

Módulos 1, 2 e 3

Antonio Zelaquett Khoury
Dante Ferreira Franceschini Filho

Volume | 1
3ª edição

Física 2A





Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Física 2A

Volume 1 - Módulos 1, 2 e 3
3ª edição

Antonio Zelaquett Khoury
Dante Ferreira Franceschini Filho



GOVERNO DO
Rio de Janeiro

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério
da Educação



Apoio:



FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Presidente

Masako Oya Masuda

Vice-presidente

Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Física

Luiz Felipe Canto

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Antonio Zelaquett Khoury

Dante Ferreira Franceschini Filho

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM

Maria Angélica Alves

Departamento de Produção

EDITORA

Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA

Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO

Equipe CEDERJ

CAPA

Eduardo Bordoni

Fabio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA

Patricia Seabra

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

K45f

Khoury, Antonio Zelaquett.

Física 2A. v. 1 / Antonio Zelaquett Khoury. – 3.ed.

– Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2010.

196 p.; 21 X 29,7 cm.

ISBN 85-7648-072-7

1. Hidrostática. 2. Hidrodinâmica. 3. Equação de Bernoulli.
4. Teoria Cinética dos Gases. 5. Leis da termodinâmica.

I. Franceschini Filho, Dante Ferreira. II. Título.

CDD: 530.1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Vieiralses

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO
DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

Aula 1 – Introdução à hidrostática	7
<i>Antonio Zelaquett Khoury / Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Aula 2 – Os princípios de Pascal e de Arquimedes	23
<i>Antonio Zelaquett Khoury / Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Aula 3 – Introdução à hidrodinâmica	35
<i>Antonio Zelaquett Khoury / Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Aula 4 – A equação de Bernoulli	45
<i>Antonio Zelaquett Khoury / Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Aula 5 – Temperatura e equilíbrio térmico	59
<i>Antonio Zelaquett Khoury / Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Aula 6 – Gases ideais	77
<i>Antonio Zelaquett Khoury / Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Aula 7 – A Teoria Cinética dos Gases	87
<i>Antonio Zelaquett Khoury / Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Aula 8 – Trabalho e energia em um gás ideal	99
<i>Antonio Zelaquett Khoury / Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Aula 9 – Calor e transferência de energia	113
<i>Antonio Zelaquett Khoury / Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Aula 10 – A Primeira Lei da Termodinâmica	129
<i>Antonio Zelaquett Khoury / Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Aula 11 – A Segunda Lei da Termodinâmica	149
<i>Antonio Zelaquett Khoury</i>	
Aula 12 – Entropia	167
<i>Antonio Zelaquett Khoury</i>	
Experimento 1 – Determinação da densidade de um fluido através da determinação da pressão em função da profundidade	181
<i>Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Experimento 2 – Verificação da Lei de Boyle-Mariotte	187
<i>Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	
Experimento 3 – Calorimetria	191
<i>Dante Ferreira Franceschini Filho</i>	

Aula 1 – Introdução à hidrostática

Objetivos

O aluno deverá ser capaz de:

- Estabelecer a noção de fluidos e sólidos.
- Definir as grandezas físicas relevantes: pressão e densidade.
- Estabelecer a noção de fluido incompressível.
- Calcular a variação da pressão em um fluido num campo gravitacional.

Introdução

Neste módulo estudaremos as leis que regem o comportamento físico dos fluidos. Conforme veremos adiante, tais leis estão diretamente relacionadas com diversas experiências do nosso cotidiano, além de terem aplicações importantes em muitos dispositivos mecânicos de grande utilização como direções, freios e *macacos* hidráulicos. Primeiramente, trataremos de fluidos estáticos, isto é, em repouso ou equilíbrio. Mas, antes de começarmos a descrever o comportamento dos fluidos, precisamos estabelecer o que entendemos por um fluido. Como sabemos, podemos diferenciar sólidos e fluidos de maneira intuitiva. Um corpo sólido possui forma bem definida cuja alteração devido à ação de forças externas é praticamente imperceptível. Por exemplo, uma bola de sinuca sofre uma deformação imperceptível ao ser golpeada por um taco. Contudo, além de muito pequena, esta deformação dura um intervalo de tempo muito curto, após o qual praticamente desaparece. Desta forma, podemos desprezar as deformações de um corpo sólido e tratá-lo como rígido como foi feito no estudo das rotações.

Então, um fluido se caracteriza sobretudo por ser facilmente deformável, de maneira a moldar-se de acordo com o recipiente que o contém. Este é o caso da água. Ao colocarmos uma determinada quantidade de água em um copo, esta imediatamente adapta-se à forma das paredes do copo. Em um fluido dois tipos de força devem ser considerados: forças *normais* e forças *tangenciais* à superfície do fluido. As forças tangenciais estão associadas à viscosidade do fluido e são responsáveis, por exemplo, pelo atrito entre a água e um barco em movimento. Contudo, uma boa descrição do comportamento dos fluidos pode ser construída desprezando-se, em primeira aproximação,

os efeitos de viscosidade. Então, adotaremos neste curso esta aproximação e consideraremos os fluidos como ideais, isto é, incapazes de exercerem forças tangenciais. Nesta aproximação, a interação de um fluido ideal com o meio que o circunda ocorre através de forças normais à superfície do fluido. Essas forças normais dão origem ao que chamamos pressão num fluido, o que definiremos a seguir.

Pressão e densidade

O estudo de qualquer fenômeno físico começa com a definição das grandezas físicas importantes para a descrição desse fenômeno. De posse de tais definições podemos estabelecer um conjunto de leis físicas que traduzam uma relação quantitativa entre as grandezas relevantes. Definiremos agora duas grandezas fundamentais ao estudo do comportamento dos fluidos: pressão e densidade. Como mencionamos anteriormente, a pressão está associada às forças normais que um fluido exerce sobre as superfícies que o circundam, enquanto a densidade nos dá uma medida da concentração de massa num corpo.

Começemos com a definição de pressão. A maioria de nós está familiarizada com a noção de pressão através de várias experiências do nosso cotidiano. Esta noção surge, por exemplo, quando mergulhamos numa piscina e nos direcionamos ao fundo desta. Temos uma sensação de *pressão* nos ouvidos que aumenta à medida que descemos a profundidades maiores. Esta sensação está diretamente relacionada com as forças normais que a água exerce sobre as superfícies de nossos tímpanos. Note que esta sensação depende da profundidade em que nos encontramos, mas independe da direção em que orientamos nossos ouvidos. Portanto, se quisermos definir uma grandeza que traduza a pressão da água sobre nossos ouvidos, esta deverá ser uma grandeza escalar.

Ao exercermos uma força \vec{F} sobre um objeto, podemos imaginar que esta força se distribui sobre toda a área da superfície de contato com o objeto. Por exemplo, quando colocamos um tijolo sobre uma mesa, a força normal que sustenta o tijolo não é aplicada em um único ponto mas distribuída por toda a área de contato entre o tijolo e a mesa. A distribuição da força normal pela área de contato determina o esforço exercido sobre o material que constitui a mesa. De fato, se desejarmos apoiar um número grande de tijolos sobre a mesa, é intuitivo esperar que esta corra um risco menor de quebrar-se ao distribuirmos os tijolos por toda a superfície da mesa como na

Figura 1.1.a, do que se os apoiarmos todos empilhados uns sobre os outros como na Figura 1.1.b, ainda que a força normal total exercida seja a mesma.

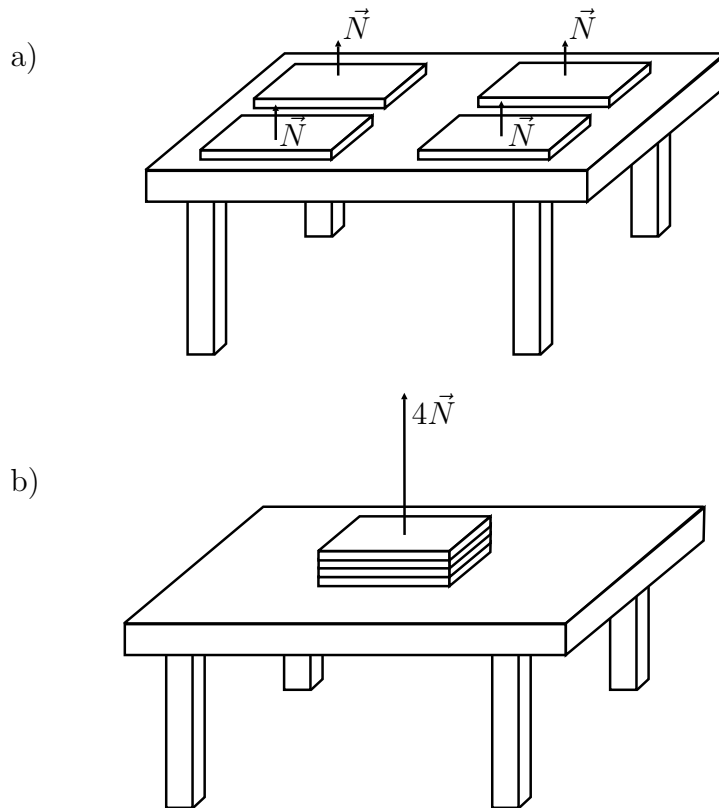


Figura 1.1: Forças normais atuando sobre tijolos distribuídos lado a lado (a) e empilhados (b) sobre uma mesa.

Assim, desenvolvemos a noção de que o esforço exercido sobre o material da mesa está relacionado com a distribuição da força pela superfície de contato, isto é, com a força de contato por unidade de área. Outra questão importante refere-se à direção desta força de contato. Por exemplo, imagine que agora apoiamos um tijolo sobre uma superfície inclinada. Se não existir atrito entre a superfície e o tijolo, este irá escorregar e cair. Na presença de atrito estático, o tijolo ficará em equilíbrio, mas agora a força de contato \vec{F}_c entre o tijolo e a superfície será igual à soma vetorial de uma componente normal à superfície de contato (reação normal \vec{N}) e outra tangente a esta superfície (força de atrito \vec{F}_{at}) conforme mostrado na Figura 1.2. Ao analisarmos o risco de a mesa quebrar, apenas a componente normal será importante, a força de atrito está distribuída pelas rugosidades das duas superfícies em contato.

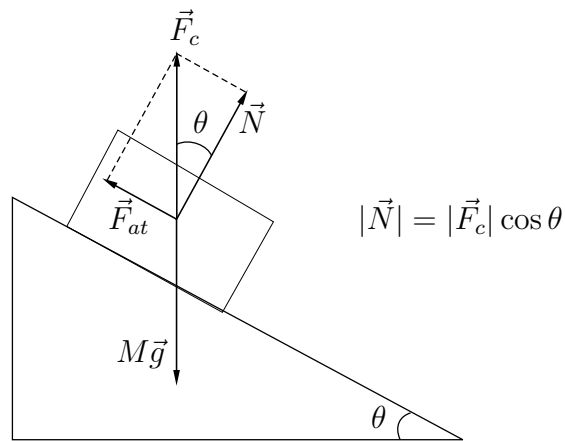


Figura 1.2: Forças atuando num tijolo apoiado sobre uma superfície inclinada com atrito.

Levando em conta as noções colocadas acima, definimos uma grandeza escalar que chamaremos pressão como:

$$P = \frac{N}{A} = \frac{F_c \cos \theta}{A},$$

Obs.: Lembre-se de que ao omitirmos o símbolo $\vec{}$ de uma grandeza vetorial, estamos nos referindo ao módulo desta grandeza.

ou seja, a pressão é a razão entre a componente normal da força de contato ($N = F_c \cos \theta$) e a área A de contato. No Sistema Internacional de unidades (SI), a pressão é expressa numa unidade chamada *Pascal* (Pa) definida como:

$$1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Newton/m}^2 \text{ ou } 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2. \quad (1.1)$$

Apesar de termos desenvolvido a noção de pressão num exemplo concreto envolvendo a superfície de contato entre dois corpos rígidos (mesa e tijolo), a pressão pode ser definida para todos os pontos de um fluido. A pressão exercida por um fluido sobre as paredes do recipiente que o contém é transmitida a todos os pontos do fluido e, como veremos na próxima seção, a pressão em um dado ponto do fluido depende da profundidade, ou seja, da altura da coluna de fluido acima deste ponto. Devido ao peso dos gases que a compõem, os diferentes pontos de nossa atmosfera próximos à superfície terrestre encontram-se a uma pressão de cerca de $1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$. Frequentemente expressamos valores de pressão em unidades da pressão atmosférica. Assim, definimos uma unidade chamada *atmosfera* (*atm*) de maneira que $1 \text{ atm} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$.

Além do *atm* e do *Pa*, existem outras unidades de pressão. Chamamos *barômetro* o aparelho utilizado para medir pressão. Por causa de sua alta densidade, o mercúrio (símbolo químico: Hg) é muito utilizado na construção

de barômetros, sendo a pressão medida através da altura de uma coluna de mercúrio no barômetro. Assim, é muito comum expressarmos a pressão em unidades da pressão exercida por uma determinada altura de Hg. Por exemplo, a pressão atmosférica corresponde à pressão exercida por uma coluna de Hg com 760mm de altura, ou seja, $1\text{atm} = 760\text{mmHg}$. Definimos assim, mais uma unidade de pressão chamada *torr* como sendo a pressão exercida por 1mm de Hg, ou seja, $1\text{torr} = 1\text{mmHg}$.

Definimos pressão em termos de força por unidade de área. Suponhamos agora o caminho inverso, isto é, conhecendo-se a pressão em todos os pontos de um fluido desejamos determinar a força total exercida sobre as paredes do recipiente que contém o fluido. Lembre-se de que um fluido ideal não é capaz de exercer forças tangenciais e de que a pressão foi convenientemente definida em termos apenas da componente normal da força de contato entre duas superfícies. Podemos facilmente calcular a força a partir da pressão em condições simples como a de uma superfície plana de área A cujos pontos estão todos à mesma pressão P . Este é o caso, por exemplo, da força exercida sobre o fundo plano de uma garrafa vertical contendo um determinado fluido conforme é mostrado na Figura 1.3.

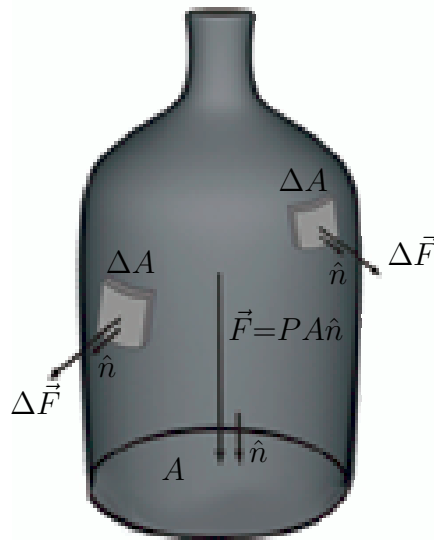


Figura 1.3: Elementos de força e área sobre as superfícies de um recipiente contendo um fluido.

Neste caso a força total exercida no fundo da garrafa é

$$\vec{F} = P A \hat{n} , \quad (1.2)$$

onde \hat{n} é o vetor unitário normal à superfície, que aponta para fora do fluido.

No entanto, em geral, a pressão pode variar de um ponto para outro da superfície, ou ainda podemos estar interessados em calcular a força exercida sobre uma superfície curva, como a superfície lateral da garrafa da Figura 1.3. Neste caso, devemos tomar porções infinitesimais da superfície com áreas ΔA aproximadamente planas. Sendo estas porções infinitesimais, podemos ainda considerar a pressão P como constante sobre a área ΔA . A cada porção ΔA corresponderá uma força infinitesimal $\Delta \vec{F} = P \Delta A \hat{n}$, onde \hat{n} é o vetor unitário normal à superfície na região do elemento ΔA . Note que para uma superfície curva, a direção de \hat{n} varia de um ponto a outro. Para calcularmos a força total exercida sobre a superfície, devemos somar sobre todas as porções ΔA e fazer o limite $\Delta A \rightarrow 0$, ou seja, devemos **integrar** sobre todas as porções ΔA :

$$\vec{F} = \int P dA \hat{n} . \quad (1.3)$$

Outra grandeza escalar de grande importância no estudo da hidrostática é a *densidade*, que traduz a distribuição espacial da massa do fluido e é uma característica particular de cada substância. A densidade é definida como a massa por unidade de volume do fluido e no sistema internacional é expressa em Kg/m^3 . A densidade da água, por exemplo, é $1,0 \times 10^3 Kg/m^3$ e a do mercúrio é da ordem de $13,6 \times 10^3 Kg/m^3$. Para um fluido homogêneo (todos os pontos com a mesma densidade), a densidade é dada simplesmente pela razão entre a massa total do fluido e o volume ocupado por ele:

$$\rho = \frac{M}{V} . \quad (1.4)$$

Neste módulo do curso trataremos de fluidos que consideraremos como incompressíveis, ou seja, a densidade não varia com a pressão. Este certamente **não** é o caso de um gás ideal cujo volume (a uma dada temperatura) é inversamente proporcional à pressão, como veremos no módulo de termodinâmica. A variação do volume de um fluido com a pressão é dada pelo *módulo de elasticidade volumar*:

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}, \quad (1.5)$$

que nos dá a razão entre a variação de pressão ΔP e a variação percentual $\Delta V/V$ de um fluido. Note que como $\Delta V/V$ é adimensional, B é expresso em dimensão de pressão. O sinal negativo na definição acima garante que B seja uma grandeza positiva. De fato, em geral, ao aumentarmos a pressão

sobre um fluido ($\Delta P > 0$) ocorre uma diminuição do volume ($\Delta V < 0$) e vice-versa. Ou seja, ΔP e ΔV geralmente têm sinais opostos, o que é compensado pelo sinal negativo na definição de B . Se uma substância possui B muito grande, então é necessário exercer uma pressão muito alta para produzir uma variação percentual de volume apreciável. Por exemplo, o módulo volumar da água é igual a $2,2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$. Isto significa que sob a pressão existente no fundo do Oceano Pacífico ($4,0 \times 10^7 \text{ N/m}^2 \approx 400 \text{ atm}$), a variação percentual de volume da água é de apenas 1,8%. Assim, podemos considerar a água como um fluido incompressível. De agora em diante, restringiremos nossa discussão aos fluidos que, com boa aproximação, podem ser considerados como incompressíveis.

Uma experiência cotidiana nos mostra intuitivamente que a pressão que o fluido exerce sobre uma superfície não depende da orientação relativa dessa superfície. Acima mencionamos a sensação associada à pressão que a água exerce sobre a superfície de nossos tímpanos ao mergulharmos. A evidência maior que temos ao mergulhar, quando nadamos em direção ao fundo, é justamente o aumento da pressão dentro dos ouvidos. Esta sensação traduz a variação real da pressão de um fluido em função da profundidade, fato que será discutido mais adiante. Um outro fato, que talvez o leitor já tenha percebido, é a invariabilidade desta sensação de pressão nos ouvidos quando, estando com a cabeça sempre na mesma profundidade, a inclinamos de modo a variar a orientação dos ouvidos. Verifica-se que, se a variação da profundidade for mesmo pequena durante este movimento, nenhuma alteração será percebida na pressão exercida sobre os ouvidos.

A independência da pressão em função da orientação da superfície sobre a qual ela está sendo exercida, pode ser mostrada ao analisarmos o equilíbrio de um elemento de fluido. Afinal, é preciso lembrar que estamos estudando *hidrostática*, ou seja, fluidos em equilíbrio. O elemento de fluido sobre o qual se baseia nossa discussão está mostrado na Figura 1.4. Este é um poliedro, com faces paralelas duas a duas, com a exceção das faces 1 e 2, as quais serão objeto de nossa discussão. Como vemos nesta figura, as faces 1 e 2 têm orientações diferentes em relação à horizontal. É importante observar também que estas duas faces são as únicas faces do poliedro nas quais a pressão exerce uma força com componente na direção \hat{x} .

