

PLANO DE TRABALHO 1 – 1º BIMESTRE – 2014

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: CIEP 343 PROFª EMÍLIA DINIZ LIGIÉRO
PROFESSOR: ANA CRISTINA PEREIRA COSTA
MATRÍCULA: 914400-7
SÉRIE: 3ª
GRUPO: 2
TUTOR (A): DANÚBIA DE ARAÚJO MACHADO

PLANO DE TRABALHO **ANÁLISE COMBINATÓRIA**

Ensino Médio - 3ª Série

Introdução

Este Plano de Trabalho foi elaborado para ser aplicado na turma 3001 do CIEP 343 Profª Emília Diniz Ligiéro, em Laje do Muriaé.

As atividades propostas neste plano têm como objetivo levar o aluno a entender a Análise Combinatória através da resolução de situações-problema do cotidiano, induzindo o raciocínio lógico e demonstrando as fórmulas que auxiliam na solução de tais problemas.

Este plano procura trabalhar os vários tipos de agrupamento, consequências do Princípio Multiplicativo, de maneira gradativa, de modo que o próprio aluno, utilizando uma maneira organizada para a contagem, possa estar diferenciando Permutação, Arranjo e Combinação.

Como avaliação, serão propostos alguns exercícios de fixação para serem resolvidos individualmente afim de que o professor possa ter a verdadeira noção da aprendizagem de cada aluno.

O tempo aproximado para a aplicação deste plano é de 3 semanas.

Desenvolvimento

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

ASSUNTO: Análise Combinatória

OBJETIVOS: Aplicar o Princípio Multiplicativo na resolução de problemas de contagem.

PRÉ-REQUISITOS: Operações com números naturais.

MATERIAL NECESSÁRIO: folha de atividade, lápis e borracha.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: disponha os alunos em grupos com quantidades que lhe forem adequadas para o estímulo de um com os outros.

DESCRIPTOR ASSOCIADO AO CURRÍCULO MÍNIMO: H60 – Resolver problemas de contagem, utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjos simples e/ou combinações simples.

.

Atividade: Como chego à arquibancada

Descrição da atividade

São apresentadas quatro situações distintas em que o aluno deverá aplicar o Princípio Multiplicativo para calcular de quantas formas uma torcida de futebol poderá entrar ou sair de um estádio ou de quantos modos poderá ocorrer a classificação final do campeonato.

Como chego à arquibancada?

Questão 1

Existem 4 portões para que a torcida possa entrar no estádio: 1, 2, 3 e 4. Estando dentro do estádio, existem 6 acessos para as arquibancadas: Azul (A), Branco (B), Coral (C), Rosa (R), Vermelho (V) e Preto (P).

a. Quais são todas as possibilidades para que um torcedor possa entrar no estádio e chegar até a arquibancada, considerando como diferentes as entradas em que pelo menos um portão ou um acesso sejam diferentes?

O torcedor pode escolher um dos 4 portões e, estando lá, deverá escolher ainda um dos 6 acessos. São, portanto, as seguintes diferentes possibilidades de entrada nesse estádio:

Portão	Acesso	Portão/Acesso	Portão	Acesso	Portão/Acesso
1	Azul	1A	3	Azul	3A
	Branco	1B		Branco	3B
	Coral	1C		Coral	3C
	Rosa	1R		Rosa	3R
	Vermelho	1V		Vermelho	3V
	Preto	1P		Preto	3P
2	Azul	2A	4	Azul	4A
	Branco	2B		Branco	4B
	Coral	2C		Coral	4C
	Rosa	2R		Rosa	4R
2	Coral	2C	4	Coral	4C
	Rosa	2R		Rosa	4R
	Vermelho	2V		Vermelho	4V
	Preto	2P		Preto	4P

b. Como você pode calcular o total dessas possibilidades, sem exibir cada caso?

