FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA – PROJETO SEEDUC

MATRIZES E DETERMINANTES

Matemática 2º Ano – 3ºBimestre/2013

Plano de Trabalho 1

Cursista: Darling Domingos Arquieres

guidarling@oi.com.br

Matrículas: 911917-3 / 917110-9

Tutora: Andréa Silva de Lima - Grupo 1

Data: 27/08/2013

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O conhecimento da ferramenta matemática ajuda a representar e organizar situações do dia-a-dia é requisito básico na resolução de vários problemas envolvendo matrizes.

Este trabalho aborda Matrizes e Determinantes usando vários recursos e atividades contextualizadas e práticas de tal forma que os alunos construam os próprios conhecimentos, compreendam e fixem os assuntos tratados.

O objetivo desse trabalho é que o aluno interprete o significado de matrizes e de determinantes, relacione as duas usando as operações que vamos estudar.

DESENVOLVIMENTO

AULA 1

Duração prevista: 100 minutos.

Área de conhecimento: Matemática.

Assunto: Matrizes.

Objetivos: - Compreender o conceito de matrizes através identificação dos elementos representados numa tabela.

Pré-requisitos: Saber o que é linha e coluna.

Material necessário: Folha de atividades.

Organização da classe: dupla.

Descritores associados: Identificar diferentes tipos de matrizes.

- Apresentação da História

Curiosidades em torno do nome matriz

O pai do nome matriz

Foi só há pouco mais de 150 anos que as matrizes tiveram sua importância detectada e sairam da sombra dos determinantes. O primeiro a lhes dar um nome parece ter sido Cauchy, 1826: tableau (= tabela).

O nome matriz só veio com James Joseph Sylvester, 1850. Seu amigo Cayley, com sua famosa Memoir on the Theory of Matrices, 1858, divulgou esse nome e iniciou a demonstrar sua utilidade.

Por que Sylvester deu o nome matriz às matrizes ?

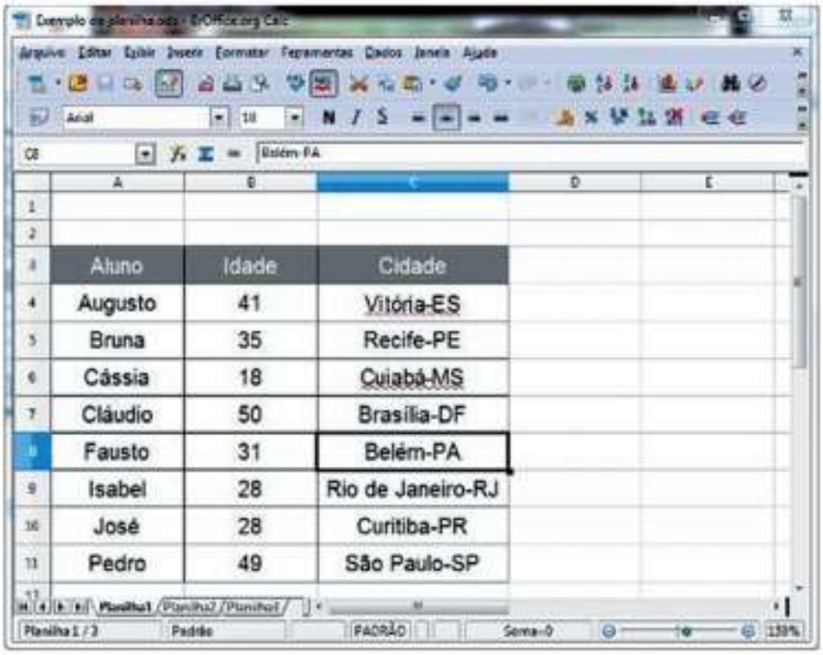
Usou o significado coloquial da palavra matriz, qual seja: local onde algo se gera ou cria. Com efeito, via-as como "...um bloco retangular de termos... o que não representa um determinante, mas é como se fosse uma MATRIZ a partir da qual podemos formar varios sistemas de determinantes, ao fixar um número p e escolhar à vontade p linhas e p colunas..." (artigo publicado na Philosophical Magazine de 1850, pag 363-370).

Observe que Sylvester ainda via as matrizes como mero ingrediente dos determinantes. É só com Cayley que elas passam a ter vida própria e gradativamente começam a suplantar os determinantes em importância.

Fonte: A história das matrizes – Instituto de Matemática – UFRGS http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa3b.html

- Apresentação da Lista

1- Seja a planilha eletrônica do computador abaixo:



Aluno	Idade	Cidade
Augusto	41	Vitória-ES
Bruna	35	Recife-PE
Cássia	18	Cuiabá-MS
Cláudio	50	Brasília-DF
Fausto	31	Belém-PA
Isabel	28	Rio de Janeiro-RJ
José	28	Curitiba-PR
Pedro	49	São Paulo-SP

Responda:

a) Quantos anos tem Augusto?

b) Quantos anos tem Fausto?

c) Em que cidade mora Claúdio?

d) Em que cidade mora Pedro?

e) Quem mora em Curitiba – PR?

f) Quem mora em Cuiabá – MS?

g) Quem tem 18 anos?

h) Quem tem 50 anos?

Sabendo que aij significa é o elemento que se encontra na linha i e na coluna j, determine:

a) qual o elemento que se encontra no a11.

b) qual o elemento que se encontra no a21.

c) qual o elemento que se encontra no a23.

d) qual o elemento do a32.

e) qual o elemento do a33.

f) qual o elemento do a43.

