FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ/ CONSÓRCIO CEDERJ

MATEMÁTICA – 3º ANO- 1º BIMESTRE DE 2014

PLANO DE TRABALHO SOBRE
ANÁLISE COMBINATÓRIA

TAREFA 1

GRUPO 1

CURSISTA: RENATA SIQUEIRA REIS

TUTORA: BIANCA

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Trabalhar com Análise Combinatória pode ser muito prazeroso e, ao mesmo tempo, muito desinteressante, dependendo de como a abordagem seja feita.

A fim de tornar o máximo interessante possível, vamos utilizar recursos como vídeos e slides, para intercalar as explicações.

Os conceitos serão estudados, um a um, para tornar o entendimento do conteúdo mais fácil e, no final, serão feitas atividades envolvendo princípio fundamental da contagem, permutação, arranjo e combinação.

Após termos interiorizado esses conceitos, estudaremos a teoria da probabilidade e suas aplicações.

DESENVOLVIMENTO

ATIVIDADE 1

- PRÉ-REQUISITO: operações básicas (adição, multiplicação)
- DURAÇÃO: 100 minutos
- RECURSOS: Folha de atividades, lápis e borracha, além de datashow e notebook.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma disposta em semicírculo para que possam apreciar o filme e discutir as atividades.
- OBJETIVOS: familiarizar os alunos com os conceitos primitivos da Análise Combinatória.
- METODOLOGIA: Apresentar o filme "De malas prontas" aos alunos e, a seguir, discutir as atividades disponibilizadas abaixo.
- DESCRITORES: resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo.

http://www.youtube.com/watch?v=hlGLhnhVu7Q#t=26

Acompanhe o raciocínio da resolução do problema a seguir:
Uma pessoa vai a um restaurante e na promoção ela deve montar a sua refeição escolhendo uma entrada, um prato principal e uma sobremesa.
No cardápio constam 3 tipos de entradas, 5 tipos de pratos quentes e 4 tipos de sobremesa. De quantas formas diferentes essa pessoa pode montar a sua refeição?

sala
da
sopa
patê
s

bife
ma
ssa
tort
a
fra
ngo
pei
xe

bolo
fruta
mous
se
pudi
m

3 possibilidades 5 possibilidades 4 possibilidades

A quantidade de refeições é obtida multiplicando-se todas as possibilidades. Sendo assim:
$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ refeições

Atividade 1

Pedro decidiu comemorar seu aniversário juntamente com sua namorada Deise, saindo para jantar num restaurante. Na hora marcada, Pedro chegou à casa de Deise, que estava nervosa, pois não conseguia achar a combinação ideal, de roupas, para sair.

Ainda nervosa, Deise apresentou a Pedro as roupas que dispunha para escolher. Veja as opções que Deise possuía:

3 calças 3 camisas 6 pares de sapato

1 - Com essa quantidade de roupa, de quantas maneiras diferentes Deise poderia se vestir, usando uma camisa, uma calça e um par de sapatos?

Deise disse a Pedro que gostaria muito de usar a camisa de cor rosa. Pediu a opinião de Pedro sobre qual combinação usar.

2 - Após essa decisão de quantas maneiras diferentes Deise poderia se vestir?

Após a sugestão de Pedro, Deise decidiu qual roupa usar e o casal saiu para comemorar o aniversário de Pedro. Eles escolheram jantar no Restaurante Coma Feliz.

Ao chegarem nesse restaurante, um garçom lhes forneceu o cardápio que apresentava três tipos de pratos: Carnes, Lasanhas e Massas. Veja a seguir as opções do cardápio desse restaurante:

Tipos de Pratos		
Carnes (Arroz, feijão, farofa)	**Lasanha (Salada)**	**Massas**
Filé mignon	Frango	Ravioli
Alcatra ao molho	Bolonhesa	Espaguete
Contra filé ao molho	4 queijos	Fusilli
Carne assada	Palmito	Canelone
Chuleta na brasa		Capelete
Picanha acebolada		
Bife à role		

	Composição	
Acompanhamento	**Sobremesa**	**Bebida**
Batata Frita	Sorvete de Morango	Suco de Maracujá
Nhoque	Sorvete de Chocolate	Suco de Laranja
Salada de Maionese	Sorvete Napolitano	Suco de Uva
Purê de Batata	Sorvete de Creme	Suco de Acerola
Purê de Aipim	Sorvete de Flocos	Suco de Melancia
Salada de Feijão Fradinho	Pudim	Refrigerante de Cola
	Mousse de Limão	Refrigerante de Limão
	Mousse de Maracujá	Refrigerante de Laranja
	Mousse de Chocolate	Refrigerante de Uva
	Pavê de Chocolate	Refrigerante de Guaraná
		Chopp
		Água Mineral

Deise escolheu comer lasanha acompanhada de uma bebida e um pudim.

3 - De quantas maneiras diferentes Deise pode fazer sua escolha?

____

____

____

Pedro escolheu comer uma carne, acompanhado de batata frita; uma bebida e uma sobremesa.