Um modo prático para o cálculo desse número é pelo Princípio Multiplicativo:

Número de possibilidades de escolha do portão de entrada: 4

Número de possibilidades de escolha do acesso para as arquibancadas: 6

Como as possibilidades de escolha dos portões e dos acessos são independentes (por qualquer portão que se entre, é possível chegar a qualquer acesso à arquibancada), pode-se aplicar o Princípio Multiplicativo e concluir:

O número total de possibilidades de entrada no estádio é:

$4 \times 6 = 24$ possibilidades.

Questão 2

E se o torcedor quiser saber de quantos modos ele poderá entrar e sair do estádio, usando um dos portões e um dos acessos e, de novo, considerando como percursos diferentes aqueles em que haja, pelo menos, um portão ou um acesso diferente na entrada ou na saída?

Como já calculado na Questão 1, temos $4 \times 6 = 24$ possibilidades de entrada no estádio. Para sair, podemos utilizar o mesmo raciocínio e concluir que temos também $6 \times 4 = 24$ possibilidades de saída do estádio. Como o torcedor entra e sai, escolhendo o percurso de saída qualquer que tenha sido o de entrada, podemos aplicar novamente o Princípio Multiplicativo e concluir que ele terá

$24 \times 24 = 576$ possibilidades para entrar e sair do estádio.

Questão 3

E se o torcedor quiser saber de quantos modos ele poderá entrar e sair do estádio, sem usar na saída o mesmo portão nem o mesmo acesso que ele usou na entrada?

Para entrar no estádio, teremos $4 \times 6 = 24$ possibilidades.

Para sair, como ele não pode repetir o acesso nem o portão que utilizou para entrar, terá 5 possibilidades para escolha do acesso e 3 possibilidades para escolha do portão, ou seja, $5 \times 3 = 15$ possibilidades para a saída do estádio. Como o torcedor entra e sai, terá um total de $24 \times 15 = 360$ possibilidades para entrar e sair, usando portões e acessos distintos.

Questão 4

Um campeonato é disputado por 4 equipes. Segundo as regras deste torneio, não poderá haver empate no final. De quantos modos poderá ser a classificação final deste campeonato (sendo considerados diferentes modos em que pelo menos um dos times tenha classificação distinta)?

Qualquer uma das 4 equipes pode chegar em primeiro. Em segundo lugar, qualquer uma das 3 restantes. Em terceiro lugar, qualquer uma das 2 restantes. E uma delas chegará em quarto.

Pelo Princípio Multiplicativo teremos $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ possibilidades de classificação final.

.👉 As questões propostas estão resolvidas por meio da aplicação do Princípio Multiplicativo.

O Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem pode ser enunciado como:

Se uma decisão pode ser tomada de m maneiras e se, uma vez tomada essa decisão, uma outra decisão puder ser tomada de n maneiras, então, o número de maneiras de se tomarem essas duas decisões é dado pelo produto $m \times n$.

Talvez os alunos não conheçam ainda esse princípio ou não se recordem dele, mas a observação da tabela da Questão 1 pode esclarecer e justificar sua aplicação. Naquele caso, para cada escolha de portão do estádio, existem 6 escolhas possíveis de acesso, o que justifica o produto $4 \times 6 = 24$.

De modo geral, esse princípio aplica-se ainda para um número finito qualquer de decisões. Observe que na Questão 4 estão envolvidas quatro decisões: a escolha dos quatro primeiros lugares de um campeonato.

Desenvolvimento

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

ASSUNTO: Análise Combinatória

OBJETIVOS: Resolver problemas de contagem

PRÉ-REQUISITOS: Operações com números naturais.

MATERIAL NECESSÁRIO: folha de atividade, lápis e borracha.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: alunos dispostos em grupos com quantidades que lhe forem adequadas para o estímulo de um com os outros.

DESCRIPTOR ASSOCIADO AO CURRÍCULO MÍNIMO: Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas.

Atividade • Qual é mesmo o número do telefone?

Descrição da atividade

Num dia desses, indo para o trabalho, Carol viu o número de telefone de uma loja de roupas com peças interessantes. Reparou que ele começava com os mesmos 4 dígitos do seu próprio telefone e que os 4 dígitos finais eram números divisíveis por 3, sem repetição. No final do dia, quando chegou a casa e pensou em telefonar para a loja, percebeu que não se lembrava da ordem em que os múltiplos de 3 estavam no número. Ela pensou que poderia ligar para todos aqueles que comessem com os mesmos 4 dígitos do telefone dela e terminassem com os dígitos 0, 3, 6 e 9, em alguma ordem. Foi aí que ela pensou: seriam quantas essas tentativas?