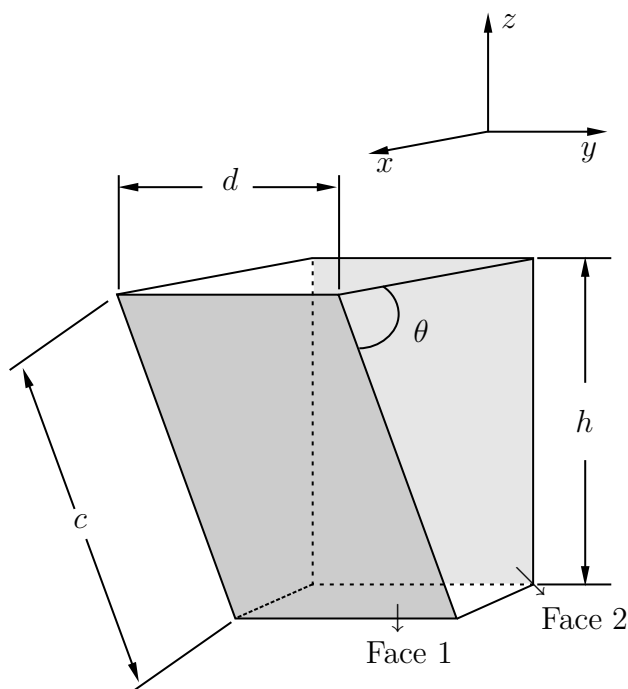


Figura 1.4: Elemento de volume utilizado para verificar a dependência da pressão com a orientação da superfície. A figura mostra as dimensões do poliedro e as faces (1 e 2) utilizadas na discussão.

Para verificar que a pressão não depende da orientação da superfície sobre a qual ela é exercida, nos utilizaremos do fato que o fluido está em equilíbrio. Logo, a força resultante sobre qualquer elemento constituinte do fluido deve ser nula, como no caso do poliedro da Figura 1.5. Isto significa que todas as componentes da força resultante sobre o poliedro devem se anular, ou seja: $F_x = F_y = F_z = 0$. Portanto, as componentes horizontais das forças exercidas sobre as faces 1 e 2 deverão satisfazer a:

$$F_{1x} + F_{2x} = 0 . \quad (1.6)$$

Como $F_{1x} = F_1 \sin \theta = p_1 A_1 \sin \theta$, e $F_{2x} = -p_2 A_2$, concluímos então que

$$p_1 A_1 \sin \theta = p_2 A_2 . \quad (1.7)$$

Por outro lado, observando as áreas dos retângulos que constituem as faces 1 e 2, verifica-se a seguinte relação:

$$A_1 \sin \theta = A_2 . \quad (1.8)$$

Concluímos, portanto, que $p_1 = p_2$, ou seja, a pressão não depende da orientação da superfície sobre a qual ela é exercida.

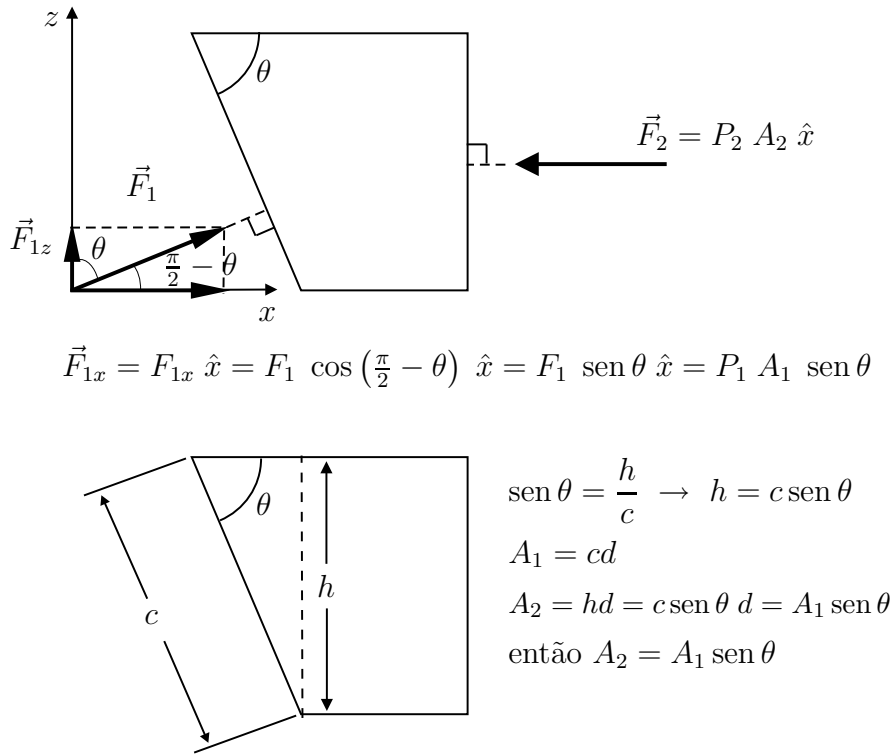


Figura 1.5: Descrição das componentes na direção x das forças que atuam nas faces 1 e 2 do poliedro, e relação entre as áreas destas faces.

Fluido incompressível num campo gravitacional

Na item anterior, para mostrar a independência da pressão em função da orientação da superfície, utilizamo-nos do fato do fluido estar em equilíbrio. Mais especificamente, reunimos as forças atuando na direção \hat{x} , as quais deveriam anular-se. estas forças resumiam-se àquelas provenientes da pressão exercida sobre as faces do poliedro. Mas se, ao contrário, tivéssemos resolvido analisar as forças na direção \hat{z} , a situação seria um pouco mais complexa, pois teríamos que incluir o peso do elemento de fluido, força que só tem componente na direção \hat{z} . E este é o efeito que começaremos a discutir agora: a variação da pressão em função da presença de um campo gravitacional.

Antes de começarmos a discutir esta situação em um fluido, vamos tentar enxergar o que acontece analisando as forças que agem sobre uma pilha de três tijolos empilhados sobre o tampo de uma mesa, como mostra a Figura 1.6.a. Suponhamos que os tijolos tenham as mesmas dimensões e o mesmo peso, e estejam empilhados de modo alinhado.

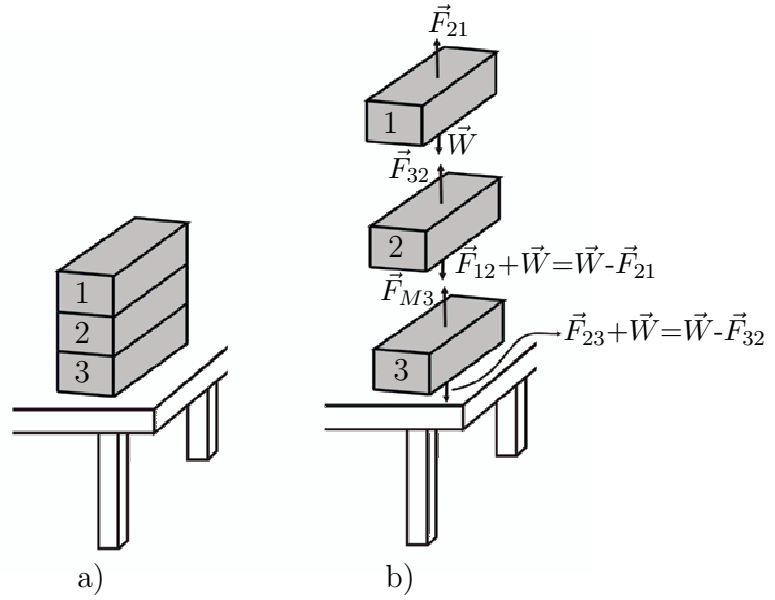


Figura 1.6: Descrição das forças que atuam sobre três tijolos empilhados.

Começemos com a análise do tijolo superior. Sobre ele agem duas forças, ambas na direção vertical: o próprio peso (igual a $-mg\hat{z}$), e a força normal do tijolo 2 sobre o tijolo 1, que chamaremos $\vec{F}_{21} = F_{21}\hat{z}$. Sobre o tijolo do meio (tijolo 2), por sua vez, agem três forças, todas também verticais: o seu peso, a força normal \vec{F}_{12} exercida pelo tijolo 1, (a qual, como consequência da Terceira Lei de Newton deve ser igual a $-\vec{F}_{21}$), e a força normal \vec{F}_{32} exercida pelo tijolo 3. Finalmente, sobre o tijolo 3 agem, além do peso, a força normal exercida pela mesa \vec{F}_{M3} , e a força normal $\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$ exercida pelo tijolo 2. Todas estas forças estão mostradas esquematicamente, para cada tijolo, na Figura 1.6.b.

Com base nesta análise, podemos então escrever a equação de equilíbrio para cada tijolo, na direção z :

$$\begin{aligned} F_{21} - mg &= 0 \text{ (tijolo 1) ,} \\ F_{32} - F_{21} - mg &= 0 \text{ (tijolo 2) ,} \\ F_{M3} - F_{32} - mg &= 0 \text{ (tijolo 3) .} \end{aligned} \quad (1.9)$$

A solução para o sistema de equações acima pode ser obtida, resolvendo primeiro a equação do tijolo 1, substituindo o valor de F_{21} obtido na equação do tijolo 2, assim determinando F_{32} , valor que substituído na equação do tijolo 3 permite a determinação de F_{M3} . Seguindo este procedimento, podemos obter a magnitude de todas as forças envolvidas:

$$\begin{aligned}
 F_{21} &= mg, \\
 F_{23} &= 2mg, \\
 F_{M3} &= 3mg.
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Podemos então, fazer algumas observações em relação a esses resultados. Em primeiro lugar, observa-se que, como deve ser esperado, a força que a pilha de tijolos faz sobre a mesa ($\vec{F}_{3M} = -\vec{F}_{M3}$) é igual ao peso da pilha. Em segundo lugar, observamos que, para cada um dos tijolos, a força exercida nas faces superior e inferior apresentam magnitudes diferentes, o mesmo acontecendo com as pressões exercidas nestas faces, uma vez que as suas áreas de superfície são iguais. Veja também, que a força exercida na face superior de cada tijolo tem magnitude igual ao peso dos tijolos empilhados sobre ela (o que se traduz em força nula para o tijolo 1, força igual a mg para o tijolo 2, e $2mg$ para o tijolo 3). Obviamente, a diferença entre as forças nas faces inferior e superior de cada tijolo é igual em magnitude ao seu peso, uma vez que os tijolos estão em equilíbrio.

Apesar da marcante diferença entre um fluido e um sólido, o comportamento discutido acima para a pilha de tijolos, deve encontrar correspondência no comportamento de um fluido em equilíbrio. A discussão a seguir será baseada na suposição de que se possa pensar em um fluido como sendo composto de um número infinitamente grande de elementos de volume, ou células de um fluido. Isto corresponde a delimitar os elementos de volume do fluido por meio de superfícies imaginárias, de modo a se formar um poliedro de fluido. Pode-se, por exemplo, dividir um fluido por meio de planos paralelos às direções x , y e z , com espaçamentos regulares em cada direção, como mostra a Figura 1.7.

Assim, um elemento de fluido será constituído por paralelepípedos com arestas iguais a Δx , Δy , e Δz . Mesmo sendo imaginárias as superfícies de separação com os outros elementos de fluido, é nelas que é exercida a força de um elemento de fluido sobre o outro. Como o fluido está em equilíbrio, a força resultante deve ser nula, portanto deverá também ser nula a sua componente vertical F_x . Considerando que as dimensões das faces do elemento de fluido são pequenas o suficiente para que a pressão sobre elas seja constante, as forças que atuam sobre o elemento são: o seu peso ($\rho g \Delta x \Delta y \Delta z$), e as forças provenientes da pressão exercida sobre as faces superior e inferior do paralelepípedo de fluido, como mostra a Figura 1.7. A equação de equilíbrio

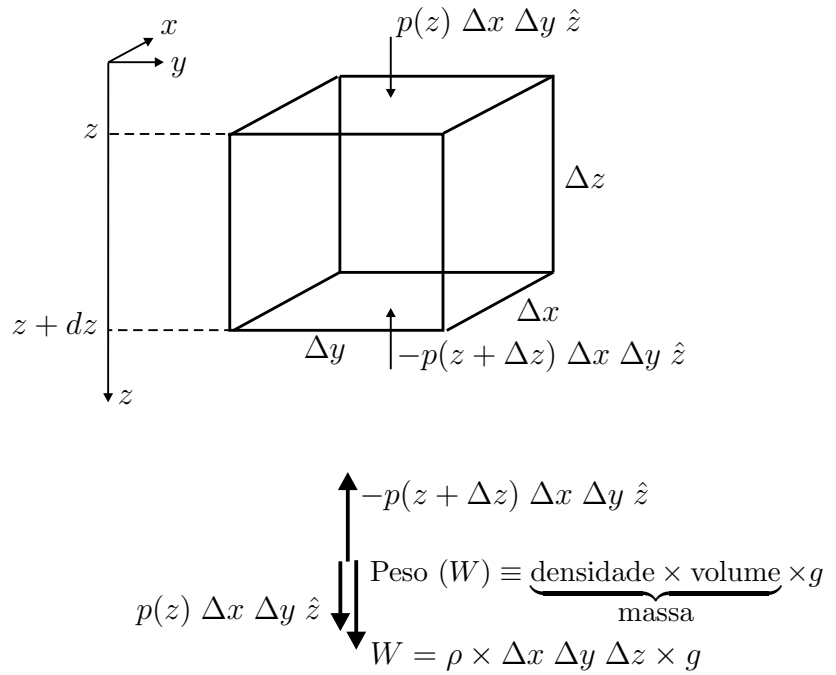


Figura 1.7: Elemento de volume utilizado na discussão da pressão em função da profundidade, na presença de um campo gravitacional.

para este fluido fica sendo então:

$$F_z = \rho g \Delta x \Delta y \Delta z - p(z + \Delta z) \Delta x \Delta y + p(z) \Delta x \Delta y = 0, \quad (1.11)$$

No caso, o eixo z escolhido tem a origem na superfície e aponta para baixo.

onde z é a posição do fluido em relação à superfície, $p(z)$ e $p(z + \Delta z)$ são as pressões na faces superior e inferior do fluido respectivamente, e ρ é a densidade do fluido. Dividindo-se a equação de equilíbrio por $\Delta x \Delta y$ obtemos então:

$$\Delta p = \rho g \Delta z \quad (1.12)$$

ou

$$\rho g = \frac{\Delta p}{\Delta z}. \quad (1.13)$$

Fazendo agora o limite para dimensões muito pequenas do paralelepípedo, obtemos a equação diferencial:

$$\rho g = \frac{dp}{dz}, \quad (1.14)$$

cujas solução é dada por:

$$p - p_0 = \rho g \int_0^z dz, \quad (1.15)$$

o que resulta em:

$$p = p_0 + \rho g z, \quad (1.16)$$

onde p_0 é a pressão na superfície do líquido (posição $z = 0$), ou seja, a pressão de um fluido aumenta com a profundidade, o que está em acordo com o aumento da pressão sobre os ouvidos quando mergulhamos em direção ao fundo de um reservatório de água. É comum chamar-se a quantidade $\rho g h$ pressão manométrica, isto é, o valor da pressão menos a pressão atmosférica.

Exemplo 1

Um tubo estreito com área da seção transversal $a = 5,0 \text{ cm}^2$ e altura $h_1 = 2,0 \text{ m}$, é colocado sobre um barril com área da base $A = 1,0 \text{ m}^2$ e altura $h_2 = 1,0 \text{ m}$, conforme mostrado na Figura 1.8. O barril e o tubo são cheios até o topo com água. Calcule a força hidrostática exercida no fundo do barril. Compare esta força com o peso do líquido e discuta o resultado.

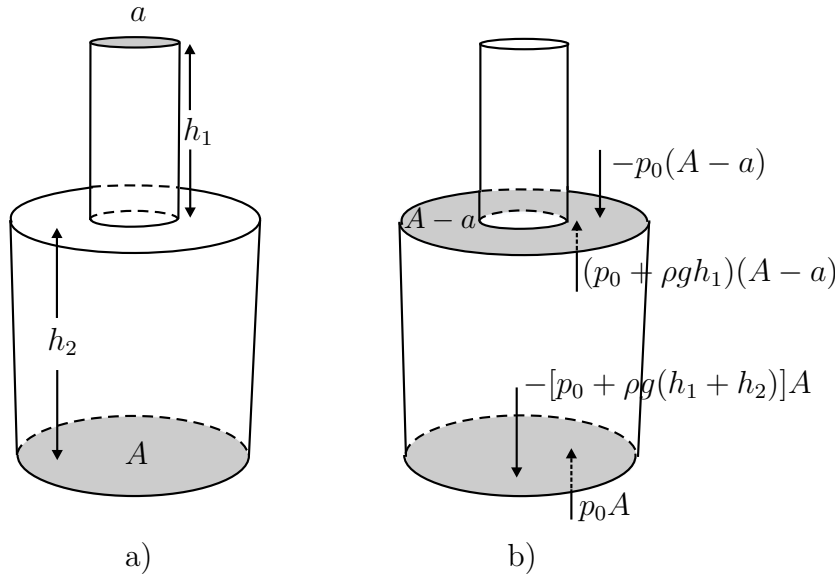


Figura 1.8: Exemplo 1. (a) Dimensões do barril e do tubo estreito acoplado à sua tampa superior. (b) Forças verticais que atuam sobre o barril.

Solução:

A força hidrostática exercida no fundo do barril pode ser calculada a partir do produto da área pela pressão no fundo do barril:

$$F = P A .$$

A pressão no fundo do barril será dada pela altura $h = h_1 + h_2 = 3,0\text{ m}$ da coluna de líquido acima dele, de acordo com a Eq.(16):

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \rho g h \\ &= 1,01 \times 10^5 \text{ Pa} + 1,0 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3 \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 3,0 \text{ m} \\ &= 1,30 \times 10^5 \text{ Pa} . \end{aligned}$$

Assim, podemos facilmente calcular a força F exercida no fundo:

$$F = 1,30 \times 10^5 \text{ Pa} \cdot 1,0 \text{ m}^2 = 1,30 \times 10^5 \text{ N} .$$

Passemos agora à comparação com o peso da água. O volume total do recipiente é a soma dos volumes do barril e do tubo:

$$V = a h_1 + A h_2 = 1,001 \text{ m}^3 .$$

O peso do fluido pode então ser facilmente calculado:

$$W = \rho V g = 1,0 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3 \times 1,001 \text{ m}^3 \times 9,8 \text{ m/s}^2 \approx 9,8 \times 10^3 \text{ N} .$$

Note que a força hidrostática no fundo do barril é muito maior do que o peso total do líquido. A princípio, isto pode parecer uma contradição. Esta contradição desaparece, porém, se lembrarmos que a água exerce também uma força hidrostática na superfície superior do barril (com área $A - a$), força esta que é dirigida para cima. Esta força também pode ser facilmente calculada como:

$$F' = P' (A - a) = (P_0 + \rho g h_1) (A - a) .$$

Se contabilizarmos todas as forças verticais que atuam no barril, como indicado na Figura 1.8.b, devemos incluir as forças devido à pressão atmosférica nas partes exteriores do fundo e da superfície superior do barril. Assim, a força resultante sobre o barril será:

$$\begin{aligned} F_R &= (P_0 + \rho g h) A - P_0 A + P_0 (A - a) - (P_0 + \rho g h_1) (A - a) \\ &= \rho g h A - \rho g h_1 (A - a) = \rho g (h_1 a + h_2 A) = W , \end{aligned} \tag{1.17}$$

ou seja, a força resultante tem apenas a contribuição das pressões manométricas em cada superfície.

Resumo

Nesta aula, definimos pressão e densidade, que são as grandezas físicas importantes para o estudo do comportamento dos fluidos em equilíbrio. Aprendemos a calcular a pressão a partir da força e da área de contato entre duas superfícies, e também vimos como realizar o procedimento oposto, isto é, conhecendo-se a pressão em todos os pontos de contato aprendemos a calcular a força de contato entre duas superfícies. Estudamos também a variação da pressão num fluido em equilíbrio na presença de um campo gravitacional. Vimos como a pressão aumenta com a profundidade de acordo com a relação $P(h) = P_0 + \rho gh$.

Exercícios

1. Uma seringa possui um pistão com $0,87\text{ cm}$ de diâmetro. Determine a pressão no fluido da seringa quando aplica-se uma força de $50,6\text{ N}$ sobre o pistão.
2. A porta de uma casa mede $2,1\text{ m}$ por $1,7\text{ m}$. Numa ventania, a pressão do ar do lado de fora cai a $0,97\text{ atm}$, mas no interior a pressão permanece em 1 atm . Calcule o módulo e dê o sentido da força que atua na porta.
3. Derramamos mercúrio (Hg) no ramo esquerdo de um tubo em U contendo inicialmente água. Quando a coluna de água no ramo direito sobe $15,7\text{ cm}$, qual a altura da coluna de mercúrio no ramo esquerdo?

