

**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ**

COLÉGIO: Colégio Estadual Alberto Torres

PROFESSOR (a): Fernanda Maria da Silva Fernandes

MATRÍCULA: 806.993-2 e 837.850-7

SÉRIE: 3ª E.M. e 3º C.N.

TUTOR (A): Bianca Coloneze

GRUPO : 1

PLANO DE TRABALHO 1 __ ANÁLISE COMBINATÓRIA

Fernanda Maria da Silva Fernandes

fernandafernandes2000@bol.com.br

1. Introdução:

A Análise Combinatória se constitui ferramenta para diversas áreas do conhecimento científico, graças ao seu vasto campo de aplicações. Além disso, permite a elaboração de situações problemas que podem ser discutidas através da construção de suposição e discussão de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação em diferentes níveis de ensino.

Durante muito tempo, este conteúdo foi abordado apenas no ensino Médio. Entretanto, hoje ele é abordado também no Ensino Fundamental por conta de ser um assunto extremamente importante em várias aplicações em nosso dia a dia, desde a escolha da roupa que devemos vestir pela manhã, passando pelo que vamos escolher para comer no almoço, ou as possibilidades de colorir um mapa.

Embora seja possível listar, em alguns casos, as possibilidades existentes antes de realizar uma escolha, esse processo pode ser demorado e trabalhoso. O ensino da Análise Combinatória, dessa forma, tem como objetivo desenvolver técnicas para contagem dos elementos de um conjunto sem a necessidade da enumeração de todos eles.

2-Desenvolvimento:

Iniciar conversando sobre a Análise Combinatória, que é um estudo realizado na matemática, responsável pela análise das possibilidades e das combinações. Ela cuida, em linhas gerais, da determinação do número de possibilidades que um evento pode ocorrer. Quando o número de possibilidades é pequeno usamos o processo descritivo

chamado diagrama de árvore e a partir desse dispositivo enunciaremos o princípio fundamental da contagem que permite a contagem sem a descrição das possibilidades. Na apresentação do conteúdo, é importante esclarecer aos alunos sobre um dos principais usos da análise combinatória, a tomada de decisões. Em seguida então, iniciar as atividades propostas com exemplos de exercícios que são resolvidos utilizando a análise combinatória:

Atividade 1 :

Análise Combinatória: Princípios Aditivo e Multiplicativo (PFC)

Habilidades relacionadas:

- ✓ Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples;

Pré-requisitos:

- ✓ Números e Operações;
- ✓ Tratamento da informação e contagem;

Tempo de Duração:

- ✓ 100 minutos

Recursos Educacionais Utilizados:

- ✓ Quadro e caderno;
- ✓ Folha de atividades extras.

Organização da turma:

- ✓ A tarefa será realizada em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo, com o auxílio do professor.

Objetivos:

- ✓ Identificar os princípios aditivos e multiplicativos;
- ✓ Usar a técnica adequada de contagem para cada tipo de problema;
- ✓ Compreender e utilizar o Princípio Fundamental da Contagem na resolução de problemas.

Metodologia adotada:

Como proposta inicial da utilização do Princípio Fundamental da Contagem na resolução de problemas. Será distribuída uma folha para cada dupla de alunos com duas situações bem simples:

CEAT ____ Análise Combinatória

Alunos: _____ e _____ Prof.: Fernanda Fernandes

1ª SITUAÇÃO: De quantos modos diferentes é possível pintar as três faixas da bandeira, cada faixa de uma cor (não pode repetir), se dispomos apenas das seguintes cores: azul, vermelha e grafite?

Temos então:

Nº de opções de cores para a 1ª faixa: 3

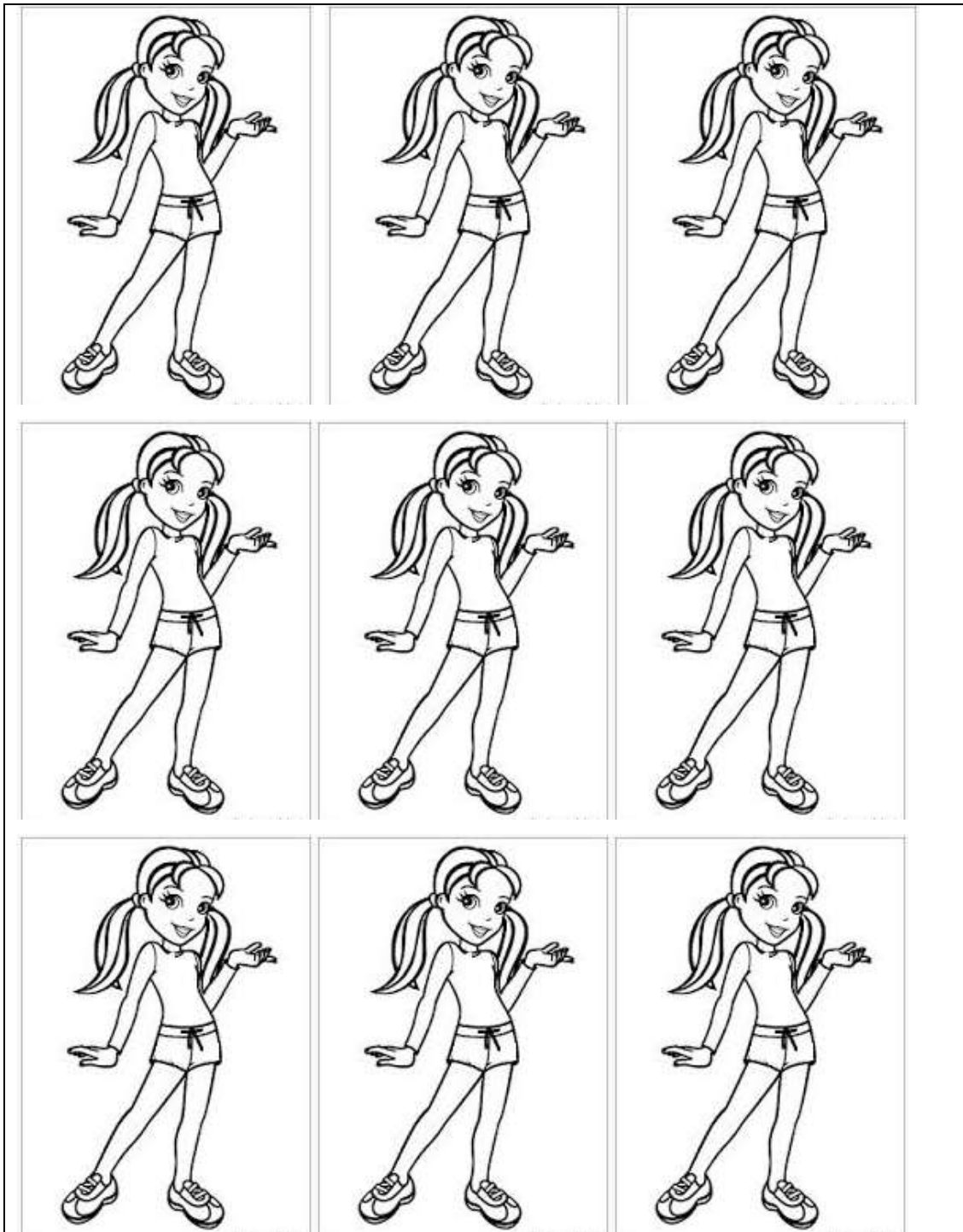
Nº de opções de cores para a 2ª faixa (não pode repetir): 2

Nº de opções de cores para a 3ª faixa (não pode repetir): 1

Conclusão: $3 \times 2 \times 1 = 6$ existem modos distintos para pintar a bandeira.

2ª SITUAÇÃO: Para ir ao clube, Ana deseja usar uma blusa, um short e um par de tênis. Sabendo que ela dispõe de duas blusas (branca e vermelha), dois shorts (azul e grafite) e dois pares de tênis (azul e preto), responda:

De quantas maneiras distintas, Ana poderá vestir-se?



Temos então:

Nº de opções de cores para blusa: 2

Nº de opções de cores (não pode repetir) para short: 2

Nº de opções de cores (não pode repetir) para tênis: 2

Conclusão: $2 \times 2 \times 2 = 8$ existem maneiras distintas para Ana vestir-se.

