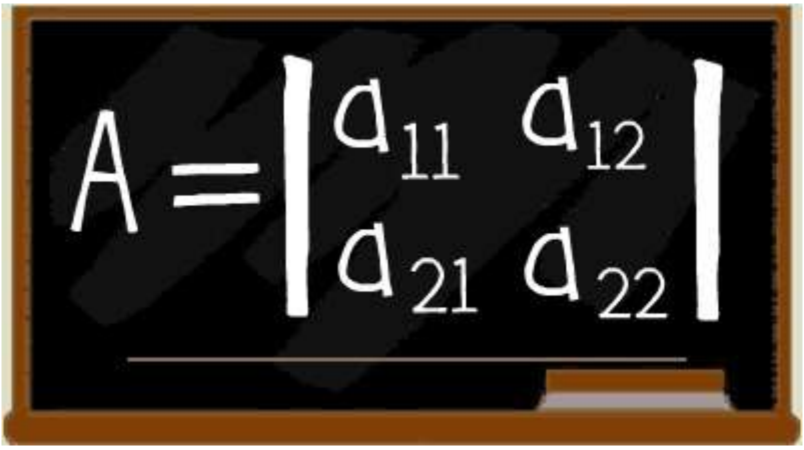
FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ



CONTEÚDO: MATRIZES E DETERMINANTES

SÉRIE: 2ª ANO ENSINO MÉDIO/ 3º BIMESTRE / 2013

TUTOR: EDESON DOSANJOS SILVA

PROFESSORA: SÔNIA MARIA FIRMINO VELOSO

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As matrizes são muito utilizadas na computação para representarmos translação, rotação, escala de objetos em computação gráfica, para se resolver sistemas de equações, etc. Na engenharia elétrica, é muito difícil resolver problemas de circuitos elétricos e linhas de transmissão de energia elétrica sem matrizes. Trabalhar com uma malha de linha de transmissão e passar esse circuito para forma matricial, mais fácil. Na mecânica também é muito importante, pois os tensores (grandeza) só são fornecidos em forma de matrizes. Os determinantes simplificam e sistematizam a resolução de sistemas de equações lineares.

Matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo m x n).
A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de determinante.
Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:
* resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
* cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices.

O objetivo deste plano de trabalho é apresentar o conteúdo Matrizes e Determinantes tendo como meta principal o desenvolvimento das habilidades e competências estabelecidas no Currículo Mínimo:

- Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes.
- Efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.
- Resolver problemas utilizando as operações com matrizes e a linguagem matricial.
- Calcular determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.

O plano é composto de oito aulas, onde apresentaremos e discutiremos conceitos posições e faremos exercícios propostos e de fixação cujas finalidades são: analisar e interpretar, resolver eesclarecer dúvidas pontuais.

Ao final, faremos uma avaliação do conteúdo para analisarmos se os objetivos foram atingidos e colhermos dados para corrigir dúvidas individuais que possam ser persistentes ou mesmo corrigir eventuais falhas e posteriormente melhorarmos o desenvolvimento deste trabalho futuramente.

METODOLOGIA

Como qualquer outro conteúdo será usado material didático existente na escola como apoio (o livro didático, biblioteca para pesquisas, quadro etc.), não como os únicos materiais a auxiliar o professor. Considerando que Matrizes e Determinantes, estão inseridos nas formas, na organização de peças objetos, móveis seres vivos etc.. Este conteúdo será desenvolvido a partir de aulas expositivas, acompanhadas de problemas envolvendo assuntos pertinentes ao convívio dos alunos, juntamente com exercícios propostos, e de fixação.

Na apresentaçãodos conteúdos o diálogo aberto para que os exemplos extraídos das conversas dos alunos sirvam como base para a formação de matrizes. Durante as exposições usaremos o mural, pincel, cartolina para expor os trabalhos realizados em equipe.

Usaremos a estrutura da quadra esportiva para realizar os exercícios, aproveitando para relembrar linhas horizontais e verticais.

Nas resoluções dos exercícios, o professor agirá como mediador, conduzindo os alunos a chegarem às conclusões corretas sem dar respostas prontas, permitindo assim que os alunos desenvolvam o pensamento matemático e as competências objetivadas no período.