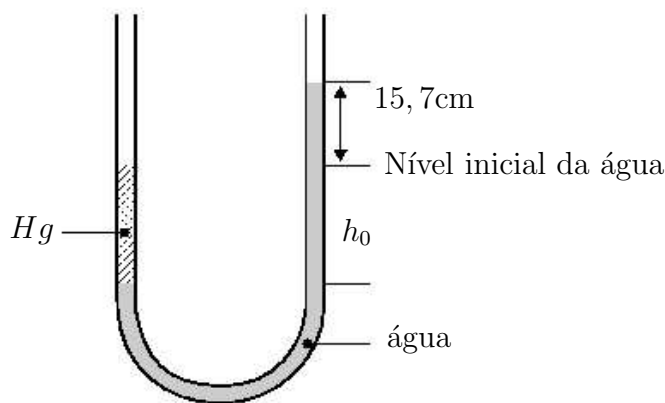


Figura 1.9: Exercício 3. Tubo em U contendo mercúrio e água.

4. Uma caixa d'água possui uma base quadrada com $3,0\text{ m}$ de lado e uma altura de $2,0\text{ m}$. A caixa encontra-se completamente cheia. Calcule o módulo da força exercida pela água (a) no fundo da caixa e (b) numa das paredes laterais.
5. Um recipiente contendo um fluido de densidade ρ é acelerado verticalmente para cima com aceleração a . Mostre que a pressão manométrica no fluido é dada, em função da profundidade h , por $\rho h(g + a)$.
Sugestão: Reexamine a Equação 1.11, escrita para a condição de equilíbrio, e adapte-a para o caso em que o elemento de fluido considerado está acelerado para cima.)

Aula 2 – Os princípios de Pascal e de Arquimedes

Objetivos

O aluno deverá ser capaz de:

- Estabelecer o Princípio de Pascal.
- Apresentar a prensa hidráulica.
- Estabelecer o Princípio dos vasos comunicantes.
- Estabelecer o Princípio de Arquimedes.
- Discutir dispositivos para medidas de pressão.

Princípio de Pascal e aplicações

A primeira coisa que faremos nesta aula será olhar um pouco mais de perto a equação 16 da Aula 1, a qual descreve a variação da pressão em um fluido, em função da profundidade. Observe que ela tem um termo que depende da profundidade e um termo constante igual a p_0 , a pressão na superfície do fluido. Uma consequência direta desta equação é que, se variarmos o valor de p_0 , esta variação de pressão será transmitida a todos os pontos do fluido. Esta propriedade dos fluidos é conhecida como Princípio de Pascal, pois foi enunciada pela primeira vez por Blaise Pascal, em 1663.

Este princípio aplicado por Pascal é a realização do que se conhece como prensa hidráulica. Você certamente já viu este dispositivo em funcionamento. É o conhecido macaco hidráulico, com o auxílio do qual uma pessoa pode, facilmente, erguer um automóvel com massa de centenas de quilogramas, em uma oficina mecânica. A Figura 2.1 mostra esquematicamente a prensa hidráulica, que consiste em um recipiente cheio de um fluido, com duas aberturas, por exemplo cilíndricas, com diâmetros diferentes. Nestas aberturas estão encaixados êmbolos leves bem adaptados, de tal forma que nenhuma quantidade de fluido possa passar entre a parede das aberturas e os êmbolos. Na Figura 2.1, as áreas dos êmbolos estão assinaladas como A_1 e A_2 , sendo obviamente $A_1 > A_2$. Imagine que os êmbolos estão no mesmo nível, e que, sobre o pistão de área A_1 , está posicionado um objeto pesado de massa M . Assim, para entender o funcionamento da prensa hidráulica,

devemos responder à pergunta: qual é a força F que devemos exercer sobre o êmbolo de área A_2 para que o objeto com massa M permaneça em equilíbrio?

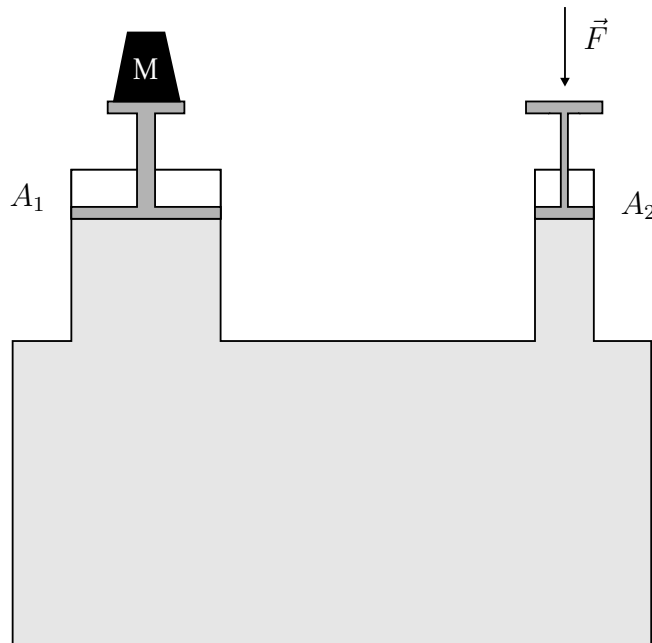


Figura 2.1: Esquema da prensa hidráulica.

Para responder a esta pergunta precisaremos analisar as forças que estão agindo sobre o objeto de massa M . Estas são o seu peso Mg e a força normal N do êmbolo sobre o objeto. Uma vez que a massa M está em equilíbrio $N = Mg$ e, como consequência, a pressão exercida sobre o fluido será igual a N/A_1 que por sua vez é igual a Mg/A_1 . Pelo Princípio de Pascal, esta pressão será transmitida à superfície do fluido em contato com o êmbolo menor. Ou seja:

$$F = \frac{A_2}{A_1} Mg, \quad (2.1)$$

onde F é a força que precisaremos exercer para manter o objeto de massa M em equilíbrio.

Exemplo 1

Uma prensa hidráulica possui um êmbolo maior com 10 cm de diâmetro e um menor com 2 cm de diâmetro. Calcule a força necessária para erguer um objeto com massa $M = 100\text{ kg}$ com o auxílio da prensa.

Solução:

A área de contato do êmbolo maior (diâmetro de 10 cm) é $A_1 = 0,031m^2$ e a do êmbolo menor (diâmetro de 2 cm) é $A_2 = 0,00012m^2$. A força necessária para equilibrar o objeto com massa igual a 100 kg será então igual a:

$$F = \frac{A_2}{A_1} Mg = \frac{\pi(\frac{2}{2})^2}{\pi(\frac{10}{2})^2} 980 N = \frac{1}{25} 980 N = 39,2 N . \quad (2.2)$$

Observe que a força necessária é quase trinta vezes menor que o peso do objeto, o que explica a facilidade com que se ergue um carro num posto de gasolina.

Uma outra consequência do que foi discutido na Aula 1, e que você provavelmente já conhece, é o Princípio dos vasos comunicantes. Este efeito está esquematizado na Figura 2.2, a qual mostra um vaso constituído por ramificações de formatos diferentes, sendo o seu fundo nivelado. Uma vez que todos os pontos do fundo do vaso estarão à mesma pressão, e que a pressão na superfície do fluido em cada ramificação é igual à pressão atmosférica, as alturas de fluido em cada ramificação serão iguais. Este fato é melhor explicado quando se expressa a pressão p_F do fundo do vaso em função da altura do líquido:

$$\begin{aligned} p_F &= p_0 + \rho g h_1 , \\ p_F &= p_0 + \rho g h_2 , \\ p_F &= p_0 + \rho g h_3 . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Destas equações concluímos que $h_1 = h_2 = h_3$.

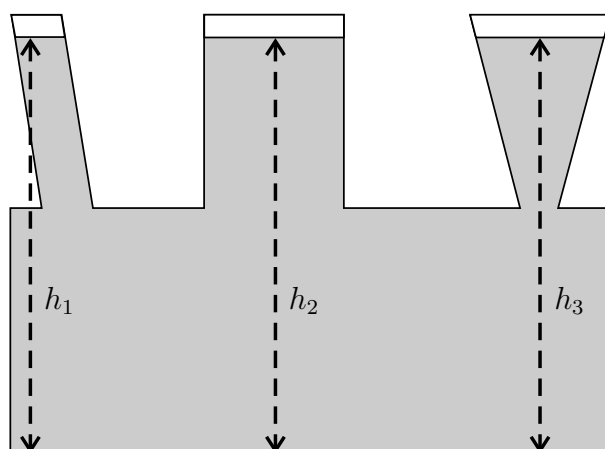


Figura 2.2: Esquema dos vasos comunicantes

Princípio de Arquimedes

Faz parte da experiência de qualquer pessoa a observação de que um objeto largado em um fluido pode ter três tipos de comportamento de equilíbrio: flutuar na superfície, ficar mergulhado em uma determinada profundidade ou estacionar no fundo do recipiente que contém o fluido. Outro fato de interesse é o comportamento dos peixes, ou o dos submarinos, que podem mudar de profundidade com uma relativa facilidade.

Para analisar fisicamente esta situação iremos usar o mesmo artifício utilizado para discutir a variação da pressão de um fluido com a profundidade. Vamos supor um paralelepípedo de um sólido com densidade ρ_s , com dimensões L_x , L_y e L_z . Imaginemos que este sólido está mergulhado em um fluido com densidade ρ , estando sua face superior a uma profundidade z . Vamos, então, analisar as forças exercidas pelo fluido sobre o sólido. Elas têm origem na pressão exercida pelo fluido sobre as faces do paralelepípedo. As forças provenientes da pressão sobre as faces laterais do sólido obviamente se anulam. Restam, então, as forças provenientes da pressão sobre as faces superior e inferior do sólido. Esta força é dada por:

$$F_z = [p(z) - p(z + L_z)]L_xL_y . \quad (2.4)$$

Mas, como vimos na aula anterior, $p(z)$ e $p(z + \Delta z)$ são dados por:

$$\begin{aligned} p(z) &= p_0 + \rho g z , \\ p(z + L_z) &= p_0 + \rho g (z + L_z) . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Portanto, a força resultante da pressão sobre as faces superior e inferior do sólido será dada por:

$$F_z = -\rho g L_x L_y L_z = -\rho g V_s , \quad (2.6)$$

onde V_s é o volume do sólido considerado. Portanto, o módulo desta força é igual ao peso de uma quantidade de fluido com volume igual à do sólido considerado. O sinal negativo indica que esta força aponta para cima, isto é, contrária ao sentido do eixo z adotado na Aula 1 (veja a Figura 1.7). É importante notar que esta força, que é denominada empuxo, depende apenas das propriedades do fluido no qual o sólido está mergulhado, e do volume do sólido. Esta lei foi, pela primeira vez, enunciada por Arquimedes, sendo por isso denominada *Princípio de Arquimedes*, o qual pode ser enunciado da seguinte forma: *um corpo mergulhado em um fluido sofre uma força*

para cima, cujo valor absoluto é igual ao peso do volume de fluido deslocado pelo corpo.

O estado de movimento de um sólido ao ser mergulhado em um fluido dependerá somente de sua densidade. Se sua densidade for maior que a densidade do fluido, o seu peso será então maior do que o empuxo, fazendo com que ele se movimente em direção ao fundo do recipiente que contém o fluido. Se a sua densidade for igual à do fluido, ele estará em equilíbrio, pois seu peso será igual ao empuxo. Se, caso contrário, sua densidade for menor que a do fluido, ele flutuará na superfície do fluido, com parte de seu volume acima da superfície.

Exemplo 2

Uma caixa cúbica com 50 cm de aresta e massa $M = 5,0\text{ kg}$ flutua numa piscina com água. Se derrarmos mercúrio (Hg) dentro da caixa, qual a altura máxima de Hg (com relação ao fundo da caixa) que pode ser transportada sem que a caixa afunde?

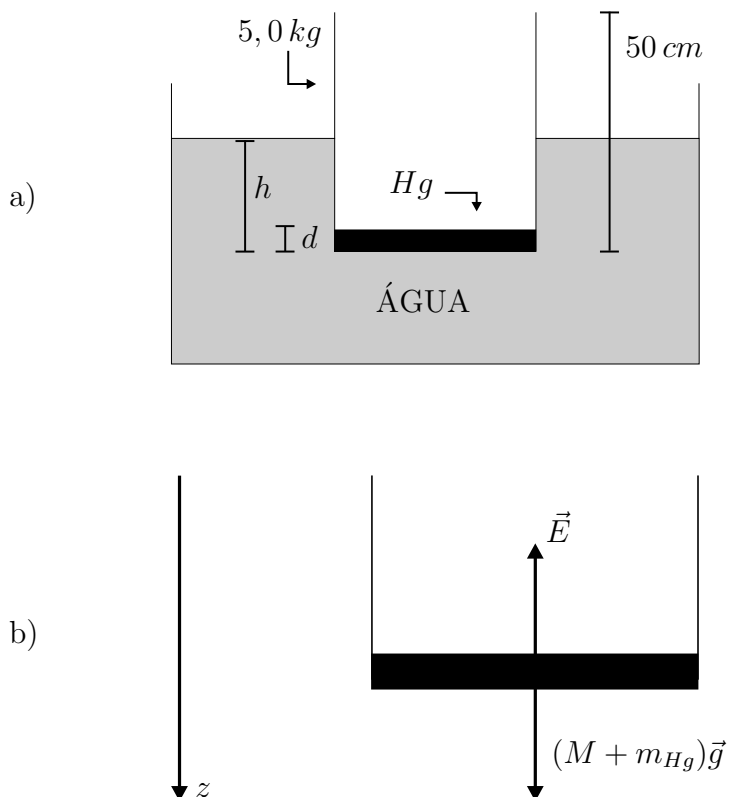


Figura 2.3: Exemplo 2. Aplicação do princípio de Arquimedes. a) Caixa com mercúrio (Hg) flutuando na água. b) Diagrama de forças atuando no sistema formado pela caixa com mercúrio.

1ª Solução:

Consideremos a caixa parcialmente cheia com uma massa m_{Hg} de Hg. Isolamos o sistema formado pela caixa com Hg, identificando todas as forças que atuam no sistema:

$$\sum F_z = (M + m_{Hg})g - E = 0 ,$$

onde $(M + m_{Hg})g$ é o peso total do sistema e E , o empuxo exercido pela água. Uma vez que o sistema se encontra em equilíbrio, temos que $\sum F_z = 0$. Por outro lado, pelo Princípio de Arquimedes, o empuxo é igual ao peso do volume de água deslocado, isto é,

$$E = \rho_a V g = \rho A h g ,$$

onde ρ_a é a densidade da água, A é a área da seção reta da caixa e h é a altura submersa da caixa. Podemos então relacionar h com a massa m_{Hg} colocada no interior da caixa através de:

$$(M + m_{Hg})g - \rho_a A h g = 0 \implies m_{Hg} = \rho_a A h - M .$$

Obviamente, a caixa afundará quando a altura submersa igualar-se à aresta da caixa, ou seja, $h = 50\text{ cm}$. Assim, a quantidade máxima de Hg que pode ser transportada é:

$$m_{Hg} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times (0,5 \text{ m})^2 \times 0,5 \text{ m} - 5,0 \text{ kg} = 120 \text{ kg} .$$

Conhecendo a densidade ρ_{Hg} do mercúrio, podemos calcular o volume ocupado por m_{Hg} :

$$V_{Hg} = \frac{m_{Hg}}{\rho_{Hg}} = \frac{120 \text{ Kg}}{13,6 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3} = 8,82 \times 10^{-3} \text{ m}^3 .$$

Logo, a altura de Hg na caixa será

$$d = \frac{V_{Hg}}{A} = 35,3 \text{ mm}$$

2ª Solução:

Mencionamos anteriormente que, devido ao Princípio de Arquimedes, a condição necessária para um objeto flutuar em um fluido é a de que a densidade do objeto seja menor que a do fluido. Assim sendo, podemos comparar a densidade média da caixa contendo Hg com a densidade da água.

Lembrando que o volume total da caixa é $V_T = AH$ e $m_{Hg} = \rho_{Hg} Ad$, a densidade média da porção submersa da caixa com Hg será:

$$\bar{\rho}_c = \frac{M + m_{Hg}}{V_T} = \frac{M}{V_T} + \frac{\rho_{Hg} d}{H},$$

onde $H = 0,5\text{ m}$ é a altura da caixa. A caixa irá afundar quando a altura de Hg atingir o valor d tal que $\bar{\rho}_c = \rho_a$. Assim, temos que

$$d = H \frac{\rho_a - (M/V)}{\rho_{Hg}} = 0,5\text{ m} \frac{1,0 \times 10^3\text{ kg/m}^3 - (5,0\text{ kg} / 0,125\text{ m}^3)}{13,6 \times 10^3\text{ kg/m}^3} = 35,3\text{ mm}$$

Medidas de pressão

A medida de pressão pode ser realizada tanto por técnicas hidrostáticas como por técnicas hidrodinâmicas. Nesta aula, trataremos apenas das técnicas hidrostáticas. As técnicas hidrodinâmicas baseiam-se nas leis de escoamento de um fluido que estudaremos mais tarde.

De maneira geral, chamamos *barômetro* o aparelho utilizado para a medição da pressão atmosférica. Um tipo rudimentar de barômetro de mercúrio foi inventado no século XVII pelo italiano Evangelista Torricelli. Um tubo de vidro fechado em uma das extremidades, e completamente cheio de mercúrio, é colocado de cabeça para baixo em um recipiente, também cheio de mercúrio, como mostra a Figura (2.4).

Utilizando um tubo suficientemente longo, observa-se que a coluna de mercúrio desce produzindo vácuo na parte mais alta do tubo. A pressão na região de vácuo é praticamente nula. Neste caso, podemos calcular a pressão atmosférica, lembrando que os pontos de um mesmo fluido, que se encontram à mesma altura, possuem a mesma pressão. Assim sendo, analisaremos os pontos A, B e C indicados na Figura (2.4), um sobre a superfície do mercúrio no recipiente (ponto A), outro à mesma altura no interior do tubo (ponto B), de maneira que $p_A = p_B$, e, ainda, outro na superfície do mercúrio no interior do tubo (ponto C). Uma vez que o ponto A está em contato com a atmosfera, p_A é igual à pressão atmosférica p_0 que queremos medir. Por outro lado, a pressão no ponto B pode ser calculada com a Equação (1.12) aplicada aos pontos B e C, lembrando-se de que $p_C = 0$ pois C encontra-se na interface entre o mercúrio e a região de vácuo. Assim, concluímos que $p_A = p_B = \rho gh$. Portanto, conhecendo-se a densidade do mercúrio e a aceleração da gravidade no local da medida, pode-se medir a altura h da coluna de mercúrio no tubo e obter o valor da pressão atmosférica no local. Por exemplo, ao nível do mar,

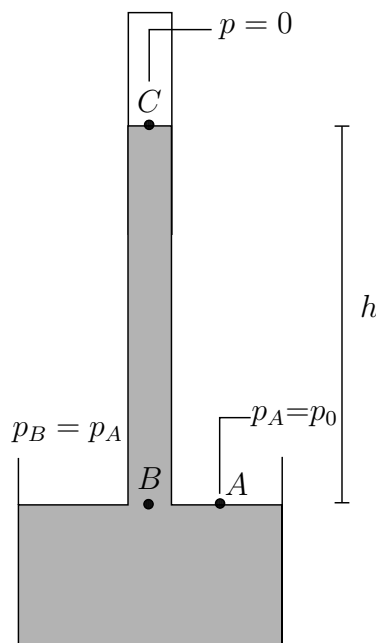


Figura 2.4: Barômetro de mercúrio.

a altura da coluna de mercúrio será de cerca de 760mm . Mais precisamente, 1 atmosfera (1 atm) corresponde a uma coluna de Hg de 760mm de altura a 0°C , sob gravidade $g = 9,80665\text{m/s}^2$. Substituindo a densidade do mercúrio a 0°C , $\rho_{\text{Hg}} = 1,35955 \times 10^4\text{kg/m}^3$, obtemos

$$1\text{atm} = (1,35955 \times 10^4\text{kg/m}^3)(9,80665\text{m/s}^2)(0,76\text{m}) = 1,01 \times 10^5\text{Pa}.$$

Baseado no barômetro de mercúrio definimos a unidade de pressão *torr* (em homenagem a Torricelli) como sendo a pressão correspondente a uma coluna de 1mm de Hg, ou seja,

$$1\text{torr} = (1,35955 \times 10^4\text{kg/m}^3)(9,80665\text{m/s}^2)(0,001\text{m}) = 133,326\text{Pa}.$$

Conforme dissemos na Aula 1, chamamos pressão manométrica a diferença entre a pressão medida e a pressão atmosférica. A *pressão absoluta* num ponto qualquer de um fluido é a soma da pressão manométrica com a pressão atmosférica, e, portanto, corresponde à pressão real no ponto em questão. O *manômetro* é um aparelho utilizado para medir-se pressões manométricas. Um tipo simples deste aparelho é o manômetro de tubo em U mostrado na Figura (2.5).

