# FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA

# FUNDAÇÃO CECIERJ/SEEDUC-RJ

**CONTEÚDO: GEOMETRIA ESPACIAL - ESFERA**

**SÉRIE: 2ª ANO ENSINO MÉDIO/ 4º BIMESTRE / 2013**

**TUTOR: EDESON DOS ANJOS SILVA**

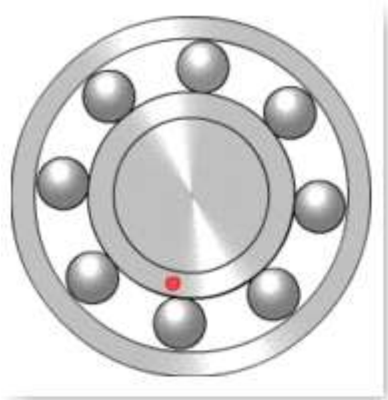
**PROFESSORA: SÔNIA MARIA FIRMINO VELOSO**

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

# GEOMETRIA ESPACIAL

# ESFERA



Maurits Escher (1898-1972) foi um artista holandês que uniu, como poucos, o universo da arte e das formas matemáticas. Um dos objetos mais utilizados pelo artista em suas obras foi a **esfera**. Observe ao lado a obra Três esferas, que Escher produziu com a técnica da xilografia (ou xilogravura em 1945).

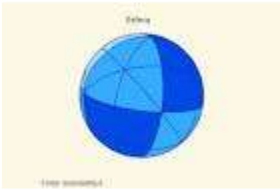
Agora responda:

- Como as três esferas apareceram?
- Que efeito o artista usou nessa obra para dar a noção de tridimensionalidade?
- Que efeito a esfera superior causa as outras? Como o artista produziu esse efeito?

Xilogravura é uma técnica de gravação em relevo que usa a madeira como matriz. Por meio dessa técnica é possível reproduzir imagens e textos sobre papel ou um material suporte adequado. Pode-se dizer que é processo inversamente parecido com o de um carimbo, pois, no caso da xilogravura, é o papel que é prensado com as mãos sobre a matriz. O texto ou desenho é entalhado sobre a madeira com o uso de instrumentos cortantes Depois, com um rolo de borracha aplica-se tinta sobre a matriz, tocando apenas as partes em relevo. O material escolhido é pensado sobre a madeira entalhada com tinta, finalizando assim a gravação.

São muitas as situações em que encontramos formas esféricas, ou seja, esferas ou pares de uma esfera.

Há ainda objetos que, apesar de não constituírem rigorosamente esferas, possuem uma forma muito próxima da esfera. Dentre esses objetos, temos a bola de futebol e a própria Terra que, por ser achatada nos pólos, não possui a forma de uma esfera perfeita. Mesmo assim, muitas vezes vamos considerar, para efeito de cálculos, como se fossem esferas perfeitas.



# METODOLOGIA

Como qualquer outro conteúdo será usado material didático existente na escola como apoio (o livro didático, biblioteca para pesquisas, quadro etc.), não como os únicos materiais a auxiliar o professor.  Este é um conteúdo que pode ser interagido com outras disciplinas principalmente com artes na construção das figuras e com o português com a interpretação dos problemas propostos nos exercícios.

O conteúdo será desenvolvido a partir de aulas expositivas, acompanhadas de aulas no laboratório usando os programas disponíveis nos computadores da escola..

Nas resoluções dos exercícios, o professor agirá como mediador, conduzindo os alunos à interpretação e aplicação das fórmulas quando necessárias.