Propor atividades para casa, usando exemplos citados pelos alunos, utilizando dados do cotidiano de cada um.Estas atividades ao serem corrigidas servirão de motivação e interação entre os alunos, observando que a matemática está integrada no cotidiano do ser humano.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1
1ª e 2ª Aulas

Duração prevista: 100 minutos.
Objetivos: Introduzir o conceito de Matrizes e Determinantes.
Pré-requisitos: Noção de retas horizontais e verticais.
Material necessário: Livro didático, quadra de esportes, quadro, pincel, revistas, jornais etc.
Organização da classe: Individual e em equipe de três alunos.
Descritores associados: Compreender a localização e organização de linhas e colunas, (2 x 2, 3 x 3).

O professor iniciará narrando um pouco de história.

Aproximadamente no ano 100ª. C., foi escrito na China o livro Chui- Chang Suan - Shu (em português, Os nove capítulos da arte matemática), de autor desconhecido. Essa obra trata de 246 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, impostos, equações etc. Um dos problemas apresenta o seguinte sistema de equações do 1º grau:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ X + 2y + 3y = 26 \end{cases}$$

O sistema é resolvido por meio de operações efetuadas com os elementos da seguinte tabela:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

Atualmente, essa tabela é chamada de matriz. Esse é um dos registros mais antigos sobre matrizes, o que nos leva a crer que o estudo das matrizes teve como motivação inicial a necessidade de resolver sistemas do 1º grau.

Explicando sobre conjunto de elementos, os quais poderão ser enumerados de diversas maneiras seguindo critérios a serem definidos.

Chama-se **matriz do tipo m** x **n** (lê-se: “m por n”) toda tabela de números dispostos em **m** estão naslinhas e **n** estão nas colunas. Tal tabela deve ser representada entre parênteses ( ), entre colchetes [ ] ou entre barras duplas II II.
Exemplos:

a) $A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ Matriz A do tipo 3 X 2

b) $B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$ Matriz B do tipo 2 X 2

c) $C_{1 \times 3} = \| 4 \quad -1 \quad 5 \|$ Matriz C do tipo 1 x 3

Convenção
Indicamos por a_{ij} o elemento posicionado na linha i e coluna j de uma matriz a.

Exemplo

Na matriz: $A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

- O número 9 está posicionado na linha 1 e coluna 1; indica-se esse elemento por a_{11}, ou seja $a_{11} = 9$;
- O número 4 está posicionado na linha 1 e coluna 2; indica-se esse elemento por a_{12}, ou seja $a_{12} = 4$;
- O número 5 está posicionado na linha 2 e coluna 1; indica-se esse elemento por a_{21}, ou seja $a_{21} = 5$

De modo análogo, temos $a_{22} = 6$, $a_{31} = 1$ e $a_{32} = -3$.

Representação genérica de uma matriz

Podemos representar genericamente uma matriz A do tipo m X n da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como essa representação é muito extensa, podemos representar a matriz simplesmente por $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ou, quando não houver possibilidade de confusão quanto ao tipo da matriz, por $A = (a_{ij})$.

Exemplo:

Representar explicitamente a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = 5i - j$.

Inicialmente, vamos escrever genericamente uma matriz 2 x 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz deve ser calculado pela lei $a_{ij} = 5i - j$. Temos, portanto:

$a_{11} = 5 . 1 - 1 = 4$
$a_{12} = 5 . 1 - 2 = 3$
$a_{13} = 5 . 1 - 3 = 2$

$a_{21} = 5 .2 - 1 = 9$
$a_{22} = 5 .2 - 2 = 8$
$a_{23} = 5 .2 - 3 = 7$

Assim, a matriz é $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

MATRIZES ESPECIAIS

Matriz quadrada é toda matriz cujo número de linha é igual ao número de colunas.

a) $A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 6 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

b) $B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

c) $C_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 1.