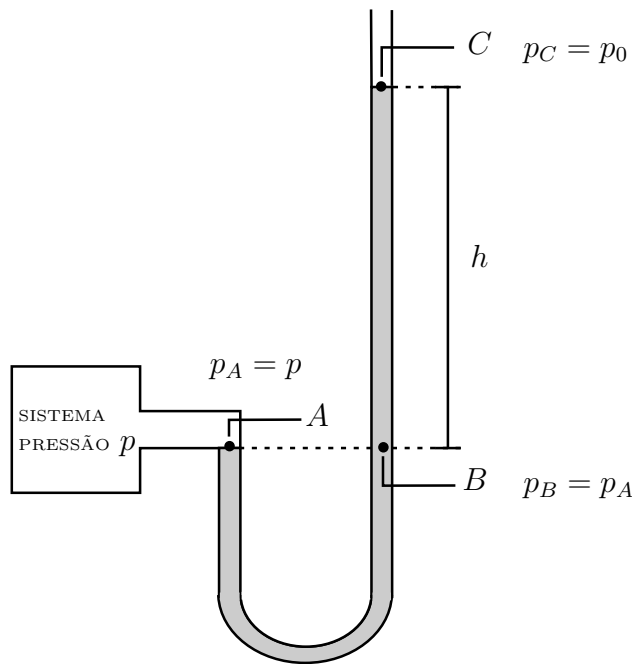


Figura 2.5: Manômetro de tubo em U.

Ele é formado por um tubo em forma de U, aberto em ambas as extremidades, contendo um fluido manométrico com densidade ρ . Uma das extremidades é colocada em contato com o sistema cuja pressão queremos medir, enquanto a outra extremidade está em contato com a atmosfera. Para calcularmos a pressão do sistema, utilizamos três pontos de referência: o ponto A de contato entre o sistema e o fluido manométrico, o ponto B localizado no outro ramo do tubo em U à mesma altura de A, e o ponto C na região de contato entre o fluido manométrico e a atmosfera. Como A e B estão à mesma altura, sobre o mesmo fluido, temos que $p_A = p_B$. Por outro lado, podemos aplicar a Equação (1.16) aos pontos B e C de maneira que $p_A = p_B = p_0 + \rho g h$. A pressão manométrica no ponto A é portanto

$$p_A - p_0 = \rho g h ,$$

ou seja, é proporcional à diferença de altura do fluido manométrico em cada ramo do manômetro. Assim, conhecendo-se ρ e g podemos obter a pressão manométrica medindo a altura h .

Resumo

Nesta aula, apresentamos dois princípios fundamentais da hidrostática. Os princípios de Pascal e de Arquimedes têm diversas aplicações práticas, sendo a base do funcionamento de todas as máquinas hidráulicas. O Princípio de Pascal nos diz que a variação de pressão em um ponto de um fluido estático é transmitida a todos os pontos do fluido. Este princípio fornece a base para o funcionamento da prensa hidráulica que permite que um objeto pesado seja erguido com uma força inferior ao seu peso. O Princípio de Arquimedes, em contrapartida, nos diz que um objeto submerso em um fluido sofre a ação de uma força vertical para cima, exercida pelo fluido, e cujo módulo é igual ao peso do volume de fluido deslocado. Nesta aula, vimos ainda os dispositivos básicos para medidas de pressão. Chamamos *barômetros* os dispositivos para medidas de pressão absoluta. Estudamos o funcionamento de um tipo rudimentar deste dispositivo que é o barômetro de mercúrio. As medidas de pressão relativa são realizadas por dispositivos chamados *manômetros*. Também estudamos um tipo comum deste aparelho que é o manômetro de tubo em U.

Exercícios

1. Um elevador hidráulico é constituído de dois pistões com tamanhos diferentes. O pistão menor tem $4,0\text{ cm}$ de diâmetro e o pistão maior possui $1,0\text{ m}$ de diâmetro. Um carro com $2,0 \times 10^3\text{ kg}$ é apoiado sobre o pistão maior. Que peso devemos colocar sobre o pistão menor para equilibrarmos o carro?
2. Um negociante de metais “preciosos” tenta vender uma jóia, supostamente feita de ouro, ao Sr. Arquimedes da Silva, que desconfia da peça e propõe um teste de legitimidade. Ele pesa a peça e conclui que a massa dela é de $39,0\text{ g}$. Em seguida, ele a submerge em um tubo contendo água, com $2,5\text{ cm}^2$ de área transversal. Sabendo que o nível da água no recipiente sobe $2,0\text{ mm}$, encontre a densidade da peça e diga se ela é legítima.
3. Uma plataforma flutua em água doce ($\rho = 0,998 \times 10^3\text{ kg/m}^3$), deslocando $5,0 \times 10^3\text{ kg}$ de água. Calcule o peso e o volume de água que a plataforma deslocaria se flutuasse em água salgada ($\rho = 1,024 \times 10^3\text{ kg/m}^3$)? O volume de água deslocada muda?

4. Um bloco de 500 kg possui a forma de um cubo com 50 cm de aresta. Este bloco é pendurado por um fio no interior de um recipiente cheio de água como mostra a figura 2.6. O objeto está submerso com sua face superior a 30 cm de profundidade.
- Calcule a força total \vec{F}_1 que atua na face superior do bloco.
 - Calcule a força total \vec{F}_2 que atua na face inferior do bloco.
 - Calcule a tração \vec{T} no fio.
 - Calcule, utilizando o Princípio de Arquimedes, o empuxo \vec{E} exercido pela água sobre o bloco.
 - Mostre que $E = F_2 - F_1$.
 - Considere agora que a face superior do bloco encontra-se a 50 cm de profundidade, e refaça os itens de (a) a (e). Que itens terão suas respostas modificadas?

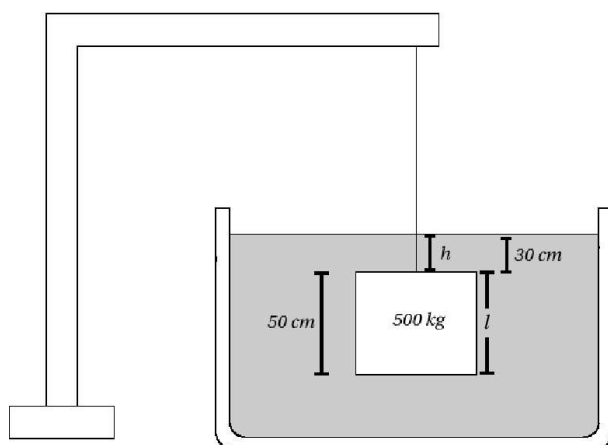


Figura 2.6: Exercício 4. O bloco de 500 kg , pendurado por um fio está submerso em um recipiente com água.

5. Suponha um barômetro que utilize água ($\rho_a = 1,0\text{ g/cm}^3$) no lugar de mercúrio. Sabendo que o valor da pressão atmosférica é de $1,01 \times 10^5\text{ Pa}$, calcule a altura da coluna de água no barômetro.

Aula 3 – Introdução à hidrodinâmica

Objetivos

O aluno deverá ser capaz de:

- Introduzir noções acerca do movimento dos fluidos.
- Estabelecer critérios para o estudo do escoamento de um fluido.
- Obter a equação da continuidade de um fluido.

Escoamento de um fluido

Temos tratado, até o momento, do comportamento de fluidos em equilíbrio. Nesta aula, começaremos a estudar os fluidos em movimento. Como vimos nas aulas anteriores, um fluido apresenta propriedades diferentes de outros sistemas, como os corpos rígidos. Num corpo rígido, a distância entre as partículas que o compõem é fixa e a descrição de seu movimento é feita de forma global. Já em um fluido, devido ao fato deste amoldar-se ao vaso que o contém, a distância entre as partículas, em geral, pode variar. Como consequência, para descrevermos o movimento de um fluido, temos de considerar, de alguma maneira, o movimento de cada partícula.

Antes de passarmos à descrição do movimento de um fluido, convém definir o que seja uma partícula de fluido. De alguma forma, isso foi feito no estudo da hidrostática, quando utilizamos elementos de fluido de dimensões infinitesimais. Mas, para um fluido em movimento, uma restrição deve ser imposta: as dimensões das partículas de um fluido devem ser bem maiores que as dimensões moleculares, de modo que se possa desprezar o movimento das moléculas constituintes do fluido em sua descrição. Uma das maneiras de descrever o movimento de um fluido é acompanhar a trajetória de cada partícula, através de sua posição $\vec{r}(t)$ e sua velocidade $\vec{v}(t)$, em função do tempo. Mas, dessa forma, a solução das equações de movimento seria muito difícil. Uma outra metodologia é mais utilizada para o estudo do movimento dos fluidos. Ela se baseia na observação da variação da velocidade em função do tempo, em cada ponto de posição \vec{r} do fluido, ou seja:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) . \quad (3.1)$$

Sob este ponto de vista, estaremos interessados em determinar a velocidade da partícula do fluido que está passando na posição \vec{r} , em função

do tempo. Observe bem que não estaremos mais interessados em acompanhar a trajetória de uma partícula de fluido, e sim, analisar a velocidade da partícula que está passando por uma dada posição, em um dado instante. Nesta forma de analisar as coisas, estaremos interessados em determinar um campo vetorial, o campo de velocidades do fluido. Determinar este campo consiste em associar a cada ponto do fluido, a cada instante, o vetor velocidade do fluido. A Figura 3.1.a exemplifica o campo de velocidades de um fluido escoando por um tubo com um estreitamento.

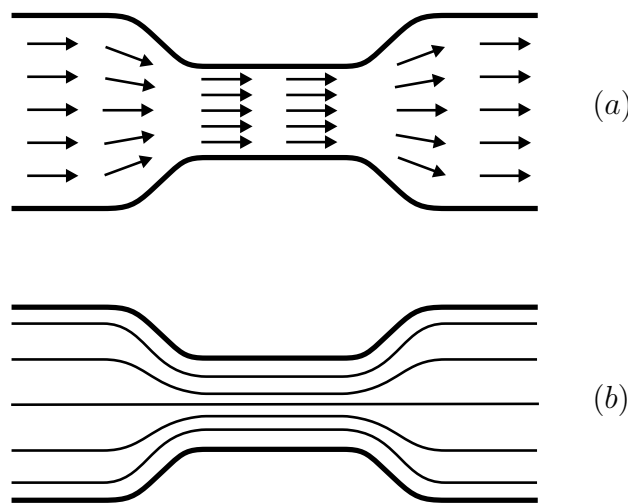


Figura 3.1: (a) Campo de velocidades de um fluido escoando dentro de um tubo com um estreitamento; (b) Linhas de escoamento correspondentes ao escoamento representado pelo campo de velocidades mostrado em (a).

Vimos acima, que a definição de campo de velocidade inclui a dependência no tempo. Isto significa que, **em geral**, o campo de velocidades varia com o tempo. Quando o campo de velocidades de um fluido não varia com o tempo, temos o que se chama **escoamento estacionário**, no qual o campo de velocidades é dado por $\vec{v}(\vec{r})$. É interessante mencionar um tipo de escoamento não estacionário, o **escoamento turbulento**, no qual as velocidades variam aleatoriamente de um ponto para outro, e de um instante para outro. Este é o caso, por exemplo, do escoamento de água em cachoeiras e corredeiras.

Para termos uma visão inicial um pouco mais completa do escoamento de fluidos, podemos classificar os escoamentos observando outras características, além da dependência temporal. Do ponto de vista da presença de forças de atrito ou dissipativas, um escoamento pode ser classificado como **viscoso** ou

não viscoso. Em um escoamento não viscoso estão ausentes forças dissipativas entre as partículas do fluido em movimento ou entre as partículas do fluido e sua vizinhança, análogas às forças de atrito. O fluido que apresenta escoamento não viscoso é chamado de **fluido ideal**. Os escoamentos podem ser classificados também como **rotacionais** ou **irrotacionais**. Em um escoamento rotacional, o campo de velocidades mostra padrões de circulação, como mostrado na Figura 3.2. Um exemplo de escoamento rotacional é o redemoinho apresentado pela água escoando pelo ralo de uma pia. Devemos observar, em relação aos diversos tipos de escoamento, que **a análise de dinâmica dos fluidos apresentada, nesta e na próxima aula, será sempre baseada em escoamentos estacionários, irrotacionais e não viscosos.**

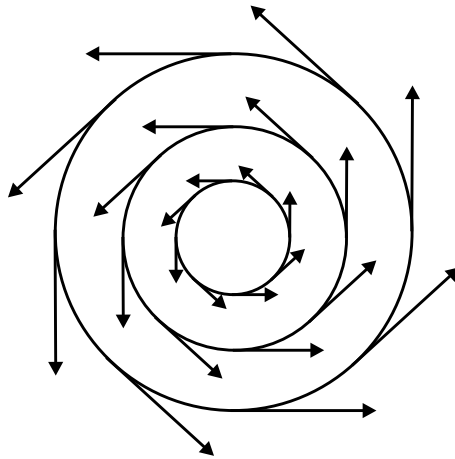


Figura 3.2: Campo de velocidades de um escoamento rotacional.

Podemos obter uma melhor visualização do escoamento de um fluido fazendo passar linhas tangentes ao vetor velocidade em cada ponto do fluido. As linhas obtidas desta forma são chamadas linhas de corrente, e estão esquematizadas na Figura 3.1.b. Esta figura mostra linhas de corrente correspondentes ao campo de velocidades mostrado na Figura 3.1.a. Quando estudamos um escoamento estacionário, as linhas de corrente se confundem com as linhas de escoamento, que são as linhas que descrevem a trajetória de uma partícula de um fluido em movimento.

A partir do conceito de linhas de corrente, podemos definir também o que seja um tubo de corrente. Um tubo de corrente é a superfície formada pelas linhas de corrente que passam pelos pontos de uma determinada curva fechada C no fluido, como mostra a Figura 3.3. No regime estacionário, as

linhas de corrente nunca atravessam as paredes de um tubo de corrente, uma vez que as linhas de corrente não mudam com o tempo.

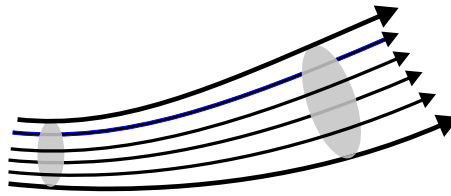


Figura 3.3: Tubo de corrente no escoamento de um fluido.

Equação da continuidade

Na sessão anterior, introduzimos algumas noções acerca do escoamento de fluidos. Agora, iremos discutir o escoamento propriamente dito, ou seja, o movimento de um fluido. Nessa primeira abordagem, nos basearemos no fato de que a massa de um fluido em escoamento se conserva. Para um fluido em escoamento, a massa de fluido que entra em uma determinada região deve ser igual à massa que sai desta região, em um determinado intervalo de tempo. Tomemos como exemplo uma canalização de água. Se delimitarmos um trecho desta canalização, toda a massa de água que entra neste pedaço de cano em um intervalo de tempo, será igual à massa de água que sai no mesmo intervalo de tempo.

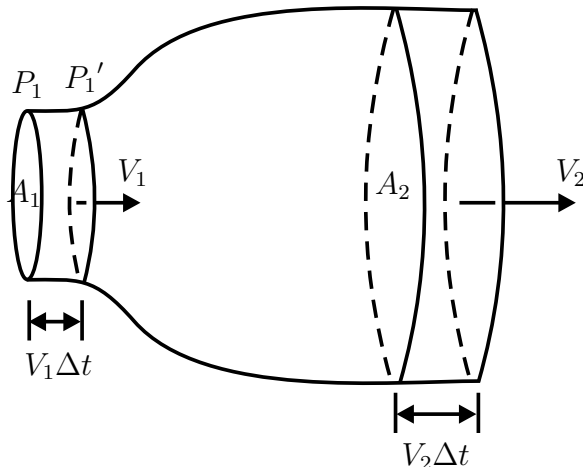


Figura 3.4: Conservação da massa de um fluido escoando.

O estabelecimento da conservação da massa pode ser feito através da grandeza chamada *vazão mássica* Q_M , que nada mais é do que a taxa de

variação temporal da massa de fluido em escoamento, ou seja:

$$Q_M = \frac{dM}{dt} , \quad (3.2)$$

onde a vazão Q_M é expressa em unidades de kg/s (quilogramas por segundo).

O próximo passo de nosso estudo será considerar a conservação da massa em um tubo de corrente. Nosso objetivo será relacionar a velocidade do fluido com a sua vazão. Para isso, consideraremos um tubo de corrente no interior do qual a velocidade é constante. Consideremos também, para efeito do cálculo da vazão, um intervalo de tempo Δt infinitesimal, pequeno o suficiente para considerarmos *constante* a velocidade v do fluido ao longo de um comprimento $v\Delta t$ (ver Figura 3.4). Consideremos, para efeito de nossa análise, o trecho de tubo de corrente entre P_1 e P'_1 , o qual está mostrado na Figura 3.4. Consideremos, também, que a área de seção reta e a velocidade do fluido em P_1 são iguais a A_1 e V_1 , respectivamente. O volume do trecho de tubo entre P_1 e P'_1 será igual então a $A_1 V_1 \Delta t$. Se a densidade do fluido neste trecho de tubo for igual a ρ_1 , a massa ΔM de fluido contida no trecho de tubo entre P_1 e P'_1 será igual a:

$$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t. \quad (3.3)$$

A vazão do fluido em P'_1 será dada então por:

$$Q = \frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\rho_1 A_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1 . \quad (3.4)$$

Como a vazão no tubo deve ser constante, para qualquer ponto do tubo deverá valer a equação:

$$Q_M = \rho A v , \quad (3.5)$$

ou seja, para quaisquer dois pontos do tubo de corrente valerá a seguinte relação:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 . \quad (3.6)$$

Neste ponto, vale a pena definirmos a vazão volumétrica de um fluido, Q_V , que é a taxa de variação temporal do volume de um fluido em escoamento, ou seja:

$$Q_M = \rho Q_V , \quad (3.7)$$

ou então:

$$Q_V = A v . \quad (3.8)$$

Por outro lado, se o fluido for incompressível, ou seja, se a sua densidade for uniforme ao longo de todo o tubo de corrente, teremos então:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 . \quad (3.9)$$

A equação da continuidade permite a análise de diversas situações que ocorrem em nosso dia-a-dia. Este é o caso do aumento do alcance do jato de água de uma mangueira, quando diminuimos o diâmetro de sua saída, ou do estreitamento do fio de água que cai da boca de uma torneira. Essas situações serão tratadas nos exemplos a seguir.

Exemplo 1

O bocal de uma mangueira para molhar jardins pode variar o seu diâmetro entre 1 e 3mm. Sabendo que a vazão de água na mangueira é igual a 1,0l/s, e que o bocal está posicionado horizontalmente a 1,0m do chão, determine os valores máximo e mínimo do alcance do jato da mangueira.