4 - De quantas maneiras diferentes Pedro pode fazer sua escolha?

____

____

____

5 - Nesse restaurante, é possível um cliente, comer um prato diferente por dia, acompanhado de uma bebida, durante um ano? Justifique sua resposta.

____

____

____

ATIVIDADE 2

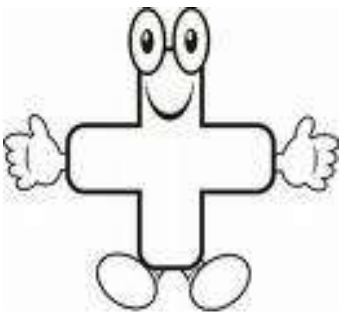
- PRÉ-REQUISITO: noções do princípio multiplicativo
- DURAÇÃO: 100 minutos
- RECURSOS: Folha de atividades, lápis e borracha, além de datashow e notebook.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Turma disposta em semicírculo para que possam apreciar o filme e discutir as atividades.
- OBJETIVOS: familiarizar os alunos com os algumas definições de Análise Combinatória.
- METODOLOGIA: Apresentar os slides sobre o uso da Análise Combinatória aos alunos e, a seguir, discutir as atividades disponibilizadas abaixo.
- DESCRITORES: resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples.

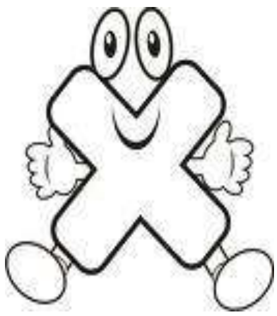
ALGUNS SLIDES

Dentre
as
primeiras
necessid
ades
humanas

A parte
da
Matemá
tica que

Na tentativa
de obter
estratégias
de
contagem
indireta, ou





Laura vai a um casamento e está em dúvida quanto ao que irá

Laura tem quatro possibi

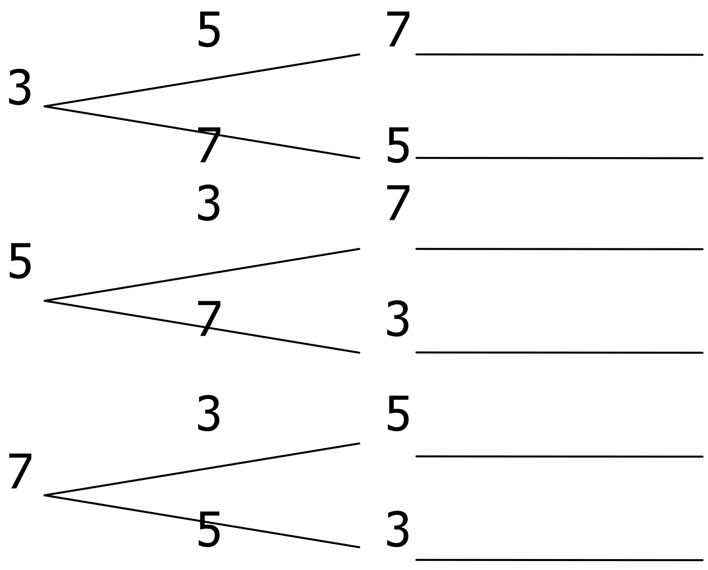
A princípio ela deve escolher entre usar vestido ou conjunto de saia e blusa.

Se Clara escolher usar vestido, ela tem quatro

Permutar é o mesmo que trocar. Nos problemas de permutação simples, a ideia que fica é de trocar ou embaralhar as posições de todos os elementos. Observe os exemplos:

1) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar utilizando os algarismos 3, 5 e 7?
Note o uso da palavra “distintos”, ou seja, sem repetir o mesmo algarismo.
As possibilidades são:
357, 375, 537, 573, 735 e 753.

Podemos representar também em um “diagrama de árvore”:



3 possibilidades 2 possibilidades 1 possibilidade

Utilizando o princípio fundamental da contagem, temos:
$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades

2) Quantos anagramas existem da palavra azul?
Anagramas são todas as palavras formadas, com ou sem sentido, pelas letras da palavra dada, embaralhando a sua ordem.
A maneira mais fácil de construir todas as possibilidades é pelo "diagrama de árvores".
Observe:

Utilizando o princípio fundamental da contagem, temos:
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ possibilidades

Concluímos que para *n* termos a expressão ficaria:
$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!$

ATIVIDADES

1- Determine o número de anagramas formados a partir de:
   a) LUA
   b) GATO
   c) ESCOLA
   d) REPÚBLICA
   e) FESTA
   f) PERNAMBUCO
2- Um dado foi lançado quatro vezes sucessivamente e as faces obtidas foram 2, 3, 5 e 6, não necessariamente nessa ordem. De quantas formas distintas pode ter ocorrido a sequência de resultados?
3- Calcule:
   a) P_5
   b) P_7
   c) $P_3 + P_2$

d) P_8/P_{10}

4- Considere os anagramas formados a partir de CONQUISTA.
   a) Quantos são?
   b) Quantos começam por vogal?
   c) Quantos começam e terminam por consoante?
   d) Quantos têm as letras CON juntas e nessa ordem?
   e) Quantos apresentam a letra C antes da letra A?