Vamos ajudar Carol a fazer esse cálculo? Quantos seriam?

Este é um problema de contagem e, como você sabe, nesses casos o importante é contar todos os casos e cada caso uma única vez. Essa observação parece simples, mas os erros na contagem são exatamente por uma dessas falhas.

Para ter certeza de que todos os casos são contados e uma só vez cada um, você vai precisar de uma certa organização. Combine com seus colegas de grupo qual a organização que vocês vão adotar

Espera-se que o grupo escolha uma organização para apresentar todas as possibilidades de sequências de 4 dígitos, 0, 3, 6 e 9, sem repeti-los. A diferença entre uma possibilidade e outra está, portanto, na ordem em que esses dígitos são considerados. Juntando os cartões de cada aluno do grupo, eles terão mais condições de iniciar a montagem da lista dessas sequências.

Uma organização possível será considerar as 4 posições e irem colocando as possibilidades. Começando por aquelas em que o 0 ocupa a 1ª posição, vão trocando as posições dos demais a partir dos últimos:

0	3	6	9
0	3	9	6
0	6	3	9
0	6	9	3
0	9	3	6
0	9	6	3

Essas foram as 6 possibilidades que começam com o 0. Não é possível construir nenhuma outra começando por 0 e essas 6 são todas distintas.

Da mesma forma, poderiam ser construídas as possibilidades começando por 3 ou por 6 ou por 9. Em cada um desses casos, seria possível formar 6 novas possibilidades. Estas novas possibilidades não coincidem entre elas, pois cada um dos grupos de 6 tem números diferentes como 1º termo.

A quantidade total de possibilidades é, portanto, a soma de todos esses casos, ou seja:

$6 + 6 + 6 + 6 = 24$. (Princípio Aditivo = as quantidades de casos se somam, pois não existe possibilidade de repetição em cada uma dessas coleções.)

Uma outra forma de organização seria a seguinte:

Colocado o 0 na 1ª posição, há outros 3 números que podem ocupar a 2ª posição. Escolhidos esses 2 primeiros números, há ainda outros 2 que podem ocupar a 3ª posição. Fixadas essas 3 posições, não há mais escolha possível, pois sobrou um só número para a 4ª posição:

Colocado o 0 na 1ª posição, há outros 3 números que podem ocupar a 2ª posição. Escolhidos esses 2 primeiros números, há ainda outros 2 que podem ocupar a 3ª posição. Fixadas essas 3 posições, não há mais escolha possível, pois sobrou um só número para a 4ª posição:

1ª posição	4 escolhas possíveis.
2ª posição	Escolhido o número anterior, só há 3 escolhas possíveis.
3ª posição	Escolhidos os dois números anteriores, só há 2 escolhas possíveis.
4ª posição	Já foram escolhidos três números, só há 1 para ocupar esta posição.

Ora, se são possíveis 4 escolhas na 1ª posição e, para cada escolha há ainda 3 escolhas para a 2ª posição, até aí, temos 4×3 escolhas. Continuando para cada uma dessas escolhas até a 2ª posição, há 2 escolhas para a 2ª posição, o que significa $4 \times 3 \times 2$ escolhas possíveis até a 3ª posição. Agora, não há mais escolhas, só há 1 número sobrando em cada um desses casos para completar o número de telefone que a Carol procura. Só por questão de estética, escreve-se, então, o número máximo de ligações que a Carol precisa fazer como: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Resposta

Com, no máximo 24 ligações, Carol iria chegar ao número de telefone da loja procurada

Questão 2

(Saerjinho, 2º bimestre de 2011, 3ª Série do Ensino Médio, Questão 18, ligeiramente adaptada)

Ana comprou um conjunto ornamental para jardins, composto pela Branca de Neve e os sete anões e pretende organizá-los em fila. De quantas maneiras diferentes esses enfeites podem ser organizados no jardim (considerando como maneiras diferentes aquelas em que a ordem das estátuas seja diferente)?

