

**Formação Continuada em
MATEMÁTICA
Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ**

**Matemática 2º Ano – 3º Bimestre/2013
Plano de Trabalho 2**

Pirâmides



Cursista: Marta Vieira de Andrade.

Série: 2ª.

Tutor: Andréa Silva de Lima.

Sumário

INTRODUCAO 03

DESENVOLVIMENTO 04

AVALIACAO 22

FONTES DE PESQUISA 23

INTRODUÇÃO

O intuito deste roteiro é trabalhar com os alunos o reconhecimento e cálculo da medida da área lateral e total de pirâmides regulares e cones retos. A ideia é construir estes conceitos a partir de planificações, que serão distribuídas aos grupos. Iniciaremos a atividade, usando a planificação de uma pirâmide triangular, e em seguida uma pirâmide quadrangular, mas a proposta pode ser repetir para outros tipos de pirâmides.

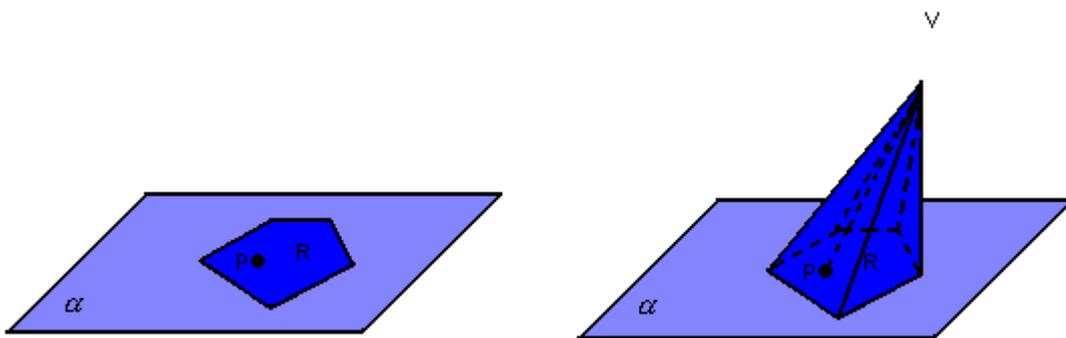
Geralmente os alunos apresentam dificuldades concernentes à interpretação de enunciados e utilização de raciocínio lógico, além da falta de interesse. Por isso, é extremamente importante trabalhar com material concreto que os alunos possam manusear tornando o objeto de estudo atraente. Com isso o aluno estará fazendo parte integrante do processo de aprendizagem, desde que seja prestigiado o trabalho organizado e cooperativo.

Como o assunto exige que o aluno saiba área de figuras planas, é necessário, antes da aplicação do Roteiro de Ação 4, lembrar esse conteúdo. Para a totalização do plano, serão necessários **quatro tempos** de cinquenta minutos para o desenvolvimento dos conteúdos mais **dois tempos** para avaliação da aprendizagem.

DESENVOLVIMENTO

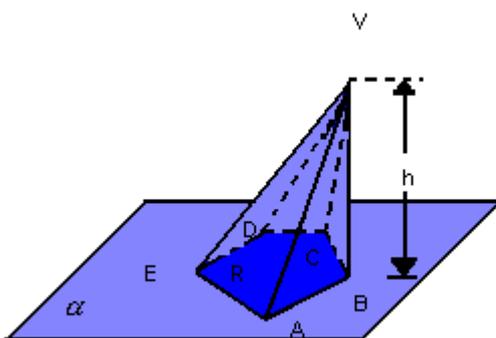
Pirâmide

Dados um polígono convexo R , contido em um plano α , e um ponto V (vértice) fora de α , chamamos de *pirâmide* o conjunto de todos os segmentos $\overline{VP}, P \in R$.



Elementos da pirâmide

Dada a pirâmide a seguir, temos os seguintes elementos:



- base: o polígono convexo R
- arestas da base: os lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EA}$ do polígono
- arestas laterais: os segmentos $\overline{VA}, \overline{VB}, \overline{VC}, \overline{VD}, \overline{VE}$

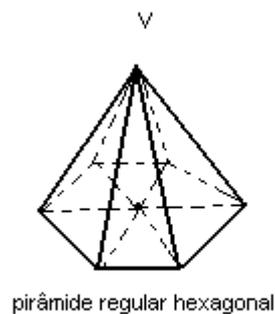
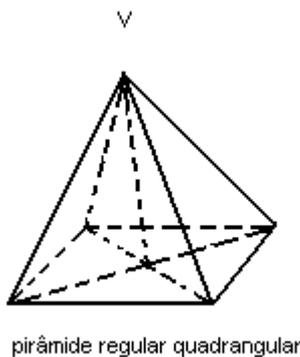
- faces laterais: os triângulos VAB, VBC, VCD, VDE, VEA.
- altura: distância h do ponto V ao plano

Classificação

Uma pirâmide é reta quando a projeção ortogonal do vértice coincide com o centro do polígono da base.