5- Uma vez por ano, dona Fátima, que mora no Recife, visita parentes em Caruaru, João Pessoa, Petrolina, Maceió e Garanhuns.
   a) De quantas formas distintas ela pode escolher a sequência de cidades a visitar?
   b) De quantos modos diferentes a ordem das cidades pode ser definida se dona Fátima pretende encerrar as visitas em Petrolina?

6- Uma estante tem 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria. De quantos modos podemos arrumar esses livros na estante, se desejamos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

7- De quantos modos distintos seis homens e seis mulheres podem ser colocados em fila indiana:
   a) Em qualquer ordem?
   b) Iniciando com homem e terminando com mulher?
   c) Se os homens devem aparecer juntos, o mesmo ocorrendo com as mulheres?
   d) De modo que apareçam, do início para o final da fila, 2 homens, 2 mulheres, 3 homens, 3 mulheres, 1 homem e 1 mulher?

8- Em quantos anagramas da palavra QUEIJO as vogais não aparecem juntas?

9- Dona Lola tem três filhos: Pedro, Paulo e Pérsio. Os três casaram-se e têm, respectivamente, 1, 3 e 2 filhos. Em um domingo, dona Lola recebeu, para o almoço, seus três filhos acompanhados das respectivas esposas, além de todos os netos. Como recordação, ela fotografou todos os familiares, lado a lado, mas pediu que cada filho aparecesse junto de sua família. De quantas formas distintas a foto poderia ter sido feita?

10- Permutando-se as letras T,R, A, P, O, S, são formados 720 anagramas. Esses anagramas são colocados em ordem alfabética. Qual é a posição correspondente a PRATOS?

11- Considerando os anagramas da palavra BRASIL, responda:
   a) Quantos começam por B?
   b) Quantos começam por B e terminam por L?
   c) Quantos começam por B ou terminam por L?

ATIVIDADE 3

- PRÉ-REQUISITO: multiplicação, simplificação, fatoração
- DURAÇÃO: 50 minutos
- RECURSOS: folha de atividades, lápis e borracha.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Pequenos grupos de dois ou três alunos cada.
- OBJETIVOS: operar com fatorial a fim de facilitar os cálculos de permutação, arranjo e combinação.
- METODOLOGIA: resolver, junto com os alunos, de diferentes formas, os exercícios sobre fatorial propostos a seguir.

ATIVIDADES

1- Calcule:

a) $6!$

b) $4!$

c) $0! + 1!$

d) $3! - 2!$

e) $7! - 5!$

f) $5 \cdot 3!$

2- Obtenha o valor de cada uma das expressões seguintes:

a) $\frac{8!}{6!}$

b) $\frac{9!}{10!}$

c) $\frac{3!}{4!} + \frac{4!}{5!}$

d) $\frac{7!}{5! \cdot 2!}$

e) $\frac{20!}{18! \cdot 2!}$

f) $\frac{8! \cdot 6!}{7! \cdot 7!}$

3- Efetue:

a) $\frac{11! + 9!}{10!}$

b) $17! - 17 \cdot 16!$

c) $\frac{40! - 39!}{41!}$

d) $\frac{(85!)^2}{85!\ 83!}$

4- Classifique como verdadeira ou falsa as seguintes afirmações, considerando que a e B são naturais quaisquer:

a) $(a + b)! = a! + b!$

b) $(a - b)! = a! - b!$

c) $(2a)! = 2 \cdot a!$

d) $(a!)^2 = a! \cdot a!$

e) $(a \cdot b)! = a! \cdot b!$

f) $a!$ é um número par se $a \geq 2$

5- Simplifique:

a) $\frac{(n + 2)!}{(n + 1)!}$

b) $\frac{(n - 3)!}{(n - 2)!}$

c) $\frac{(n + 1)! + n!}{n!}$

6- Resolva as seguintes equações:

a) $(n + 2)! = 6 \, . \, n!$

b) $n! = 120$

c) $\dfrac{n!}{(n - 2)!} = 42$

d) $\dfrac{(n + 2)! - (n + 1)!}{n\,(n - 1)!} = 25$

7- (UFRJ) Seja n = 20!. Determine o maior fator primo de n.

ATIVIDADE 4

- PRÉ-REQUISITO: operar com fatorial, princípio multiplicativo.
- DURAÇÃO: 200 minutos
- RECURSOS: folha de atividades, lápis e borracha.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Pequenos grupos de dois ou três alunos cada.
- OBJETIVOS: contribuir com a construção de diferentes maneiras de de resolver um Arranjo
- METODOLOGIA: propor problemas e estimular os alunos a resolverem os mesmos com conhecimentos anteriores e, depois, apresentar a fórmula para calcular o Arranjo. Resolver, junto com os alunos, de diferentes formas, os problemas de Arranjo.