Em seguida, passar no quadro o problema abaixo e, resolver com os alunos, mostrando então a diferença entre princípio aditivo e multiplicativo:

___ Maria possui 02 (duas) canetas (**vermelha** e **preta**) e 03 (três) lápiz coloridos (**verde**, **preto** e **azul**).

a) Supondo que ela só possa escolher um desses objetos, de quantas maneiras distintas ela poderá escolhê-lo? (princípio aditivo)

São $2 + 3 = 5$ tipos, ou seja, Maria poderá escolher de 5 maneiras distintas o seu objeto.

b) Supondo, agora, que ela deseja escolher uma caneta e um lápis, ou seja, fazer pares, de quantas maneiras distintas ela poderá escolhê-los? (princípio multiplicativo)

Canetas: **Cv** (caneta **vermelha**) e **Cp** (caneta **preta**);

Lápis: **Lv** (lápiz verde), **Lp** (lápiz preto) e **La** (lápiz azul).

Vejam!

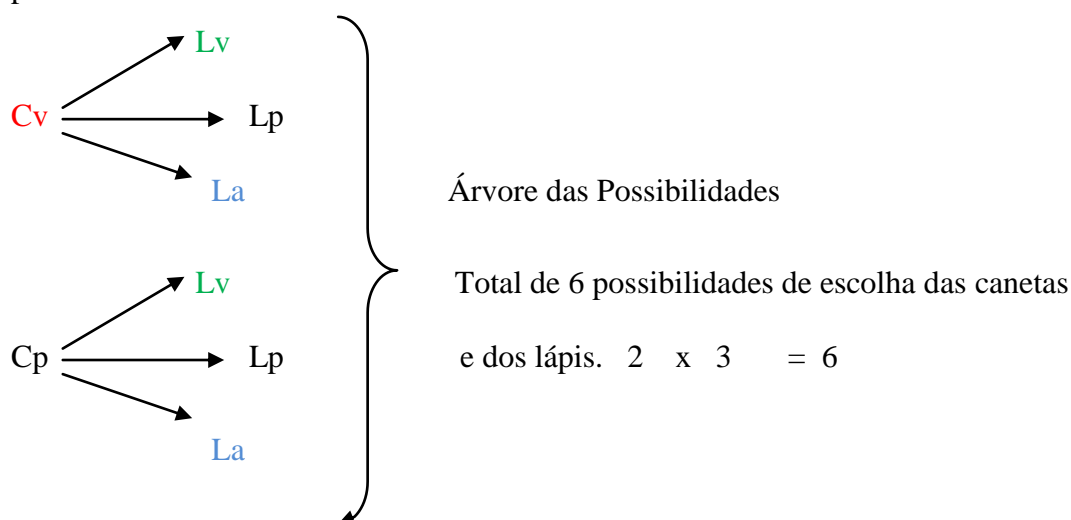
Para **Cv** temos três pares: **Cv** e **Lv**; **Cv** e **Lp**; **Cv** e **La** .

Para **Cp** temos três pares: **Cp** e **Lv** ; **Cp** e **Lp**; **Cp** e **La** .

Conclusão: $2 \text{ (canetas)} \times 3 \text{ (lápiz)} = 6 \text{ pares}$.

O exemplo acima facilita muito o ensino e a aprendizagem dos estudantes, pois manipulam um número pequeno de objetos e constroem novas possibilidades (novos exemplos de contagem).

Este exemplo multiplicativo pode também ser representado através da árvore das possibilidades:



Folha de Atividades:

C.E.A.T. – Matemática 2014 – Análise combinatória – 1º Bimestre

Alunos: _____ e _____ Profª.:Fernanda Fernandes

Exercícios de Análise Combinatória - PFC

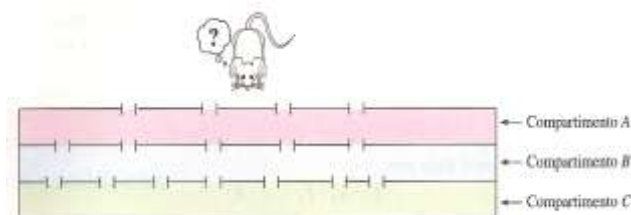


1)Veja o desenho: Quando Magali se aproximou, os vendedores rapidamente informaram a ela as seguintes opções de comida: o primeiro ofereceu hot dog simples (maionese, salsicha, catchup e mostarda) ou completo (simples mais purê, batata palha, vinagrete, ovo de codorna, milho, ervilha, azeitona e queijo ralado), e o segundo sugeriu sorvete de chocolate, flocos ou morango. Magali, entretanto, surpreendeu os vendedores, informando-lhes que acabara de almoçar e estava sem fome. Iria apenas “forrar o estômago”, servindo-se de um sanduíche e de uma bola de sorvete. De quantos modos Magali pôde fazer sua refeição? **Resposta: Podendo ou não usar a árvore das possibilidades, pode também calcular pelo princípio multiplicativo, sendo mais rápido na resposta: $2 \times 3 = 6$ maneiras distintas.**

2)Para ir ao clube, Júnior deseja usar uma camiseta, uma bermuda e um par de tênis. Sabendo que ele dispõe de seis camisetas, quatro bermudas e três pares de tênis, responda: de quantas maneiras distintas poderá vestir-se?

Resposta: Evitar usar a árvore, pois neste caso não é viável por causa da quantidade de possibilidades, pelo PFC: $6 \times 4 \times 3 = 72$ maneiras de se vestir.

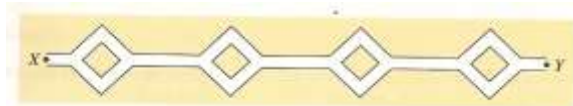
3) Um rato deve chegar a um compartimento C, passando antes, uma única vez, pelos compartimentos A e B.



Se há 4 portas de entrada em A, 5 em B e 7 em C, então o numero de modos distintos de chegar a C é:

- a) 16 b) 27 c) 33 d) 90 e) 140 **Resposta: e**

4) Uma pessoa parte do ponto X e deseja chegar ao ponto Y, caminhando sempre no sentido X para Y. Em cada encruzilhada, ela tem duas opções para seguir sua viagem.



Quantos caminhos distintos ela pode fazer no percurso de X até Y?

- a) 2 b) 8 c) 16 d) 20 e) 32 **Resposta: C**

5) Uma prova consta de 6 questões do tipo V ou F. De quantas maneiras distintas ela pode ser resolvida? **Resposta: $2^6 = 64$**

Atenção!!!

No sistema decimal, o que utilizamos normalmente, a primeira classe é chamada de classe das unidades simples; a segunda de classe dos milhares (mil); a terceira de classe dos milhões; a seguinte classe dos bilhões; a próxima será a classe dos trilhões e assim por diante.

6) Com os algarismos de 0 a 9:

a) Quantos números de três algarismos podem formar? **Resposta: $9 \times 10 \times 10 = 900$**

b) Quantos números de três algarismos distintos podem formar?

Resposta: $9 \times 9 \times 8 = 648$

c) Quantos números pares de três algarismos distintos podem formar?

Usando todos os números do nosso sistema para formar três algarismos pares são necessários colocá-lo no final os números possíveis são: 0,2,4,6,8. Por isso vamos fazer primeiro o caso de colocarmos o zero no final: $9 \times 8 \times 1 = 72$. Esses são todos números de três algarismos distintos que podemos formar com o zero no final. Agora vamos fazer o caso de colocarmos os outros números pares que temos no final: $8 \times 8 \times 4 = 256$. Somando as duas possibilidades temos a resposta: $256 + 72 = 328$.

d) Quantos números ímpares de três algarismos distintos podem formar no sistema decimal? **Resposta: 320**

Atividade 2 :

Fatorial

Habilidades relacionadas:

- ✓ Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples;

Pré-requisitos:

- ✓ Números e Operações;

Tempo de Duração:

- ✓ 100 minutos

Recursos Educacionais Utilizados:

- ✓ Quadro e caderno;

Organização da turma:

- ✓ A tarefa será realizada inicialmente individual e posteriormente em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo, com o auxílio do professor.