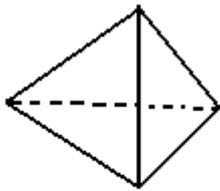
Toda pirâmide reta, cujo polígono da base é regular, recebe o nome de *pirâmide regular*. Ela pode ser triangular, quadrangular, pentagonal etc., conforme sua base seja, respectivamente, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono etc.

Veja:

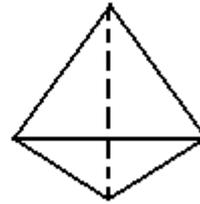


Observações:

1ª) Toda pirâmide triangular recebe o nome do tetraedro. Quando o tetraedro possui como faces triângulos equiláteros, ele é denominado regular (todas as faces e todas as arestas são congruentes).

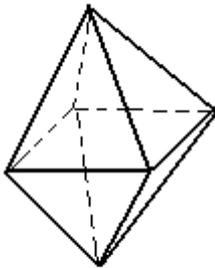


tetraedro

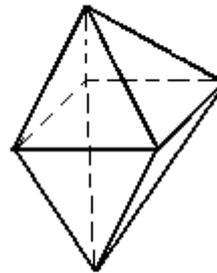


tetraedro regular

2ª) A reunião, base com base, de duas pirâmides regulares de bases quadradas resulta num octaedro. Quando as faces das pirâmides são triângulos equiláteros, o octaedro é regular.



octaedro

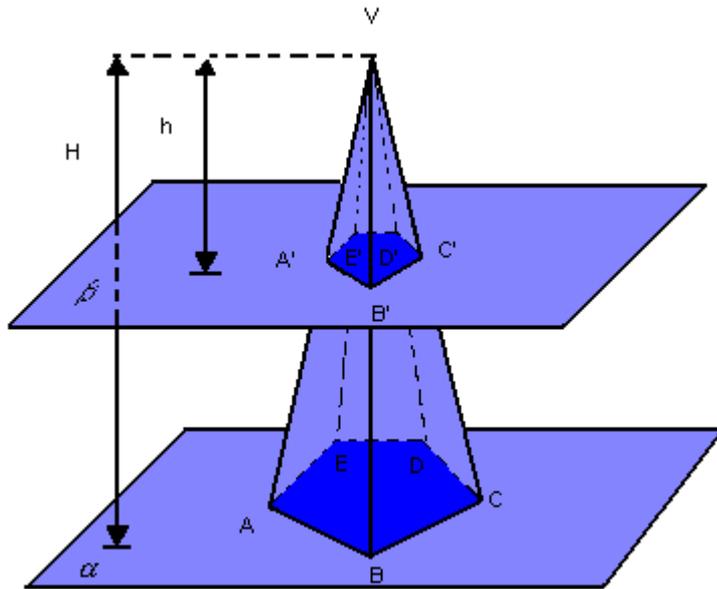


octaedro regular

Secção paralela à base de uma pirâmide

Um plano paralelo à base que intercepte todas as arestas laterais determina uma secção poligonal de modo que:

- as arestas laterais e a altura sejam divididas na mesma razão;
- a secção obtida e a base sejam polígonos semelhantes;
- as áreas desses polígonos estejam entre si assim como os quadrados de suas distâncias ao vértice.

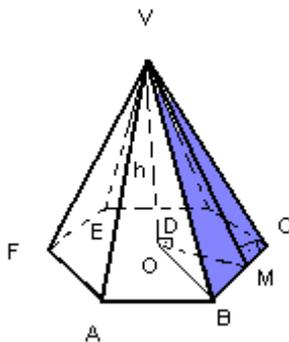


$$\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{VD'}{VD} = \frac{VE'}{VE} = \frac{h}{H}$$

$$\frac{\text{área } A'B'C'D'E'}{\text{área } ABCDE} = \frac{h^2}{H^2}$$

Relações entre os elementos de uma pirâmide regular

Vamos considerar uma pirâmide regular hexagonal, de aresta lateral l e aresta da base a :