Exemplo: Com as letras da palavra "república", quantas palavras, com ou sem sentido, podemos formar utilizando 5 destas letras?

1º modo de resolver:

9	· 8	· 7	· 6	· 5	= 15120
a 1^a casa pode ter nove termos	como foi usado um termo na primeira casa, sobraram oito para escolher na segunda casa	dois termos foram usados, restando sete para escolher um para esta casa	foram usados 3 termos dos nove, restando seis para esta casa	quatro termos usados. Restaram cinco nesta casa para selecionar	

2º modo de resolver:

$$A_{9,5} = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 15120$$

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}} \qquad n \geq p$$

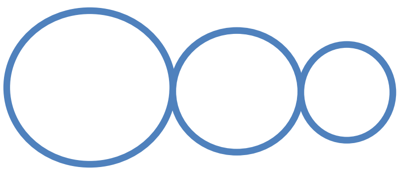
ATIVIDADES

1. Para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do grêmio de um colégio, candidataram-se dez alunos. De quantos modos distintos pode ser feita essa escolha?
2. A senha de acesso a uma rede de computadores é formada por uma sequência de quatro letras distintas seguida por dois algarismos distintos:
   a) Quantas são as possíveis senhas de acesso?
   b) Quantas senhas apresentam simultaneamente apenas consoantes e algarismos maiores que 5?
3. Calcule:
   a) $A_{7,3}$ b) $A_{11,2}$ c) $A_{5,1}$ d) $A_{5,5}$
4. Em uma pesquisa encomendada por uma operadora turística com o objetivo de descobrir os destinos nacionais mais cobiçados pelos brasileiros, o entrevistado deve escolher, em ordem de preferência, três destinos entre os dez

apresentados pelo entrevistador. Um dos destinos apresentados é a cidade de Natal.

a) Quantas respostas diferentes podem ser obtidas?
b) Quantas respostas possíveis apresentam a cidade de Natal como a mais votada?
c) Quantas respostas possíveis não contém Natal entre os destinos mencionados?

5. Responda:
   a) Quanto números de três algarismos distintos podem ser formados dispondo-se dos algarismos de 1 a 9? (Use o PFC)
   b) Quantos números de três algarismos podem ser formados dispondo-se dos algarismos de 1 a 9? (Use o PFC)
   c) Um estudante usou a fórmula do arranjo para resolver os dois itens anteriores. Comente o procedimento usado pelo estudante.
6. Para eleição do corpo dirigente de uma empresa, oito pessoas são pré-selecionadas. De quantas maneiras distintas poderão ser escolhidos presidente, vice-presidente e diretor financeiro?
7. A 1ª fase de um torneio de futebol é disputada por 15 equipes no sistema de turno e returno (a equipe A, por exemplo, joga com a equipe B duas vezes: uma em seu campo e a outra no campo adversário). Quantas partidas são disputadas ao todo, se os dois mais bem classificados da 1ª fase fazem a final no mesmo sistema?
8. Resolva a equação: $A_{n,\,2\,=\,110}$
9. Em um torneio internacional de natação participam cinco atletas europeus, dois americanos e um brasileiro.
   a) De quantos modos distintos poderão ser distribuídas as medalhas de ouro, prata e bronze?
   b) Em quantos resultados só aparecem atletas europeus nas três primeiras posições?
   c) Em quantos resultados o atleta brasileiro recebe medalha?
   d) Supondo que o atleta brasileiro não recebeu medalha, determine o número de resultado em que há mais atletas europeus do que americanos no pódio.
10. O logotipo de uma empresa é representado pelos três círculos a seguir:



Ainda não foram escolhidas as cores que serão usadas para colorir cada círculo. O departamento de marketing sugeriu o uso de azul, laranja, verde, branco, vermelho e gelo. Sabendo que cada círculo será pintado de uma cor diferente, determine:

a) O número de maneiras de colorir o logotipo.
b) O número de maneiras de colorir o logotipo, incluindo obrigatoriamente a cor laranja.

ATIVIDADE 5

- PRÉ-REQUISITO: princípio fundamental da contagem, fatorial
- DURAÇÃO: 100 minutos
- RECURSOS: folha de atividades, lápis e borracha.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: pequenos grupos a fim de que seja estimulada a interação entre eles.
- OBJETIVOS: resolver problemas de combinação com e sem o uso de fórmulas.
- METODOLOGIA: propor um problema e pedir que os alunos resolvam de seu modo. A seguir, mostrar, também a resolução usando a fórmula de combinação. Resolver as atividades propostas, relacionadas à Combinação.

Exemplo: Em uma empresa com nove funcionários, cinco serão chamados para uma reunião. De quantas formas diferentes poderá ser formado o grupo para a reunião?

1º modo:

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

2º modo:

$$\boxed{\binom{9}{5} = C_{9,5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126}$$

$$\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \qquad n \geq p$$

ATIVIDADES

1- De quantos modos distintos Lucas pode escolher quatro entre as nove camisetas regata que possui para levar em uma viagem?