Numa matriz quadrada A de ordem n, os elementos a_{ij} tais que i = j formam a **diagonal principal** da matriz, e os elementos a_{ij} tais que i + j = n + 1 formam a **diagonal secundária.**

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Diagonal secundária

Diagonal principal

Observe que na diagonal principal da matriz A os elementos a_{ij} possuem i = j:

$a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33}$

Na diagonal secundária, os elementos aij são tais que i + j = 3 + 1 (em que 3 é a ordem da matriz A):

$A_{31} \quad a_{22} \quad a_{13}$

<u>Matriz Identidade</u> chama-se matriz identidade de ordem n, e se indica por I_n, a matriz:

$$I_n + (a_{ij})_{n \times n} \text{ tal que } a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Exemplos:

a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz Nula matriz nula do tipo m x n, que se indica por $O_{m \times n}$, é a matriz:

$O_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ tal que: $a_{ij} = 0$, $\forall i, j$, com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$

Dessa forma, matriz nula é qualquer matriz que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplos

a) $O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $O_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ATIVIDADES 2
3ª e 4ª Aulas
Duração prevista: 100 minutos.
Objetivos: Identificar os tipos de matrizes, e determinar os elementos correspondentes na formação de matrizes do mesmo tipo.
Pré-requisitos: Noções intuitivas dos elementos correspondentes.
Material necessário: Quadro. Folha de atividades.
Organização da classe: Individual ou em equipes.
Descritores associados: Compreender a representação genérica de uma matriz utilizando os diversos símbolos matemáticos.

Matrizes Transpostas chama-se transposta da matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, e se indica por A^t, a matriz:

$A^t = (b_{ij})_{m \times n}$ tal que: $b_{ij} = a_{ij}$, $\forall i, j$, com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$

Assim, a cada coluna i de A^t é, ordenadamente, igual à linha i de A.
Exemplos

a) $A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

a) $B_{1 \times 4} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

.

<u>Igualdade de Matrizes</u> – dadas duas matrizes do mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, dizemos que A = B se, e somente se, todo elemento de A é igual ao seu correspondente em B.
Em símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow a_{rs} = b_{rs} \ (\forall r, s, \text{ com } 1 \leq r \leq m \text{ e } 1 \leq s \leq n)$$

Exemplo:

Determine o número real x tal que:

$$\begin{pmatrix} x^2 & 4 \\ 0 & x + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

As posições (1ª linha, 2[coluna) e (2[linha, 1ª coluna), nas duas matrizes, apresentam elementos correspondentes iguais: 4 = 4 e 0 = 0. Portanto, pra que ocorra a igualdade entre essas matrizes, devemos ter ainda:

$$\begin{cases} x^2 = 9 \\ x + 2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

Como o número – 3 é a única solução comum às duas equações, concluímos que as marizes são iguais se, se somente se, x = - 3.

<u>Exercícios:</u>

1- Uma rede é composta de cinco lojas, numeradas de 1 a 5.
A tabela a seguir apresenta o faturamento, em dólares, de cada loja nos quatro primeiros dias de janeiro:

$$\begin{pmatrix} 1.950 & 2.030 & 1.800 & 1.950 \\ 1.500 & 1.820 & 1.740 & 1.680 \\ 3.010 & 2.800 & 2.700 & 3.050 \\ 2.500 & 2.420 & 2.300 & 2.680 \\ 1.800 & 2.020 & 2.040 & 1.950 \end{pmatrix}$$

Cada elemento a_{ij} dessa matriz é o faturamento da loja i no dia j.

a) Qual foi o faturamento da loja 3 no dia 2?
b) Qual foi o faturamento de todas as lojas no dia 3?
c) Qual foi o faturamento da loja 1 nos dias 4?

2- Represente explicitamente cada uma das matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$ tal que $a_{ij} = i + 2j$

b) $A = (a_{ij})_{2 \times 32}$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ I + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

3- Sabendo que as matrizes:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} x^2 - 2 & 5 \\ x + 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ obedecem à condição $A^t = B$, conclui-se que x é um número.

a) ( ) Ímpar positivo c) ( ) par positivo d) ( ) racional não-inteiro
b) ( ) ímpar negativo d) ( ) par negativo

4- Obtenha os valores reais de x e y, modo que a matriz abaixo seja nula.

$$\begin{pmatrix} 3x + y - 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5x - y - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5- Sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2, determine o número real x tal que:

$$\begin{pmatrix} x^2 - 15 & 0 \\ 0 & x - 3 \end{pmatrix} = I_2$$

RESPOSTAS:

1- a) $a_{32} = 2.800$ (o faturamento foi de 2.800 dólares)
b) $a_{13} + a_{23} + a_{33} + a_{43} + a_{53} = 10.580$ (o faturamento foi 10.580 dólares)
c) $a_{11} + a_{13} + a_{13} + a_{14} = 7.730$ (o faturamento foi 7.730 dólares)

2- a) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3 – d $\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = 2 \\ x + 6 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Logo x = - 2.