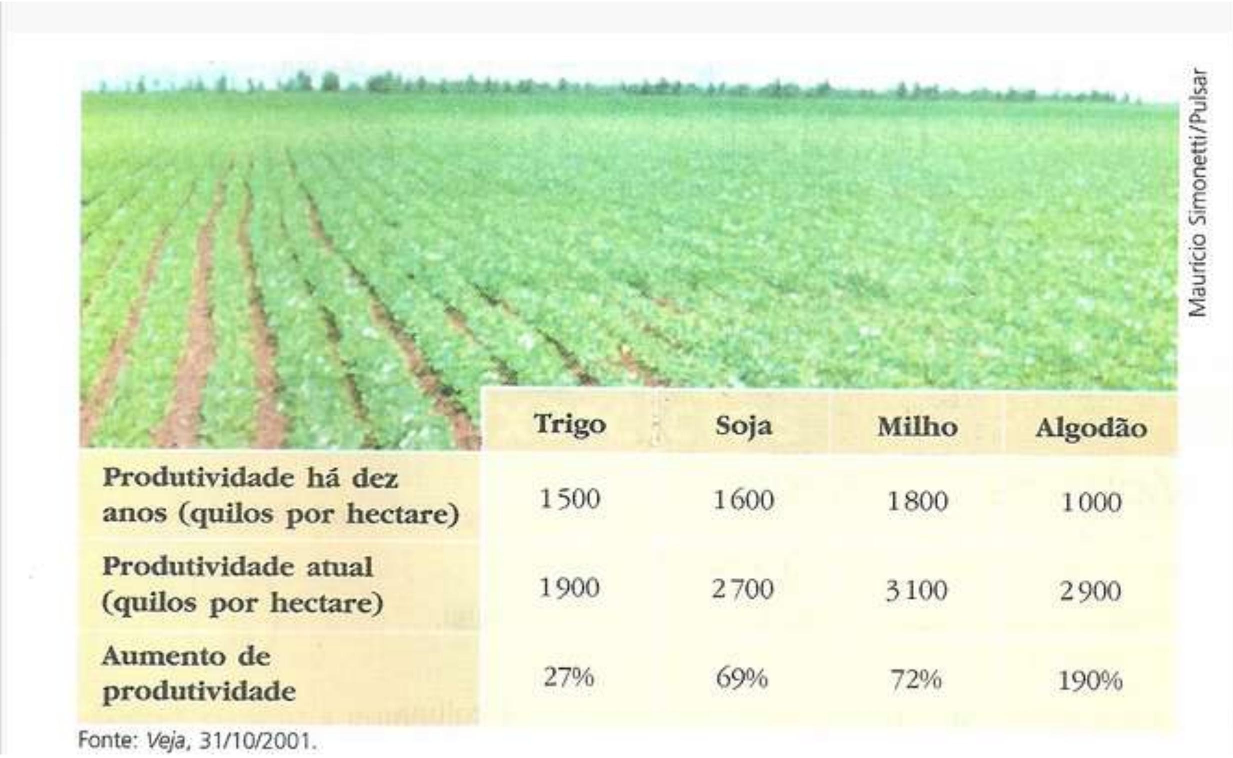
g) qual o elemento do a52.

h) qual o elemento a63.

i) qual o elemento a71.

j) qual o elemento a82.

2- Seja a tabela abaixo sobre a produção de trigo, soja, milho e algodão atualizado em 2001:



	Trigo	Soja	Milho	Algodão
Produtividade há dez anos (quilos por hectare)	1500	1600	1800	1000
Produtividade atual (quilos por hectare)	1900	2700	3100	2900
Aumento de produtividade	27%	69%	72%	190%

Fonte: *Veja*, 31/10/2001.

Fonte: Fórum Temático 1 por FLAVIO LAVOURAS HAICKI RIO DE JANEIRO - sexta, 9 agosto 2013, 10:53

Responda:

a) Qual foi a produção de soja há dez anos?

b) Qual foi a produção atual de milho?

c) Qual foi o alimento que teve maior aumento de produtividade?

Sabendo que aij significa é o elemento que se encontra na linha i e na coluna j, determine:

a) Qual o elemento do a11?

b) Qual o elemento do a23?

c) Qual o elemento do a34?

d) O elemento do a23 é o mesmo do a32?

e) Onde está localizado 1800?

f) Onde está localizado 69%?

g) Onde está localizada a menor porcentagem de aumento de produtividade?

3- Dado a tabela abaixo sobre a disparidade de preços, responda:

DISPARIDADE DE PREÇOS

O argentino ganha mais que o brasileiro. Mas o custo de vida em Buenos Aires é altíssimo	Com 100 dólares é possível comprar...	
	... em São Paulo	... em Buenos Aires
arroz	170 quilos	84 quilos
queijo mussarela	31 quilos	13 quilos
filé *mignon*	17 quilos	12,5 quilos
Coca-Cola de 2 litros	127 garrafas	67 garrafas

Fonte: *Veja*, 21/11/2001.

Fonte: Fórum Temático 1 por FLAVIO LAVOURAS HAICKI RIO DE JANEIRO - sexta, 9 agosto 2013, 10:53

a) Com 100 dólares é possível comprar quantos quilos de arroz em Buenos Aires?

b) Com 100 dólares é possível comprar quantos quilos de filé mignon em São Paulo?

c) Com 100 dólares compra a mesma quantidade de coca-cola de 2litros em São Paulo e Buenos Aires?

d) Aonde se compra mais queijo mussarela com 100 dólares?

Sabendo que aij significa é o elemento que se encontra na linha i e na coluna j, determine:

a) Qual o elemento do a41?

b) Qual o elemento do a12?

c) Onde se encontra 31 quilos?

d) Onde se encontra 13 quilos?

e) Onde se encontra a maior quantidade de coca-cola?

f) Onde se encontra a menor quantidade filé mignon?

- Exercícios de Fixação do livro didático páginas 83 e 84 n$^{\underline{os}}$ 1, 2, 5, 12 e 13.

Fonte: IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIG, R., ALMEIDA, N. *Matemática Ciência e Aplicações.* São Paulo: Editora Saraiva, 2010. (volume 2 – 6ª edição)

AULA 2

Duração prevista: 100 minutos.

Área de conhecimento: Matemática.

Assunto: Matrizes.

Objetivos: - Desenvolver habilidades relacionadas às operações com matrizes

Pré-requisitos: Definição de matriz, operações elementares com números reais.

Material necessário: Vídeo aula, folha de atividades, régua e caneta.

Organização da classe: dupla.

Descritores associados: H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com Matrizes.