Objetivos:

- ✓ Calcular o produto entre números naturais consecutivos;
- ✓ Usar a técnica adequada de contagem para cada tipo de problema;

Metodologia adotada:

Em algumas situações da Análise Combinatória, é necessário calcular o produto entre números naturais consecutivos. Para representar esses cálculos, utilizamos a notação **n!** (lê-se: fatorial de n). A notação **n!** foi introduzida por Christian Kramp (1760-1820) de Strasburgo em 1808, para sanar dificuldades gráficas apresentadas pelo símbolo previamente utilizado. Também é importante ressaltar que este símbolo ajuda a reduzir cálculos muito grandes.

Devemos considerar **n** um número natural sendo que **$n \geq 2$** . Define-se fatorial de **n**, indicado por **n!**, o produto de **n** por seus antecessores naturais até o 1, ou seja:

$$\mathbf{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 1}$$

Por consequência da definição, temos: $1! = 1$ e $0! = 1$

No quadro, colocar os exemplos para desenvolver com os alunos:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Mostrar que, a partir desses exemplos, podemos notar que:

$$3! = 3 \cdot 2!, \quad 4! = 4 \cdot 3!, \quad 5! = 5 \cdot 4! \text{ e } 6! = 6 \cdot 5!$$

De maneira geral:

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Atividades no caderno:

1) Calcule :

a) $7!$

b) $5! - 4! =$

c) $4 \cdot 2! =$

d) $0! + 4! =$

e) $\frac{10!}{8!}$

f) $\frac{5!}{2! + 3!} =$

g) $\frac{10!}{3!7!} =$

h) $\frac{(3! - 0!)!}{3!2!} =$

i) $\frac{12!3!}{15!} =$

2) Simplifique as expressões:

a) $\frac{n!}{(n-1)!} =$

b) $\frac{(n+2)!}{n!} =$

c) $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} =$

Respostas:

1) a) 5040

b) 96

c) 8

d) 25

e) 90

f) 15

g) 120

h) 10

i) 1/455

2) a) n

b) $n^2 + 3n + 2$

c) $n^3 - 3$

Atividade 3 :

Permutações:

Habilidade relacionada:

- ✓ Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples;

Pré-requisitos:

- ✓ Números e Operações;
- ✓ Noções do Princípio Fundamental da Contagem;
- ✓ Fatorial.

Tempo de Duração:

- ✓ 100 minutos

Recursos Educacionais Utilizados:

- ✓ Quadro;
- ✓ Folha de exercícios extras;

Organização da turma:

- ✓ A tarefa será realizada pelos alunos inicialmente individual e posteriormente em duplas.

Objetivos:

- ✓ Usar a técnica adequada de contagem para cada tipo de problema;
- ✓ Compreender e identificar os conceitos de permutação, arranjo e combinação e utilizá-los na resolução de problemas.
- ✓ Calcular as quantidades de permutações, arranjos e combinações em situações-problemas.

Metodologia adotada:

Fazer o seguinte questionamento aos alunos:

Alguém sabe me explicar o que é uma fila indiana?



Esperar as supostas respostas e mostrar algumas figuras e posteriormente, pedir que 5 alunos venham à frente da sala e colocá-los em fila indiana e assim mostrar o conceito de Permutação. O mesmo conceito pode ser usado em 5 pessoas para sentar em 5 cadeiras, ou ainda, ordenar 5 objetos em prateleiras de uma estante.

Mostrar aos alunos que a palavra Permutação tem origem no verbo permutar, que significa troca, cada uma das formas de ordenar essas cinco pessoas dá origem a uma nova permutação. Assim, uma fila composta, por exemplo, por André, Bárbara, Carlos, Daniel e Mariana, deve ser contada como uma fila diferente de qualquer outra formada pelas mesmas pessoas, mas em ordem diferente, como por exemplo, Daniel, Carlos, André, Mariana e Bárbara. Mas como contar todas as possibilidades? Podem-se listar todas, mas será um pouco cansativo, então usando os próprios alunos fica mais fácil perceber que inicialmente temos 5 pessoas para o 1º lugar da fila, sobram 4 para escolher para o 2º lugar da fila, sobram 3 para o 3º lugar, 2 para o 2º lugar e 1 para o último lugar, e usando o princípio multiplicativo, temos : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ou relembrando da aula anterior $5!$.

Permutação Simples: Uma permutação simples são agrupamentos distintos entre si pela ordem, tomando todos os elementos do conjunto. Podemos calcular a quantidade de permutações usando a fórmula:

$$P_n = n!$$

Para calcular o valor de 4 permutações, $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Por exemplo, usando 4 letras diferentes para criar uma senha, teríamos 24 permutações possíveis.