Solução:

Em primeiro lugar, devemos perguntar qual será a trajetória das partículas de água quando estas abandonarem o bocal da mangueira. Ao sair do bocal, cada partícula comportar-se-á como uma partícula em queda livre, devendo seguir uma trajetória parabólica, como mostrado na Figura 3.5. Como a velocidade inicial de cada partícula de água é horizontal, o seu alcance L será dado por (lembre-se de Física 1):

$$L = v \sqrt{\frac{2h}{g}} ,$$

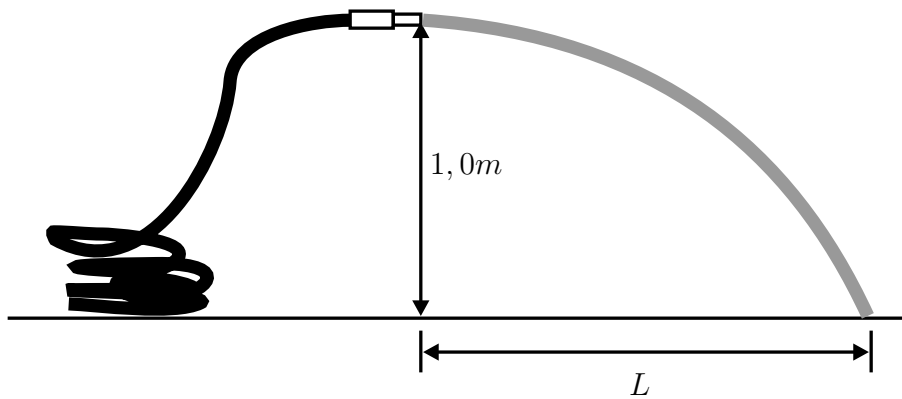
onde v é a velocidade da partícula de água ao deixar o bocal da mangueira, h é a altura da mangueira em relação ao chão e g é a aceleração da gravidade. Uma vez que a altura da mangueira é mantida constante, e sua inclinação também, a única maneira de variar o alcance do jato é através da variação da velocidade de saída da água.

Uma vez que a vazão Q da água que sai da mangueira é constante, podemos variar a velocidade de saída da água através da variação do diâmetro do bocal, já que:

$$Q_V = Av ,$$

onde A é a área do bocal, a qual, por sua vez, é igual a $\pi d^2/4$. Logo, a velocidade de saída da água será dada por:

$$v = \frac{Q_V}{A} = \frac{4Q_V}{\pi d^2} .$$

**Figura 3.5:** Exemplo 1.

Agora, então, podemos escrever a equação do alcance em função dos dados do problema:

$$L = \frac{4Q}{\pi d^2} \sqrt{\frac{2h}{g}} .$$

A vazão é igual a $1l/s$, o que por sua vez é igual a $10^{-3}m^3/s$ e a altura h é igual a $1,0m$. Logo, o alcance será dado por:

$$L = \frac{4 \times 10^{-3}m^3/s}{3.14 \times d^2} \sqrt{\frac{2 \times 1m}{9,8m/s^2}} = \frac{5,7 \times 10^{-4}m^3}{d^2} .$$

Primeiramente, calculemos o alcance quando o bocal está com $0,5cm = 5,0 \times 10^{-3}m$:

$$L = \frac{5,7 \times 10^{-4}m^3}{25,0 \times 10^{-6}m^2} = 22,8m .$$

Quando o bocal está com seu diâmetro igual a $1,0cm$ temos:

$$L = \frac{5,7 \times 10^{-4}m^3}{1,0 \times 10^{-4}m^2} = 5,7m .$$

Portanto, o alcance mínimo será igual a $5,7m$ e o alcance máximo será igual a $22,8m$.

Exemplo 2

Uma torneira (ver Figura 3.6) despeja água com uma vazão de $10ml/s$. Sabendo que a boca da torneira tem $1,0cm$ de diâmetro, determine o diâmetro do fio de água que cai da torneira, $10,0cm$ abaixo da boca da torneira.

Solução:

Da mesma forma que no exemplo anterior, as partículas de água, ao saírem da boca da torneira estarão em queda livre. Isto fará com que a

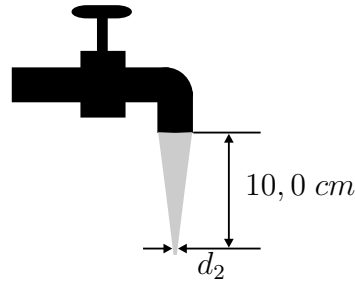


Figura 3.6: Exemplo 2.

sua velocidade aumente enquanto elas caem. Por outro lado, uma vez que a densidade da água é constante, a vazão volumétrica do fio de água que cai da torneira será a mesma em qualquer altura. A velocidade com que a água sai da torneira pode ser facilmente determinada através da equação $Q_V = A_1 v_1$, onde Q_V é a vazão volumétrica, A_1 é a área de seção reta do tubo, e v_1 é a velocidade de saída da água. Portanto:

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{10 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}}{3,14 \times \frac{(10^{-2} \text{ m})^2}{4}} = \frac{10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}}{7,8 \times 10^{-5} \text{ m}^2} = 1,3 \times 10^{-1} \text{ m/s}.$$

Como a densidade da água é constante ao longo do fio, podemos facilmente determinar as áreas do fio em qualquer altura através da equação $A_1 v_1 = A_2 v_2$, ou seja:

$$A_2 = \frac{v_1}{v_2} A_1.$$

Mas para isso precisaremos determinar a velocidade v_2 , que pode ser obtida através da equação (lembre-se, mais uma vez, das aulas de Física 1):

$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh,$$

onde h é a altura de queda das partículas de água. A velocidade v_2 será dada então por:

$$v_2 = \sqrt{(1,3 \times 10^{-1})^2 \text{ m}^2/\text{s}^2 + 2 \times 9,8 \text{ m/s}^2 \times 0,1 \text{ m}} = 1,4 \text{ m/s}.$$

Então, podemos calcular a área A_2 :

$$A_2 = \frac{v_1}{v_2} A_1 = \frac{1,3 \times 10^{-1} \text{ m/s}}{1,4 \text{ m/s}} \times 7,8 \times 10^{-5} \text{ m}^2 = 7,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2.$$

Agora, podemos determinar d_2 , o diâmetro do fio de água, 10cm abaixo da torneira:

$$d_2 = \sqrt{\frac{4 \times A_2}{3,14}} = \sqrt{\frac{4 \times 7,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2}{3,14}} = 3 \text{ mm}.$$

Resumo

Nesta aula, discutimos a mecânica dos fluidos. Começamos pela introdução ao estudo do escoamento de um fluido por meio do campo vetorial de velocidades $\vec{v}(\vec{r}, t)$, e, a seguir, fizemos a classificação de diversos tipos de escoamento (estacionário e não estacionário, viscoso e não viscoso, rotacional e irrotacional). Continuamos introduzindo os conceitos de *linha de corrente* e *tubo de corrente*. Finalmente, estabelecemos a conservação da massa para o escoamento de um fluido, a qual pode ser visualizada pela equação $\rho_1 A_1 V_1 = \rho_2 A_2 v_2$, em duas seções retas de um tubo de corrente.

Exercícios

1. Uma tubulação de 25,4 cm de diâmetro transporta água com velocidade de escoamento igual a 3 m/s. Qual a massa total de água transportada por essa tubulação durante um dia inteiro de operação?
2. O êmbolo de uma seringa de injeção cheia de água é empurrado a uma velocidade de 1 mm/s. A seringa tem seu diâmetro interno igual a 1,0 cm. A agulha na saída da seringa tem o diâmetro igual a 0,5 mm. Determine (a) a vazão e (b) a velocidade de escoamento d'água na saída da agulha.
3. Uma mangueira de água, cujo bocal tem 12 mm de diâmetro, está apontada verticalmente para cima. Pela mangueira passa água a uma vazão de 300 ml/s. Qual a altura máxima acima do bocal atingida pela água?
4. Em vez de água, a seringa de injeção do exercício 2 está cheia com glicerina. Determine a vazão mássica de glicerina que sai pela ponta da agulha.

Aula 4 – A equação de Bernoulli

Objetivos

O aluno deverá ser capaz de:

- Descrever a dinâmica de escoamento de um fluido.
- Deduzir a Equação de Bernoulli.
- Aplicar a Equação de Bernoulli e a Equação da Continuidade a aparelhos de medida como o Medidor de Venturi e o Tubo de Pitot.

Introdução

Na Aula 3, deduzimos uma propriedade cinemática fundamental do escoamento de um fluido, dada pela Equação da Continuidade. Esta equação é uma consequência natural do princípio de conservação da matéria e expressa apenas o fato de que a massa total de um fluido deve permanecer constante durante o escoamento. Este princípio simples, contudo, nos fornece uma informação importante acerca da cinemática do escoamento, dizendo como deve variar a velocidade do fluido ao variar-se a seção reta de escoamento. Na aula de hoje, estaremos interessados em descrever as propriedades dinâmicas do escoamento de um fluido. Estas propriedades podem ser obtidas a partir das leis fundamentais da mecânica newtoniana. A questão básica que procuraremos responder na aula de hoje é: como podemos calcular a pressão em todos os pontos de um fluido em escoamento? Assim como um princípio de conservação nos forneceu a Equação da Continuidade, a equação dinâmica para o escoamento de um fluido também será obtida a partir de uma lei de conservação: a Lei de Conservação da Energia. A equação dinâmica que obteremos é chamada Equação de Bernoulli, em homenagem a Daniel Bernoulli, matemático francês do século XVIII.

A Equação de Bernoulli

Para deduzirmos a Equação de Bernoulli, vamos estudar o trecho de escoamento de um fluido mostrado na Figura 4.1. Este trecho envolve a variação de altura de z_1 para z_2 , e da seção reta de escoamento de A_1 para A_2 . Note que, ao contrário do que foi feito nas aulas de Hidrostática (Aulas

1 e 2), vamos escolher o eixo de referência vertical z orientado para cima. A escolha da origem do eixo z é livre e não interfere no cálculo da pressão no fluido. Concentremos nossa atenção na porção de fluido compreendida entre os pontos A e B da Figura 4.1.a. Trataremos esta porção de fluido como nosso *sistema*. A Figura 4.1.a mostra a posição do sistema no instante t , enquanto que a Figura 4.1.b mostra um instante posterior t' . Entre t e t' o sistema se move e em t' ele está compreendido entre os pontos C e D.

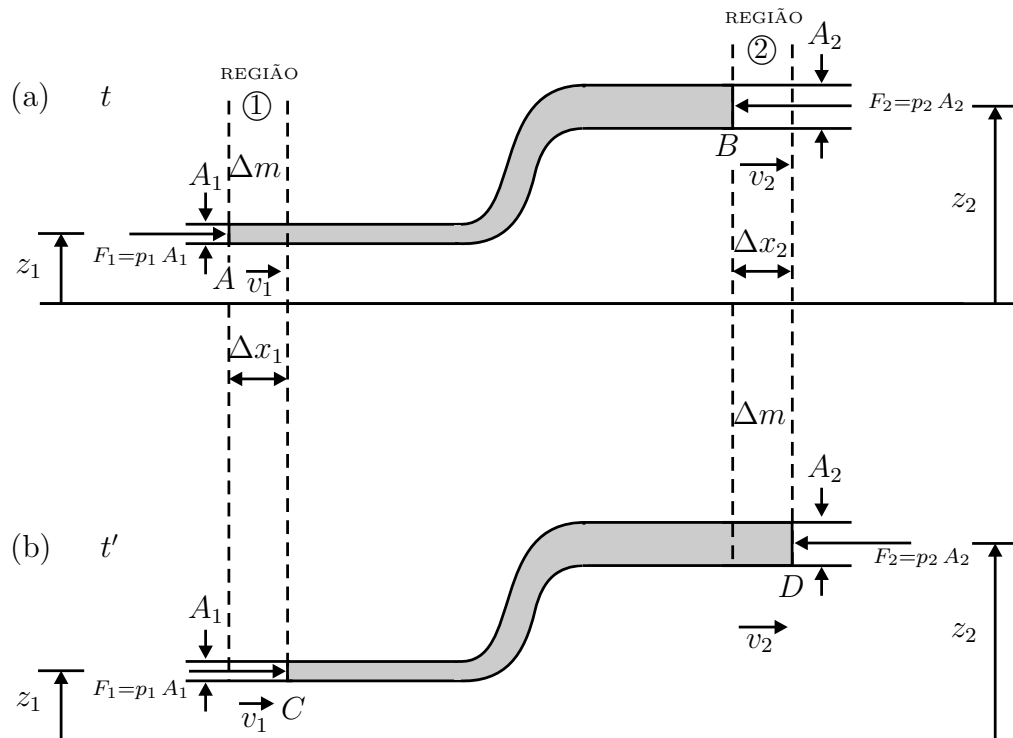


Figura 4.1: Representação de um trecho do escoamento de um fluido incompressível em dois instantes de tempo.

Vamos agora identificar as forças que atuam no sistema. Seja p_1 a pressão na parte inferior do fluido, de maneira que uma força horizontal com módulo $F_1 = p_1 A_1$ atue nesta parte do fluido. Esta força é exercida pelo restante do fluido, à esquerda do nosso sistema. Trata-se, portanto, de uma força que aponta para a direita conforme indicado na Figura 4.1. Por outro lado, há também uma força horizontal com módulo $F_2 = p_2 A_2$ que atua na parte superior do fluido. Esta força aponta para a esquerda, pois é exercida pela porção do fluido à direita do nosso sistema.

Para calcularmos o trabalho resultante realizado sobre o sistema entre t e t' , temos ainda que discutir o movimento das partes inferior e superior do sistema. Nesse intervalo de tempo, a extremidade inferior do sistema desloca-se de uma distância Δx_1 indo de A para C, e a força F_1 realiza o trabalho $W_1 = F_1 \Delta x_1$. Ao mesmo tempo, a extremidade superior desloca-se de Δx_2 indo de B para D, e a força F_2 realiza o trabalho $W_2 = -F_2 \Delta x_2$. Note que, W_2 é negativo, pois o sistema desloca-se para a direita, enquanto F_2 aponta para a esquerda. Assim, o trabalho total realizado sobre o sistema é

$$W = W_1 + W_2 = p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 . \quad (4.1)$$

O trabalho total realizado pelas forças F_1 e F_2 é igual à variação de energia mecânica do sistema. Por outro lado, a energia mecânica do nosso sistema é a soma das energias cinética e potencial gravitacional. Assim, precisamos calcular a variação de energia do sistema entre t e t' . Repare que se o escoamento do fluido for ideal e o fluido incompressível, todos os pontos do nosso sistema compreendidos entre os pontos C e B terão densidades e velocidades constantes durante o intervalo de tempo entre t e t' . Portanto, a energia mecânica (cinética + potencial gravitacional) deste pedaço do sistema E_{CB} permanecerá constante durante este intervalo de tempo. Assim, podemos concentrar nosso estudo nas mudanças ocorridas em duas regiões do sistema, uma entre os pontos A e C (região 1) e outra entre B e D (região 2). Seja $\Delta m = \rho A_1 \Delta x_1$ a massa contida na região 1 no instante t , onde ρ é a densidade do fluido e $A_1 \Delta x_1$ é o volume desta região. O volume total do sistema pode ser escrito como $V_T = V_{CB} + A_1 \Delta x_1$, sendo V_{CB} o volume da região intermediária, compreendida entre os pontos C e B. Em t' esta porção de fluido terá se deslocado completamente para a direita, e a parte superior do sistema terá ocupado a região 2. Neste momento, o volume total do sistema será $V'_T = V_{CB} + A_2 \Delta x_2$. Uma vez que o fluido é incompressível, sua densidade permanece constante bem como o volume total do sistema, isto é, $V_T = V'_T$. Portanto, cancelando V_{CB} , encontramos que

$$A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = V , \quad (4.2)$$

o que significa que as regiões 1 e 2 têm o mesmo volume, e

$$\rho A_2 \Delta x_2 = \rho A_1 \Delta x_1 = \Delta m , \quad (4.3)$$

o que significa que as regiões 1 e 2 possuem a mesma massa Δm . Estas conclusões são essenciais para calcularmos a variação de energia mecânica entre t e t' .

De fato, a energia mecânica total do sistema em t é igual à energia mecânica do trecho entre C e B mais a soma das energias cinética e potencial da região 1, isto é,

$$E(t) = E_{CB} + \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g z_1 .$$

Da mesma forma, temos que

$$E(t') = E_{CB} + \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta m g z_2 .$$

Portanto, a variação de energia $\Delta E = E(t') - E(t)$ entre os instantes t e t' é

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta m g z_2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 - \Delta m g z_1 .$$

Usando $W = \Delta E$ e a Equação 4.1 encontramos que

$$p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta m g z_2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 - \Delta m g z_1 . \quad (4.4)$$

Finalmente, lembrando que $A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = V$ (Equação 4.2) e $\Delta m = \rho V$ (Equação 4.3), podemos cancelar V na Equação 4.4 e rearrumar os termos para obter

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 . \quad (4.5)$$

Como os pontos 1 e 2 são dois pontos quaisquer do fluido, podemos escrever de maneira geral que

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = C , \quad (4.6)$$

onde C é uma constante. A Equação 4.6 é a Equação de Bernoulli, que governa o escoamento ideal de um fluido incompressível. Ela nos diz que durante o escoamento as variações de altura e velocidade do fluido devem ser acompanhadas de variações de pressão, de maneira a manter-se constante a quantidade do lado esquerdo da Equação 4.6. Por exemplo, de acordo com a Equação de Bernoulli **para pontos à mesma altura** ($z_1 = z_2$), onde a velocidade de escoamento do fluido for maior (tubulação mais estreita), a pressão será menor, e vice-versa. Da Equação 4.5 vemos ainda que, sabendo-se a pressão e a velocidade no ponto 1, a pressão no ponto 2 dependerá apenas

da velocidade v_2 e da diferença de altura entre os dois pontos. Assim sendo, a pressão p_2 é independente da posição da origem do eixo z . Ou seja, a escolha da origem é livre e não afeta o cálculo da pressão, conforme dissemos inicialmente.

Por outro lado, é interessante notar que a Equação de Bernoulli também pode ser aplicada a um fluido estático fazendo-se $v = 0$. Por exemplo, considere um fluido em repouso no interior de um recipiente. Seja p_0 a pressão na superfície do fluido e z_0 a altura da superfície com relação ao fundo do recipiente. Se quisermos calcular a pressão em um ponto qualquer P situado a uma altura z do fluido, podemos aplicar a Equação de Bernoulli (com $v = 0$):

$$p_0 + \rho g z_0 = p + \rho g z \implies p = p_0 + \rho g (z_0 - z). \quad (4.7)$$

Repare que, $z_0 - z$ é justamente a profundidade do ponto P, de maneira que a Equação 4.7 é equivalente à Equação 1.16 (veja a Aula 1). Contudo, ao compararmos as Equações 4.7 e 1.16 devemos ser cuidadosos, notando que na parte de Hidrostática (Aula 1) utilizamos um sistema de referência formado por um eixo vertical, orientado para baixo, e com a origem na superfície do fluido; enquanto, aqui, utilizamos um eixo vertical, orientado para cima, e com a origem no fundo do recipiente. Por isso, na Equação 4.7 temos $z_0 - z$, enquanto na Equação 1.16 temos apenas z , mas o conteúdo físico de ambas as equações é o mesmo.

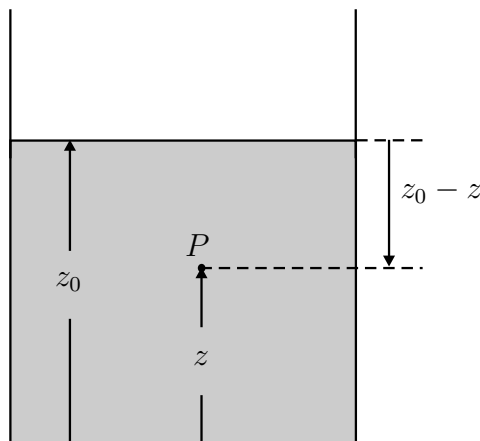


Figura 4.2: Aplicação da Equação de Bernoulli a um fluido em repouso

Exemplo 1

Uma seringa cheia de água, com $A = 2,0 \text{ cm}^2$ de seção transversal

é conectada a uma mangueirinha cuja seção é $a = 1,0 \text{ cm}^2$. A seringa é disposta na horizontal e a outra extremidade da mangueirinha é elevada a uma altura $h = 3,0 \text{ m}$ acima da seringa. Uma força F é, então, aplicada ao êmbolo da seringa de maneira a ejetar um jato de água pela extremidade alta da mangueira (veja a Figura 4.3). Supondo que o jato de água seja ejetado horizontalmente, qual deve ser o valor de F para que a água tenha um alcance $R = 1,5 \text{ m}$?

