FORMAÇÃO CONTINUADA

MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO CECIERJ / CONSÓRCIO CEDERJ

Matemática – 2° ano – 3° Bimestre /2013

Plano de Trabalho – 2

PIRÂMIDES E CONES

Cursista – KÍSSILA FERNANDES DA SILVA
Grupo - 03
Tutor – SUSI CRISTINE BRITTO FERREIRA

"É na matemática que o artista

acha o mais abrangente espaço

para a imaginação."

Henry Havelock Ellis

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Neste plano de trabalho será abordado o tema área e construção de cone e pirâmide, por ser um conteúdo de diversas aplicações práticas, porém que geram bastante dificuldade aos alunos na hora de fazer os cálculos.

O mundo à nossa volta é povoado de formas as mais variadas possíveis tanto nos elementos da natureza como nos de objetos construídos pelo homem. É de extrema importância que os alunos tenham a oportunidade de manusear em sala de aula objetos que utilizam no dia a dia ou conhecem que podem representar o cone e a pirâmide. A partir daí se tornarem capazes de estabelecer associações com o estudo de cones e pirâmides.

Para alcançar o objetivo acima foi pedido aos alunos que levassem variados objetos que tivessem a mesma forma do cone e da pirâmide, trabalhos artísticos formados pelas figuras a serem estudadas. Neste momento ocorrerá uma interação entre os grupos formados.

A intenção é que a utilização da arte como tema introdutório de cone e pirâmide, represente para os alunos uma viagem pela geometria espacial. É muito importante fazer uma abordagem adequada à realidade deles. Com o material proposto os alunos tiveram a oportunidade de fazer atividades de matemática com a leveza da arte.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1: Descobrindo as áreas da pirâmide e do cone

- **Duração prevista:** 100 minutos.
- **Área de conhecimento:** Matemática.
- **Assunto:** Geometria Espacial **–** Pirâmides e cones.
- **Objetivos:** Trabalhar o conceito de área da pirâmide e do cone.
- **Pré-requisitos:** Área das figuras planas.
- **Material necessário:** Folha de atividades, lápis, folhas com as cópias das planificações, régua, tesoura
- **Organização da classe:** Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.
- **Descritores associados:**

H07 – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.

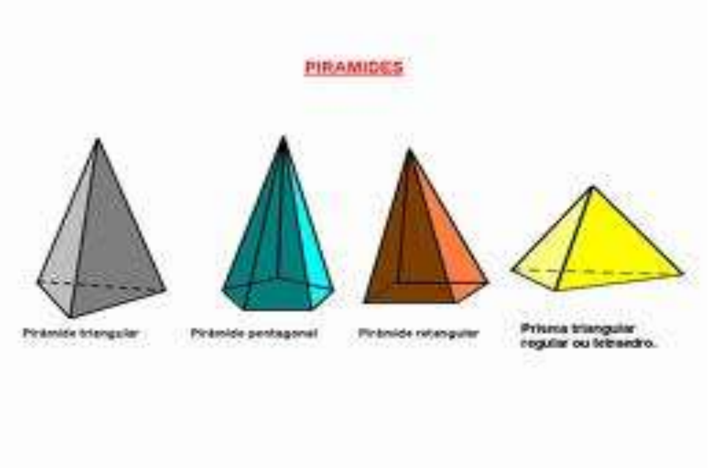
H24 – Resolver problemas, envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

A ideia é construir os conceitos a partir de planificações, que serão distribuídas aos grupos. Para isso, serão feitas cópias das figuras que constam nos anexos. Iniciaremos a atividade, usando a planificação de uma pirâmide triangular, e em seguida uma pirâmide quadrangular, mas a proposta pode se repetir para outros tipos de pirâmides (pentagonal, hexagonal). Mais à frente, faremos o estudo com os cones.

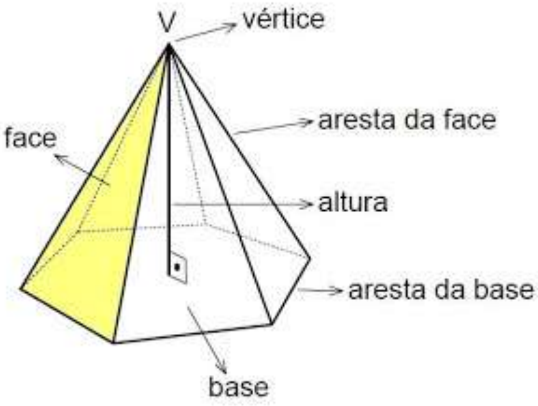
DEFINIÇÃO DE PIRÂMIDE:

Como exemplos das pirâmides da geometria espacial no dia-a-dia temos as pirâmides do Egito, uma das sete maravilhas do mundo antigo. Quando pensamos numa pirâmide, vem-nos à cabeça a imagem dessas pirâmides cuja base é um quadrado.

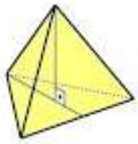
Contudo, o conceito geométrico de pirâmide é um pouco mais amplo: sua base pode ser formada por qualquer polígono. As figuras abaixo representam pirâmides:



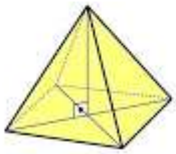
Uma pirâmide é um sólido geométrico, cuja base é um polígono e cujas faces laterais são triângulos que possuem um vértice comum.