4 - $\begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ 5x - y - 1 = 0 \end{cases}$ e, portanto, x = 1 e y = 4

5- $\begin{cases} x^2 - 15 = 1 \\ x - 3 = 1 \end{cases}$ e, portanto, $\begin{cases} x = \pm 4 \\ x = 4 \end{cases}$ Logo, x = 4

ATIVIDADES 3
5ª e 6ª Aulas
Duração prevista: 100 minutos.
Objetivos: Identificar e operar com os diversos tipos de matrizes.
Pré-requisitos: Noções intuitivas dos elementos correspondentes.
Material necessário: Quadro. Folha de atividades.
Organização da classe: Individual ou em equipes.
Descritores associados: Compreender a representação genérica de uma matriz e utilizando os diversos símbolos matemáticos.

OPERAÇÕES COM MATRIZES

Adição de matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, A e B, denomina-se matriz soma (A+B) a matriz obtida adicionando-se os elementos correspondentes de A e B.

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{mxn} \text{ em que } 1 \le i \le m \text{ e } 1 \le j \le n$$

Exemplo: Dada as matrizes A e B determine A+B.

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$A + B = \begin{bmatrix} -10+1 & 1+8 & 4+4 & 6-1 \\ 2+0 & 3+6 & 2+3 & 8-3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -9 & 9 & 8 & 5 \\ 2 & 9 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

<u>Subtração de matrizes</u>

Dadas duas matrizes <u>de mesmo tipo</u>, A e B, denomina-se matriz diferença (A-B) a matriz obtida subtraindo-se os elementos correspondentes de A e B.

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{mxn} \, em \; que \; 1 \leq i \leq m \; e \; 1 \leq j \leq n$$

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -10-1 & 1-8 & 4-4 & 6+1 \\ 2-0 & 3-6 & 2-3 & 8+3 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} -11 & -7 & 0 & 7 \\ 2 & -3 & -1 & 11 \end{pmatrix}$$

<u>Multiplicação de número real por matriz</u>

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$ e um número real k, denomina-se matriz produto do numero real K por A, a matriz obtida multiplicando-se cada um dos seus elementos por k.

$$kA = (k.a_{ij})_{mxn} \, em \; que \; 1 \leq i \leq m \; e \; 1 \leq j \leq n$$

Observe como exemplo a determinação da matriz 3A, a partir de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3.A = 3.\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.1 \\ 3.3 & 3.0 \\ 3.1 & 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

<u>Multiplicação de matrizes</u>

Sendo A uma matriz do tipo mxn e B uma matriz do tipo nxp, define-se produto da matriz A pela matriz B a matriz C, do tipo mxp, tal que cada elemento de C (cij) satisfaz:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + (\ldots) + a_{in}b_{nj}$$

Em outras palavras, cada elemento de C é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i da matriz A pelos elementos correspondentes da coluna j da matriz B e , a seguir, somando-se os produtos obtidos. Veja abaixo:

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} \boxed{2.3 + 3.2} & 2.1 + 3.4 \\ 1.3 + 0.2 & 1.1 + 0.4 \\ 4.3 + 5.2 & 4.1 + 5.4 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 12 & 14 \\ 3 & 1 \\ 22 & 24 \end{bmatrix} \qquad A_{3x2}.B_{2x2} = AB_{3x2}$$

O produto entre duas matrizes A e B é definido se , e somente se, o número de colunas da matriz A for igual ao numero de linhas da matriz B. Assim:

$$A_{mxn}.B_{nxp} = C_{mxp}$$

O elemento neutro da multiplicação de matrizes é a matriz identidade

$$A.I = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -3 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Exercícios

1- Adicione as matrizes e determine os valores das incógnitas:

$$\begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 3 \\ t & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 4 & 18 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} x + x = 10 & y + 3 = -1 \\ 3 + t = 4 & 2z + z = 18 \end{vmatrix}$$

2- Determine a matriz resultante da subtração das seguintes matrizes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -5 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

3 - Determine a matriz C, resultado da soma das matrizes A e B.

