 59.049 na base 3, ou seja, $\log_3 59.049 = 10$
- 13 é o logaritmo de 1.594.323 na base 3, ou seja, $\log_3 1.594.323 = 13$

9) A partir dessas informações, preencha a seguinte tabela:

$\log_3 531.441 =$ ______________	O logaritmo de 81 na base 3 é ________________
O logaritmo de 177.147 na base 3 é _____________	$\log_3 6.561 =$ ______________
$\log_3 729 =$ ______________	O logaritmo de 3 na base 3 é _______________

10) Complete a tabela logarítmica abaixo com as potências de base 2 e responda às seguintes questões:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2	4											

a) O logaritmo de 256 na base 2 é _________

b) 512 x 16 = _________

c) $\log_2 1.024 =$ _________

d) 32 x 256 = ________

e) O logaritmo de 2.048 na base 2 é _________

f) $\log_2 4.096 =$ ______________

g) 4 096 ÷ 256 = ___________

(Nesse momento, o professor deverá ficar atento para perceber se o aluno consegue responder às questões com base nas explicações já realizadas até aqui).

11) E se fizermos uma tabela logarítmica com as potências de base 1? Complete a tabela abaixo e veja o que acontece:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1											

12) Qual é o valor de $\log_1 1.024$? O que você conclui? Converse com seu colega.

(Espera-se que o aluno perceba que não há $\log_1 1.024$, pois não é possível escrever 1.024 como potência de 1, e que isso se aplica a qualquer número diferente de 1, pois 1 elevado a qualquer expoente é igual a 1. E, assim, conclua que, dentro da construção do conceito de logaritmo realizada, não faz sentido trabalhar com logaritmo na base 1).

Finalizada essa atividade, o aluno compreendendo as atividades anteriores, deverá estar preparado para entender a definição formal do logaritmo de um número real positivo. O professor irá expor esta definição no quadro branco para os alunos copiarem no caderno.

Dados dois números reais positivos a e b, com a ≠ 1 se b = a^c, então o expoente c chama-se *logaritmo* de b na base a.

$\log_a b = c \leftrightarrow a^c = b$, com a e b positivos e a ≠1.

De posse dessa definição, os alunos realizarão atividades em folha xerocada pelo professor.

COLÉGIO ESTADUAL SENADOR SÁ TINOCO Boa Ventura - Itaperuna-RJ	*Aluno(a):* ____________________	*Ano:* **2º - 2001**
	Professor(a): **Flávia Rosa do Nascimento Azevedo**	*Data:*

Ensino Médio

Atividades de Matemática

1) Calcule o valor de y em cada equação.
   a) $\log_4 y = 3$
   b) $\log_y 36 = 2$
   c) $\log_9 y = 1$
   d) $\log_y 125 = 3$
   e) $\log_2 y = 5$

2) De acordo com a definição de logaritmos e suas consequências, calcule:
   a) $\log_{21} 1$
   b) $\log 10.000$
   c) $\log_{32} 32$
   d) $8^{\log_8 19}$
   e) $\log 0{,}1$

3) Calcule o valor de cada expressão.
   a) $\log_3 \sqrt[4]{9} - 4^{\log_4 5}$

   b) $2 \cdot \log_9 1 + \left[\log_{0{,}5}\left(\frac{1}{8}\right)\right]^2$

   c) $6^{2+\log_6 7} - \log(\log 10)$

4) Calcule, aplicando a definição de logaritmo:
   a) $\log_9 \frac{1}{9}$
   b) $\log_{25} 625$
   c) $\log_{0{,}01} 10$
   d) $\log_4 \frac{1}{2}$
   e) $\log_{\sqrt{3}} 27$

5) Calcule o logaritmo de 128 na base 2.

6) Calcule o valor de cada expressão.
   a) $3^{\log_3 16}$
   b) $2^{3+\log_2 5}$
   c) $3^{-2+\log_3 18}$

7) Calcule:

   a) $\log_3 27$ b) $\log_{\frac{1}{5}} 125$ c) $\log_4 \sqrt{32}$ d) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{8}{27}$

8) Calcule o valor de x:

   a) $\log_x 8 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{16} = 2$ c) $\log_2 x = 5$ d) $\log_9 27 = x$ e) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = x$

9) Calcule:

   a) $\log_2 2^{-3}$ b) $\log_7 \sqrt{7}$ c) $5^{\log_5 7}$ d) $2^{\log_2 7 + \log_2 3}$

3. Avaliação:

Os alunos serão avaliados através dos questionamentos feitos durante a realização das atividades. Serão levados em consideração, seu raciocínio matemático, a construção dos conceitos apresentados e realizarão um trabalho que será pontuado conforme o número da acertos .

COLÉGIO ESTADUAL SENADOR SÁ TINOCO
Boa Ventura - Itaperuna-RJ

Aluno(a): ____ *Ano:* **2º - 2001**

Professor(a): **Flávia Rosa do Nascimento Azevedo** *Data:*

Ensino Médio

Trabalho 1º bimestre – Matemática – Valor: 2 pontos **NOTA:**

1. Determine o valor de:

a) E = $\log_2 \sqrt[3]{64} - \log_8 1 + \log_{\frac{4}{3}} \frac{27}{64}$

b) E = $\log 0{,}001 + 9^{\log_3 3\sqrt{3}} - \log_4 (\log_3 81)$

2. Dado log 2 = a, calcule x = log 4 + log 6 + log $\frac{2}{3}$ + log 0,25.

3. (OSEC-SP) Se a > 0 e a ≠ 1, $\log_a \sqrt[4]{10}$ é igual a :

a) $4 \cdot \log_a 10$

c) $\frac{1}{4} \cdot \log_a 10$

b) $-4 \cdot \log_a 10$

d) $-\frac{1}{4} \cdot \log_a 10$

4. (PUC-SP) Identifique a propriedade sempre válida.

a) log (a · b) = log a · log b
b) log (a + b) = log a + log b
c) log m · a = m · log a
d) log a^m = log m · a
e) log a^m = m · log a

5. (FMU-SP) Sendo ***a***, ***b*** e ***c*** números reais positivos, 2 · log a + $\frac{1}{3}$ · log b – 3 · log c é igual a :

a) $\log\ (2a + \frac{b}{3} - 3c)$

c) $\log \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c^3}$

e) $\log \frac{2ab}{9c}$

b) $\log \frac{a^2 + \sqrt{b}}{c^3}$

d) $\frac{\log a^2 \cdot \log \sqrt[3]{b}}{\log c^3}$

3. Referências:

Giovanni, J., R., Bonjorno, J., R.: Matemática Completa – 1ª série Ensino Médio. 2. ed. renov. São Paulo: Editora FTD S.A., 2005

Iezzi, Gelson., Dolce, Oswaldo., Degenszajn, Davi., Périgo, Roberto., Almeida, Nilze de.: Matemática: ciência e aplicações – 1 ª série: Ensino Médio. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004

Roteiros de ação – Função Logarítmica – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 1º Bimestre /2014 – http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 25/02/2014.

Souza, Joamir Roberto de: Novo Olhar Matemática – 1ª série Ensino Médio. 1. ed. São Paulo: FTD, 2010