- a. 8
- b. 16
- c. 64
- d. 20 160
- e. 40 320

A resposta correta é a alternativa (e).

Se Ana quer colocá-los em fila, basta utilizar o Princípio Multiplicativo, para o cálculo das permutações de 8 elementos. Acrescentando uma etapa ao argumento usado no cálculo das ligações que Carol teria de dar se só se lembrasse do primeiro dígito do telefone da loja, o resultado será:

$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 56 \times 24 \times 3 \times 10 = 40.320.$$

Questão 3

Um representante farmacêutico tem de visitar 6 cidades. A sorte dele é que existe uma estrada que liga quaisquer duas dessas cidades, sem passar pelas outras. Ao

planejar sua viagem, ele quer saber de quantas maneiras ele pode fazer esse trajeto, passando uma única vez por cada uma das cidades A, B, C, D, E e F.

Você e seus colegas de grupo vão ajudá-lo nesse cálculo. Em princípio, a viagem dele pode começar e terminar em qualquer uma dessas cidades, mas sempre passando uma só vez em cada uma.

Se os alunos já conhecem a linguagem de Análise Combinatória e suas fórmulas, vão perceber que cada um dos trajetos é uma permutação dos 6 elementos: A, B, C, D, E, F e são em número de $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

Se, por outro lado, ele ainda não conhece esse formalismo, pode ir raciocinando da seguinte forma:

Há 6 possibilidades para o início da viagem. Tendo visitado essa primeira cidade, há ainda 5 escolhas para 2ª cidade. Tendo visitado as 2 primeiras cidades, há 4 escolhas para 3ª cidade, e, prosseguindo, ao visitar as 3 primeiras cidades, sobram 3 escolhas para a 4ª cidade, depois dela há ainda 2 escolhas para a 5ª cidade e sobra uma única escolha possível para a 6ª cidade. São trajetos possíveis, por exemplo: A, B, C, D, E, F ou B, C, A, D, E, F, etc.

Foram, portanto, 6, 5, 4, 3, 2, 1 possibilidades em sequência de escolhas. Esquemáticamente:

1ª cidade	2ª cidade	3ª cidade	4ª cidade	5ª cidade	6ª cidade
6 possibilidades	5 possibilidades	4 possibilidades	3 possibilidades	2 possibilidades	1 possibilidade.

Isso significa (Princípio Multiplicativo) que são $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6! = 720$ trajetos possíveis.

Questão 4

Mais tarde, o representante farmacêutico pensou melhor e pretende fazer um trajeto que comece e termine na cidade A. Quantos são agora os trajetos possíveis?

De novo, o aluno que conhece Análise Combinatória vai perceber que, tendo fixado a primeira cidade como sendo A, resta ordenar as outras 5 cidades, o que leva os trajetos possíveis a serem em número de $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Da mesma forma, o aluno que vai “pegar o touro à unha”, sabe que, partindo de A, o viajante tem 5 escolhas para 2ª cidade, daí terá 4 escolhas para 3ª cidade e 3

para a 4ª cidade, 2 para a 5ª cidade e 1 para a 6ª cidade, de onde ele voltará à cidade A. São trajetos possíveis: A, B, C, D, E, F, A ou A, B, D, E, F, C, A, etc.

Esquemáticamente:

Início do trajeto	2ª cidade	3ª cidade	4ª cidade	5ª cidade	6ª cidade	Término do trajeto
A	5 possibilidades	4 possibilidades	3 possibilidades	2 possibilidades	1 possibilidade	A

E, pelo mesmo Princípio Multiplicativo, o número deles é $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$.

Questão 5

(Saerjinho, 2º bimestre de 2011, 3ª série, Questão 41- Adaptada):

Pedro é um supersticioso e acredita que os números ímpares dão sorte. Ele escolheu para a placa de seu carro um número formado por quatro dígitos, todos números ímpares e distintos.