Folha de Exercícios:

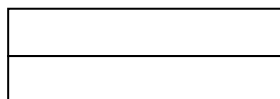
C.E.A.T. – Matemática 2014 – Permutação Simples – 1º Bimestre -3ª série EM

Alunos: _____ e _____ Profª.:Fernanda Fernandes

- 1) Seis amigos irão a um Cibercafé, onde pretendem realizar uma pesquisa escolar, cada um deles em um computador. Sabendo que estão disponíveis no Cibercafé 6 computadores, localizados lado a lado, de quantas maneiras distintas os amigos podem ocupá-los? **Resposta: 720**
- 2) Considere todas as palavras de 5 letras, com ou sem significado (anagramas), que podem ser escritas com A, B, R, O e D, sem que haja repetição de letra.
 - a) Quantas são essas palavras? **Resposta: 120**
 - b) Quantas dessas palavras começam com a letra R: **Resposta: 24**

c) Quantas dessas palavras terminam em vogal? **Resposta: 48**

3) De quantos modos diferentes é possível pintar as 5 faixas da figura, cada faixa de uma cor se dispondo apenas das seguintes cores: amarela, rosa , verde, azul e preta? **Resposta: $5! = 120$**



4) (FEI-SP) Obtenha o número de anagramas da palavra REPÚBLICA, nos quais as consoantes se mantêm nas respectivas posições: **Resposta: $4! = 24$**

5) Um comício reúne oito políticos de um partido, entre eles o presidente e o seu vice. Supondo que todos os políticos presentes irão discursar, de quantas maneiras pode ser estabelecida a sequência de discursos:

a) se o comício for aberto pelo presidente do partido ? **Resposta: $7!$**

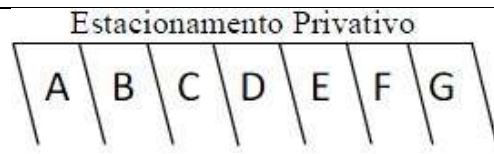
b) se o presidente e vice, nessa ordem, devem discursar consecutivamente ?

Resposta: $6!$

6) Num grupo de 5 pessoas, duas são irmãs. O número de maneiras distintas que elas podem ficar em fila de forma que as duas irmãs fiquem sempre juntas, é igual a: **Resposta: 48**

7) Quatro casais de amigos vão ao cinema e desejam sentar-se em uma fileira de 8 lugares, de maneira que os integrantes de cada casal permaneçam sempre lado a lado. De quantas maneiras distintas esses casais podem acomodar-se no cinema? **Resposta: 384**

8) (ADVISE 2009) Uma farmácia dispõe de sete vagas de estacionamento para clientes em atendimento, representadas pelas letras de A a G, conforme figura abaixo.



O número de maneiras que, esse estacionamento poderá ser ocupado é:

- (a) 6! (b) 7! (c) 120 (d) 24 (e) nda **Resposta b**

Atenção!

Nas questões abaixo, explicar sobre permutação com elementos repetidos, e utilizar a fórmula:

$$P_n^{(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

9) Considerando os anagramas da palavra MATEMATICA, determine:

a) O número total de anagramas:

b) Quantos começam com C?

10) Determine quantos anagramas tem cada palavra:

a) MONITOR

b) TATU

c) CALCULADORA

c) CÉLULA

R:2520

R:12

R:1.663.200

R:360

Avaliação:

A matemática é a área do conhecimento fértil para o desenvolvimento de atividades em grupo. Desde exercícios trabalhados em sala de aula até atividades propostas para casa, que podem se concretizar sob a forma de pesquisa tem-se a oportunidade de promover um exercício de cidadania, que tem um papel

importante na formação dos estudantes.

É necessário haver uma diversidade de instrumentos a serem utilizados durante todo o processo ensino-aprendizagem. E os instrumentos usados neste Plano de Trabalho correspondem a todo material utilizado, a fim de observar a aprendizagem dos alunos. Este material contém aspectos que foram abordados durante as aulas, para propiciar aos alunos a verificação de sua aprendizagem e, além disso, permitir ao professor verificar quais foram os conceitos pouco compreendidos pelo aluno, percebendo, conseqüentemente, possíveis lacunas no processo ensino-aprendizagem.