- A altura da pirâmide é um segmento perpendicular à base e que passa por V (vértice).
- Uma pirâmide é regular se a base é um polígono regular e as faces são triângulos iguais. Com isso o pé da altura é o centro do polígono da base, como mostram as figuras abaixo:



Pirâmide Triângular Regular (a base é um triângulo equilátero)



Pirâmide Quadrangular Regular (a base é um quadrado)

Uma pirâmide é classificada como reta quando todas as arestas laterais são congruentes, caso contrário ela é classificada como oblíqua. Uma maneira mais fácil de identificar uma pirâmide reta é quando o centro da base da pirâmide está alinhado com o vértice superior da pirâmide, em outras palavras, é possível traçar uma reta do vértice ao centro do polígono na base da pirâmide. Uma outra maneira fácil de identificar uma pirâmide oblíqua é quando não existe esse alinhamento do vértice superior com o centro do polígono na base da pirâmide, ou seja, se traçarmos novamente a reta, ela não terminará no centro do polígono da base.

1ª parte – Áreas da Pirâmide

1. Observe a planificação que você recebeu de seu professor. Recorte na parte pontilhada e monte-a.

2. Que sólido geométrico você obteve após a montagem?

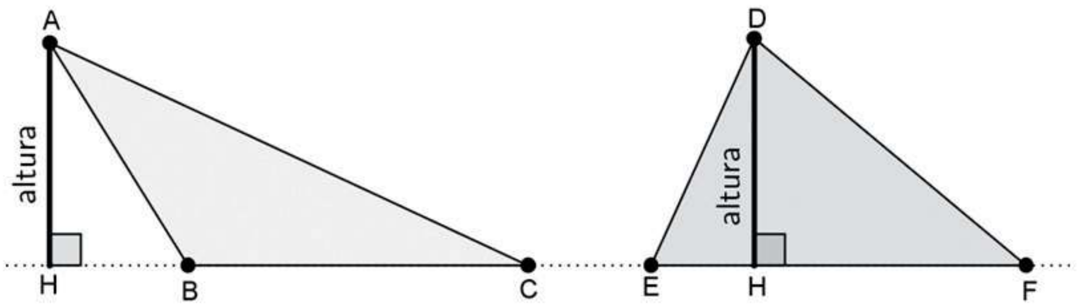
3. Quanto de papel seu professor deve ter utilizado apenas para construir a superfície desta pirâmide? Discuta com seu colega e dê um palpite!

4. Vamos começar, medindo a altura e a base de um dos triângulos da lateral da pirâmide triangular. Com estas informações, calcule sua área. Que valor encontrou? Compare seu resultado com os de seus colegas.

É importante que, neste primeiro momento, os alunos sejam capazes de reconhecer o sólido geométrico a partir de sua planificação, nomeando-o.

5. Quantos triângulos congruentes compõem a lateral desta pirâmide? Então, podemos com a medida da base e da altura de um único triângulo dessa lateral calcular sua área e multiplicá-la por _______ para obtermos a área lateral.

A altura de um triângulo retângulo é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nessa reta e no vértice oposto ao lado considerado.



Fonte: Figura Construída pelo conteudista.

6. Calcule a área lateral dessa pirâmide.

7. Meça a altura e a base do triângulo da base da pirâmide triangular e calcule sua área.

8. Agora que já sabemos qual é a área lateral da pirâmide triangular e a área de sua base, podemos determinar a área total dessa pirâmide.

Desconsiderando as abas para colagem, quantos *cm2* de papel foram gastos na construção deste sólido? Este resultado está próximo de sua estimativa?

No item 5, esperamos que os alunos percebam que a área lateral é formada pela soma das áreas dos 3 triângulos que a compõem. Já no item 7, eles deverão reconhecer que a área total é dada pela soma da área lateral com a área da base.

9. Observe a nova planificação. Você também deverá recortá-la e montá-la. Após fazer isso, leia a observação a seguir e complete a tabela.

Alguns polígonos planos recebem nomes em função da quantidade de lados ou ângulos. Por exemplo, os que têm três ângulos são chamados de triângulos, pois o radical tri é relativo à quantidade três. Os que têm quatro lados são chamados de quadriláteros, pois o radical "quadri" refere-se à quantidade quatro e "látero" a lados.

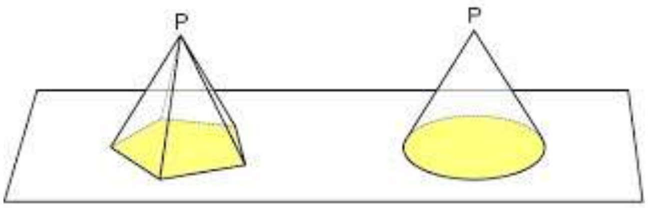
Base com	Pirâmide
3 lados	Triangular
4 lados	
5 Lados	
6 Lados	

10. Que tipo de pirâmide você construiu?

11. Tente calcular a área lateral da pirâmide quadrangular que você construiu. Não esqueça que ela possui 4 triângulos. Que valor você encontrou?

Pirâmides e Cones

Há muita semelhança entre o cone e a pirâmide. A diferença é que a base do cone é delimitada por um círculo, em vez de um polígono. Ambos podem ser imaginados como um conjunto de segmentos que ligam um ponto P, exterior ao plano, a uma região do plano, como mostra a figura abaixo.



12. Agora é a vez de calcular a área da base da pirâmide. Para isso, você irá medir com a régua o lado do quadrado que forma esta base e em seguida, calcular a área.