A quantidade de opções numéricas para a placa do carro de Pedro é igual a

- a. 5
- b. 20
- c. 120
- d. 480
- e. 625

A resposta correta é o item **(c)**. Todos os dígitos devem ser números ímpares e distintos entre si, que são 5 ímpares (1,3,5,7,9). Então há 5 possibilidades de escolha do primeiro, 4 para o segundo, 3 para o terceiro e 2 para o quarto. Temos então: $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ opções numéricas para a placa do carro de Pedro.

Desenvolvimento

DURAÇÃO PREVISTA: 100 minutos

ÁREA DE CONHECIMENTO: Matemática

ASSUNTO: Análise Combinatória

OBJETIVOS: Distinguir agrupamentos em que a ordem faz diferença de outros em que ela não faz.

PRÉ-REQUISITOS: Operações com números naturais.

MATERIAL NECESSÁRIO: folha de atividade, lápis e borracha.

ORGANIZAÇÃO DA CLASSE: disponha os alunos em grupos com quantidades que lhe forem adequadas para o estímulo de um com os outros.

DESCRIPTOR ASSOCIADO AO CURRÍCULO MÍNIMO: Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos.

Apresentação

Nos problemas de contagem de agrupamentos, existem situações em que a ordem dos elementos precisa ser levada em conta e outras em que, modificada esta ordem, o tipo de agrupamento permanece o mesmo. Esta dinâmica apresenta situações em que a ordem dos elementos precisa ser levada em conta e situações em que a mudança de ordem dos elementos não cria outro agrupamento. Sendo introdutória no assunto, o que é apresentado aqui foge do uso de nomenclatura técnica e de fórmulas, restringindo-se a abrir caminho para introdução dessa nomenclatura e apresentação e demonstração das fórmulas de arranjos e combinações.

Atividade: Tudo acaba em Pizza?

Descrição da atividade

Os alunos serão apresentados a três situações que envolvem a contagem de possibilidades que podem ocorrer em cada uma delas. Em seguida, vão analisar a diferença entre elas, quanto à interferência da ordem dos elementos nessa contagem.

Caro estudante

Na linguagem popular, a expressão “terminar em pizza” tem o sentido negativo de impunidade, na forma de confraternização final numa situação em que uns deveriam condenar outros, mas não o fazem.

Vamos viajar para um país distante e estudar três situações, uma delas com 5 juízes e duas outras com 5 bolas numeradas numa urna.

Você e seus companheiros de grupo são convidados a responder a uma pergunta sobre quantas possibilidades podem ocorrer em cada uma das situações descritas a seguir e analisar a diferença entre elas, sob o ponto de vista dessa contagem.

Situação 1

Cinco juízes acabam de julgar, numa seção secreta, um time de futebol que não chegou a tempo para uma partida. O resultado do julgamento do time de futebol foi de 2 votos a favor e 3 votos contra o time. Nesse caso, a votação não “terminou em pizza”. O treinador do clube gostaria de saber quem foram os juízes que votaram a favor.

Situação 2

Numa urna há 5 bolas numeradas de 1 a 5. Será feito um sorteio de números de 2 algarismos, com a retirada de 1 bola da urna para formar a dezena e a retirada de outra bola da urna para o algarismo da unidade. Esse segundo sorteio será dentre as bolas que sobraram lá dentro, sem retorno da 1ª bola sorteada.

Questão 1

Na Situação 1, enumerando os juízes de 1 a 5, você deve informar a esse treinador quantas são as possibilidades das duplas de juízes que defenderam o time.

Se o Juiz 1 votou a favor do time, o outro Juiz pode ter sido o 2, o 3, o 4 ou o 5: são 4 duplas que contêm o Juiz 1.

Se o Juiz 3 votou a favor, além das duplas com os Juízes 1 e 2 que já foram contadas, há ainda a possibilidade do 2º voto ser do Juiz 4 ou do Juiz 5. São mais 2 duplas.

E, afinal, há ainda a dupla dos Juízes 4 e 5, o que acrescenta 1 dupla.

Ao todo, as possibilidades são de $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ duplas.