- Apresentação do vídeo aula:

  Vestibulândia.com – Matrizes – Parte 1- http://www.youtube.com/watch?v=sw18GQESKpA
  Matrizes – Parte 2 - http://www.youtube.com/watch?v=AdwyrhQ5GfA

- Folha de Exercícios

ATIVIDADE 1

A revendedora de carros AUTOMÁTICA possui duas concessionárias de carros e comercializa três modelos diferentes. A tabela abaixo se refere à quantidade de carros vendidas no mês de Junho/2012 em cada concessionária.

Loja	Modelo		
	Básico	Médio	Luxo
I	20	15	6
II	15	5	2

Observemos que foram vendidos 6 carros de luxo na Loja I nesse período.

a) Quantos carros do modelo básico foram vendidos na Loja II? ______________________

b) Quantos carros do modelo médio foram vendidos na Loja I? _______________________

c) Quantos carros de luxo foram vendidos em junho? ______________________________

Observemos que foram vendidos 6 carros de luxo na Loja I nesse período.

a) Quantos carros do modelo básico foram vendidos na Loja II? ______________________

b) Quantos carros do modelo médio foram vendidos na Loja I? _______________________

c) Quantos carros de luxo foram vendidos em junho? ________________________________

Você já deve ter visto que podemos representar uma tabela como um objeto matemático. Chamamos de matriz esse objeto matemático ao qual estamos nos referindo. Dessa maneira podemos representar a tabela acima por meio da seguinte matriz A,

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 6 \\ 15 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Qual é o número que está na primeira linha e segunda coluna? Você saberia dizer qual é o seu significado nessa situação em que estamos estudando?

e) Qual é o significado do número que está na segunda linha e terceira coluna?

A tabela abaixo representa a quantidade de carros vendidos pela concessionária AUTOMÁTICA, em julho/2012, nas suas duas lojas.

Loja	Modelo		
	Básico	Médio	Luxo
I	23	16	8
II	13	3	1

f) Escreva a matriz B que pode ser representada pelos elementos dessa tabela

$$B = \begin{pmatrix} \quad & \quad \end{pmatrix}$$

O dono da concessionária AUTOMÁTICA solicitou a um de seus funcionários para elaborar uma tabela e uma matriz que representasse o total de carros vendidos nos meses de junho e julho, em suas duas Lojas.

g) Complete a tabela e a Matriz abaixo de maneira a atender ao pedido de dono da concessionária.

Loja	Modelo		
	Básico	Médio	Luxo

$$A+B = \begin{pmatrix} \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \\ \_\_\_ & \_\_\_ & \_\_\_ \end{pmatrix}$$

h) Quais foram os cálculos que você fez para obter essa matriz?

Você já deve ter percebido que a soma entre duas matrizes dá-se por meio da soma dos respectivos elementos de cada uma das duas matrizes. E, portanto, só podemos somar matrizes que tenham o mesmo número de linhas e de colunas. O tamanho que uma matriz tem, ou seja, a quantidade de linhas e colunas é chamada de ordem da matriz. No exemplo da concessionária AUTOMÁTICA, as matrizes apresentadas são todas de ordem 2x3 (2 linhas e 3 colunas).

i) De forma análoga, obtenha uma matriz que faça a subtração entre os elementos das matrizes A e B.

j) Qual é o significado do número que se encontra na primeira linha e segunda coluna dessa matriz?

k) Podemos definir essa matriz como a matriz A – B. O que significa cada elemento dessa matriz? Qual é a conclusão que podemos tirar a partir da análise de A –B?

Professor,

Esperamos que o aluno perceba que, neste caso, a matriz A – B significa a diferença entre o número de carros vendidos entre os meses de junho e julho e que é obtida subtraindo-se cada elemento da matriz B do seu correspondente na matriz A. Dessa forma, um elemento negativo da matriz A – B indica que a venda de carros de um determinado modelo diminuiu em uma das lojas. Analogamente, um elemento positivo de A – B indica o crescimento da venda de carros de um determinado modelo em uma determinada loja.

ATIVIDADE 2

A tabela abaixo se refere ao custo e ao lucro por carro, relativo a cada um dos modelos no mês de junho.

Modelo	Custo (R$)	Lucro(R$)
Básico	19.000	3.000
Médio	28.000	4.000
Luxo	45.000	5.000

a) Represente os valores dessa tabela em uma matriz C, de ordem 3 x 2.

Consideremos que devido ao aumento de preços da matéria-prima o custo e o lucro sofreram um aumento de 20% em julho.

b) Escreva a matriz que represente os valores do custo e do lucro após o aumento.

Professor,

Nesse momento, talvez seja necessária uma intervenção de modo que o aluno perceba que um valor x, aumentado em 20%, torna-se 1,20.x. De forma geral, um valor x aumentado em i % torna-se (1+i).x.

c) Qual é a relação entre os valores da matriz de custos e lucros de junho e os valores da matriz após o aumento?

Você deve ter observado que todos os valores da matriz C foram multiplicados por 1,20. Assim, podemos dizer que a nova matriz é 1,20.C, ou seja, a nova matriz é 1,20 multiplicada por C.

Observemos então que podemos multiplicar uma matriz M por qualquer número real a, obtendo uma nova matriz aM de mesma ordem. Para isso, basta multiplicarmos todos os elementos da matriz M pelo número real a.

ATIVIDADE 3

Consideremos ainda as tabelas já estudadas, referentes ao mês de junho.

Loja	Modelo		
	Básico	Médio	Luxo
I	23	16	8
II	13	3	1

Modelo	Custo (R$)	Lucro(R$)
Básico	19.000	3.000
Médio	28.000	4.000
Luxo	45.000	5.000

a) Qual foi o custo total dos carros para a Loja I? Explicite os seus cálculos.

b) E para a Loja II? Explicite os seus cálculos.

c) Qual foi o lucro total dos carros obtido para a Loja II? Explicite os seus cálculos.