13. Com os dados obtidos nos itens anteriores, preencha a tabela abaixo.

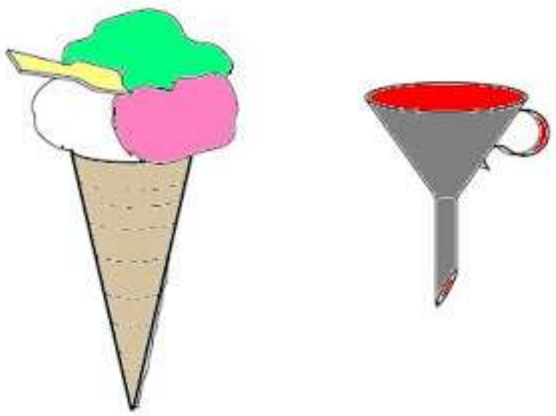
Pirâmide	Área Lateral	Área da Base	Área Total
Triangular			
Quadrangular			

14. Você seria capaz de escrever uma fórmula que represente a área total de uma pirâmide? Discuta com seu colega e registre suas conclusões.

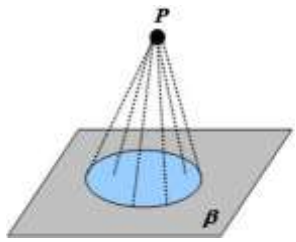
Esperamos que no item 13, os alunos consigam concluir que a $A_t = A_l + A_b$, ou seja, a área total é dada pela soma da área lateral com a área da base. E que o cálculo dessas áreas depende do polígono da base.

DEFINIÇÃO DE CONE:

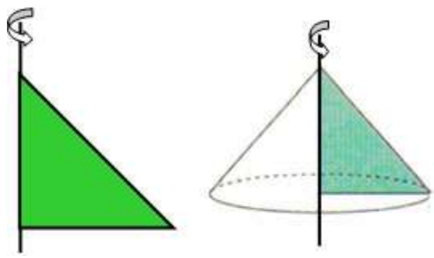
Um funil ou uma casquinha de sorvete dão a idéia do sólido geométrico chamado cone. Um cone (mais precisamente, um cone circular reto) é o sólido obtido da seguinte maneira: tome uma região do plano limitado por uma circunferência e, de um ponto P situado exatamente acima do centro da circunferência, trace os segmentos de reta unindo P aos pontos da circunferência do círculo.



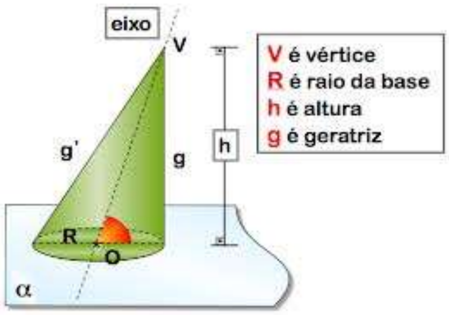
Dado um círculo de centro O e raio R no plano B, e um ponto P fora do plano.



O cone será formado por segmentos de reta unindo o ponto P aos pontos do círculo. Outra forma de construir o cone é através da revolução do triângulo retângulo sobre um eixo vertical.



Elementos do cone:



g: geratriz do cone

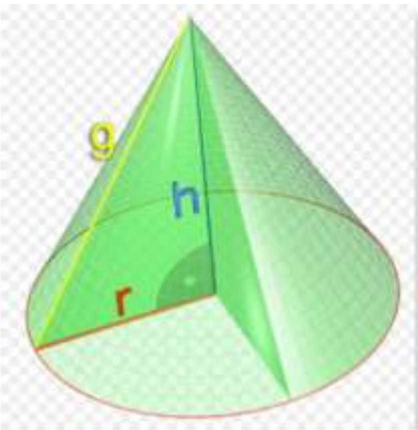
h: altura do cone

r: raio da base

v: vértice

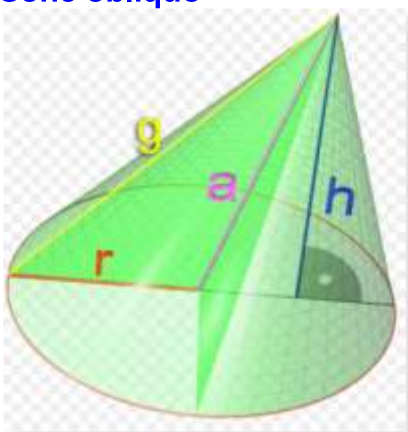
Classificação do cone:

Cone reto



Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Cone_3d.png (modificada pelo autor)

Cone oblíquo

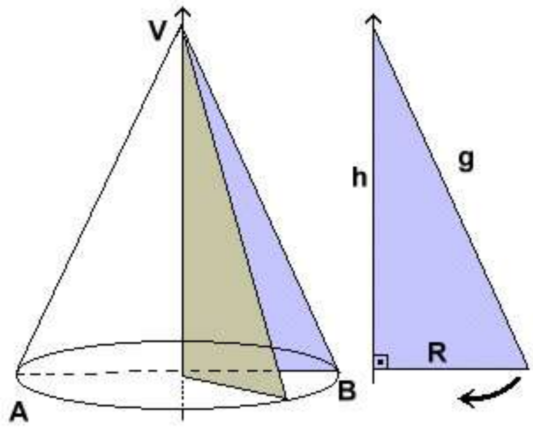


Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Cone_3d.png (modificada pelo autor)

O cone reto é o cone cujo eixo de rotação é perpendicular à base. No cone reto podemos aplicar a relação de Pitágoras para o cálculo da geratriz (g), do raio da base (r) e da altura (h), pois vimos que o cone pode ser formado através da revolução do triângulo retângulo. Comparando os elementos do cone aos do triângulo retângulo temos:

Geratriz no cone, hipotenusa no triângulo.
Altura no cone, cateto no triângulo.
Raio da base no cone, cateto no triângulo.