Um outro modo de contar estas duplas, que não é tão natural, mas que remete a uma expressão mais simples de ser calculada com números maiores e mais

perto de uma generalização é o que segue: cada um dos 5 juízes pode fazer dupla com os outros 4. Seriam, então, $5 \times 4 = 20$ duplas. Acontece que nesta contagem cada dupla foi contada 2 vezes: por exemplo, a dupla dos Juízes 2 e 4 foi contada quando o Juiz 2 foi acompanhado no voto pelo Juiz 4 e quando o Juiz 4 foi acompanhado no voto pelo Juiz 2. Sendo assim, o número de duplas é a metade do número encontrado e, portanto, igual a $20/2 = 10$, como foi encontrado no processo anterior.

Questão 2

Um tanto desconfiado do resultado que lhe foi informado, o Treinador conversou com o Tesoureiro do time que lhe disse:

- ☞ Está certo esse resultado e ele coincide com o número de possibilidades da Situação 2, em que você considera números formados por 2 algarismos, dentre 1, 2, 3, 4 e 5, sem repeti-los.

Você concorda com o Tesoureiro? Justifique sua resposta, calculando o número de possibilidades desses números.

Os alunos que formaram as duplas a partir do Juiz 1, certamente, vão começar a contagem pelos números em que o algarismo da dezena seja 1. Nesse caso, o algarismo das unidades pode ser 2, ou 3, ou 4, ou 5. Isto é, são formados 4 números distintos: 12, 13, 14 e 15.

Ao considerar, agora, os números com algarismo 2 na posição das dezenas, o número em que o algarismo das unidades seja 1, 21, ainda não foi contado, diferentemente do que acontecia com as duplas dos Juízes, em que o voto da dupla Juiz 1 e Juiz 2 não era diferente do voto da dupla Juiz 2 e Juiz 1. Sendo assim, com o 2 na posição das dezenas, podem ser formados também 4 números distintos entre si e distintos daqueles contados anteriormente: 21, 23, 24 e 25.

Esse raciocínio, mostra que há ainda 4 números distintos entre si e entre os demais com o algarismo 3 na posição das dezenas e 4 com o algarismo 4 nessa posição. O mesmo acontece para o algarismo 5. Ou seja, a quantidade total de números distintos que podem ser formados na Situação 2 é igual a $5 \times 4 = 20$. Logo o Tesoureiro estava enganado.

Os alunos que tenham usado o segundo processo de contagem ao responder à Questão 1, já chegaram diretamente a este resultado, não fazendo sentido a divisão por 2, tendo em vista que, na Situação 2, números como 24 e 42 são distintos.

Situação 3

Ainda desconfiando da informação do Tesoureiro, o Treinador foi conversar com um Gandula do clube que gostava muito de passar rifas beneficentes. Ao expor ao Gandula as 2 situações, ouviu a seguinte resposta:

.👉 Ora Sr. Treinador, o Tesoureiro entende de altas quantias e de impostos, mas de sorteios, entendo eu. Os votos dos Juízes não podem ser comparados ao sorteio de números de 2 algarismos, mas ao sorteio de 2 números de 1 algarismo só. É um jogo de duplas. Seria um sorteio de mini-duplas numa cartela com os números de 1 a 5, onde você marca 2 números. No dia do sorteio, são retiradas 2 bolas (ao mesmo tempo) da urna. O número de possibilidades das duplas de Juízes é igual o número de jogos possíveis nessa cartela.

Questão 3

O Gandula está certo?

Agora, sim, o Gandula deu um exemplo análogo ao da votação dos Juízes. Pois, se você pode marcar 2 números na cartela, não faz diferença se marcou o 2 antes ou depois do 4, por exemplo. E o número de possibilidades desse jogo é também igual a $20/2 = 10$, como no caso dos votos dos Juízes.

Questão 4

(Saerjinho, 1ª bimestre de 2011, 3ª Série do Ensino Médio, Questão 49, ligeiramente adaptada.)

Treze competidores disputam um campeonato de xadrez em que cada competidor joga uma vez com todos os outros. Quantos jogos serão realizados nesse campeonato?