2- Um curso de idiomas oferece turmas pra iniciantes em inglês, espanhol, alemão, italiano e japonês.
   a) De quantas formas distintas um estudante pode matricular-se em três desses cursos?
   b) De quantas formas distintas ele poderá matricular-se em três desses cursos, incluindo obrigatoriamente o de inglês?

3- Calcule:
   a) $C_{11,3}$
   b) $C_{9,6}$

c) $C_{6,3}$
d) $C_{17,7} - C_{17,10}$
e) $C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5}$

4- Sobre uma circunferência marcam-se dez pontos.
   a) Qual é o número de segmentos de reta que podemos traçar com extremidade em dois desses pontos?
   b) Quantos triângulos podemos construir com vértices em três desses pontos?

5- Uma junta médica deverá ser formada por quatro médicos e dois enfermeiros. De quantas maneiras ela poderá ser formada se estão disponíveis dez médicos e seis enfermeiros?

Considere as informações do parágrafo a seguir para resolver as questões 6 e 7:

Um baralho comum possui 52 cartas, 13 de cada naipe- ouros, paus, espadas e copas- e, cada naipe contém 13 cartas - ás (A), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, valete (J), dama(Q), rei (K).

6- Sorteando-se simultaneamente quatro cartas, determine:
   a) O número de maneira distintas de ocorrer o resultado do sorteio.
   b) De quantas formas distintas é possível escolher as quatro cartas de copas.

7- Duas cartas são sorteadas, de uma só vez,de um baralho comum. Determine o número de maneiras possíveis de ocorrer um resultado formado por:
   a) Um rei e uma rainha
   b) Duas cartas de copas
   c) Uma carta de copas e outra de ouros.

8- Para montar uma cesta de café da manhã estão disponíveis os seguintes itens: quatro tipos de pães, três tipos de queijos, três tipos de frutas, cinco sabores de geléia e quatro sabores de tortas doces. De quantos modos distintos a cesta poderá ser montada se um cliente pedir dois tipos de pães, um tipo de queijo, duas frutas, dois sabores de geléia e uma torta doce?

9- Em uma reunião havia 50 pessoas. Cada uma cumprimentou as ouras com um aperto de mão. Quantas saudações foram dadas nessa reunião?

10- Um casal de Curitiba decidiu que a viagem de lua de mel seria feita pelo Nordeste, visitando exatamente três das nove Capitais.
   a) De quantos modos distintos poderiam ser escolhidas as três capitais, sem levar em consideração a ordem da visita?
   b) Se o casal pretendesse conhecer obrigatoriamente Salvador, de quantos modos distintos poderia ser feita a escolha?
   c) Se, por motivos logísticos, Fortaleza só pudesse ser visitada se São Luís também o fosse e vice-e-versa, determine de quantas maneiras a escolha poderá ser feita.

ATIVIDADE 6

- PRÉ-REQUISITO: princípio fundamental da contagem, fatorial, permutação, arranjo e combinação
- DURAÇÃO: 50 minutos
- RECURSOS: folha de atividades, lápis e borracha.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: pequenos grupos a fim de que seja estimulada a interação entre eles.
- OBJETIVOS: resolver problemas, diferenciando permutação, arranjo e combinação.
- METODOLOGIA: propor um problema e pedir que os alunos resolvam de seu modo. A seguir, mostrar, diferentes modos de reconhecer permutação, arranjo e combinação. Resolver as atividades propostas, relacionadas com problemas diversos.

Usar o resumo feito pela colega cursista, ajuda bastante a verificar o que vamos usar:

Permutação __ usamos todos os elementos / a ordem importa

Arranjo __ Não usamos todos os elementos / a ordem importa

Combinação __ Não usamos todos os elementos / a ordem Não importa

Situação 1:

Uma comissão de quatro membros deve ser escolhida dentre sete pessoas. De quantos modos diferentes se pode escolher a comissão, sabendo que as pessoas que formarem a comissão terão funções idênticas?

Como a ordem dos membros componentes **não** altera a comissão, temos que uma comissão é uma **combinação.**

$$C_{7,4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$$

Situação 2:

Atualmente, as placas dos veículos são formadas por três letras, seguidas de quatro algarismos. Considerando essas informações, calcule o número de placas distintas que podem ser fabricadas iniciadas pelas letras R I O, nessa ordem.

Como a ordem dos algarismos altera a identificação da placa, temos que a identificação de uma placa é um **arranjo.**

$$A_{26,4} = \frac{26!}{(26-4)!} = \frac{26!}{22!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22!}{22!} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 303\,600$$

ATIVIDADES

01. Numa estrada de ferro, há 10 estações. Quantos bilhetes deverão ser impressos, de modo que cada um deles contenha as estações de partida e de chegada?

02. Quantas diretorias de 4 membros podemos formar com os 10 sócios de uma empresa?

03. Um professor propôs, para uma de suas turmas, uma prova com 7 questões, entre as quais cada aluno deveria escolher exatamente 5 questões para responder. Sabe-se que não houve duas escolhas das mesmas 5 questões entre todos os alunos da turma. Determine o número máximo de alunos que essa turma poderia possuir.