Uma importante relação no cone é dada por: $r^2 + h^2 = g^2$, observe a figura:



2ª parte – Áreas do Cone

No início será feita uma pequena revisão com os alunos sobre o cálculo da área do círculo e do comprimento da circunferência, lembrando-lhes que a área do círculo de raio *r* é calculada, fazendo-se A= π. r^2 e que o comprimento da circunferência de raio *r é calculado*, fazendo-se C=$2\pi r$.

1. Observe a nova planificação que você recebeu. Recorte-a e monte-a. Que sólido você construiu?

2. Que tal descobrirmos quantos cm^2 de papel foram gastos na construção do cone? Mas antes, dê um palpite e compare sua resposta com a de seu colega.

3. Veja que a planificação é formada por uma base, que é um círculo, e por um setor circular. Para calcular a área de superfície dessa figura geométrica, precisamos calcular suas áreas.

Que tal começarmos, calculando a área da base? Para isso, com o auxílio de uma régua, meça o raio do círculo da base que está em destaque pontilhado e calcule sua área, e seu comprimento, considerando π=3,14. Que valores você encontrou? Compare com a resposta do seu colega.

4. Chegou a vez de calcularmos a área do setor circular, que chamaremos de Área Lateral.

Mas antes, vamos pensar na seguinte questão: Qual é o comprimento deste setor? **Dica**: você já o calculou. Compare-o antes e depois do cone montado. Leia a observação a seguir e registre o valor desse comprimento!

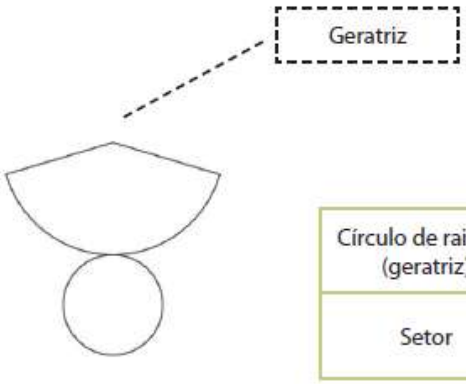
Quando no mundo da Matemática dizemos que dividimos uma pizza em quatro partes iguais, estamos dizendo que a massa com recheio (área) e a borda (comprimento) estão divididas cada uma em quatro partes iguais. O mesmo acontece quando dizemos que a dividimos em 5, 6 ou mais partes. Ou seja, nesses casos, a massa com recheio e a borda também ficam divididas respectivamente em 5, 6 ou mais partes iguais.

Essa brincadeira permite-nos verificar a proporcionalidade entre o ângulo central de um setor circular com sua área e o comprimento de seu arco. Em particular, utilizando regra de três, obtemos que a área de um setor circular de raio R e comprimento de arco, medindo c é dado por $A_s = \frac{cR}{2}$ já que temos:

	Comprimento	Área
Círculo	$2\pi R$	πR^2
Arco	c	A_s

Verifique!

5. Com as informações obtidas no item 3, a medida da geratriz e uma regra de três simples, complete a tabela a seguir e encontre a área A_s do setor circular. Se tiver alguma dúvida, além do professor, a Tabela do item 6 a seguir pode lhe ajudar!



	Comprimento	Área
Círculo de raio "g" (geratriz)		
Setor		A_s

Resposta do Item 3

6. Repita esta conta com os dados literais constantes da Tabela a seguir e encontre uma fórmula para a área lateral de um cone com raio da base medindo *r* e geratriz medindo *g*.

	Comprimento	Área
Círculo	$2\pi R$	πR^2
Arco	C	A_s

Após usar a regra de três no item 6, o aluno deverá concluir que a área lateral é dada por $A_l = \pi.r.g$. Como a área da base é $A_b = \pi r^2$, temos que

$$A_t = A_l + A_b$$

$$A_t = \pi.r.g + \pi r^2$$

$$A_t = \pi.r(g + r)$$

Onde A_t é a área total do cone.

7. Descobriu quanto de papel seu professor gastou na planificação? Esse resultado é próximo de sua estimativa? Comente com seus colegas o seu resultado e faça um resumo do que você aprendeu, e revisou com esta atividade.

8. As pirâmides e cones para as quais se calculou a área de superfície eram pirâmides regulares e cones retos. Relembraremos o que significa essas denominações e verificaremos se o que foi feito nesta atividade também vale para estes casos. Voltaremos ao item 7 e complementaremos o resumo de aula, adicionando estas informações.

Após a explicação os alunos receberão uma lista de exercícios para verificar se as habilidades propostas foram atingidas. Esta lista encontra-se em arquivo anexo

Atividade 2: Volume da Pirâmide e do Cone

- **Duração prevista:** 100 minutos.
- **Área de conhecimento:** Matemática.
- **Assunto:** Geometria Espacial **–** Pirâmides e cones.
- **Objetivos:** Trabalhar o conceito de volume da pirâmide e do cone a partir da comparação com o volume de outros sólidos geométricos.
- **Pré-requisitos:** Área das figuras planas.
- **Material necessário:** Folha de atividades, lápis, folhas com as cópias das planificações, régua, tesoura, cartolina e cola.
- **Organização da classe:** Turma disposta em pequenos grupos (2 ou 3 alunos), propiciando trabalho organizado e colaborativo.
- **Descritores associados:**

H25 – Resolver problemas, envolvendo noções de volume.