- a. 13
 - b. 26
 - c. 78
 - d. 156
 - e. 169
-

Este problema pode ser resolvido de várias maneiras, mas, é provável que os alunos usem o princípio aditivo, escolhendo ordenadamente os competidores. Um jogador não joga consigo próprio, logo o primeiro deles terá 12 adversários, serão 12 jogos. O jogo do segundo com o primeiro já foi contado, mas o segundo deve jogar ainda com outros 11 adversários. Da mesma forma, o terceiro jogador tem ainda que jogar com 10 adversários e, assim por diante, até o 12º competidor que terá um jogo ainda não contado que é aquele contra o 13º adversário. A esta altura, todos os jogos com o 13º competidor já foram contados. O total de jogos será, portanto igual à soma: $12 + 11 + 10 + \dots + 1$. Essa soma pode ser calculada diretamente, pois o número de parcelas não é muito grande, mas, lembrando a história do menino Gauss que fez uma soma dessas de 1 a 100 em poucos minutos, podemos calcular 2 vezes essa soma, verificando que:

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	+11	+12
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13

O que significa que o dobro dessa soma é o produto de 13 por 12. Logo, a soma

é calculada como: $\frac{13 \times 12}{2} = \frac{156}{2} = 78$ e a opção correta é (c).

Ou ainda pode-se observar que elas formam uma progressão aritmética (PA) com 12 termos, cujo primeiro é 1, a razão é 1 e o último termo é 12. Assim, utilizando a fórmula da soma dos termos de uma PA (obtida exatamente pelo processo usado por Gauss), chega-se à resposta correta:

$$S_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \times 12}{2} = \frac{(1 + 12) \times 12}{2} = \frac{13 \times 12}{2} = 78.$$

Observe que a fração $\frac{13 \times 12}{2}$ é justamente o cálculo que faria um estudante que fizesse a contagem pelo outro processo usado no cálculo da dupla dos juízes. Cada

1 dos 13 competidores deve jogar com os 12 adversários, o que daria 13×12 jogos. Mas, nessa contagem, cada jogo está contado 2 vezes, quando o jogador Fulano joga com o jogador Cícrono e quando o jogador Cícrono jogaria com o jogador Fulano. Mas os 2 competidores se enfrentam uma única vez. Logo, esse número deve ser dividido por 2 e o resultado seria dado por $\frac{13 \times 12}{2}$.

É possível ainda que algum aluno, que já conheça a nomenclatura e as fórmulas da Análise Combinatória, identifique os agrupamentos envolvidos como combinações de 13 elementos tomados 2 a 2. Neste caso, faria o cálculo diretamente, utilizando a fórmula correspondente para combinações de n elementos tomados p a p :

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_2^{13} = \binom{13}{2} = \frac{13!}{2!(13-2)!} = \frac{13!}{2!11!} = \frac{13 \times 12}{2} = 78.$$

ATIVIDADES AVALIATIVAS

ATIVIDADES AVALIATIVAS

(TEMPO PREVISTO: 100 minutos para aplicação

100 minutos para correção

Descritores associados ao Currículo Mínimo:

- Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.
- Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo na resolução de problemas.
- Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos.

As atividades propostas a seguir possuem o objetivo de fazer uma avaliação diagnóstica da aprendizagem dos alunos em relação ao assunto abordado neste Plano de Trabalho: Análise Combinatória. Esta fase da implementação é importante para o professor porque os resultados obtidos nortearão as ações pedagógicas para a elaboração de atividades que objetivem revisar os tópicos que não foram bem assimilados pelos alunos. Estas atividades devem ser realizadas individualmente para que o professor possa analisar com mais detalhe a aprendizagem de cada aluno.

1- Durante a aula de Geografia, um aluno pretende pintar as cinco grandes regiões (Centro-Oeste, Nordeste, Norte, Sudeste e Sul) em um mapa do Brasil. Sabendo que o aluno tem disponíveis 10 lápis de cores diferentes e que não será utilizada a mesma cor para pintar regiões diferentes, determine de quantas maneiras distintas o mapa poderá ser pintado.