Você deve ter observado que para responder às questões anteriores foi necessário multiplicar os valores das linhas da primeira tabela pelos valores das colunas da segunda tabela. Para efetuarmos multiplicações entre matrizes, usamos esse mesmo raciocínio. Assim, dadas as matrizes X e Y para obtermos o valor que ocupa a primeira linha e segunda coluna da matriz produto XY, multiplicamos os valores da primeira linha de X pelos valores da segunda coluna de Y.

De forma geral, dadas as matrizes X_{mXn} e Y_{nXp} obtemos a matriz $(XY)_{mXp}$, tal que cada elemento zij é obtido, multiplicando-se os valores da linha i de X pelos valores da coluna j de Y e somando-se os produtos parciais. Dessa forma, o produto X.Y só é possível quando o número de colunas da matriz X for igual ao número de linhas da matriz Y.

$$X_{m x n} \;.\; Y_{n x p} = XY_{m x p}$$

Fonte: Roteiro de Ação 1 – Curso Formação Continuada 2º ano. Disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=126

- Exercícios de Fixação do livro didático páginas 88, 89 e 93 números 19, 20, 22, 25, 31 e 32.

Fonte: IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIG, R., ALMEIDA, N. *Matemática Ciência e Aplicações.* São Paulo: Editora Saraiva, 2010. (volume 2 – 6ª edição)

AULA 3

Duração prevista: 100 minutos.

Área de conhecimento: Matemática.

Assunto: Matrizes.

Objetivos: Trabalhar com as operações e propriedades das matrizes por meio da codificação e decodificação de mensagens.

Pré-requisitos: Operações com matrizes.

Material necessário: Folha de atividades, régua e caneta.

Organização da classe: dupla.

Descritores associados: H33 – Efetuar cálculos envolvendo operações com Matrizes.

- Folha de Atividades

ATIVIDADE 1

Você já sabe que qualquer número real multiplicado por 1 é sempre o próprio número, 1. x = x . 1= x para qualquer x real. Por isso, dizemos que o número 1 é o elemento neutro da multiplicação no conjunto dos números reais. Por outro lado, como 7. $\frac{1}{7}$ = 1e de forma geral x. $\frac{1}{x}$ = 1 (para qualquer x real não nulo) dizemos que $\frac{1}{7}$ é o inverso de 7 e $\frac{1}{x}$ é o inverso de x. Quando pensamos no conjunto das matrizes reais, poderíamos perguntar se existe alguma matriz que possui essa propriedade.

Nesse caso, já de antemão podemos dizer que essa pergunta só faz sentido para matrizes quadradas, pois dadas duas matrizes A e B só podem ser comutativas (AB = BA), se possuírem mesma ordem.

1) Dadas as matrizes A e B abaixo efetue as seguintes operações:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, B $= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) $A.I$ b) $I.A$ c) $B.I$ d) $I.B$

2) O que você percebeu após a realização dessas operações?

3) Dada uma matriz genérica $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Calcule $A.I$ e $I.A$ e escreva suas conclusões abaixo.

Generalizando, podemos mostrar para qualquer matriz A_{nXn}:

$$A.I = I.A = A$$

Ou seja, o produto de qualquer matriz quadrada pela matriz identidade de mesma ordem é sempre igual à própria matriz.

A partir daí, surgem duas questões:

Dada uma matriz quadrada, sempre poderemos descobrir sua matriz inversa, isto é, dada uma matriz A_{nXn} será sempre possível encontrar uma matriz $A^{-1}{}_{nXn}$ tal que

$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$?

Como poderemos encontrar a matriz inversa?

A fim de respondermos a essas questões, façamos uma pequena investigação.

4) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, suponhamos que a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Como

$$A.I = I.A = A$$

Temos então que:

$$A.A^{-1} = I \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Você saberia encontrar os valores de a, b, c e d? Note que será preciso resolver um sistema.

Vamos lá, junte-se com seus colegas e tente!

Professor, caso os seus alunos tenham dificuldade, é uma boa oportunidade para fazer uma revisão do conceito de sistemas de equações do 1° grau.

Eles deverão seguir os seguintes passos para encontrar a solução:

Se $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então $\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a & 3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A partir da segunda igualdade de matrizes, temos então dois sistemas lineares (é importante chamar a atenção para o fato: duas matrizes são iguais se cada um de seus termos correspondentes são iguais):

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ 3a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+2d=0 \\ 3b=1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$a=0$, $b=\dfrac{1}{3}$, $c=\dfrac{1}{2}$ e $d=-\dfrac{1}{6}$

Logo, a matriz inversa procurada é $A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{6} \end{bmatrix}$.

b) Agora que encontrou a matriz $A^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Verifique se $A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$.

c) Faça agora o mesmo raciocínio para encontrar a inversa de $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Você deve ter percebido que no processo de descobrirmos a matriz inversa de B, chegamos a dois sistemas lineares que não admitem solução, o que nos leva a concluir que a matriz B não tem inversa e que nem todas as matrizes quadradas são invertíveis.

Caro Professor, depois que você aplicar o roteiro que constrói o conceito de determinante de uma matriz, você pode retornar a este e estimular o aluno a analisar várias matrizes não invertíveis e, consequentemente, levá-lo a concluir que as matrizes não invertíveis são exatamente aquelas que possuem determinante zero. Ou seja, concluir que:

Dada uma matriz quadrada A (com determinante não nulo) existe uma única matriz A^{-1} tal que:

$A.A^{-1}=A^{-1}.A=I$

A arte de decodificar mensagens é bastante antiga, existem indícios de seu uso desde o Egito Antigo. Nos dias de hoje, ela está fortemente presente em nossas atividades mais simples como, por exemplo, quando digitamos uma senha em um site de Internet ou quando usamos um cartão de crédito.

Você sabia que podemos usar as matrizes e suas propriedades para decodificar uma mensagem?

Para nossa incursão nas mensagens criptografadas usando matrizes, precisamos inicialmente fazer uma associação entre números e as letras do alfabeto da seguinte forma:

-	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Quadro do valor numérico de cada letra

Os espaços entre as palavras serão representados por um traço e para esse símbolo será atribuído o número zero.