Inicialmente será apresentada a construção da ideia de como calculamos o volume da pirâmide e do cone. Para isso, utilizaremos quebra-cabeças construídos pelos alunos. Antecipadamente será impresso e preparado cópias do Anexo I e do Anexo II para os grupos utilizando cartolina, papel cartão ou outro papel com maior rigidez que o A_4 para essas planificações.

Nessa atividade, optamos por utilizar a decomposição de um prisma triangular para mostrar que o volume desse prisma é o triplo do volume de uma pirâmide que tem mesma base e mesma altura que esse prisma. O prisma triangular pode ser substituído por um prisma de base quadrada ou mesmo um cubo.

***Mas, qualquer que seja a opção é importante que os alunos já reconheçam (Princípio de Cavalieri) que prismas e cones com mesmas bases e alturas têm volumes iguais*.**

1º Parte – Volume da Pirâmide

1. Leia atentamente a poesia abaixo e reflita.

Dentro do prisma
A base, o vértice
De suas três
Pirâmides contínuas.

Dentro do prisma
A Ideia
Que perdura e ilumina
O que já era em mim
De natureza pura.

Dentro do prisma
O universo
Sobre si mesmo fechado
Mas aberto e alado.

Dentro de mim,
De natureza ígnea
Uma Ideia do Amado.

Hilda Hilst

Fonte: Artigo A Geometria do Pensar de Geruza Zelnys de Almeida. Revista Terra roxa e outras terras – Revista de Estudos Literários. Volume 11 (2007) – 1-131. ISSN 1678-2054 http://www.uel.br/cch/pos/letras/terraroxa disponível em http://www.uel.br/pos/letras/terraroxa/g_pdf/vol11/11_9.pdf

2. Fazendo uso da Geometria, Hilda Hilst busca dar formas ao pensamento, descrevendo o desconhecido. Mas pensando na Geometria em si, o que você entende ao ler o primeiro parágrafo dessa poesia?

3. Recorte e monte as planificações que você recebeu.

(Neste primeiro momento, serão entregues apenas as planificações do prisma e das pirâmides que o decompõem.)

4. Que sólidos geométricos você montou? Cite *nome e sobrenome* dos sólidos.

5. Vamos seguir a ideia proposta pela poesia de Hist. Para isso, disponha as três pirâmides construídas dentro do prisma, de forma que eles se encaixem.

6. Desconsiderando as imperfeições de nossos modelos geométricos, podemos verificar uma relação entre a soma dos volumes das pirâmides e o volume do prisma. Que relação é essa?

7. Compare as pirâmides! Encoste as duas pirâmides que têm faces marcadas com uma *semicircunferência,* posicionando-as para baixo (como base). Nesta posição, elas têm mesma altura?

8. Você não consegue sobrepor essas faces (bases) com uma *semicircunferência*, mas elas são congruentes e, por isso, têm mesma área. Junte essa informação com a resposta do item anterior e diga qual a relação entre os volumes dessas duas pirâmides.

9. Faça o mesmo com relação ao volume das duas pirâmides que têm faces com uma *meia estrela.*

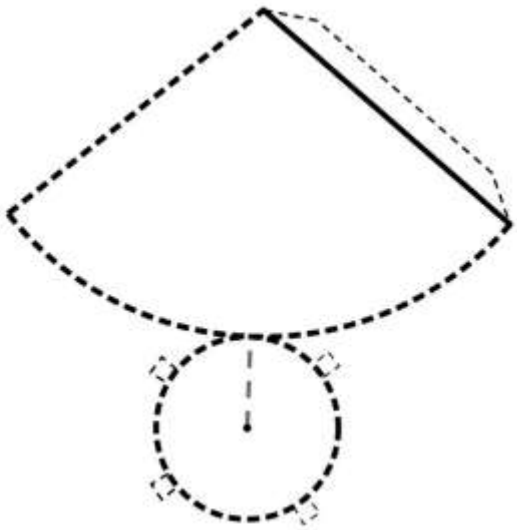
10. Agora com base em suas observações, responda: as três pirâmides têm mesmo volume? Por quê?

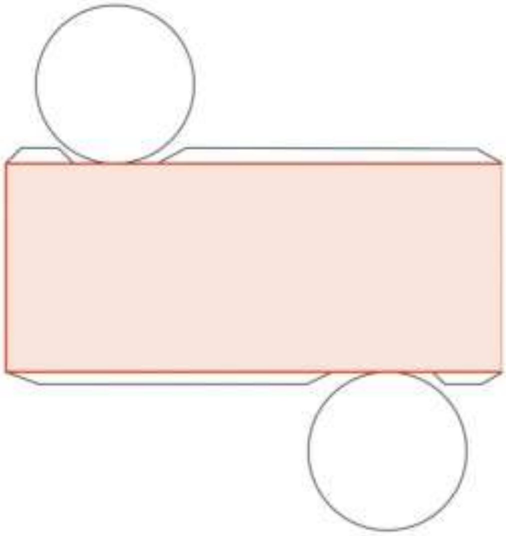
11. Então podemos afirmar que o volume de uma pirâmide é igual a um terço do volume de um prisma de mesma base e altura? Por quê?

12. Encontre com a régua as medidas aproximadas para as dimensões da base e altura do prisma. Calcule o volume deste prisma e o de uma dessas pirâmides.

13. Para calcular o volume de prismas, recorremos à ideia de que este volume é igual a área da base multiplicada pela altura. Escreva você uma ideia como essa, para calcularmos o volume de pirâmides.