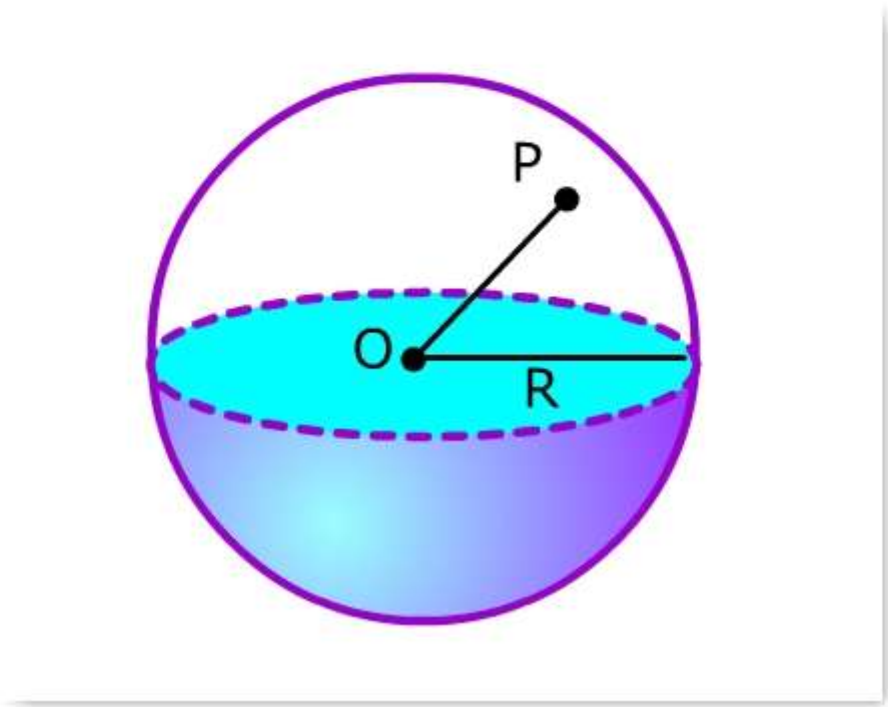
Propor atividades em aula e para casa, usando exemplos dos livros didáticos.

# DESENVOLVIMENTO

**ATIVIDADE 1**
**1ª e 2ª Aulas**

**Duração prevista:** 100 minutos.
**Objetivos:** Introduzir a história e o conceito de Esferas.
**Pré-requisitos:** Identificar e calcular volume e área de uma esfera.
**Material necessário:** Livro didático, quadro, pincel etc.
**Organização da classe:** Individual e em equipe.
**Descritores associados:** Compreender e diferenciar as formas, calcular os valores das incógnitas..

O sólido limitado por uma superfície esférica chama-se **esfera.** Desse modo, a **esfera de centro** O e **raio** r é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto O são menores ou iguais a r.



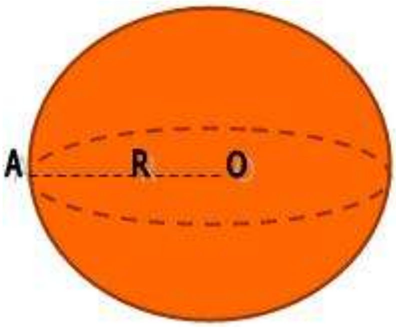

O conjunto de todos os pontos P do espaço cujas distâncias ao ponto O são iguais a r é denominado **superfície esférica de centro** O e **raio** r.

De uma forma bastante simples, podemos dizer que a superfície esférica é a casca enquanto a esfera é a reunião da casca como o miolo.

Naturalmente, as denominações centro e raio são aplicadas indiferentemente a uma superfície esférica ou à esfera por ela limitada.

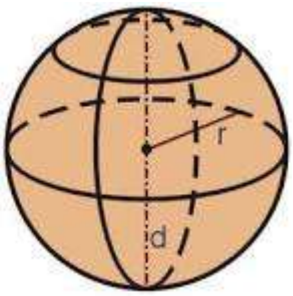
Área da superfície esférica de raio r é dada por:

$$S = 4\pi r^2$$




O volume de uma esfera de raio r é dado por:

$$S = \frac{4}{3}\pi r^2$$

A intersecção de uma esfera e um plano é um círculo:

O → centro da esfera.