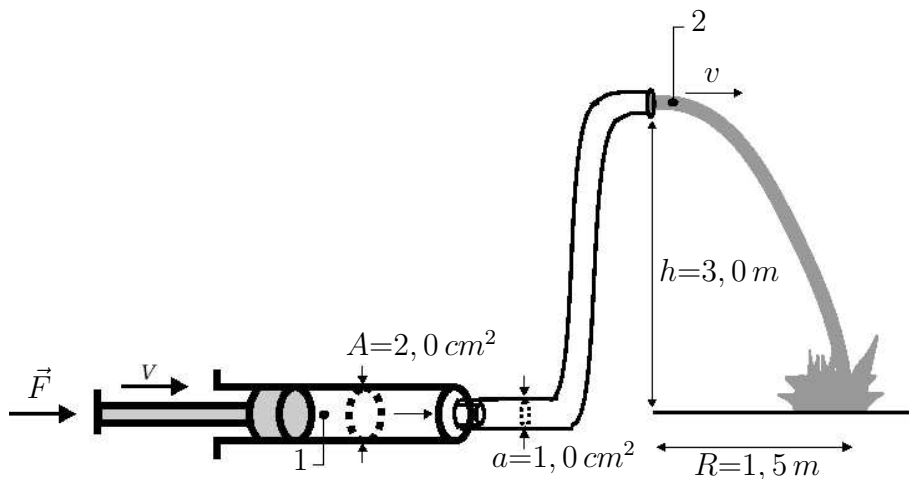


Figura 4.3: Exemplo 1. Uma seringa conectada a uma mangueirinha elevada de $3,0 \text{ m}$, ejeta água a uma distância de $1,5 \text{ m}$.

Solução:

A força F pode ser facilmente calculada se conhecermos a pressão p próximo ao êmbolo. Uma vez que o êmbolo está em contato com a atmosfera, a pressão sobre ele será dada pela pressão atmosférica p_0 mais o acréscimo de pressão devido à força F , ou seja,

$$p = p_0 + F/A \implies F = (p - p_0) A .$$

Portanto, a força F depende da pressão manométrica da água próxima ao êmbolo. Assim sendo, temos primeiro que calcular a pressão manométrica $p - p_0$. Para tal, aplicamos a Equação de Bernoulli aos pontos 1 (próximo ao êmbolo) e 2 (logo após a saída da mangueirinha) conforme é mostrado na Figura 4.3. Uma vez que o ponto 2 está do lado de fora da mangueirinha, a pressão neste ponto é justamente a pressão atmosférica, isto é, $p_2 = p_0$. A escolha da origem do eixo z é livre, de maneira que faremos $z = 0$ próximo ao êmbolo. Assim sendo, a Equação de Bernoulli nos dá

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h ,$$

onde V é a velocidade do êmbolo e v é a velocidade de ejeção da água. Por outro lado, da Equação da Continuidade temos que

$$V = \frac{a}{A} v .$$

Portanto, a força F no êmbolo será

$$F = (p - p_0) A = \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{A^2 - a^2}{A} \right) + \rho g h A.$$

Resolvendo a queda livre (trajetória parabólica), com lançamento horizontal a uma altura h e velocidade v , encontramos que o alcance é:

$$R = v \sqrt{\frac{2h}{g}} \implies v^2 = \frac{g R^2}{2h} = \frac{9,8 \text{ m/s}^2 \times (1,5 \text{ m})^2}{2 \times 3,0 \text{ m}} = 3,7 \text{ m}^2/\text{s}^2 .$$

Finalmente, substituindo este valor de v^2 na expressão para F , e utilizando a densidade da água $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, encontramos:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 3,7 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2} \times \frac{(2,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2)^2 - (1,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2)^2}{2,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \\ &\quad + \rho g h A + 1 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 3 \text{ m} \times (2 \times 10^{-4} \text{ m}^2)^2 \\ &= 0,28 \text{ N} \end{aligned}$$

O Medidor de Venturi

O Medidor de Venturi é um dispositivo utilizado para a medição da velocidade v de escoamento de um fluido. O esquema deste dispositivo está descrito na Figura 4.4. O tubo de escoamento, de seção transversal A , possui um estrangulamento com uma seção transversal menor a . Tomamos dois pontos do escoamento (pontos 1 e 2), um deles sobre o estrangulamento (ponto 2), e aplicamos primeiramente a equação da continuidade, o que nos fornece

$$v_2 = v \frac{A}{a} . \quad (4.8)$$

Além disso, os pontos 1 e 2 estão aproximadamente à mesma altura, de maneira que $z_1 = z_2$. Portanto, os termos oriundos da energia potencial se cancelam ao aplicarmos a Equação de Bernoulli aos pontos 1 e 2:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{A^2}{a^2} .$$

Resolvendo para v obtemos

$$v = a \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho (A^2 - a^2)}} , \quad (4.9)$$

onde $\Delta p = p_1 - p_2$ é a diferença de pressão entre os pontos 1 e 2.

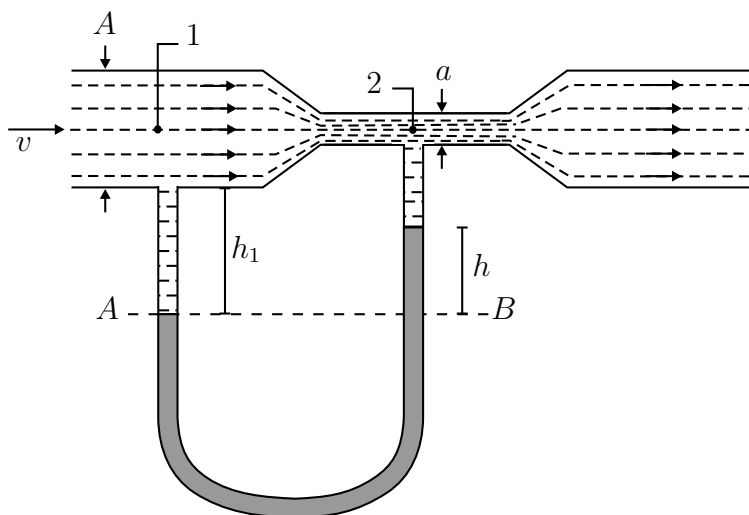


Figura 4.4: Esquema do Medidor de Venturi.

A Equação 4.9 nos permite obter a velocidade de escoamento do fluido a partir de uma medida de Δp . Assim sendo, um manômetro de tubo em U é, então, conectado aos pontos 1 e 2. A diferença de pressão Δp é dada pelo desnível h do fluido manométrico nos dois braços do manômetro. Ao conectarmos o manômetro, parte do fluido em escoamento entra nos dois braços do manômetro e preenche os espaços não ocupados pelo fluido manométrico. Os fluidos no interior do manômetro ficarão em equilíbrio, de maneira que poderemos aplicar os princípios da hidrostática ao manômetro. Para tal, tomemos os pontos A e B à mesma altura, um em cada braço do manômetro como mostra a Figura 4.4. Acima do ponto A temos uma coluna de altura h_1 do fluido em escoamento. A pressão no topo desta coluna é justamente a pressão p_1 . Por outro lado, acima do ponto B temos uma coluna de altura h do fluido manométrico, seguida de uma coluna de altura $h_1 - h$ do fluido em escoamento. A pressão no topo desta coluna é igual a p_2 . Calculando as pressões nos pontos A e B e igualando-as, obtemos:

$$\begin{aligned} p_1 + \rho g h_1 &= p_2 + \rho_m g h + \rho g (h_1 - h) , \\ \implies \Delta p &= (\rho_m - \rho) g h , \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde ρ_m é a densidade do fluido manométrico. Finalmente, podemos substi-

Obs.: A diferença de altura devido à variação do diâmetro do tubo de escoamento é pequena e pode ser desprezada.

tuir a Equação 4.10 na Equação 4.9 para obtermos

$$v = a \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}}. \quad (4.11)$$

Assim, conhecendo-se as seções transversais A e a , e as densidades ρ e ρ_m , o Medidor de Venturi nos fornece o valor da velocidade de escoamento, a partir da leitura do desnível h no manômetro.

O Tubo de Pitot

O Tubo de Pitot é um dispositivo utilizado para medir a velocidade de escoamento de gases. O esquema deste dispositivo é mostrado na Figura 4.5. Ele é constituído de um tubo estreito, interno a outro tubo mais largo. O tubo externo é mais estreito em uma de suas extremidades (extremidade esquerda na Figura 4.5), juntando-se ao tubo interno. Na outra extremidade, o tubo interno atravessa a base do tubo externo e conecta-se a um dos braços de um manômetro de tubo em U. O outro braço do manômetro é conectado ao tubo externo, o qual possui ainda duas aberturas laterais a . Assim, um braço do manômetro (o direito) estará sob a pressão do tubo interno enquanto o outro braço estará sob a pressão existente na região entre os dois tubos.

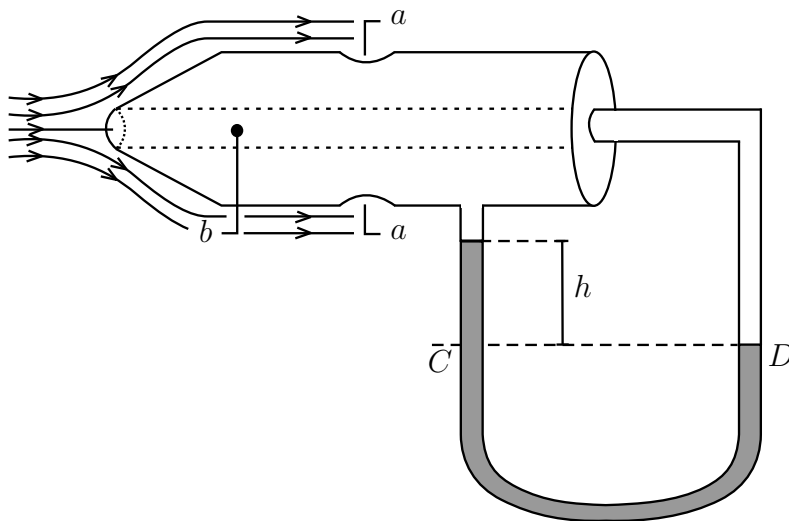


Figura 4.5: Esquema do Tubo de Pitot.

Quando um gás escoa pelo Tubo de Pitot, a pressão na região entre os tubos (região intermediária) será diferente da pressão no interior do tubo

interno. Isto ocorre porque não há escoamento do gás dentro do tubo interno, enquanto as aberturas a fazem o contato da região intermediária com o fluxo tangente ao tubo externo, conforme indicam as linhas de escoamento mostradas na Figura 4.5. Assim, podemos aplicar a Equação de Bernoulli às aberturas a e a um ponto b dentro do tubo interno. Para tal, iremos desprezar a variação de altura entre estes pontos uma vez que ambos os tubos interno e externo são na realidade estreitos. Uma vez que $v_b = 0$, pois não há escoamento dentro do tubo interno, obtemos

$$p_a + \frac{1}{2} \rho v_a^2 = p_b ,$$

$$\Rightarrow v_a = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}} , \quad (4.12)$$

onde $\Delta p = p_b - p_a$ é a diferença de pressão entre a região intermediária e o interior do tubo interno.

Como no caso do Medidor de Venturi, esta diferença de pressão será obtida através da leitura do desnível h no manômetro de tubo em U. Contudo, lembre-se de que estamos tratando do escoamento de um gás, cuja densidade é certamente muito menor do que a densidade ρ_m do fluido manométrico.

Assim sendo, iremos desprezar as colunas de gás em ambos os braços do manômetro, de maneira que a pressão no ponto C do manômetro (veja a Figura 4.5) será

$$p_C = p_a + \rho_m g h$$

e a pressão no ponto D será

$$p_D = p_b .$$

Como os pontos C e D do manômetro estão à mesma altura, temos que $p_C = p_D$ e $\Delta p = \rho_m g h$. Finalmente, substituindo Δp na Equação 4.12, obtemos

$$v_a = \sqrt{\frac{2 \rho_m g h}{\rho}} . \quad (4.13)$$

O Tubo de Pitot é usado, por exemplo, para medir a velocidade de escoamento do ar pelas asas de alguns aviões.

Resumo

Nesta aula, fizemos a descrição dinâmica do escoamento de um fluido, deduzindo a Equação de Bernoulli que fornece a relação entre a pressão, a altura e a velocidade de escoamento em todos os pontos de um fluido. Lembre-se de que esta equação só é aplicável em condições de escoamento ideal. Felizmente, em diversas aplicações práticas a Equação de Bernoulli pode ser utilizada. Assim sendo, vimos também na aula de hoje os princípios de funcionamento de aparelhos de medida como o Medidor de Venturi e o Tubo de Pitot.

Exercícios

1. Uma bomba mecânica é utilizada para encher uma caixa d'água localizada $6,0\text{ m}$ acima. A saída da bomba tem um diâmetro de $10,0\text{ cm}$, e é conectada a uma tubulação com $5,0\text{ cm}$ de diâmetro. Sabendo que a água é jogada na caixa d'água a uma velocidade de $1,0\text{ m/s}$:
 - (a) Encontre a velocidade da água na saída da bomba.
 - (b) Encontre a pressão da água na saída da bomba.
 - (c) Calcule a potência gasta pela bomba.
 - (d) Calcule o trabalho realizado pela bomba para encher uma caixa com $4,0\text{ m}^3$.
2. Em uma tubulação de água com $4,0\text{ cm}$ de diâmetro, o escoamento se dá com velocidade igual a $5,0\text{ m/s}$. A água é conduzida para um ponto $12,0\text{ m}$ mais alto, onde a tubulação é mais estreita, com $1,5\text{ cm}$ de diâmetro. Encontre a diferença de pressão na água entre o ponto mais alto e o ponto mais baixo do escoamento.
3. Um líquido escoar por uma tubulação horizontal com uma área transversal de 30 cm^2 . A tubulação eleva-se por $12,0\text{ m}$ e conecta-se a outra tubulação com área transversal de 90 cm^2 . Qual deve ser a vazão do líquido se a pressão é a mesma nas duas tubulações?
4. Um tanque contém água até uma altura $H = 3,0\text{ m}$. Um pequeno furo com área $a = 1,0\text{ cm}^2$ é feito na superfície lateral do tanque, a uma profundidade $h = 1,0\text{ m}$, deixando a água escapar. Esta situação está descrita na Figura 4.6. Suponha que a área A da superfície do tanque seja muito grande ($A \gg a$).

- (a) Encontre com que velocidade v a água escapa pelo furo e a que distância x da base do tanque ela cai.
- (b) Se quisermos que a água caia a uma distância $x = 4,0\text{ m}$, em que profundidade devemos furar o tanque? Quantas respostas podemos encontrar?
- (c) Encontre a profundidade na qual devemos furar o tanque para que o alcance seja máximo.
- (Sugestão: Aplique a Equação de Bernoulli e a Equação da Continuidade a um ponto situado sobre a superfície do fluido e outro imediatamente após o furo.)

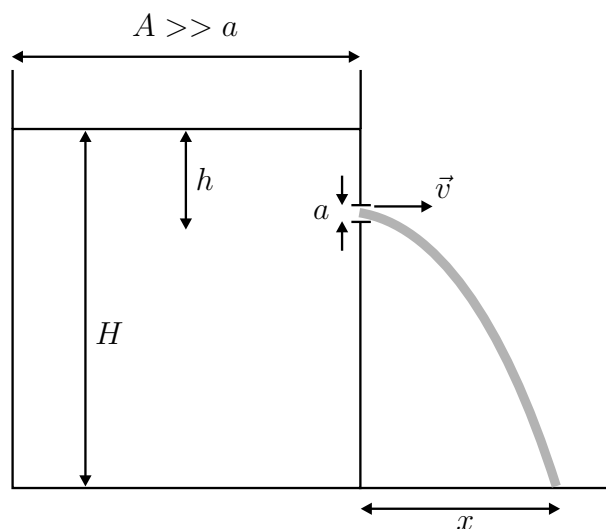


Figura 4.6: Exercício 4. Tanque cheio com água, furado lateralmente. A água escapa e é ejetada a uma distância x da base do tanque.

5. O sifão é um dispositivo bem conhecido, muito utilizado para retirar o líquido de um recipiente que não pode ser tombado. Este dispositivo está descrito na Figura 4.7. Para utilizarmos o sifão, devemos primeiro encher um tubo com o líquido, submergir uma das extremidades do tubo no recipiente (extremidade A), mantendo a outra extremidade (C) tampada, e posicionar a extremidade C a uma altura abaixo da extremidade A. Ao destamparmos a extremidade C, o líquido começa a fluir pelo tubo, esvaziando o recipiente.

Considere um líquido de densidade ρ . Seja h_A a profundidade da extremidade A imersa no líquido, h_B a altura do ponto mais alto do tubo (ponto B na Figura 4.7), contada a partir da superfície do líquido, e h_C a diferença de altura entre as extremidades A e C.

- (a) Qual é a velocidade do líquido ao sair pela extremidade C? O que ocorre se $h_C = 0$, ou seja, se as duas extremidades estiverem à mesma altura?
- (b) Qual é a pressão no líquido no ponto mais alto (ponto B)?
- (c) Qual é a altura máxima à qual podemos elevar o ponto B de maneira a não interromper o escoamento do líquido pelo sifão?

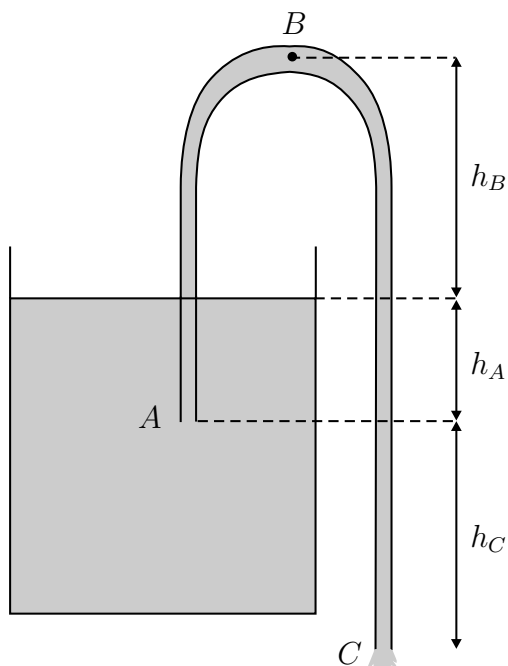


Figura 4.7: Exercício 5. Sifão utilizado para retirar o líquido de um recipiente.

Aula 5 – Temperatura e equilíbrio térmico

Objetivos

O aluno deverá ser capaz de:

- Assimilar o conceito de equilíbrio térmico e temperatura.
- Estudar as escalas de temperatura.
- Compreender o fenômeno da dilatação térmica.

Introdução

Nesta aula, começaremos o estudo da Termodinâmica. Esta parte da Física, diferentemente de outras, como a Mecânica Newtoniana, não se baseia na descrição microscópica do sistema estudado. Aplicar os métodos da mecânica ao estudo, por exemplo, de um litro de gás, geraria uma tarefa impossível de ser cumprida. Tarefa impossível, mesmo ao estudar um litro de gás, utilizando um modelo bem simples, no qual as interações entre as moléculas do gás, ou entre as moléculas e as paredes que contêm o gás, sejam tratadas como colisões elásticas. Esta tarefa demandaria resolver as equações de movimento de aproximadamente $2,7 \times 10^{23}$ partículas (número de moléculas, à temperatura ambiente e à pressão atmosférica, contidas em um litro de gás), e analisar o mesmo tanto de trajetórias resultantes destas equações. Uma tarefa de fato impossível. A Termomodinâmica, ao contrário, estuda sistemas de muitas partículas, como o mencionado litro de gás, utilizando apenas grandezas macroscópicas, como pressão, temperatura, volume, energia interna etc. Nosso estudo da Termodinâmica começará com a discussão do conceito de *equilíbrio térmico* e da grandeza macroscópica diretamente associada a este conceito, a *Temperatura*.