Atividade 2

Dois amigos, Carlos e João, combinaram de enviar mensagens codificadas entre si, utilizando a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ como chave.

a) Carlos quer enviar a mensagem "VAMOS BRINCAR" para João. Preencha a tabela abaixo com os números que estão associados a cada uma das letras.

-	V	A	M	O	S	-	B	R	I	N	C	A	R

b) Organize esses dados em uma matriz M_{2X7}, da seguinte forma:

$M = [\ \ ]$

c) Encontre a matriz A^{-1} inversa de A.

d) Obtenha a matriz codificada que Carlos deverá enviar para João, ou seja, obtenha a matriz $C = A \cdot M$.

e) Faça como João e finalmente decodifique a mensagem, fazendo $A^{-1} \cdot C$.

f) Carlos e João combinaram de enviar outras mensagens, utilizando como chave a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$. Porém, não conseguiram utilizar essa matriz para a codificação das mensagens. O que você acha que aconteceu?

Fonte: Roteiros de Ação 2 – Curso Formação Continuada de Matemática 2º ano. Disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=126

- Exercícios de Fixação do livro didático página 102 números 47, 48, 49 e 51.

Fonte: IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIG, R., ALMEIDA, N. *Matemática Ciência e Aplicações.* São Paulo: Editora Saraiva, 2010. (volume 2 – 6ª edição)

AULA 4

Duração prevista: 100 minutos.

Área de conhecimento: Matemática.

Assunto: Matrizes e Determinantes.

Objetivos: Usar a planilha eletrônica para cálculo de determinantes e a obtenção de matriz inversa.

Pré-requisitos: conhecimento básico na manipulação do software.

Material necessário: Vídeo Aula, planilha eletrônica e folha de atividades.

Organização da classe: dupla.

Descritores associados: H32 – Calcular determinante de matrizes quadradas de ordem 2 ou 3; **H33** – Efetuar cálculos envolvendo operações com Matrizes.

- Apresentação Vídeo Aula

  Vestibulândia.com – Determinantes Parte 1- http://www.youtube.com/watch?v=SUbr6zypkLA

Caro Professor, neste roteiro, exploraremos o cálculo de determinantes por meio de uma planilha eletrônica.

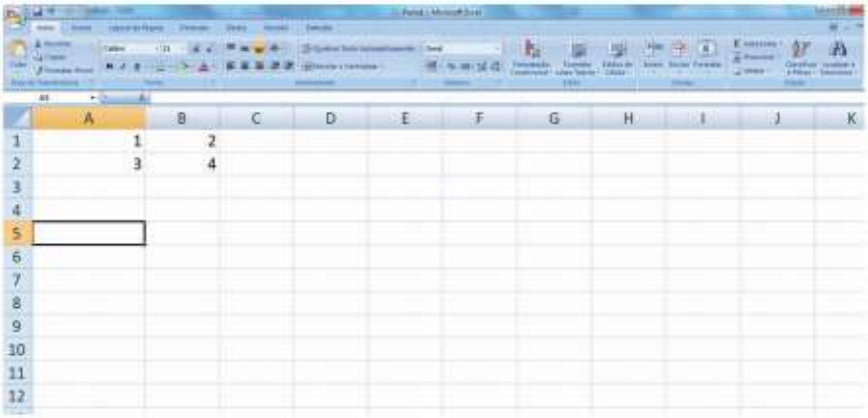
Optamos pelo Excel do pacote de softwares Microsoft Office 2010, mas você poderá utilizar outros softwares similares. Divida os estudantes em duplas ou grupos diante de cada computador, conforme a disponibilidade deste recurso em sua escola. Usando o programa Excel (ou similar), peça que abram uma planilha e sigam as instruções da atividade. Depois de realizadas as atividades, você pode explorar outros recursos do programa como troca de cores, bordas de tabelas, títulos e outros. Lembre-se de orientá-los também a salvar o arquivo trabalhado.

- Folha de Atividades

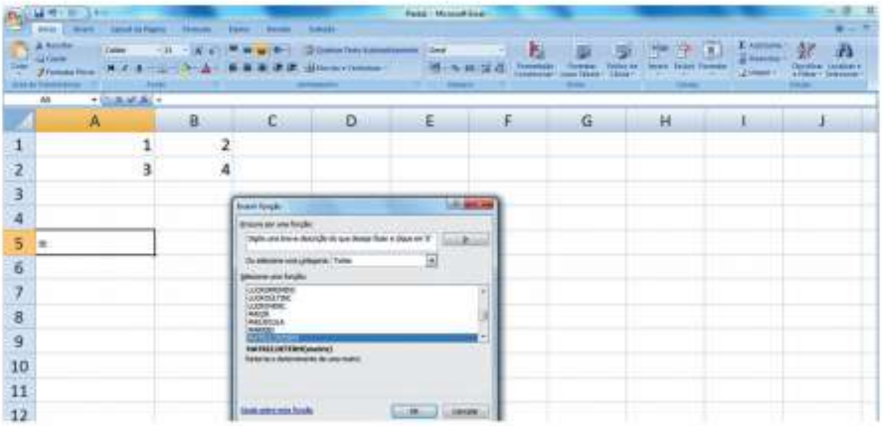
Atividade 1

Nesse roteiro aprenderemos a utilizar uma planilha eletrônica para calcular determinantes e matrizes inversas, dada uma matriz quadrada.

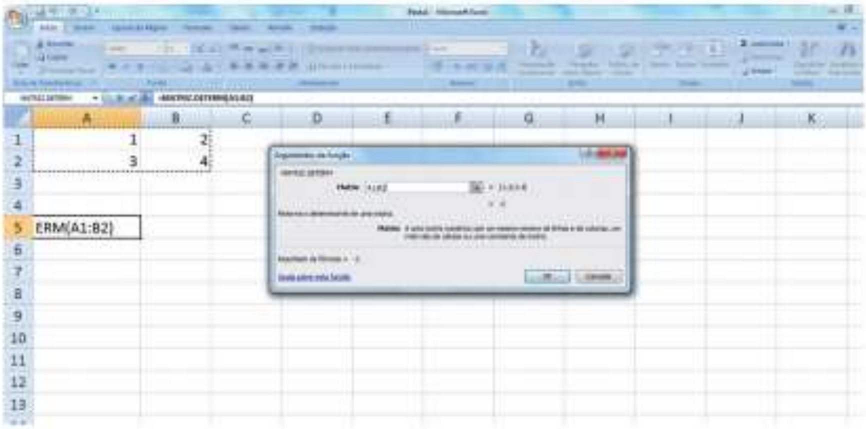
a) Utilizando qualquer planilha eletrônica digite os valores de uma matriz quadrada em cada uma das células. E escolha uma célula pela qual será visualizada o valor do determinante.