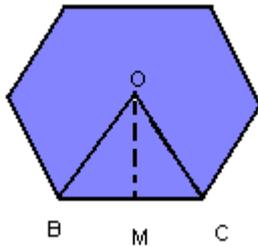


$$MC = \frac{a}{2}$$

$$h^2 = l^2 - a^2$$

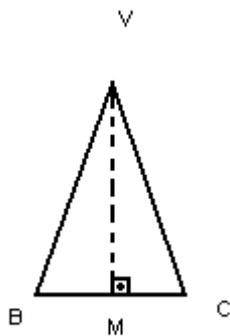
Assim, temos:

- A base da pirâmide é um polígono regular inscrito em um círculo de raio $OB = R$.



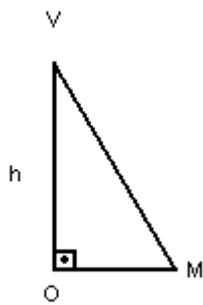
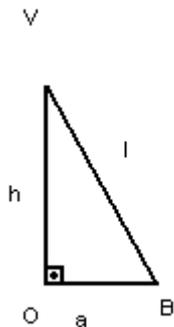
$$OM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (apótema da base)}$$

- A face lateral da pirâmide é um triângulo isósceles.



\overline{VM} é o apótema da pirâmide (altura de uma face lateral)

- Os triângulos VOB e VOM são retângulos.



Áreas

Numa pirâmide, temos as seguintes áreas:

- área lateral (A_L): reunião das áreas das faces laterais
- área da base (A_B): área do polígono convexo (base da pirâmide)
- área total (A_T): união da área lateral com a área da base

$$A_T = A_L + A_B$$

Para uma pirâmide regular, temos:

$$A_L = n \cdot \frac{bg}{2} \quad A_B = pa$$

em que:

- b é a aresta
- g é o apótema
- n é o número de arestas laterais
- p é o semiperímetro da base
- a é o apótema do polígono da base

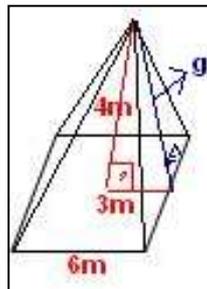
VOLUME

O princípio de Cavalieri assegura que um cone e uma pirâmide equivalentes possuem volumes iguais:

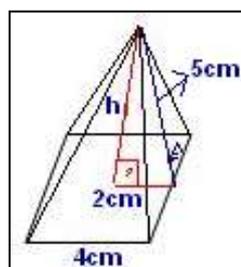
$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\pi R^2}_{\text{área da base}} \cdot h \rightarrow V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

Exercícios de fixação do conteúdo.

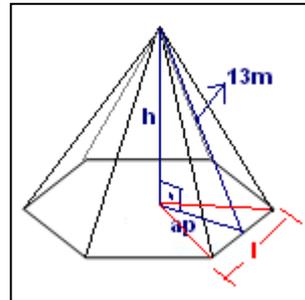
1 – Uma pirâmide quadrangular regular tem 4m de altura e a aresta da base mede 6m. Calcule seu volume e a área total.



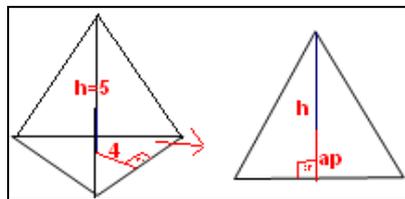
2 – Calcular a área da base, área lateral, área total e o volume da pirâmide quadrangular regular de apótema 5 cm e apótema da base 2 cm.



3 – Calcule o volume de uma pirâmide hexagonal regular de área da base $288\sqrt{3}m$ e apótema 13m.

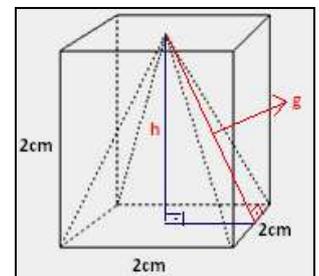


4 – Uma pirâmide triangular regular tem 5 cm de altura e o apótema da base mede 4 cm. Calcule o volume da pirâmide.



5 – Considere uma pirâmide quadrangular regular inscrita em um cubo de 2 cm de aresta. Calcule:

- a área lateral da pirâmide;
- a área total da pirâmide;
- a razão entre as áreas totais da pirâmide e do cubo.