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} -8 & -9 & 12 \\ 45 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

4 - Dadas as matrizes determine a matriz D resultante da operação A + B – C.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} B = \begin{vmatrix} -7 & -8 & 9 \\ 12 & 6 & 5 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} C = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 6 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$$

5 - Dada a matriz, calcule 3A:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

6 - São dadas as matrizes $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ e $B = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

a) Calcule A . B
b) Calcule B . A
c) C) Compare A . B com B . A

RESPOSTAS:

1- x = 5, y = - 4, t = 1, z = 6

2-

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 6 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$$

$$3 - C = \begin{vmatrix} -11 & -14 & 14 \\ 51 & 10 & 5 \end{vmatrix}$$

4-

$$D = \begin{vmatrix} 1+(-7)-2 & 2+(-8)-3 & 3+9-(-4) \\ -4+12-6 & 5+6-7 & 6+5-1 \\ 4+8+2 & 6+7+8 & 8+4+7 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} -8 & -9 & 16 \\ 2 & 4 & 10 \\ 14 & 21 & 19 \end{vmatrix}$$

5-

$$A = \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 9 & 3 \\ 6 & 15 \end{vmatrix}$$

6 - a) $\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 18 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ c) A . B B . A

ATIVIDADES 4
7ª e 8ª Aulas
Duração prevista: 100 minutos.
Objetivos: Identificar e operar com os diversos tipos de matrizes, solução de determinantes.
Pré-requisitos: Noções intuitivas dos elementos correspondentes.
Material necessário: Quadro. Folha de atividades.
Organização da classe: Individual ou em equipes.
Descritores associados: Compreender a representação de uma matriz utilizando as regras e operações na solução do determinante.

DETERMINANTES

Como já vimos, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo nxn).

A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de *determinante*.

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:
resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices;

Determinante de 1ª ordem

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem M=[a_{11}], o seu determinante é o número real a_{11}:
det M =Ia_{11}I = a_{11}
Observação: Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo.
Por exemplo:
M= [5] $\Rightarrow$ det M = 5 ou I 5 I = 5 M = [-3] $\Rightarrow$ det M = -3 ou I -3 I = -3

Determinante de 2ª ordem

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição o determinante associado a **M**, determinante de 2ª ordem, é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$$

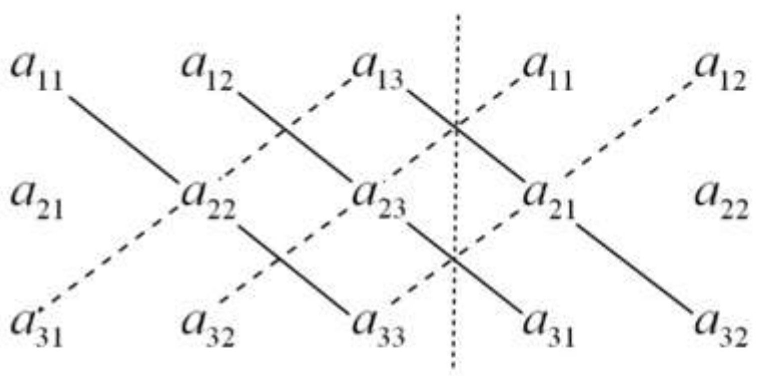
Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

$$\textit{Sendo}\ M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \textit{temos}:$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{2\,.\,5} - \underbrace{4\,.\,3} = 10 - 12 \Rightarrow \det M = -2$$

Cálculo do determinante de uma matriz quadrada de 3ª ordem (3 x 3)

Usa-se a regra de Sarrus que só se aplica para cálculo de determinantes de 3ª ordem.