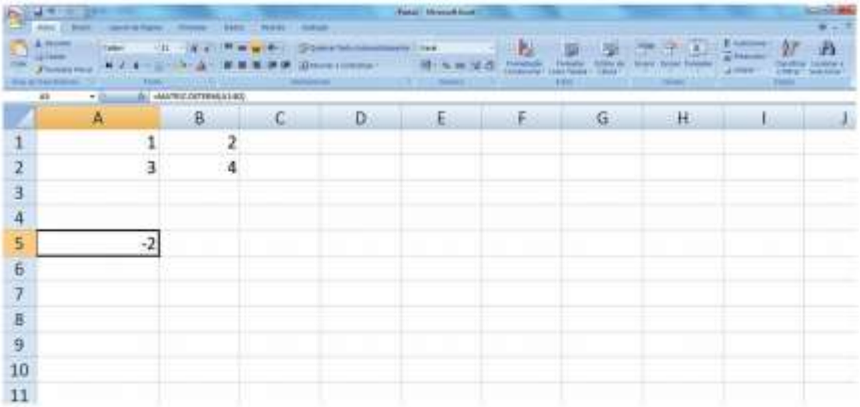
b) Clique no botão – inserir função – procure na janela que aparecerá a função, selecione a categoria "Matemática e Trigonométrica" e selecione a função "MATRIZ.DETERM" e clique em ok.



c) Depois que for aberta a próxima janela selecione a matriz e clique em OK.

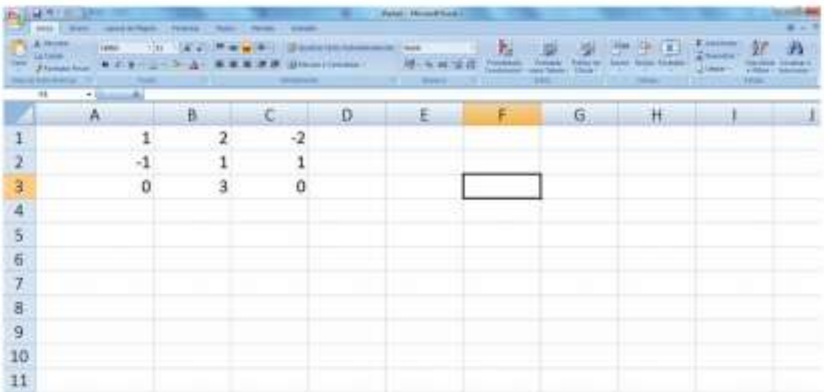


d) Temos então o resultado do determinante da matriz indicada.

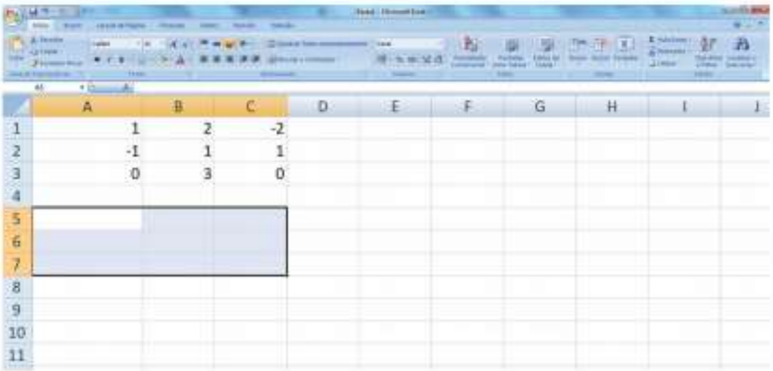


Podemos também usar a planilha eletrônica para achar a matriz inversa de uma dada matriz.

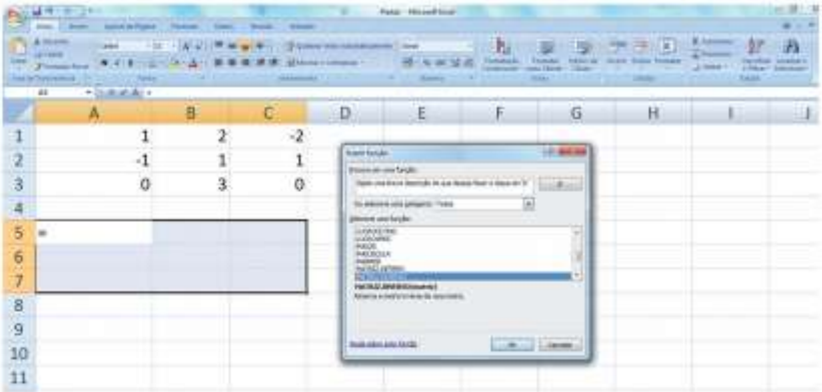
e) Digite os elementos da matriz nas células da planilha.



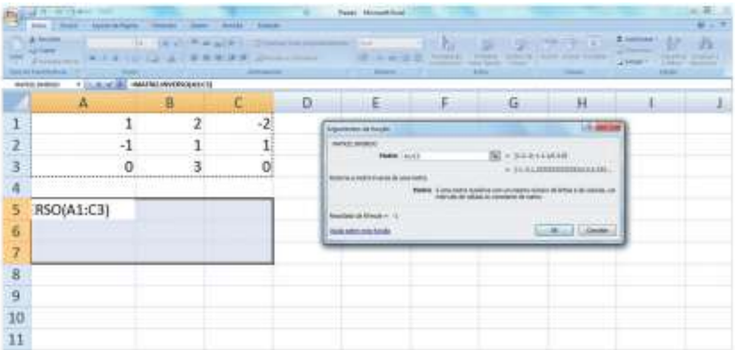
f) Selecione as células sobre as quais aparecerão os elementos da matriz inversa. Nesse caso selecionaremos três linhas e três colunas.