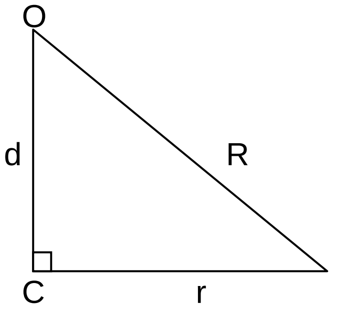
R → raio da esfera.

r → raio do círculo.

d →distância do círculo ao centro da esfera.

C → centro do círculo.

A relação entre R, r e d é dada pelo teorema de Pitágoras.




$$R^2 = r^2 + d^2$$

**Exercícios**

1- Uma esfera de raio 8 cm é seccionada por um plano distante 5 cm do seu centro. Calcule o raio da secção.

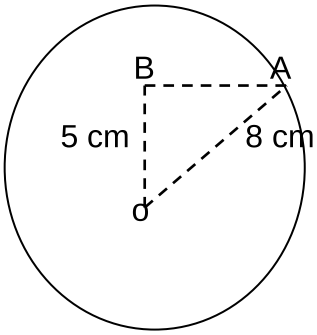
2- A professora Cristina produziu com seus alunos da pré-escola enfeites de natal na forma de esferas, com 12 cm de diâmetro cada. Para pintar a superfície dessas esferas, ela dispõe de uma latinha de tinta, em que o fabricante afirma ser possível pintar até $5m^2$ de superfície com esse conteúdo. Nessas condições, qual o número máximo de enfeites que Cristina poderá pintar?

3- Um cubo de aresta m está inscrito em uma semi-esfera de raio R de tal modo que os vértices de uma das faces pertencem ao plano equatorial da semi-esfera e os demais vértices pertencem à superfície da semi-esfera. Calcule m em função de R.

4- Um silo tem a forma de um cilindro circular reto (com fundo) encimado por uma semi-esfera, como na figura.
Determine o volume desse silo, sabendo que o raio do cilindro mede 2 m e que a altura do silo mede 8 m.

RESPOSTAS:

1-




Do triângulo retângulo OBA:

$R^2 = r^2 + d^2$
$8^2 = 5^2 + r^2$
$25 + r^2 = 64$
$r^2 = 64 – 25$
$r^2 = 39$
$r = \sqrt{39}$ cm

2- Em cada esfera: $\pi = \frac{12}{2} = 6$ cm e

$S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4 . \pi . 6^2 = 144\pi\ cm^2$

Fazendo $\pi = 3,14$; $S_{esfera} = 4\pi r^2 = 4 . (3,14) = 452,16\ cm^2$
Como é possível pintar até 5 $m^2$ = 50.000 $cm^2$, temos:

$\frac{50.000}{452,16} \cong 110,58$

3- Após fazer um figura de quadrado dentro da metade de um círculo (semi esfera). Na figura O é o centro comum à base da semi-esfera e ao quadrado **ABCD** situado nessa base, e **E** é um vértice do cubo e que pertence à superfície da semi-esfera.

Logo, AO = $m\sqrt{2}$ (metade da diagonal do quadrado ABCD)
No triângulo retângulo OAE, pelo teorema de Pitágoras:

$$R^2 = m^2 = \left(\frac{m\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow R^2 = m^2 = \frac{m^2}{2} \Rightarrow R^2 = \frac{3m^2}{2}$$

$$M^2 = \frac{2R^2}{3} \Rightarrow m = R\frac{\sqrt{2}}{3}$$

4- O volume do silo é igual à soma dos volumes de uma semi- esfera de raio 2 m e de um cilindro de raio 2 m e altura 6 m..

$$V_{semi\text{-}esfera} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^2}{2} \Rightarrow V_{semi\text{-}esfera} = \frac{\frac{4 .}{3}\pi . r^2}{2}$$