2º Parte – Volume do Cone





Fonte: Figura pelo conteudista André Silva. Fonte: Figura pelo conteudista André Silva.

1. Observe as planificações apresentadas agora pelo seu professor. Monte-as.

2. Que sólido você construiu a partir da *Figura 1*? E da *Figura 2*?

3. As planificações foram criadas para que o cone e o cilindro tenham mesma circunferência da base e mesma altura. Desconsidere as imperfeições que se apresentam por conta de nossa manipulação. Utilize uma régua para fazer as medições necessárias e completar a seguir.

Sólido	Altura
Cilindro	
Cone	

4. O cone e o cilindro possuem a mesma área da base? E quanto à altura, o que você observou? Converse com seus colegas e comparem suas medições.

5. Vamos encher o cilindro com o arroz? Para isso, utilize o cone, enchendo-o completamente e despejando todo seu conteúdo no cilindro. Quantas vezes você repetiu este processo?

6. O que podemos afirmar sobre o volume do cone, se o compararmos com o volume do cilindro?

Espera-se que ao encher o cilindro com o arroz, os alunos concluam por inspeção (e aproximação) que o volume do cone é igual a um terço do volume do cilindro, desde que possuam a mesma área da base e altura.

AVALIAÇÃO

A avaliação será feita todos os dias, pois os alunos irão trabalhar em pequenos grupos e os mesmos irão discutir entre si os seus resultados onde vou avaliar o aproveitamento e sanar as dúvidas. Das seguintes formas:

- Atividades em sala.
- Listas de exercícios envolvendo aplicações do assunto no cotidiano.
- Durante as aulas observando o interesse e a participação do aluno.
- Exposição de trabalhos na Feira Cultural.

A verificação do alcance das habilidades pelos alunos na Atividade 1, será feita através da lista exercícios que se encontra em anexo. Esta lista será elaborada de forma a perceber se o aluno sabe identificar os elementos que compõe o cone (Vértice, raio da base, geratriz entre outros). Também procurarei fazer os alunos usar o teorema de Pitágoras nos exercícios para encontrar ou a geratriz ou a altura do cone.

Na Atividade 2, irei reforçar o conceito aprendido na Atividade 1. A própria atividade 2 proporcionará ao professor verificar as habilidades alcançadas. A avaliação se dará por meio de observação, pelo professor, do desempenho dos alunos e do registro feito por eles a partir das atividades realizadas, verificando ainda se foram capazes de:

- Reconhecerem e classificarem as pirâmides e os cones a partir de suas características;
- Resolver problemas envolvendo cálculo de área e volume de pirâmides e cones.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Roteiros de Ação – Pirâmides e Cones – Curso de Formação Continuada oferecido pelo CEDERJ/CECIERJ, em parceria com a SEEDUC – 3º bimestre.

SMOLE, Kátia Stocco; Diniz, Maria Ignez. **Matemática Ensino Médio**. 2ª Série. 5ed. São Paulo. Saraiva. 2005

Endereços eletrônicos acessados no período de 26/08 a 08/09/2013.

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1113

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1113

www.brasilescola.com › Matemática › Geometria Métrica Espacial

http://www.artenaescola.org.br/pesquise.php

http://www.youtube.com/watch?v=tJYtBF6gt4c&feature=related

http://www.youtube.com/watch?feature=endscreen&NR=1&v=vatR3-oemNk

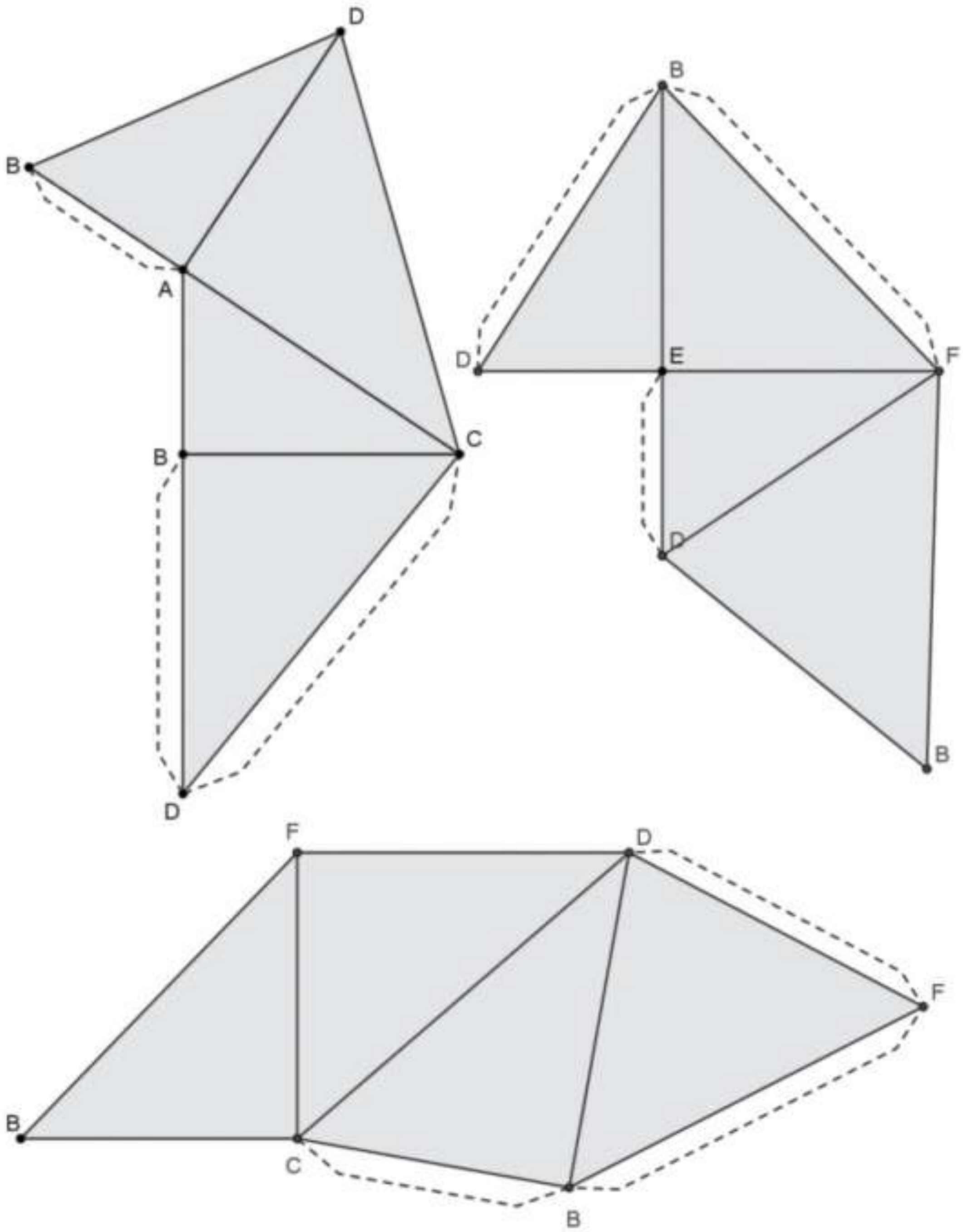
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm21/poliedros.htm