Aplicando o Roteiro de Ação 4 – Descobrimo as áreas da pirâmide

- **Duração prevista:** 100 minutos
- **Área de Conhecimento:** Matemática
- **Assunto:** Geometria Espacial – Pirâmides.
- **Objetivos:** Trabalhar o conceito de área da pirâmide.
- **Pré-requisitos:** Área das figuras planas.
- **Material necessário:** Folha de atividades, lápis, folhas com as cópias das planificações, régua, tesoura e calculadora.

- **Organização da classe:** Turma disposta em duplas propiciando trabalho organizado e colaborativo.

- **Descritor associado:**
- **H07** – Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.
- **H24** – Resolver problemas, envolvendo a medida da área total e/ou lateral de um sólido (prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera).

1ª parte – Áreas da Pirâmide:

1. Observe a planificação que você recebeu de seu professor. Recorte na parte pontilhada e monte-a.

2. Que sólido geométrico você obteve após a montagem?

3. Quanto de papel seu professor deve ter utilizado apenas para construir a superfície desta pirâmide? Discuta com seu colega e dê um palpite!

4. Vamos começar, medindo a altura e a base de um dos triângulos da lateral da pirâmide triangular. Com estas informações, calcule sua área. Que valor encontrou? Compare seu resultado com os de seus colegas.

5. Quantos triângulos congruentes compõem a lateral desta pirâmide? Então, podemos com a medida da base e da altura de um único triângulo dessa lateral calcular sua área e multiplicá-la por para obtermos a área lateral.

6. Calcule a área lateral dessa pirâmide.

7. Meça a altura e a base do triângulo da base da pirâmide triangular e calcule sua área.

8. Agora que já sabemos qual é a área lateral da pirâmide triangular e a área de sua base, podemos determinar a área total dessa pirâmide. Desconsiderando as abas para colagem, quantos *cm*² de papel foram gastos na construção deste sólido? Este resultado está próximo de sua estimativa?

9. Observe a nova planificação entregue pelo seu professor. Você também deverá recortá-la e montá-la. Após fazer isso, Leia a observação a seguir e complete a Tabela.

Alguns polígonos planos recebem nomes em função da quantidade de lados ou ângulos. Por exemplo, os que têm três ângulos são chamados de triângulos, pois o radical tri é relativo à quantidade três. Os que têm quatro lados são chamados de quadriláteros, pois o radical “quadri” refere-se à quantidade quatro e “látero” a lados.

| Base com | Pirâmide |
|----------|------------|
| 3 lados | Triangular |
| 4 lados | |
| 5 lados | |
| 6 lados | |

10. Que tipo de pirâmide você construiu?

11. Tente calcular a área lateral da pirâmide quadrangular que você construiu. Não esqueça que ela possui 4 triângulos. Que valor você encontrou?

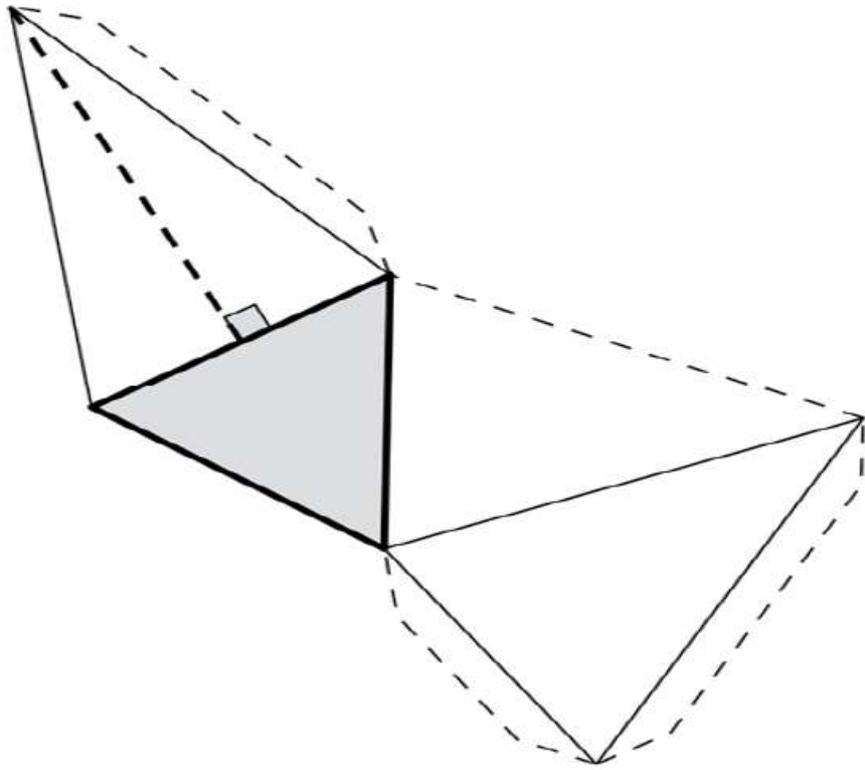
12. Agora é a vez de calcular a área da base da pirâmide. Para isso, você irá medir com a régua o lado do quadrado que forma esta base e em seguida, calcular a área.