Os alunos são avaliados todos os dias de aula. Seu comportamento, atitude, interesse são levados em conta. As atividades são conferidas e avaliadas pelo professor e explicadas na hora da devolução dos resultados. Todo conteúdo proposto neste plano de trabalho foi embasado no currículo mínimo e nas habilidades mínimas exigidas:

- ✓ Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples.
- ✓ Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas.
- ✓ Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos.

Além dessas habilidades, também surgiram à necessidade de utilizar outras habilidades ou descritores como:

- ✓ **D19** Resolver problema com números naturais envolvendo diferentes significados das operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação);
- ✓ **H60** Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples;

Espera-se que o interesse e o entendimento dos alunos sejam maiores que o esperado.

Modelo da Atividade Avaliativa:

Atividade Avaliativa

C.E.A.T. ____ Matemática 2014 ____ 1º Bimestre ____ 3ª série

Alunos: _____ e _____ Profª.: Fernanda Fernandes

1) Com os algarismos 1, 2, 4, 6, 8 e 9:

a) Quantos números de quatro algarismos podem formar? **Resposta: 6^4**

b) Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar?

Resposta: $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

2) Um ladrão sabe que o segredo de um cofre é formado por uma sequência de três algarismos distintos. Além disso, ele sabe que o algarismo das centenas é igual a 4. Se, em média, o ladrão leva 3 minutos para testar uma possível sequência, qual o tempo máximo para o ladrão abrir o cofre? **Resposta: $1 \times 9 \times 8 = 9 \times 8 = 72$ seqüências. Se ele demora 3 min em uma, demorará 216 min.**

3) Calcule o valor da expressão: $\frac{15! \cdot 13!}{14! \cdot 12!} =$ **Resposta: 195**

4) Oito pessoas, entre elas Antônio e Pedro vão posar para uma fotografia. De quantas maneiras elas podem ser dispostas se Antônio e Pedro querem aparecer juntos e ficar lado a lado? **Resposta: $2 \cdot 7! = 10.080$**

5) Qual é o número de anagramas da palavra ESCOLA, que começam com a letra C e terminam com a letra A?

a) 720 b) 24 c) 5.040 d) 120 **Resposta: b**

6) (FURG-MG) Manoela decidiu escolher uma senha para seu e-mail trocando de lugar as letras do seu nome. O número de maneiras como ela pode fazer isso, considerando que a senha escolhida deve ser diferente do próprio nome, é:

a) 817 b) 48 c) 5039 d) 23 e) 2519 **Resposta: e**

7) Determine quantos anagramas tem cada palavra:

a) CALCULADORA

b) CÉLULA

R:1.663.200

R:360

Referências:

ROTEIRO DE AÇÃO Nº 1 – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2013 – Disponível em: < <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=111>>.

Acesso em 07 fev.2014.

ROTEIRO DE AÇÃO Nº 2 – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2013 – Disponível em: < <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=111>>.

Acesso em 07 fev.2014.

ROTEIRO DE AÇÃO Nº 3 – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2013 – Disponível em: < <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=111>>.

Acesso em 07 fev.2014.

ROTEIRO DE AÇÃO Nº 4 – Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2013 – Disponível em: < <http://projetoeduc.cecierj.edu.br/ava22/course/view.php?id=111>>.

Acesso em 07 fev.2014.

SOUZA, Joamir. **Coleção Novo Olhar**. 1. Ed. São Paulo: FTD. v. 3.

IEZZI, Gelson. et al. **Matemática Ciência e Aplicações**. 2. Ed. São Paulo:

Editora Atual, 2004. v. 2.

SITES:

SPACEBLOG. **Fila Indiana.** Disponível em<<http://ceresina63.spaceblog.com.br/1307989/FILA-INDIANA/>>. Acesso em 07 fev. 2014.

PROF. ANDRÉ. **Material Questões Permutação.** Disponível em<http://www.sistemagarra.com.br/arquivos_enviados/Prof_ANDRE/MATERIAL_QUESTOES_PERMUTACAO.pdf>. Acesso em 08 fev. 2014.