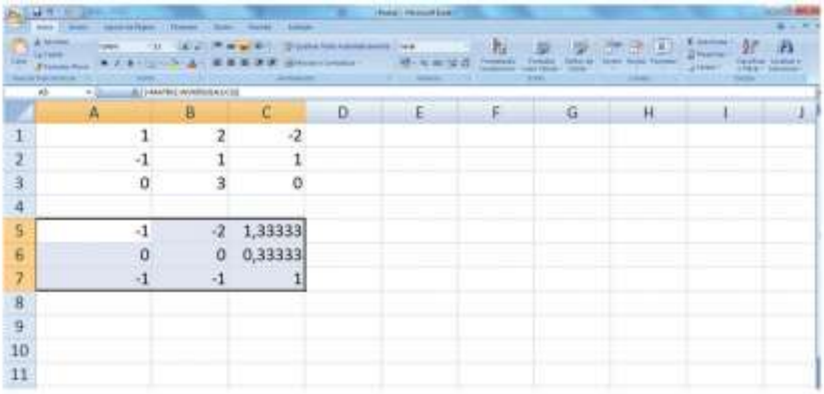
g) Clique em e selecione a função "MATRIZ.INVERSO".



h) Clique em OK e selecione os elementos da matriz que você digitou.



i) Agora preste atenção. Não clique direto em OK. Pressione simultaneamente as teclas Ctrl e Shift e então clique em OK ou pressione enter.



	A	B	C
1	1	2	-2
2	-1	1	1
3	0	3	0
4			
5	-1	-2	1,33333
6	0	0	0,33333
7	-1	-1	1

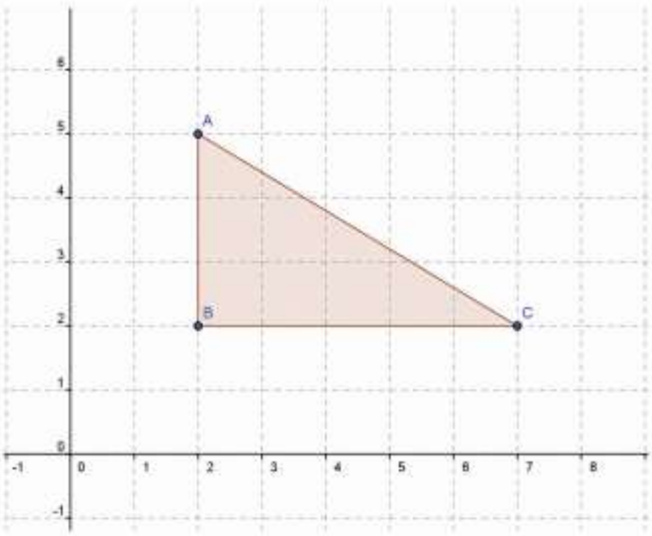
Temos então a matriz e a sua inversa.

Caro professor, para realizar as atividades seguintes sugerimos que construa com os alunos o conceito do cálculo do determinante de matrizes quadradas de ordens 2 e 3 para isso se baseie no texto Determinantes e Áreas de Polígonos.

Uma atividade interessante é propor que os alunos calculem o valor do determinante das matrizes "na mão" e depois confira com o valor obtido pelo cálculo através da planilha eletrônica.

Atividade 2

a) Observe o triângulo ABC da imagem abaixo e calcule a sua área.



b) Agora monte uma matriz M3x3 em que a primeira coluna seja composta pelas coordenadas x dos pontos A, B e C, a segunda coluna seja composta pelas coordenadas y dos pontos A, B e C, e a terceira coluna seja composta apenas por números 1. Como segue,

$$M = \begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}$$

c) Feito isso calcule o determinante da matriz M (você pode calcular "na mão" e depois confirmar se fez o cálculo certo utilizando a planilha eletrônica).

d) Você consegue perceber alguma relação entre o determinante encontrado e a área do triângulo ABC? Que relação é essa?

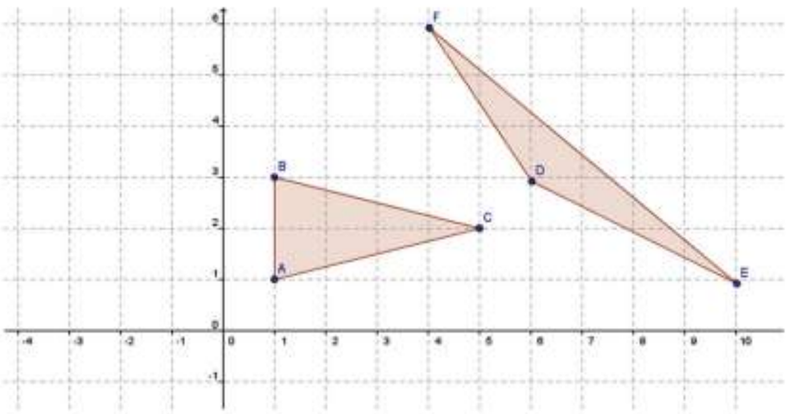
Você deve ter percebido que a relação entre a área do triângulo ABC e o determinante da matriz M é a seguinte:

$$\text{área do triângulo } ABC = \frac{1}{2}.\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{|\det(M)|}{2}$$

Atividade 3

Agora é com você!

a) Calcule a área de cada um dos triângulos a seguir e diga qual é o triângulo que possui a maior área.



Fonte: Roteiro de Ação 5 – Formação Continuada de Matemática 2º ano. Disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=126.

- Exercícios de Fixação do livro didático página 127 números 50 e 51 e página 132 número 6 e 8. Fonte: IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIG, R., ALMEIDA, N. *Matemática Ciência e Aplicações.* São Paulo: Editora Saraiva, 2010. (volume 2 – 6ª edição)

AULA 5

Habilidade relacionada: **H32** – calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 ou 3; **H33** – efetuar cálculos envolvendo as operações com matrizes.