04. Em uma sala há 8 cadeiras e 4 pessoas. Determine o número de modos distintos das pessoas ocuparem as cadeiras.

Utilizaremos, também, as recomendações de nossa tutora Bianca:

Ler o problema e, em seguida, refletir sobre as seguintes perguntas:

1. Quantos elementos temos nas opções de escolha e quantos iremos usar?

reflexão: se todos forem usados, teremos uma permutação. Caso contrario já sabemos que não é permutação

2. No caso de não ser permutação (usar um numero menor que n), questione-se o que ocorre quando a posição dos elementos é trocada.

Reflexão: Se não gerar uma solução nova é combinação. (como o caso das retas formadas por 2 pontos - a reta que passa por A e B é a mesma reta que passa por B e A. Ou a equipe {joão, maria, josé} que é a mesma {maria, josé, joão}.

3. se não for combinação nem permutação é arranjo, e pode ser resolvida pela fórmula ou pelo PFC.

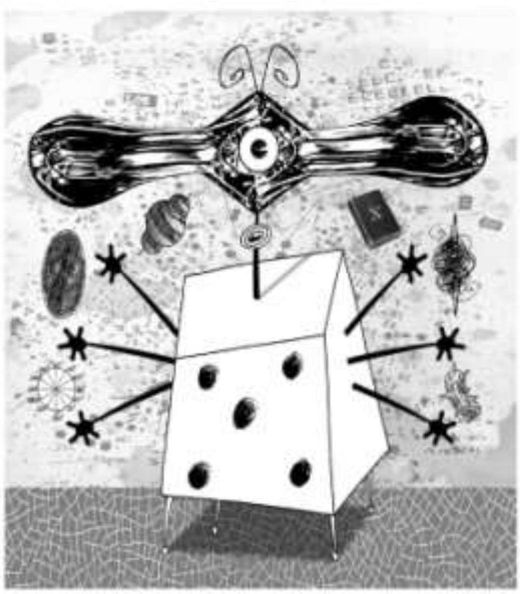
ATIVIDADE 7

- PRÉ-REQUISITO: combinação e definição de probabilidade no contexto apresentado.
- DURAÇÃO: 50 minutos
- RECURSOS: folha de atividades, lápis e borracha, além de datashow para mostrar slides sobre probabilidade.
- ORGANIZAÇÃO DA TURMA: pequenos grupos a fim de que seja estimulada a interação entre eles.
- OBJETIVOS: resolver problemas com combinação e probabilidade.

- METODOLOGIA: apresentar alguns slides com aplicação e definição de probabilidade. Resolver problemas com combinação e probabilidade. Aplicar atividades utilizando os conceitos expostos.

ALGUNS SLIDES

Os dados obtidos pela Análise



O Cálculo de Probabil idades é essenci al para

PROBLEMA PROPOSTO: (UFF) Em um jogo de bingo são sorteadas, sem reposição, bolas numeradas de 1 a 75 e um participante concorre com a cartela reproduzida abaixo. Qual é a probabilidade de que os três primeiros números sorteados estejam nessa cartela?

BINGO				
5	18	33	48	64
12	21	31	51	68
14	30	♡	60	71
13	16	44	46	61
11	27	41	49	73

1º MODO:

- Total de casos possíveis:

  $C_{75,\,3} = \underline{75!} = \underline{75 \,.\, 74 \,.\, 73 \,.\, 72!} = 67\,525$

$3!72! \qquad 6 \,.\, 72!$

- Total de casos favoráveis:

$$C_{24\,,\,3} = \frac{24!}{3!\,21!} = \frac{24\,.\,23\,.\,22\,.\,21!}{6\,.\,21!} = 2024$$

$$P = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{Casos possíveis}} = \frac{2024}{67\,525} = 0{,}03 = 3\%$$

2º MODO: Pelo princípio multiplicativo das probabilidades

$$P = \frac{24.\,23\,.\,22}{75\,.74\,.73} = 0{,}03 = 3\%$$

ATIVIDADES

1. As probabilidades de 3 jogadores marcarem um pênalti são respectivamente 2/3, 4/5 e 7/10. Se cada um cobrar uma única vez, qual a probabilidade de :
   a) todos acertarem. R.: 28/75
   b) apenas um acertar. R.: 1/6
   c) todos errarem. R.: 1/50

2. Suponha que A e B sejam eventos tais que $P(A) = ½$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cap B) = ¼$. Calcule: $P(A \cup B)$, $P(A/B)$ e $P(B/A)$. R.: 7/12, ¾ e ½.