13. Com os dados obtidos nos itens anteriores, preencha a tabela abaixo.

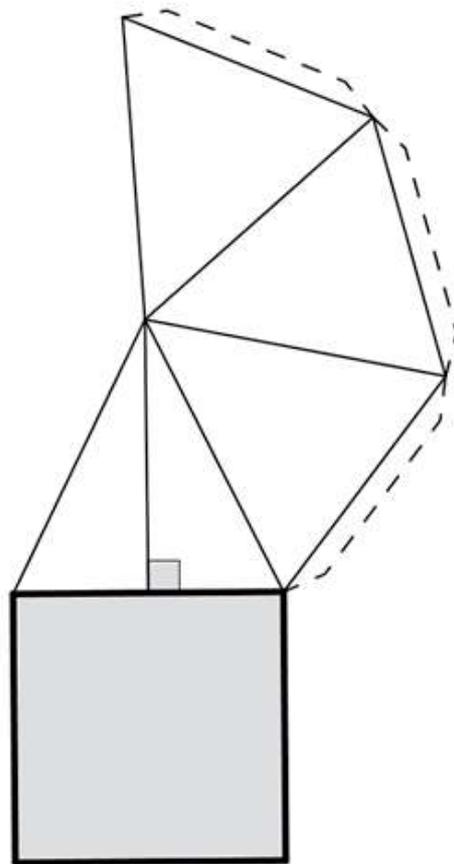
| Pirâmide | Área Lateral | Área da Base | Área Total |
|----------|--------------|--------------|------------|
| | | | |
| | | | |

14. Você seria capaz de escrever uma fórmula que represente a área total de uma pirâmide? Discuta com seu colega e registre suas conclusões.

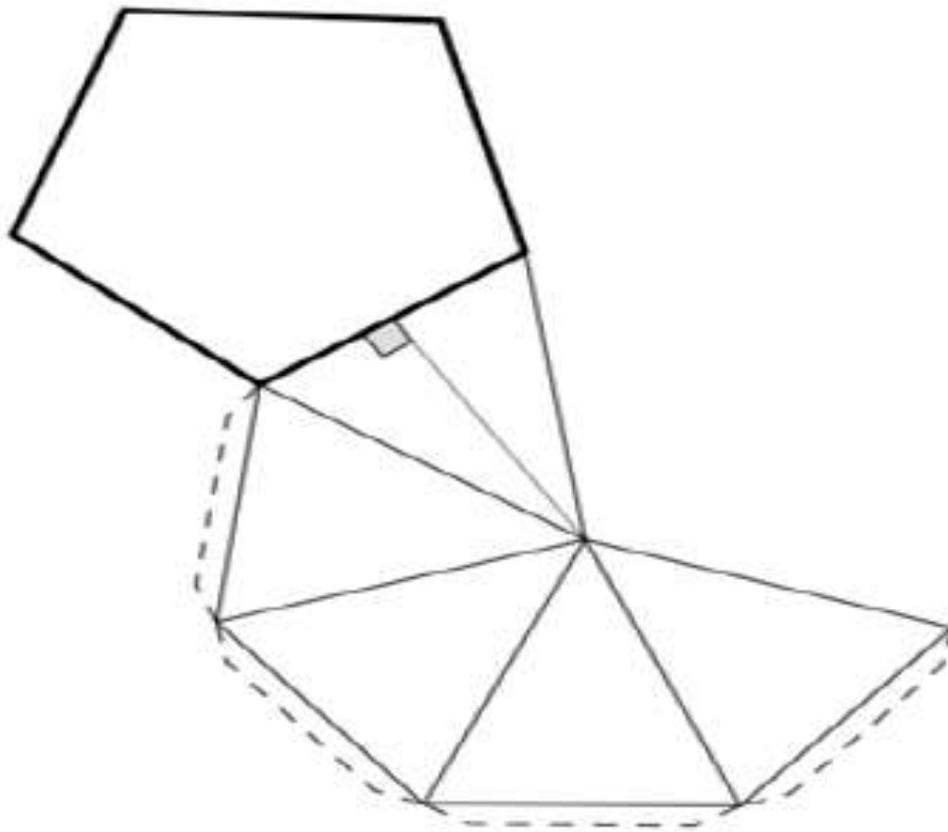
Anexo 1



Anexo 2



Anexo 3



Avaliação da Aprendizagem: questões contextualizadas

1 – (ENEM/2009) Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal. Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

A) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.

B) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.

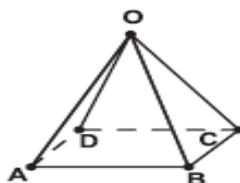
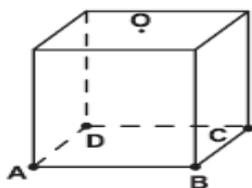
C) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.

D) O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.

E) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

2 – (Questão/2011)

Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.



Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas \overline{AD} , \overline{BC} , \overline{AB} e \overline{CD} , nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

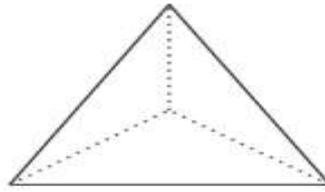
Os formatos dos sólidos descartados são

A) todos iguais.

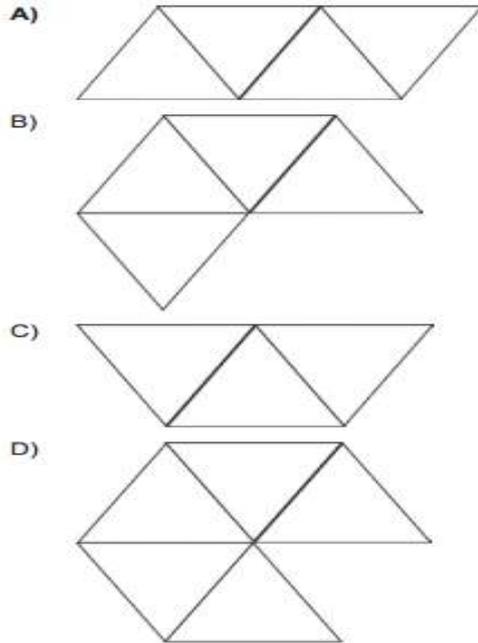
B) todos diferentes.

- C) três iguais e um diferente.
- D) apenas dois iguais.
- E) iguais dois a dois.

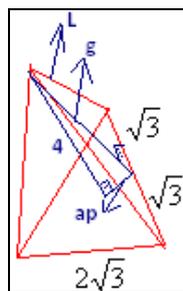
3 – (M090017PE-PUB) Veja o sólido abaixo.



A planificação desse sólido é



4 – Numa pirâmide regular de base triangular, a aresta da base mede $2\sqrt{3}cm$ e a altura mede 4 cm. Calcule o apótema da base, o apótema da pirâmide e a aresta lateral.



AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas ao tema estudado. As atividades a serem realizados em grupos de dois alunos, descritos nas páginas 12 a 13, servirão para pesquisar as competências e habilidades adquiridas pelos alunos. Por isso, deve ser estimulada e bonificada sua confecção (por exemplo, 1,0 ponto da média para os alunos que conseguirem êxito nas referidas atividades). Assim, o professor poderá avaliar a reflexão e o argumento crítico usado pelos alunos.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porém, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas do assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados nos bimestres anteriores.

Selecionar questões contemplando este conteúdo, para fazerem parte de uma avaliação contextualizada (exemplo as da página 16 e 17), a qual servirá para investigar a capacidade de utilização dos conhecimentos adquiridos e do raciocínio lógico para resolver problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ROTEIRO DE ACAA 4 – Descobrindo as áreas da pirâmide e do cone –
Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 2º ano do
Ensino Médio – 3º bimestre/2013 – <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/>
acessado em 08/09/2013

Sites:

<https://www.google.com.br/#q=Fotos+de+Pir%C3%A2mides+e+Cones.>

(Acessado em 08/09/2013).

<http://www.somatematica.com.br/emedio/espacial/espacial19.php>

(Acessado em 08/09/2013).

<http://professorwalmartadeu.mat.br/>

(Acessado em 15/08/2013)

<http://www.pensevestibular.com.br/exercicios-2/questoes-resolvidas/40-questoes-de-geometria-espacial-com-resolucoes>

(Acessado em 08/09/2013)