Pré – requisitos: operações com matrizes e determinantes de matrizes quadradas de ordem 2 ou 3.

Tempo de duração: 100 minutos.

Recursos educacionais utilizados: Folhas de atividades.

Organização da turma: individual.

Objetivos: revisão e fixação através de atividades.

Metodologia adotada: apresentação de questões diversificadas envolvendo os conceitos aprendidos sobre matrizes e determinantes.

- **Folha de Atividades**

1. **(UERJ)** Observe parte da tabela do quadro de medalhas dos Jogos Pan-americanos do Rio de Janeiro em 2007:

país	medalhas			
	tipos			total
	1- ouro	2- prata	3- bronze	
1- Estados Unidos	97	88	52	237
2- Cuba	59	35	41	135
3- Brasil	54	40	67	161

Com base na tabela, é possível formar a matriz quadrada A cujos elementos a_{ij} representam o número de medalhas do tipo *j* que o país *i* ganhou, sendo *i* e *j* pertencentes ao conjunto {1, 2, 3}.

Para fazer uma outra classificação desses países, são atribuídos às medalhas os seguintes valores:

– ouro: 3 pontos;

– prata: 2 pontos;

– bronze: 1 ponto.

Esses valores compõem a matriz $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Determine, a partir do cálculo do produto AV, o número de pontos totais obtidos pelos três países separadamente.

2- **(UFBA)** A matriz 2 x 3, com $a_{ij} = \begin{cases} 2i - j, \text{ se } i \neq j \\ i + j, \text{ se } i = j \end{cases}$,

é:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3- **(FFFCMPA RS)** A matriz $A=\begin{bmatrix}1 & k\\ m & 3\end{bmatrix}$ é tal que $A^2=\begin{bmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{bmatrix}$. O valor de $\frac{k}{m}$ é

a) 4.

b) 2.

c) 1.

d) – 2.

e) – 4.

4 – (UEL) O determinante da matriz $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & x & 0\\ x & 0 & x\end{bmatrix}$ é positivo se

a) $x > -4$

b) $x < 0$

c) $x < 2$

d) $x < -4$ ou $x > 0$

e) $x > -2$ ou $x < -6$

5 - (UEL PR) Uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:

1. Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C ;

2. O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que MC =P, onde M é a matriz mensagem a ser decodificada;

3. Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: 1=a, 2=b, 3=c, ..., 23=z;

4. Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras k, w e y;

5. O número zero corresponde ao ponto de exclamação;

6. A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo a correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas conforme segue: $m_{11}m_{12}m_{13}m_{21}m_{22}m_{23}m_{31}m_{32}m_{33}$.

Considere as matrizes:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } P = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nos conhecimentos e nas informações descritas, assinale a alternativa que apresenta a mensagem que foi enviada por meio da matriz M.

a) Boasorte!

b) Boaprova!

c) Boatarde!

d) Ajudeme!

e) Socorro!

Fonte: Lista de Exercícios de Matrizes e Determinantes. Disponível em http://pessoal.educacional.com.br/up/4380001/4947854/LISTA%20DE%20EXERC%C3%8DCIOS%20-%20MATRIZES%20E%20DETERMINANTES.pdf

GABARITO

1- EUA 519; Cuba 288; Brasil 309
2- D
3- D
4- D
5- A

AVALIAÇÃO

Na avaliação, o professor deverá acompanhar o desenvolvimento verificando o interesse pelo assunto e se são capazes de destacar aspectos que, mais gostaram e que acharam mais interessantes nos trabalhos realizados. Observar também a participação e seu desempenho durante a atividade, bem como se as atividades foram interessantes e significativas para os alunos.

As Aulas 1 a 4 são realizadas em dupla, o professor observará nos registros dos alunos suas produções, seus textos, exercícios, argumentações e até em relatos orais a compreensão, as dúvidas, os progressos e a necessidade do aluno sobre o assunto trabalhado. Então, aqui o professor avaliará o empenho das duplas, a organização das atividades, a participação e como desenvolveram a atividade.

Na Aula 5 é realizada individual para que o aluno fixe o conteúdo e que tanto o aluno como o professor perceba se realmente foi compreendida o conteúdo matrizes e determinantes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

BARROSO, J. M. *Conexões com a Matemática.* São Paulo: Moderna, 2010. (volume 2 – 2ª edição).

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIG, R., ALMEIDA, N. *Matemática Ciência e Aplicações.* São Paulo: Editora Saraiva, 2010. (volume 2 – 6ª edição)

Endereços Eletrônicos:

Curso Formação Continuada de Matemática 2º ano 3º bimestre - Fórum Temático 1 por FLAVIO LAVOURAS HAICKI RIO DE JANEIRO - sexta, 9 agosto 2013, 10:53.

Lista de Exercícios de Matrizes e Determinantes. Disponível em http://pessoal.educacional.com.br/up/4380001/4947854/LISTA%20DE%20EXERC%C3%8DCIOS%20-%20MATRIZES%20E%20DETERMINANTES.pdf. Acessado em 24 agosto 2013.

ROTEIROS DE AÇÃO – Matrizes e Determinantes – Curso Formação Continuada oferecida por CECIERJ referente ao 2º ano do Ensino Médio – 3º bimestre – Disponível em http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=126.

Vestibulândia. Com – Matemática – Aula 19 – Matrizes – Conceitos Iniciais – Parte 1. Disponível em http://www.youtube.com/watch?v=sw18GQESKpA. Acessado em 24 agosto 2013.

Vestibulândia. Com – Matemática – Aula 19 – Matrizes – Conceitos Iniciais – Parte 2. Disponível emhttp://www.youtube.com/watch?v=AdwyrhQ5GfA. Acessado em 24 agosto 2013.

Vestibulândia. Com – Matemática – Aula 20 – Determinantes –Parte 1. Disponível em http://www.youtube.com/watch?v=SUbr6zypkLA. Acessado em 24 agosto 2013.