http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Cone_3d.png

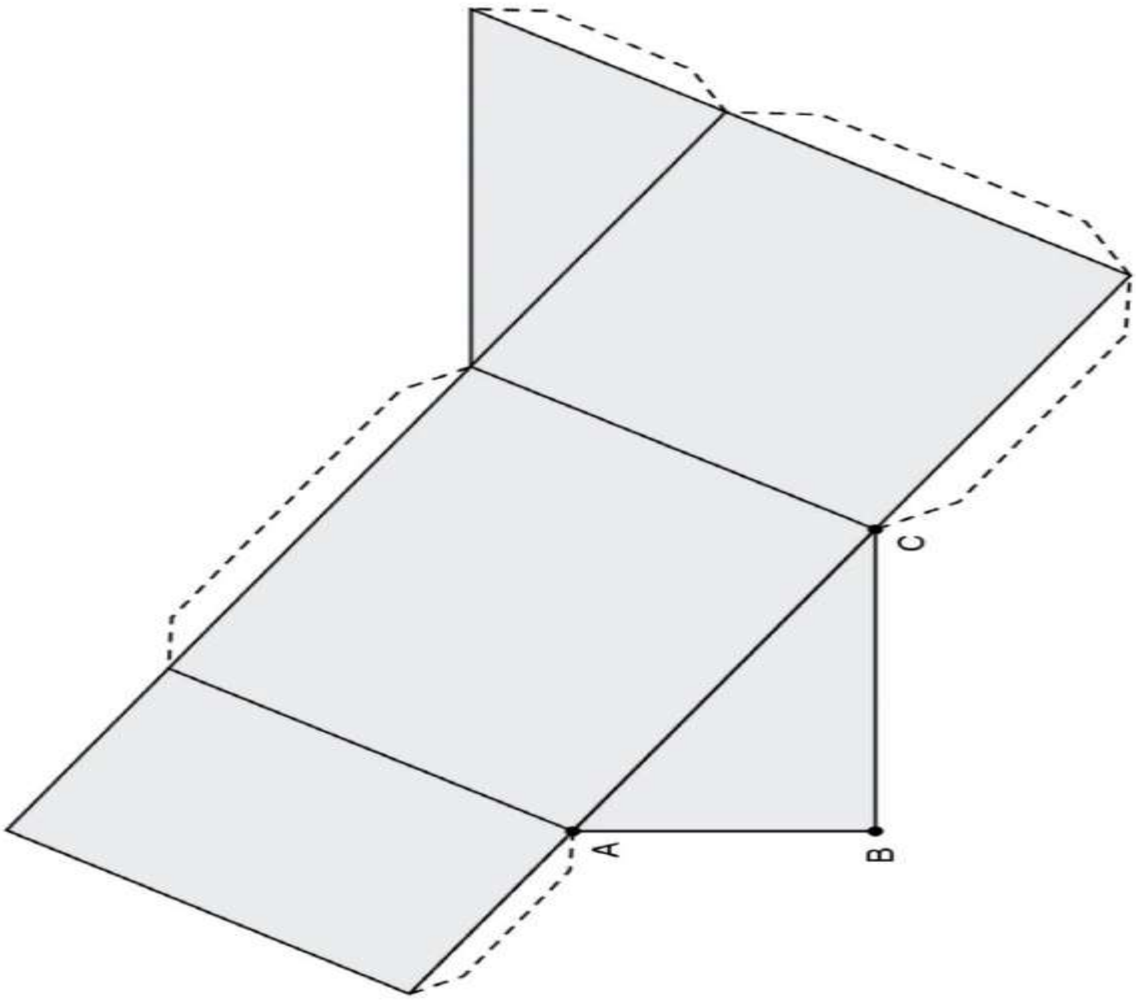
http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Cone_3d.png