2- Mariana faz parte da comissão de formatura de sua escola que é composta por 8 alunos. Mariana deverá escolher entre os membros da comissão 3 pessoas para acompanhá-la em uma reunião. De quantas maneiras distintas Mariana poderá fazer esta escolha?

3- De sua casa ao trabalho, Silva pode ir a pé, de ônibus ou de metrô. Do trabalho à faculdade, ele pode ir de ônibus, metrô, trem ou pegar uma carona com um colega. De quantos modos distintos Silva pode, no mesmo dia, ir de casa ao trabalho e de lá para faculdade?

4-(UF-AL) Quantos números pares de quatro algarismos distintos podem ser formados com os elementos do conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$?

a) 60 b) 48 c) 36 d) 24 e) 18

5- (UMC-SP) O diretor de um pronto-socorro dispõe de 5 médicos, 4 enfermeiros e 4 atendentes para escalar uma equipe de plantão. A equipe é formada por 3 médicos, 2 enfermeiros e 1 atendente. O número de equipes diferentes que o diretor poderá formar é de:
a) 24 b) 72 c) 80 d) 120 e) 240

6- (UFF-RJ) Com as letras da palavra PROVA podem ser escritos x anagramas que começam por vogal e y anagramas que começam e terminam por consoante. Os valores de x e y são, respectivamente:

a) 48 e 36 b) 48 e 72 c) 72 e 36 d) 24 e 36 e) 72 e 24

7- Do cardápio de um restaurante constam 8 tipos de salada, 4 tipos de massa e 5 tipos de grelhado. De quantas formas distintas um cliente pode fazer um pedido de uma massa acompanhada de uma salada e um grelhado?

8- Numa pesquisa *on-line* pediu-se aos entrevistados que escolhessem dois dias da semana, em ordem de preferência, para a realização de um amistoso da seleção brasileira. Quantas respostas distintas podem ter sido obtidas?

9-(Uneb-BA) Uma senhora idosa foi retirar dinheiro em caixa eletrônico, mas se esqueceu da senha. Lembrava que não havia o algarismo 0, que o primeiro algarismo era 8, o segundo era par, o terceiro era menor que 5 e o quarto e último era ímpar. Qual o maior número de tentativas que ela pode fazer, no intuito de acertar a senha?

10- (PUC-SP) No saguão de um teatro, há um lustre com 10 lâmpadas, todas de cores distintas entre si. Como medida de economia de energia elétrica, o gerente desse teatro estabeleceu que só deveriam ser acesas, simultaneamente, de 4 a 7 lâmpadas, de acordo com a necessidade. Nessas condições, de quantos modos distintos podem ser acesas as lâmpadas desse lustre?

11- (U.F. São Carlos-SP) A câmara municipal de um determinado município tem exatamente 20 vereadores, sendo que 12 deles apóiam o prefeito e os outros são contra. O número de maneiras diferentes de se formar uma comissão contendo exatamente 4 vereadores situacionistas e 3 oposicionistas é:

a) 27 720 b) 13 860 c) 551 d) 495 e) 56

12- (Unifesp-SP) Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes será possível fazer essas escolhas?

a) 64
b) 126
c) 252
d) 640
e) 1260

Referências Bibliográficas

CAED/SAERJ. Avaliação Diagnóstica - Língua Portuguesa e Matemática 3ª série do Ensino Médio. 2011 e 2012.

DINÂMICAS 1, 2 3 e 4 Reforço Escolar – Análise Combinatória – Curso de Formação para Dinamizadores de Matemática oferecido por CECIERJ referente à 3ª série do Ensino Médio – 1º bimestre/2013.

PAIVA, M. **Matemática – Ensino Médio**. Vol. Único. 1. ed. São Paulo: Ed. Moderna, 2005.

RIBEIRO, J. **Ciência, Linguagem e Tecnologia – Ensino Médio Matemática**. Vol 2. 1. ed. São Paulo: Ed. Scipione, 2011.

ROTEIROS DE AÇÃO – Análise Combinatória – Curso de Formação Continuada oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 1º bimestre/2014.