Exemplo:

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \\ 6 & x \end{matrix} = 9.(x-7) + 48 + 4x - 54 - 4x - 8(x-7) = 0$$

$$detA = (x-7) - 6 = 0 \rightarrow x - 13 = 0 \rightarrow x = 13$$

Atividades

1- Dadas as matrizes:
2-

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcule o determinante, usando a Regra de Sarrus, de cada uma das matrizes a seguir:
a) A b) B c) A + B d) A.B

AVALIAÇÃO

Duração prevista: 100 minutos.
Objetivos: Avaliar o conhecimento.
Pré-requisitos: Noção intuitiva de matrizes e determinantes.
Material necessário: Folha de atividades.
Organização da classe: Individual
Descritores associados: Compreender e interpretar e resolver as atividades propostas.

Colégio Estadual “Geraldino Silva”

Avaliação de Matemática- Turma: _____ data ___/___/___

Valor: 2,0 (dois pontos) Obteve: ____________

Aluno(a) ______________________________________

Obs: após resolver os exercícios, marque as resposta correspondente nos parênteses abaixo.

Depois marque a mesma resposta no gabarito.

1- O valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 12 \end{vmatrix}$$

a) ( ) 56 b) ( ) 16 c) ( ) – 16 d) ( ) - 56

2- O determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

a) ( ) 12 b) ( ) 5 c) ( ) 0 d) ( ) 10

3- Calcular o produto:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{vmatrix}$$

a) ( ) $|12|$ b) ( ) $|19|$ c) ( ) $|21|$

d) ( ) $|23|$

4- Determine x, y e z na igualdade:

$$\begin{pmatrix} x & 3 & 2 \\ -7 & y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ -9 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) ( ) x = 2, y = - 3, z = 4
b) ( ) x = 6, y = - 5, z = 3
c) ( ) x = 1, y = - 5, z = 4
d) ( ) x = 1, y = 5, z = - 4

5 – Para a fabricação de caminhões, uma indústria montadora precisa de eixos e rodas para seus três modelos de caminhões, com a seguinte especificação:

Modelo / Componentes	A	B	C
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Para os dois primeiros meses do ano, a produção da fábrica deverá seguir a tabela abaixo:

Meses / Modelo	Janeiro	Fevereiro
A	30	20
B	25	18
C	20	15

Usando a multiplicação de matrizes, responda: Nessas condições, quantos eixos e quantas rodas são necessaries em cada um dos meses para que a montadora atinja a produção planejada?

a) ( ) 225 eixos para janeiro, 154 para fevereiro.
430 rodas para janeiro e 318 para fevereiro.
b) ( ) 250 eixos para janeiro, 154 para fevereiro.
430 rodas para janeiro e 308 para fevereiro
c) ( ) 315 eixos para janeiro, 154 para fevereiro.
431 rodas para janeiro e 300 para fevereiro
d) ( ) 215 eixos para janeiro, 154 para fevereiro.
430 rodas para janeiro e 308 para fevereiro

GABARITO

QUESTÕES	a	b	c	d
01	x			
02			x	
03		x		
04			x	
05				x

BIBLIOGRAFIA

PAIVA, Manoel. Matemática – Paiva, volume 1. São Paulo: Moderna, 2009, 299p.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. Volume 2. São Paulo: Ática, 2010. 96p.

SMOLE, Kátia Stocco, Maria Ignez Diniz, Matemática Ensino Médio, volume 2, 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010,341p.

XAVIER, Claúdio; BARRET, Benigno. – MatemáticaAula por Aula: Ensino médio. Editora FTD, São Paulo, 2005 (2ª edição renovada), 153p.

Sites acessados:

Símbolos Matemáticos. Disponível em <http://www.qieducacao.com/2010/09/simbolos-matematicos.html>. Acesso em 5 mar. 2013.

A capa foi feita neste site

*www.brasilescola.com/matematica/**matriz-e-determinante**.htm*

***aulas**dematem.blogspot.com/.../aplicaes-de-**matrizes-e-determinantes**.htm...*

http://www.infoescola.com/matematica/operacoes-com-matrizes-1/

*www.somatematica.com.br/emedio/**determinantes**/**determinantes**.php*