ANEXOS

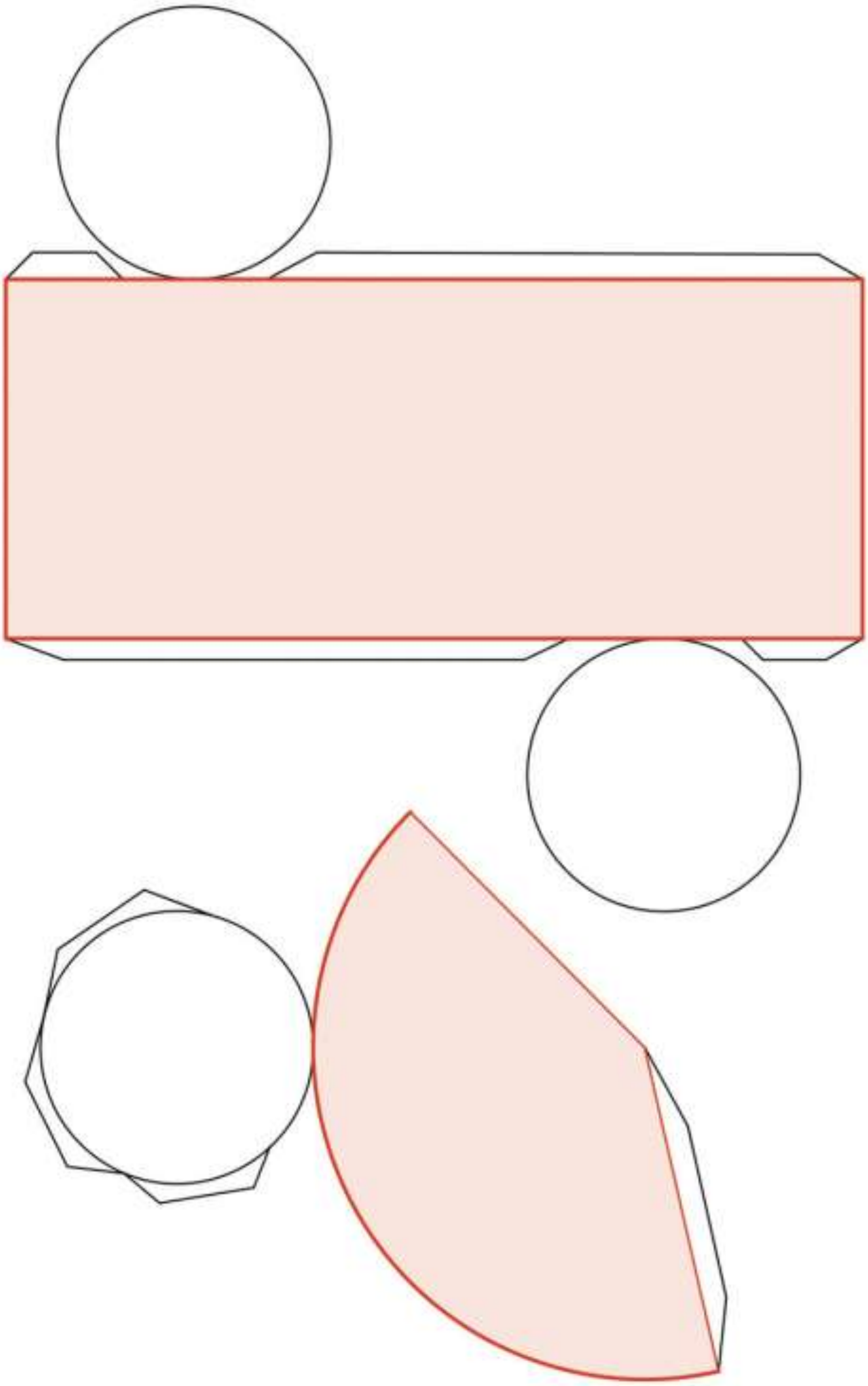
Anexo I



Anexo II



Anexo III



Nome:__________________________ Data:_______ Turma:________

Lista de Exercícios - 3º Bimestre

1. Calcule a altura do cone circular reto cuja geratriz mede 25 cm e o diâmetro da base mede 14cm.

2. Calcule a área total e o volume de um cone equilátero de altura medindo 30cm.

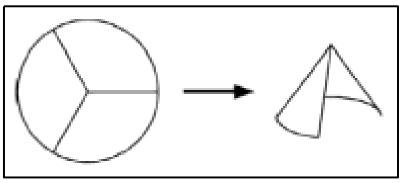
3.Num cone reto, a altura é 3m e o diâmetro da base é 8m. Então, a área total, em metros quadrados, vale:

a) 36π b) 52π c) 16π d) 20π

4.Calcule a área da superfície lateral e a capacidade de um cone de revolução de altura 9cm, sabendo que sua área lateral vale o dobro da área da sua base.

a) $50\pi\,cm^2$ e $80\pi\,cm^3$ b) $54\pi\,cm^2$ e $80\pi\,cm^3$ c) $52\pi\,cm^2$ e $81\pi\,cm^3$ d) $54\pi\,cm^2$ e $81\pi\,cm^3$ x

5. Construa um copo de papel! Recorte um círculo de papel de diâmetro igual a 12cm. Divida-o em três partes iguais e cole cada parte, conforme indicado na figura. Pronto! Você fez três copos de papel!



Qual das ilustrações a seguir melhor representa as dimensões dos copos construídos seguindo as instruções acima?