3. Três lâmpadas são escolhidas aleatoriamente dentre 20 lâmpadas, das quais 8 são defeituosas. Determine a probabilidade p de que: (a) nenhuma seja defeituosa; (b) exatamente uma seja defeituosa. R.: 11/57

4. Um lote é formado por 12 artigos bons, 5 com pequenos defeitos e 3 com grandes defeitos. Um artigo é escolhido ao acaso. Determine a probabilidade de que ele:

(a) não tenha defeitos; (b) não tenha grandes defeitos; (c) ou seja perfeito ou tenha grandes defeitos. R.: a) 12/30 b) 17/30 c) 15/30

5. Suponha um baralho comum de 52 cartas do qual se extrai uma carta. Considere os eventos:
 <A> saída de uma dama

 <B> saída de uma carta de copas

 a) Defina e construa um diagrama para cada um dos eventos
 <C> ocorrência de pelo menos um evento A e B

 <D> ocorrência de B, mas não de A

 <E> ocorrência de A e de B

 <F> ocorrência de A, mas não de B

 <G> não ocorrência simultânea de A e B

 <H> não ocorrência de A e não ocorrência de B

 b) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos? Explique.

6. Uma caixa contém 6 bolas numeradas de 1 a 6. retiram-se duas bolas simultaneamente sem reposição. Seja **x** o número da primeira bola retirada e **y** o número da segunda.
 a) Descreva os resultados dos eventos possíveis de acontecerem
 b) Descreva os seguintes eventos
 <A> = $\{(x,y): x < y\}$
 <B> = $\{(x,y): y = 6\}$
 <C> = $\{(x,y): x + y = 5\}$
 <D> = $\{(x,y): x + y$ é impar$\}$
 <E> = $\{(x,y): y \leq 6\}$
 <F> = $\{(x,y): y = 2x\}$
 c) Qual o espaço amostral considerando a retirada sucessiva de duas bolas, com reposição da primeira.
 d) Qual o espaço amostral do experimento, quando se retiram simultaneamente duas bolas.

7. Numa caixa existem 12 tiras de papel numeradas do seguinte modo: 1, 2, 2, 3, 3. 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6. Selecionando uma tira de papel ao acaso, qual a probabilidade de:
 a) sair o número 3. R.: 1/4
 b) sair um número par. R.: 7/12

c) sair um número impar. R.: 5/12
d) sair um número divisível por 3. R.: 5/12.

8. Sejam A e B dois eventos tais que P(A) = 3/8, P(B) = ½ e P(A e B) = ¼. Calcule:
   a) P(A + B)
   b) P($\overline{A}$)
   c) P($\overline{B}$)
   d) P($\overline{A \ \ e \ \ B}$)

9. Numa população, 40% das famílias têm televisão, 30% têm computador e 20% têm ambos os aparelhos. Uma família é escolhida ao acaso. Calcule a probabilidade de:
   I) ter pelo menos um dos tipos de aparelho. R.: 50%
   II) não ter televisão. R.: 60%
   III) não ter qualquer aparelho. R.: 50%
   IV) ter só televisão. R.: 20%
   V) ter um só aparelho. R.: 30%

10. Uma caixa em um depósito contém 4 lâmpadas de 40W, 5 de 60W e 6 de 75W. Se 3 lâmpadas são selecionadas aleatoriamente:
   a) Qual a probabilidade de ser selecionado exatamente 2 das lâmpadas de 75W?
   b) Qual a probabilidade de serem selecionadas 3 lâmpadas da mesma potência?
   c) Qual a probabilidade de que uma lâmpada de cada tipo seja selecionada?
   d) Se as lâmpadas são selecionadas uma a uma até que seja encontrada uma de 75W, qual a probabilidade que seja examinada pelo menos 6 lâmpadas?

AVALIAÇÃO

A avaliação deve ser um instrumento que o professor utilize a fim de verificar quais os itens os alunos ainda possuem dificuldade e quais ele não compreendeu, mesmo tendo sido elaborado de formas diferentes.

O retorno ao aluno deve ser feito de modo mais rápido possível e deve ser dada a oportunidade para o mesmo refazê-la, corrigindo seus erros, mesmo após sua entrega.

Avaliar deve ser um ato de mão dupla, além de levar à reflexão sobre o que deve ser revisto.

Para este conteúdo, escolher 5 questões entre as sugeridas a seguir, valendo 1,0 ponto cada.

SUGESTÃO DE EXERCÍCIOS PARA AVALIAÇÃO

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

01) Um restaurante oferece amplo a R$ 20,00, incluindo: entrada, prato principal e sobremesa. De quantas formas distintas um cliente pode fazer seu pedido, se existem quatro opções de entrada, três de prato principal e duas de sobremesa? **24**

02) Em um teste vocacional, um jovem deve responder a doze questões, assinalando, em cada uma, uma única alternativa, escolhida entre *sim, não* e *às vezes*. De quantas formas distintas o teste poderá ser respondido? **531441**

03) Responda:

a) Quantos números de cinco algarismos existem? **90000**

b) Quantos números ímpares de cinco algarismos existem? **45000**

c) Quantos números de cinco algarismos são maiores que 71265? **28734**

04) Considerando os algarismos 1,2,3,4,5,6,7 e 8, responda:

a) Quantos números de quatro algarismos podemos formar? **4096**

b) Quantos números pares de quatro algarismos podemos formar? **2048**

c) Em relação ao total do item a, qual é a porcentagem correspondente aos números que têm todos os algarismos distintos? **41,01%**

FATORIAL (!)