$V_{semi\text{-}esfera} = \dfrac{16\,\pi}{3}\ m^2$

$V_{cilindro} = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad V_{cilindro} = \pi \,.\, 2^2 \,.\, 6 \qquad V_{cilindro} = 24\pi\ m^2$

$V_{silo} = \dfrac{16\,\pi}{3} + 24\pi \quad \Rightarrow \quad V_{silo} = \dfrac{88\pi}{3}\ m^3$

## ATIVIDADES 2
## 3ª e 4ª Aulas

**Duração prevista:** 100 minutos.
**Objetivos:** Identificar, resolver os exercícios usando as fórmulas.
**Pré-requisitos:** Noções de representação de figuras dentro de uma esfera.
**Material necessário:** Quadro. Folha de atividades.
**Organização da classe:** Individual ou em equipes.
**Descritores associados:** aplicar as fórmulas no momento adequado.

### EXERCÍCIOS

1- Determine a área da superfície esférica cujo raio é 6 cm.

2- Uma laranja tem a forma esférica com a medida indicada abaixo. Qual é a área aproximada da casca dessa laranja?

3- Numa esfera, o diâmetro é 10 cm. Qual é a área da superfície dessa esfera?

4- Quantos metros quadrados de plástico são gastos aproximadamente para fazer o balão da figura ao lado

5- A área de uma superfície esférica é S. Calcule o raio R da esfera em função de S e dê o valor de R quando S = $36\,\pi\ cm^2$.

6- Uma secção plana feita a 3 cm do centro de uma esfera tem área igual a $16\,\pi\ cm^2$. Calcule o volume da esfera e a área da superfície esférica.

Respostas

1- $A = 4\pi R^2 = 4\pi \,.\, 6^2 = 144\pi\ cm^2 \cong 452{,}16\ cm^2$

2- $A = 4\pi R^2 = 4\pi \,.\, 4^2 = 64\pi\ cm^2 \cong 200{,}96\ cm^2$

3- $A = 4\pi R^2 = 4\pi \,.\, 5^2 = 100\pi\ cm^2 \cong 314\ cm^2$

4- $A = 4\pi R^2 = 4\pi \,.\, 6^2 = 144\pi cm^2 \cong 452{,}16 cm^2 = 0.045216\ m^2$

5- $S = 4\pi R^2 = R^2 = \dfrac{S}{4\pi} \Rightarrow R \ \dfrac{\sqrt{S}}{2\sqrt{2\pi}} = \dfrac{\sqrt{S\pi}}{2\pi}$

$S = 36\pi = R = \dfrac{\sqrt{36\pi^2}}{2\pi} \Rightarrow \dfrac{6\pi}{2\pi} = 3\ cm$

6- $S_{círculo} = \pi r^2 \Rightarrow 16\pi = \pi r^2 \Rightarrow r^2 = 16 \Rightarrow r = 4\ cm$

$$\left.\begin{array}{l} D = 3\ cm \\ r = 4\ cm \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} R^2 = r^2 + d^2 \\ R^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow R = 5\ cm \end{array}$$

$V = \dfrac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow V = \dfrac{4}{3} . \pi 5^3 \Rightarrow V = \dfrac{500}{3} \pi\ cm^3$

$S = 4\ \pi R^2 \Rightarrow S = 4 \,.\, \pi \,.\, 5^2 \Rightarrow S = 100\ \pi\ cm^2$

**AVALIAÇÃO**

**Duração prevista**: 100 minutos.
**Objetivos:** Avaliar o conhecimento.
**Pré-requisitos**: Noção intuitiva de Geometria Espacial - esferas.
**Material necessário**: Folha de atividades.
**Organização da classe:** Individual
**Descritores associados**: Compreender e interpretar e resolver as atividades propostas.