Equilíbrio térmico e temperatura

Para discutir este tópico, recorreremos ao material didático utilizado no curso de Introdução às Ciências Físicas, Mais especificamente, voltaremos à discussão da experiência 3 da Aula 3 do Módulo 5. Para um melhor aproveitamento desta aula, seria interessante que o leitor revisasse os resultados obtidos naquela experiência, ou mesmo que a fizesse novamente.

Num dos tópicos desta prática (ver Figura 5.1) enche-se dois recipientes metálicos, um com água aquecida no fogão, e outro com água fria, retirada da geladeira. Após colocá-los em contato térmico, estando ambos isolados do exterior, por estarem dentro de um recipiente de isopor, registra-se periodicamente, com a utilização de um termômetro, a temperatura da água contida em cada um dos recipientes. O que você certamente observa, quando realiza esta experiência, é a contínua redução da temperatura da água contida no recipiente com água quente, e o também contínuo aumento da temperatura da água contida no recipiente cheio com água gelada. Ao final do processo, você deve ter observado que a temperatura da água dos dois recipientes deve ter atingido o mesmo valor, ou seja, os dois recipientes atingiram o *equilíbrio térmico*, expressão cujo significado será discutido mais adiante.

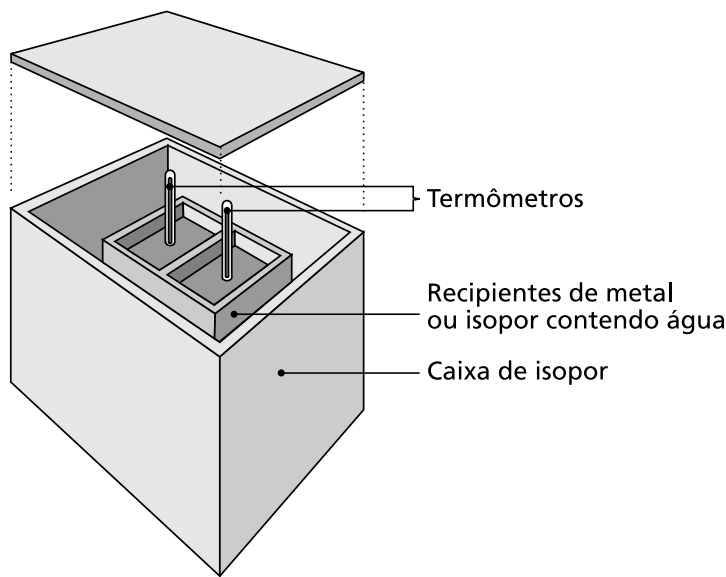


Figura 5.1: Esquema experimental utilizado na experiência 3, da Aula 3, do Módulo 5 do curso de Introdução às Ciências Físicas.

Na descrição acima, foram utilizados diversos conceitos ainda não rigorosamente definidos neste curso, mas já de larga utilização pelo leitor. Não definimos o que é calor, mas podemos intuir que algo está sendo trocado entre os dois recipientes metálicos, que faz a temperatura de um subir e a do outro descer. Se os recipientes fossem de isopor em vez de metal (caso também observado na referida experiência), não seria observada a variação de temperatura dos recipientes. Isto porque o isopor impediria a troca daquele “algo” que resulta na variação de temperatura. A este algo damos o nome de calor. Quando não há troca de calor entre dois sistemas físicos em contato térmico, dizemos que foi atingido o equilíbrio térmico.

Uma forma de definir equilíbrio térmico é através da descrição do que acontece quando colocamos em contato, através de paredes **diatérmicas**,

dois sistemas físicos originalmente isolados um do outro e do exterior por paredes adiabáticas. Em geral, os dois sistemas trocam calor, o que provoca mudanças em suas propriedades macroscópicas. As mudanças observadas são inicialmente rápidas, e vão gradualmente tornando-se mais lentas, até tornarem-se imperceptíveis. A partir deste instante, quando as propriedades macroscópicas dos dois sistemas tornam-se constantes no tempo, dizemos que os dois sistemas estão em equilíbrio térmico.

Desde o início do texto desta aula, referimo-nos, diversas vezes, à temperatura, cujo significado também ainda não foi rigorosamente explicado, ou definido, tarefa que é o objetivo principal desta aula. Para sanar esta falta de definição, poderíamos ter nos referido somente ao que de fato observamos quando medimos a temperatura por meio de um termômetro, a altura da coluna de mercúrio dentro de um tubo capilar de vidro (ver Figura 5.2).

Paredes diatérmicas permitem a passagem de calor, enquanto paredes **adiatérmicas** não a permitem. Paredes **adiabáticas** não permitem a passagem de calor ou matéria, além de serem indeformáveis. A palavra adiabática vem do grego, e significa “que não pode ser atravessada”.

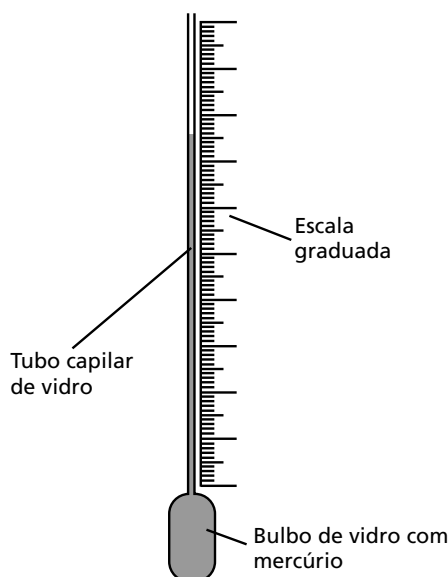


Figura 5.2: O termômetro de mercúrio é constituído por um bulbo de vidro cheio de mercúrio, ligado a um tubo capilar também de vidro. Sob a influência das trocas térmicas como o meio que cerca o termômetro, a massa constante de mercúrio pode expandir-se ou contrair-se, fazendo variar a altura da coluna do mercúrio dentro do capilar.

Bastaria substituir a palavra “temperatura” pela expressão “altura da coluna de mercúrio no termômetro” no texto que descreve o experimento, que não haveria necessidade de definir a temperatura. Poderíamos falar do experimento como a interação entre quatro sistemas físicos: os dois recipientes metálicos com água quente e fria, em contato térmico entre si, e os dois termômetros, cada um em contato térmico com a água de um dos recipientes. Deve-se notar que, entre os quatro sistemas citados, só observamos variáveis macroscópicas dos dois termômetros, sendo apenas uma variável observada: a altura da coluna de mercúrio. Utilizando a definição de equilíbrio térmico, poderíamos dizer que, ao estabilizar-se a altura da coluna de mercúrio de cada termômetro, cada um deles estaria em equilíbrio térmico com a água do recipiente em que está mergulhado. Uma vez que as alturas das colunas de mercúrio dos dois termômetros são iguais, seria então também razoável dizer que, se retirássemos um dos termômetros de seu recipiente, e o colocássemos dentro do outro recipiente, a altura da coluna de mercúrio do mesmo não deveria alterar-se. Ou seja, ele estaria também em equilíbrio térmico com o recipiente no qual não estava originalmente. A partir disso, podemos ficar fortemente inclinados a dizer que os dois recipientes também estarão em equilíbrio térmico. E é o que podemos de fato dizer, baseados no postulado conhecido como Lei Zero da Termodinâmica, enunciada a seguir.

Lei Zero da Termodinâmica - *Sejam três sistemas físicos A , B e C . Se o sistema C está separadamente em equilíbrio térmico com o sistema A e o sistema B , então os sistemas A e B estão em equilíbrio térmico entre si.*

Voltando a analisar o nosso experimento-protótipo, notamos que, ao retirar o termômetro de um dos recipientes e imergi-lo rapidamente na água contida no outro recipiente, a altura da coluna de mercúrio não se alterou. Isto nos leva a concluir que o termômetro em questão estava, originalmente, em equilíbrio térmico com o primeiro recipiente, estando também em equilíbrio térmico com o segundo recipiente em que foi rapidamente imerso. Podemos, então, concluir, com a ajuda da Lei Zero da Termodinâmica, que os dois recipientes chegaram ao equilíbrio térmico ao final do processo no experimento discutido.

É interessante ressaltar que, através da Lei Zero da Termodinâmica, podemos discriminar se dois sistemas estão em equilíbrio térmico mesmo que estes não estejam em contato térmico entre si. Ou melhor, podemos observar se dois sistemas afastados um do outro estariam em equilíbrio térmico

entre si caso fossem colocados em contato térmico. Basta verificar se estes estão simultaneamente em equilíbrio térmico com um terceiro sistema, o qual possa ser colocado em contato com cada um dos sistemas testados, em momentos diferentes.

Podemos, por exemplo, verificar se dois copos de água que não estão em contato térmico, estão em equilíbrio térmico entre si. Basta fazermos uso de um terceiro sistema, no qual seja possível observar facilmente uma propriedade macroscópica. Este é o caso dos termômetros utilizados no experimento que serviu de base para esta aula. Podemos colocar um deles em contato com a água de um dos copos, e deixar que a altura da coluna de mercúrio se estabilize em um determinado valor¹. Após o que, retira-se o termômetro do primeiro copo, mergulhando-o na água do segundo. Se a altura da coluna de mercúrio não se alterar, então poderemos dizer que os dois copos *de fato* estão em equilíbrio térmico.

O leitor já deve ter percebido que o termômetro pode constituir-se em um eficaz instrumento para avaliar equilíbrio térmico. Se, ao colocarmos um termômetro em contato com um sistema físico *A*, e a altura da coluna de mercúrio atingir um dado valor, podemos, com certeza, afirmar que todos os sistemas que fazem a coluna de mercúrio atingir este mesmo valor ao entrarem em contato com o termômetro, estariam em equilíbrio térmico se colocados em contato térmico entre si. Ou seja, podemos especular sobre a existência de uma propriedade ou grandeza (em nosso caso, a altura da coluna de mercúrio dos termômetros), que é essencialmente ligada ao equilíbrio térmico.

E é justamente o que está manifesto em uma outra formulação da **Lei Zero da Termodinâmica**, a qual define, em seu bojo, o conceito de temperatura:

Existe uma grandeza escalar chamada temperatura, que é uma propriedade de todos os sistemas termodinâmicos em equilíbrio térmico. Dois sistemas estão em equilíbrio térmico se e somente se suas temperaturas são iguais.

Uma vez que a definição é baseada em equilíbrio térmico, a temperatura é estreitamente ligada às propriedades macroscópicas dos sistemas termodinâmicos. Para determiná-la, deve-se então recorrer às propriedades

¹Deve-se notar que, não só neste procedimento, como nos outros que utilizaram termômetros, ao colocar um destes instrumentos em contato com um sistema, a variação das propriedades macroscópicas deste sistema seja muito pequena, em decorrência dos detalhes construcionais do instrumento.

macroscópicas de um sistema determinado, e estabelecer o vínculo entre esta propriedade, a propriedade termométrica, e as propriedades macroscópicas de outros sistemas em equilíbrio com o sistema termométrico, que estejam em estados bem caracterizados. Estabelecer escalas para medidas de temperatura é o objetivo da próxima sessão.

Escalas de temperatura

Por ser o termômetro de mercúrio um instrumento muito conhecido, e por termos visto, nos parágrafos anteriores, a utilidade deste instrumento na caracterização do equilíbrio térmico, ele será utilizado na discussão do estabelecimento de escalas de temperatura. Como ocorre com outras grandezas físicas e suas respectivas unidades de medida, para realizar medidas de temperatura é necessário que se estabeleça um padrão, e que se relacione outras escalas com este padrão. Mas isso não é uma tarefa simples como o foi para outras grandezas, como comprimento. Ao definir, por exemplo, o ponto de ebulição de água como padrão de temperatura, não há maneira simples de se obter o dobro, ou outro múltiplo da temperatura padrão. Por isso, para estabelecer uma escala de medição de temperaturas, é necessário basear esta escala em uma determinada propriedade de uma substância, propriedade esta que varie com a temperatura. Esta substância é chamada *substância termométrica*, e a propriedade é chamada *propriedade termométrica*.

O instrumento para medir temperatura, ou termômetro, deve ser então baseado em uma propriedade termométrica X , sendo a temperatura uma função de X . A forma mais simples que pode assumir a função T é a relação linear, a qual é dada por:

$$T(X) = aX + b \quad (5.1)$$

Então, para estabelecer a escala de temperatura, basta escolhermos dois pontos de calibração, isto é, definirmos dois pontos arbitrários T_1 e T_2 , realizar medidas da propriedade termométrica nestas temperaturas, determinando X_1 e X_2 , e relacionar estes valores de modo a obter as constantes a e b .

As escalas mais conhecidas de temperatura, a escala Celsius e a escala Fahrenheit, são utilizadas nos termômetros de uso cotidiano. Muitas vezes, elas usam o mercúrio como substância termométrica, sendo o volume a propriedade termométrica utilizada. O volume de mercúrio é observado através da medida da altura da coluna de mercúrio em um tubo capilar de vidro.

A *escala Celsius* é internacionalmente utilizada para todos os tipos de medidas, inclusive boa parte das medidas científicas. Essa escala foi originalmente baseada em dois pontos de calibração, que são:

- 0°C (zero graus Celsius) - correspondente ao ponto de congelamento da água em condições normais.
- 100°C (cem graus Celsius) - correspondente ao ponto de ebulição da água em condições normais.

A *escala Fahrenheit*, por sua vez, é mais utilizada nos Estados Unidos da América. São dois os pontos de calibração originalmente utilizados na escala Fahrenheit:

- 0°F (zero graus Fahrenheit) - corresponde ao ponto de congelamento de uma mistura de água e sal.
- 100°F (cem graus Fahrenheit) - corresponde à temperatura normal do corpo humano.

Na escala Fahrenheit os pontos normais de congelamento e de ebulição da água são, respectivamente, 32 e 212 graus. Como a relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit é linear, a relação entre as duas escalas de temperatura deve ser escrita na forma ²:

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32 . \quad (5.2)$$

A escala Kelvin

A *escala Kelvin* adota o valor zero da propriedade termométrica como ponto zero de sua calibração. Como consequência desta definição, a Eq. (1) pode ser escrita como:

$$T(x) = aX . \quad (5.3)$$

A determinação de uma temperatura nesta escala requer apenas um ponto de calibração P, pois o outro ponto já foi fixado ao considerar $T = 0$ para $x = 0$. Neste ponto, a temperatura é dada por T_P , sendo que a propriedade termométrica tem seu valor dado por:

²Verifique você mesmo, partindo do fato que as duas escalas de temperaturas devem relacionar-se linearmente

$$a = \frac{T_P}{X_P}, \quad (5.4)$$

sendo a relação entre a temperatura na escala Kelvin e a variável termométrica dada por:

$$T(X) = \frac{T_P}{X_P} X. \quad (5.5)$$

O ponto de calibração escolhido, por acordo geral, é o ponto tríplice da água, que é a temperatura na qual coexistem, em equilíbrio, gelo, água e vapor d'água. Esta temperatura é muito próxima do ponto de congelamento da água. Por acordo internacional, a temperatura do ponto tríplice da água é fixada em

$$T_{tr} = 273,16K, \quad (5.6)$$

onde T_{tr} é a temperatura de ponto tríplice da água, e K é o símbolo de Kelvin, a unidade do SI para temperatura. O Kelvin então pode ser definido como $\frac{1}{273,16}$ do ponto tríplice da água. A partir desta escolha, a Eq. (5.5) pode ser escrita como:

$$T(X) = (273,16K) \frac{X}{X_P}. \quad (5.7)$$

O tamanho do grau, ou de uma unidade de temperatura, é o mesmo nas escalas Celsius e Kelvin, mas o zero da escala Celsius é colocado numa posição mais conveniente. Atualmente, a escala Celsius é definida, a partir da escala Kelvin, da seguinte maneira:

$$T_C = T_K - 273,15. \quad (5.8)$$

Exemplo 1

Considere as escalas de temperatura *Celsius*, *Fahrenheit* e *Kelvin*, e determine em que temperatura a indicação destas escalas é igual para cada par formado por estas escalas.

Solução:

(a) Escalas Kelvin e Celsius $T_K = T_C + 273,15$, o que, igualando-se as temperaturas, resulta em:

$$T = T + 273,15 \rightarrow 0 = 273,15,$$

ou seja, não há solução para este par de escalas

(b) Escalas Farenheit e Celsius: $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$, o que, igualando-se as temperaturas, resulta em:

$$T = \frac{9}{5}T + 32 \rightarrow -\frac{4}{5}T = 32 \rightarrow T = -\frac{5}{4} \times 32 = -40$$

ou seja, $T = -40^\circ C$ (ou $-40^\circ F$)

(c) Escalas Farenheit e Kelvin: $T_C = T_K - 273,15 \rightarrow T_F = \frac{9}{5}(T_K - 273,15) + 32$, o que, igualando-se as temperaturas, resulta em:

$$T = \frac{9}{5}(T - 273,15) + 32 \rightarrow T = \frac{5}{4}459,7 = 574,6$$

ou seja, $T = 574,6^\circ F$ (ou $574,6 K$)

Exemplo 2

É possível utilizar um elemento resistivo (um pedaço de fio, por exemplo) como termômetro, se a sua resistência variar sensivelmente na faixa de temperatura que se pretende medir. Um termômetro de resistência indica uma resistência de $153,0 \Omega$ quando seu bulbo é imerso em água em ebulição. Considerando que o termômetro utiliza a escala K, e que foi calibrado no ponto tríplice da água, determine a resistência indicada no ponto de calibração.

Solução:

A escala utilizada é a escala Kelvin, portanto pode-se escrever a equação:

$$T(R) = aR,$$

onde R é a resistência do termômetro. Inserindo os dados do problema na equação temos:

$$373.125 K = a \times 153 \Omega \rightarrow a = \frac{373.125}{153} = 2.44 \frac{K}{\Omega}.$$

Como $a = \frac{T_P}{R_P}$, temos ainda que

$$R_P = \frac{T_P}{a} = \frac{273.16}{2.44} = 68.3 \Omega.$$

O termômetro de gás ideal

Neste momento, é preciso ressaltar que nem sempre as escalas de temperatura são lineares entre si, e nem sempre também as propriedades macroscópicas das substâncias termométricas são lineares entre si para a mesma faixa de temperaturas. O ideal seria que a temperatura não dependesse do

método utilizado para medi-la. Para isso é necessário um termômetro padrão, que seja útil não somente nas medidas práticas de temperatura, como também na formulação de leis físicas. Os *termômetros de gás a volume constante*, quando utilizam diversos gases na sua operação, apresentam variação bastante pequena da leitura. Por isso, iremos estudar os termômetros de gás a volume constante, cujo esquema está mostrado na Figura 5.3.

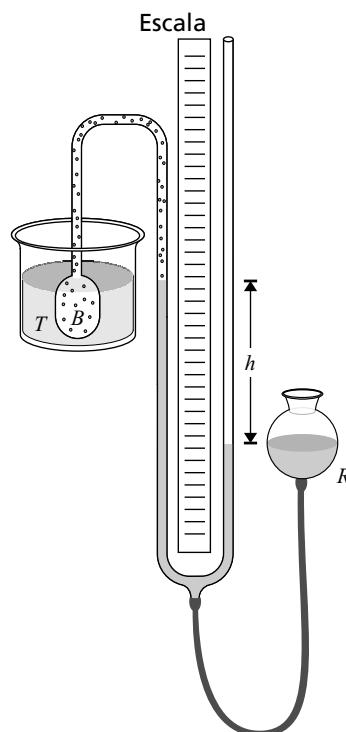


Figura 5.3: Diagrama de um termômetro de gás a volume constante, o qual consiste em um bulbo de vidro, ou outro material adequado à faixa de temperatura em que se realiza a medida, ligado, por um tubo capilar, a um manômetro de mercúrio. O bulbo contendo gás é colocado no meio que esteja à temperatura T que se quer medir. Levantando-se e abaixando-se o reservatório de mercúrio, pode-se fazer o nível de mercúrio ficar constante no ramo esquerdo do manômetro, mantendo o gás a volume constante.

Nestas condições, a pressão do gás é dada por:

$$p = p_0 - \rho gh \quad (5.9)$$

onde ρ é a densidade do mercúrio utilizado no manômetro, e h é a diferença de altura entre as colunas do manômetro, como mostrado na Figura 5.3.