01) Obtenha o valor de cada uma das expressões seguintes:

a) 8!/6!

b) 3!/4! + 4!/5!

c) 8! . 6! / 7! . 7!

02) Simplifique:

a) (n + 2)! / (n + 1)!

b) (n - 3)! / (n - 2)!

c) (n + 1)! + n! / n!

03) Resolva as seguintes equações:

a) (n + 2)! = 6.n!

b) n! = 120

c) n! / (n - 2)! = 42

d) (n + 2)! - (n + 1)! / n(n - 1)! = 25

PERMUTAÇÕES

01) Um dado foi lançado quatro vezes sucessivamente e as faces obtidas foram 2, 3, 5 e 6, não necessariamente nessa ordem. De quantas formas distintas pode ter ocorrido a sequência de resultados? **24**

02) Calcule:

a) $P_3 + P_2$

b) P_8 / P_{10}

c) $P_n / P_{(n-2)} = 506$

03) Considere os anagramas formados a partir de CONQUISTA.

a) Quantos são? **362880**

b) Quantos começam por vogal? **161280**

c) Quantos começam e terminam por consoante? **100800**

d) Quantos têm as letras COM juntas e nessa ordem? **5040**

e) Quantos apresentam a letra C antes da letra A? **181440**

04) Uma estante tem 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria. De quantos modos podemos arrumar esses livros na estante, se desejamos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos? **8640**

ARRANJOS

01) Para ocupar os cargos de presidente e vice-presidente do grêmio de um colégio, candidataram-se dez alunos. De quantos modos distintos pode ser feita essa escolha? **90**

02) Resolva a equação $A_{n,2} = 110$ **(11)**

03) Em uma pesquisa encomendada por uma operadora turística como o objetivo de descobrir os destinos nacionais mais cobiçados pelos brasileiros, o entrevistado deve escolher, em ordem de preferência, três destinos entre os dez apresentados pelo entrevistador. Um dos destinos apresentados é a cidade de Natal.

a) Quantas respostas diferentes podem ser obtidas? **720**

b) Quantas respostas possíveis apresentam a cidade de Natal como a mais votada? **72**

c) Quantas respostas possíveis não contém Natal entre os destinos mencionados? **504**

COMBINAÇÕES

01) De quantos modos distintos Lucas pode escolher quatro entre as nove camisetas regata que possui para levar em uma viagem? **126**

02) Um curso de idiomas oferece turmas para iniciantes em inglês, espanhol, alemão, italiano e japonês.

a) De quantas formas distintas um estudante pode matricular-se em três desses cursos? **10**

b) De quantas formas distintas ele poderá matricular-se em três desses cursos, incluindo obrigatoriamente o de inglês? **6**

03) Para montar uma cesta de café da manhã estão disponíveis os seguintes itens: quatro tipos de pães, três tipos de queijo, três tipos de frutas, cinco sabores de geléia e quatro sabores de tortas doces. De quantos modos distintos a cesta poderá ser montada se um cliente pedir dois tipos de pães, um tipo de queijo, duas frutas, dois sabores de geléia e uma torta doce? **2160**

PROBABILIDADES

01) Numa cidade os táxis de uma frota estão numerados de 1 a 200. Qual a probabilidade de uma pessoa chamar um táxi de número maior que 122?

02) Uma urna contém 25 bolas numeradas de 1 a 25. Uma bola é extraída ao acaso dessa urna. Qual a probabilidade do número sorteado ser múltiplo de 2 ou de 3?

03) A probabilidade de um guarda aplicar 4 ou mais multas em um dia é de 63%. A probabilidade do guarda aplicar 4 ou menos multas em um dia é de 56%. Qual é a probabilidade do guarda aplicar exatamente 4 multas em um dia?

04) Um dado é lançado 3 vezes sucessivamente. Seja o evento E: “pelo menos um dos números obtidos é diferente dos outros”. Determinar o evento complementar de E.

05) Uma urna contém 10 bolas pretas e 8 bolas vermelhas. São retiradas 3 bolas, sem reposição. Achar a probabilidade das duas primeiras serem pretas e a terceira vermelha.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB). **Orientações Curriculares do Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias, volume 2.Brasília: MEC/SEB, 2006.**
- IEZZI et al. **Matemática: ciência e aplicações. v.2. 6.ed.São Paulo: Saraiva, 2010.**
- PAIVA, Manoel. **Matemática. v. 3. São Paulo: Moderna, 2009.**
- **IEZZI**, Gelson e outros. **Matemática: Ciência e Aplicações. V.2. São Paulo: Saraiva, 2010.**

- ROTEIROS DE ACAO – Sistemas– Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Medio – 1º bimestre/2013
- Slides Editora Abril Educação
- Slides Rede Pitágoras de Ensino
- Caderno de Atividades Pedagógicas de Aprendizagem Autorregulada do Governo do Estado do Rio de Janeiro
- NDMAT- Núcleo de Desenvolvimentos Matemáticos- Professor Eliton Mendes