Colégio Estadual "Geraldino Silva"

Avaliação de Matemática- Turma: _____ data ___/___/___

Valor: 2,0 (dois pontos) Obteve: ____________

Aluno(a) __________________________________________

1- Calcule o volume de uma esfera de raio 2 cm.

a) ( ) $V = \frac{32\pi}{3}\ cm^2$
b) ( ) $V = \frac{16\pi}{3}\ cm^3$
c) ( ) $V = \frac{32\pi}{3}\ cm^3$
d) ( ) $V = \frac{32\pi}{5}\ cm^2$

2- Determine o volume e a área de uma superfície esférica cujo raio da esfera mede 3 m.

a) ( ) $V = 36\pi\ cm^3$ e $S = 36\pi\ cm^2$
b) ( ) $V = 16\pi\ cm^3$ e $S = 16\pi\ cm^2$
c) ( ) $V = 36\pi\ cm^2$ e $S = 36\pi\ cm^3$
d) ( ) $V = 16\pi\ cm^2$ e $S = 16\pi\ cm^3$

3- A área de uma superfície esférica mede $314cm^2$. Quanto mede o volume dessa esfera?

a) ( ) $V = 500\pi\ cm$

b) ( ) $V = \frac{500}{5}\pi\ cm^2$
c) ( ) $V = \frac{500}{5}\pi\ cm^3$
d) ( ) $V = \frac{500}{3}\pi\ cm^3$

4- Calcule a área de uma secção plana feita a 8 cm do centro de uma esfera de raio 10 cm.

a) ( ) $S = 36\pi\ cm^2$
b) ( ) $S = 16\pi\ cm^2$
c) ( ) $S = 36\pi\ cm^3$
d) ( ) $S = 16\pi\ cm^3$

5- Calcule a área do círculo máximo de uma esfera de raio igual a 7 cm.

a) ( ) $S = 14\pi\ cm^2$
b) ( ) $S = 49\pi\ cm^2$
c) ( ) $S = 28\pi\ cm^3$
d) ( ) $S = 07\pi\ cm^2$

6- Sabendo-se que o raio de um círculo de uma secção plana feita a 2 cm do centro de uma esfera é igual a 4 cm, determine o diâmetro de esfera.

a) ( ) $D = 4\sqrt{5}\ cm$
b) ( ) $D = 3\sqrt{5}\ cm^2$
c) ( ) $D = 2\sqrt{5}\ cm^3$
d) ( ) $D = 5\sqrt{4}\ cm$

7- A área de uma secção plana feita a 12 cm do centro de uma esfera é igual a $25\pi\ cm^2$. Calcule o raio da esfera.

a) ( ) R = 12 cm
b) ( ) R = 25 cm
c) ( ) R = 13 cm
d) ( ) R = 37 cm

GABARITO

| QUESTÕES | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| 01 | | | x | |
| 02 | x | | | |
| 03 | | | | x |
| 04 | x | | | |
| 05 | | x | | |
| 06 | x | | | |
| 07 | | | x | |

# BIBLIOGRAFIA

PAIVA, Manoel. Matemática – Paiva, volume 1. São Paulo: Moderna, 2009, 423p.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. Volume 2. São Paulo: Ática, 2010. 262p.

SMOLE, Kátia Stocco, Maria Ignez Diniz, Matemática Ensino Médio, volume 2, 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010, 260p.

GIOVANNI, José Roberto Bonjorno, José Giovanni Jr., Matemática Completa: Ensino Médio. Editora FTD, São Paulo, 301p.

GIOVANNI, José Roberto Bonjorno, José Giovanni Jr., Matemática Fundamental : 2º Grau. Editora FTD, São Paulo, 476p.

Sites acessados:

Símbolos Matemáticos. Disponível em <http://www.qieducacao.com/2010/09/simbolos-matematicos.html>. Acesso em 5 mar. 2013.

Algumas gravuras foram tiradas deste site: internet

*www.algosobre.com.br › Matemática*
*guiadoestudante.abril.com.br › Home › Estudar*