Para um determinado volume de gás, a uma dada temperatura do banho no qual o bulbo está imerso, a temperatura será dada por:

$$T(p) = (273,16K) \frac{p}{p_{tr}} (V \text{ constante}) . \quad (5.10)$$

A medida seguinte será feita após retirar-se uma pequena quantidade de gás do bulbo (faz-se isso para a temperatura medida, e para a referência, o ponto tríplice da água), determinando-se uma nova temperatura T , dada pela Eq. (5.10). Registrando-se diversos valores de temperatura em função do volume de gás (p_{tr} é uma medida deste volume), observa-se uma dependência linear, como mostra a Figura 5.4. Na mesma figura, observa-se que retas determinadas para diversos gases extrapolam-se, para quantidade de gás zero, ao mesmo valor de temperatura. Este é o valor que tomamos para a definição de uma escala absoluta de temperatura. Este valor é dado por:

$$T(p) = (273,16K) \lim_{p_{tr} \rightarrow 0} \frac{p}{p_{tr}} (V \text{ constante}) . \quad (5.11)$$

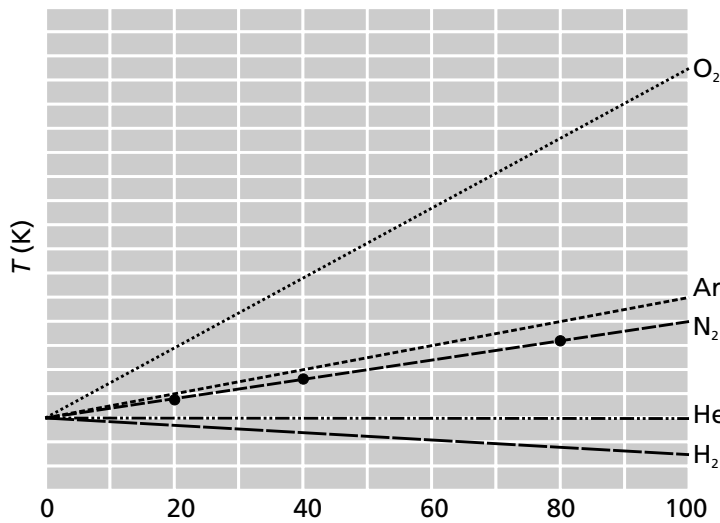


Figura 5.4: Gráfico da temperatura em um termômetro de gás a volume constante, em função da quantidade de gás, ou de sua pressão à temperatura de ponto tríplice.

A escala de temperaturas assim determinada não depende do gás utilizado, sendo por isso chamada de escala absoluta de temperaturas. Entretanto, a utilização do termômetro de gás a volume constante é difícil e tediosa. Para efeitos práticos, o termômetro de gás é utilizado para estabelecer determinados pontos fixos, os quais são utilizados para calibrar outros termômetros. Este é o caso da *Escala Internacional de Temperatura*, ITS-90, que está mostrada na Tabela (5.1).

Substância	Estado	Temperatura (K)
Hélio	Ponto de Ebulição	3-5
Hidrogênio	Ponto Tríplice	13,8033
Hidrogênio	Ponto de Ebulição	17,025 - 17,045
Hidrogênio	Ponto de Ebulição	20,26 - 20,28
Neônio	Ponto Tríplice	24,5561
Oxigênio	Ponto Tríplice	54,3584
Argônio	Ponto Tríplice	83,8058
Mercúrio	Ponto de Fusão	234,3156
Água	Ponto Tríplice	273,16
Gálio	Ponto de Fusão	302,9146
Índio	Ponto de Congelamento	429,7485
Estanho	Ponto de Congelamento	505,078
Zinco	Ponto de Congelamento	692,677
Alumínio	Ponto de Congelamento	933,473
Prata	Ponto de Congelamento	1234,93
Ouro	Ponto de Congelamento	1337,33
Cobre	Ponto de Congelamento	1357,77

Tabela 5.1: Escala Internacional de Temperaturas, ITS-90

Dilatação térmica

O fenômeno de dilatação térmica está presente em diversas situações do nosso cotidiano. Por exemplo, a maior parte dos termômetros de uso doméstico utilizam a variação de volume de um líquido (frequentemente mercúrio ou álcool) para a medida de temperatura. Tipicamente, nestes termômetros, o comprimento de uma coluna do líquido varia quando este é aquecido ou resfriado, indicando a temperatura correspondente através de uma calibração. Os sólidos metálicos também apresentam o efeito de dilatação térmica. Assim, uma régua metálica calibrada a uma determinada temperatura poderá fornecer medidas incorretas quando for muito aquecida ou resfriada. Atualmente, para evitar as deformações decorrentes da dilatação térmica, os trilhos das estradas de ferro são seccionados, de maneira a evitar a deformação devida ao excesso de dilatação. Este recurso também é utilizado em viadutos e pontes, a fim de compensar a dilatação do concreto. A Figura 5.5 mostra uma junta de dilatação em um dos viadutos de acesso à Ponte Rio-Niterói.



Figura 5.5: Junta de dilatação entre duas seções da pavimentação de um viaduto.

Para entendermos o fenômeno da dilatação térmica dos sólidos, podemos recorrer à natureza atômica da matéria. Conforme já mencionamos, a temperatura está associada ao movimento dos átomos e moléculas de um corpo. Um sólido cristalino (como os metais) pode ser imaginado como um arranjo espacialmente ordenado de átomos, conforme mostramos na Figura 5.6. A ligação química entre os átomos produz uma interação entre eles, como se estivessem ligados por molas. A temperatura do corpo sólido está, assim, relacionada com a oscilação da rede cristalina. A elevação da temperatura implica na agitação dos átomos, aumentando a amplitude das oscilações e, conseqüentemente, a distância média entre os átomos. Isto resulta no aumento das dimensões do objeto, ou seja, na sua dilatação.

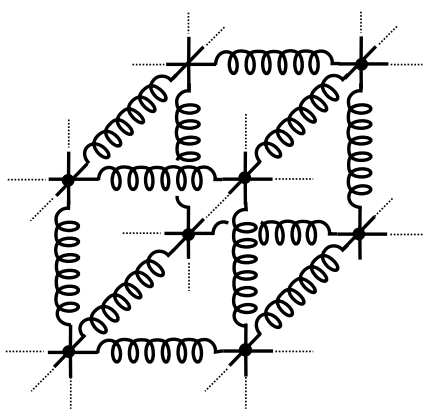


Figura 5.6: Arranjo regular dos átomos num sólido cristalino. A interação entre os átomos age como molas interligando a rede cristalina.

Podemos determinar, experimentalmente, que a variação do tamanho de um objeto depende da variação de temperatura à qual ele é submetido e do seu tamanho original. De fato, a variação ΔL do comprimento de uma barra metálica é proporcional ao comprimento L da barra e à variação ΔT de sua temperatura, ou seja,

$$\Delta L = \alpha L \Delta T, \quad (5.12)$$

onde α é chamado *coeficiente de dilatação linear*. Ele mede a variação percentual das dimensões lineares de um objeto por unidade de variação da temperatura. Sua unidade no sistema internacional é K^{-1} . A rigor, este coeficiente pode variar com a temperatura do objeto, mas, em geral, esta variação é pequena, de modo que α pode ser tratado como uma constante característica da substância que compõe o objeto. O mercúrio apresenta um coeficiente de dilatação térmica bastante alto ($1,8 \times 10^{-4} K^{-1}$) em comparação com outros metais ($11 \times 10^{-6} K^{-1}$ para o aço, por exemplo). Por isto, ele é tão utilizado na construção de termômetros. Em contrapartida, quando a dilatação térmica é indesejável, substâncias com coeficientes de dilatação pequenos são utilizadas, como o quartzo ou uma liga metálica chamada *invar*, cujo nome já sugere pequenas variações com a temperatura. Na tabela 5.2 apresentamos os coeficientes de dilatação linear de algumas substâncias no intervalo entre $0^\circ C$ e $100^\circ C$.

Tabela 5.2: Tabela de coeficientes de dilatação térmica linear de algumas substâncias no intervalo entre $0^\circ C$ e $100^\circ C$.

Substância	Coeficiente ($\times 10^{-6} K^{-1}$)
Mercúrio	180
Alumínio	23
Latão	19
Cobre	17
Aço	11
Vidro	9
Liga invar	0,7
Quartzo (fundido)	0,5

A dilatação superficial ΔA de um objeto delgado, como uma chapa metálica, pode ser expressa em termos de α como

$$\Delta A = 2 \alpha A \Delta T , \quad (5.13)$$

sendo A a área do objeto. De forma semelhante, a variação de volume ΔV de um objeto maciço é dada por

$$\Delta V = 3 \alpha V \Delta T , \quad (5.14)$$

sendo V o volume do objeto.

A dilatação de um fluido é expressa em termos de seu coeficiente de dilatação volumar

$$\beta = \frac{\Delta V / V}{\Delta T} , \quad (5.15)$$

uma vez que os fluidos não têm forma bem definida. Os gases possuem coeficientes de dilatação volumar bem maiores do que os líquidos. Estes, por sua vez, apresentam coeficientes de dilatação cerca de dez vezes maiores do que os dos sólidos. Em geral, os líquidos se expandem quando aquecidos. Contudo, a água apresenta um comportamento bastante particular na faixa de temperaturas entre 0°C e 4°C . Nesta faixa, a água se expande quando é resfriada. Por isto, o valor máximo da densidade da água ($999,973 \text{ kg/m}^3$) ocorre a $3,98^\circ\text{C}$.

Exemplo 3

Uma régua de aço, calibrada a 30°C , é utilizada para medir-se o comprimento de uma barra à temperatura de calibração, fornecendo o valor de $15,01 \text{ cm}$. Em seguida, a barra e a régua são aquecidas à temperatura de 300°C e uma nova medida do comprimento da barra fornece o valor de $15,10 \text{ cm}$. Calcule o coeficiente de dilatação linear da barra.

Solução:

Seja L_B o comprimento inicial da barra e x o tamanho inicial da marcação de $1,0 \text{ cm}$. Assim, a leitura inicial do comprimento da barra indica que

$$\frac{L_B}{x} = 15,01 . \quad (5.16)$$

Ao aquecermos a régua, sua graduação também se dilata e a marcação de $1,0 \text{ cm}$ varia o seu comprimento. O comprimento da barra aquecida será

$$L'_B = L_B + \Delta L_B = L_B (1 + \alpha_B \Delta T) , \quad (5.17)$$

onde α_B é o coeficiente de dilatação térmica da barra e ΔT a variação de temperatura. Por sua vez, a marcação de $1,0\text{ cm}$ também se dilata, de maneira que

$$x' = x + \Delta x = x(1 + \alpha_A \Delta T), \quad (5.18)$$

onde α_A é o coeficiente de dilatação térmica do aço. A leitura do comprimento da barra aquecida, porém, nos diz que

$$\frac{L'_B}{x'} = 15,10. \quad (5.19)$$

Finalmente, substituindo as Eqs.(5.17) e (5.18) em (5.19) e usando a Eq.(5.16) chegamos a

$$15,01 \frac{1 + \alpha_B \Delta T}{1 + \alpha_A \Delta T} = 15,10. \quad (5.20)$$

O coeficiente de dilatação térmica do aço é $\alpha_A = 11,0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, de maneira que

$$\begin{aligned} \alpha_B &= \frac{(15,10/15,01) \times (1 + 11,0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1} \times 270 \text{ K}) - 1}{270 \text{ K}} \\ &= 33,3 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Resumo

Nesta aula, foi introduzido o conceito de equilíbrio térmico, que foi utilizado para, a partir da Lei Zero da Termodinâmica, definir Temperatura. A seguir, foram descritos métodos para a construção de escalas de temperatura, incluindo a escala Kelvin. Discutimos a utilização de termômetros de gás a volume constante para a obtenção de uma escala absoluta de temperaturas. Estudamos, ainda, o fenômeno da dilatação térmica, e apresentamos uma lei empírica para a variação das dimensões de um corpo sólido com a temperatura.

Exercícios

1. A que temperatura a leitura da escala Fahrenheit é igual a: (a) duas vezes a da escala Celsius; (b) metade da escala Celsius?
2. Faça uma tabela na qual constem os valores de temperatura, nas escalas Celsius, Fahrenheit e Kelvin, dos seguintes pontos fixos de temperatura: ponto de congelamento da água, temperatura normal do corpo humano, ponto normal de ebulição da água, e ponto de congelamento da prata.

3. Um frasco de vidro tem 95% de seu volume preenchido com mercúrio a -35°C . O sistema é então aquecido, dilatando o frasco e o mercúrio no seu interior. A que temperatura o mercúrio irá transbordar do frasco?
- Dados:** Coeficiente de dilatação **linear** do vidro $\alpha_v = 9,0 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ e do mercúrio $\alpha_m = 1,8 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

Aula 6 – Gases ideais

Objetivos

O aluno deverá ser capaz de:

- Descrever as propriedades macroscópicas de um gás.
- Formular a Lei do Gás Ideal.

Introdução

Nesta aula iniciaremos o estudo do comportamento físico de um gás. Como sabemos, a matéria é formada por constituintes elementares que chamamos átomos e moléculas. Os objetos do nosso cotidiano são formados por uma quantidade muito grande ($\approx 10^{23}$) destes constituintes. As três fases (sólida, líquida e gasosa) de uma substância diferenciam-se essencialmente pela forma como suas moléculas se organizam. Enquanto em um sólido ou em um líquido as moléculas interagem fortemente umas com as outras, em um gás esta interação é fraca e as moléculas têm grande mobilidade pelo volume ocupado pelo gás, a não ser pelas colisões que ocorrem entre elas.

Quando tratamos uma partícula com a Mecânica Newtoniana, nós a descrevemos através do seu *estado* de movimento, isto é, de sua posição \vec{r} e velocidade \vec{v} (ou do momento linear $\vec{p} = m\vec{v}$). As leis de Newton nos permitem escrever as equações de movimento da partícula, e calcular como estas grandezas evoluem com o tempo. Por outro lado, uma vez que o número de moléculas em um gás é realmente muito grande, é inviável resolvermos as equações de movimento de todas as moléculas para descrevermos o comportamento de um gás. Assim sendo, temos que criar uma descrição do gás por inteiro, isto é, uma descrição *macroscópica*. Para tal, temos primeiro que estabelecer as grandezas macroscópicas que caracterizam o *estado* de um gás, para em seguida formularmos as leis que estabelecem uma relação quantitativa entre estas grandezas.

Uma pergunta surge então: como as grandezas macroscópicas de um gás podem ser interpretadas em termos de suas propriedades microscópicas, isto é, em termos da dinâmica individual de suas moléculas. A Teoria Cinética dos Gases nos dá uma resposta. Ela estabelece a conexão entre as descrições microscópica e macroscópica, incorporando conceitos estatísticos à descrição dada pela Mecânica Newtoniana. Na aula de hoje discutiremos

a descrição macroscópica de um gás, para nas próximas aulas construirmos uma justificativa microscópica.

A Lei do Gás Ideal

Considere a situação descrita na Figura 6.1. Um gás é confinado no interior de um recipiente cilíndrico, com base e paredes laterais rígidas, e com uma tampa formada por um êmbolo móvel de área A . As grandezas que utilizaremos para a descrição macroscópica do gás são: o volume V ocupado por ele, a pressão P exercida sobre as paredes do recipiente, o número N de moléculas do gás e sua temperatura T . O dispositivo da Figura 6.1 nos permitirá variar estas grandezas da seguinte maneira: A região acima do êmbolo é evacuada, de maneira a eliminar do sistema a pressão atmosférica. Então, sobre o êmbolo móvel, apoiamos uma caixa de areia (por exemplo) que servirá como peso variável, permitindo variar-se a pressão $p = Mg/A$ no gás. Por outro lado, a própria mobilidade do êmbolo permite variar-se o volume V , o qual pode ser calculado através da altura h do êmbolo como $V = Ah$.

Suponhamos ainda que a base do recipiente esteja em contato com um reservatório térmico, cuja temperatura possa ser ajustada de modo a variarmos T . A leitura da temperatura do gás pode ser feita com o auxílio de um termômetro. Finalmente, podemos variar o número de moléculas do gás N , injetando-se gás a partir de um botijão.

As leis que regem o comportamento macroscópico de um gás serão formuladas em termos de p , V , T e N . Estas serão as variáveis de estado do gás. Contudo, antes de formularmos uma lei geral com todas as grandezas envolvidas, vamos obter leis parciais que fornecem a dependência entre estas grandezas, duas a duas, para depois combinarmos estes resultados numa lei geral. Assim, iremos discutir primeiro as variações em pares destas grandezas, enquanto as demais são mantidas constantes.

Relação entre V e N : A Lei de Avogadro

Abrindo a válvula do botijão injetamos gás no recipiente e observamos que o volume ocupado pelo gás tende a aumentar. Suponha que o peso da caixa de areia seja mantido constante, de maneira a preservar o valor de p durante o processo. O ajuste do reservatório também deve ser controlado para garantir que T permaneça constante. Neste caso obtém-se

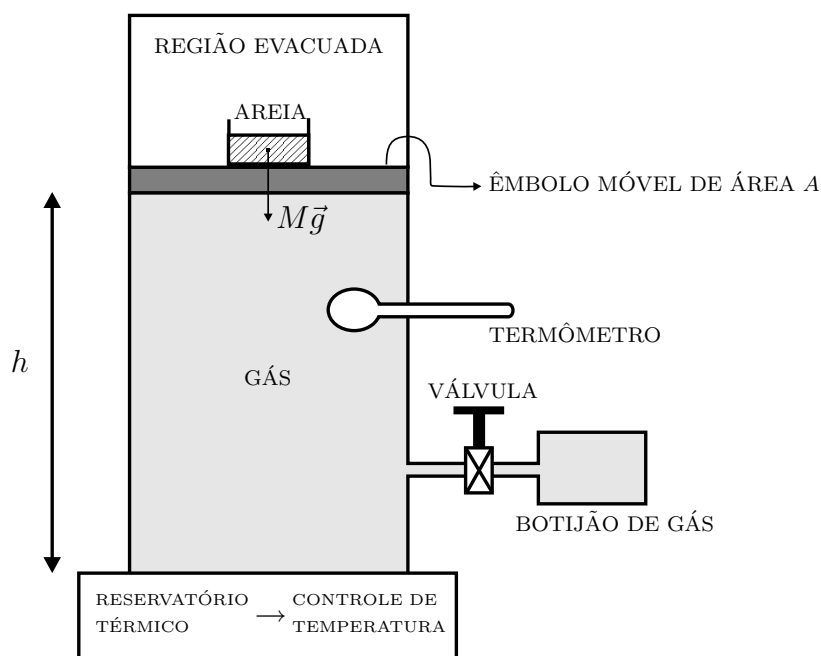


Figura 6.1: Sistema utilizado para estudarmos as leis que regem o comportamento macroscópico de um gás.

empiricamente que o volume ocupado pelo gás é diretamente proporcional ao número de moléculas do gás no recipiente, ou seja,

$$V = C_1 N, \quad (6.1)$$

onde C_1 é a constante de proporcionalidade, obtida a partir do coeficiente angular da reta no gráfico $V \times N$, construído com os dados experimentais. A relação entre V e N , com p e T mantidos constantes, é também chamada Lei de Avogadro.

Relação entre V e p : A Lei de Boyle

Suponha agora que a válvula do botijão de gás seja fechada, de maneira a não haver mais trocas de gás com o recipiente. Assim, o número de moléculas N permanecerá constante. Como anteriormente, o reservatório térmico será controlado de modo a garantir que T também permaneça constante. Para estudar a dependência entre o volume V do gás com a pressão p , podemos variar o peso da caixa de areia. Neste caso, obtém-se empiricamente que o volume ocupado pelo gás é inversamente proporcional à pressão exercida, ou seja,

$$p = \frac{C_2}{V}, \quad (6.2)$$

onde C_2 é uma constante. Representando num gráfico os valores experimentais de $1/V$ e p , obtém-se uma sequência de pontos que podem, com boa aproximação, ser ajustados por uma reta. Neste caso, a constante C_2 pode ser obtida como o coeficiente angular desta reta. A relação entre V e p , com N e T mantidos constantes, é também chamada Lei de Boyle.

Relação entre V e T : A Lei de Charles ou Lei de Gay-Lussac

Suponhamos que a válvula do botijão de gás continue fechada, de maneira que o número de moléculas N permaneça constante. Também manteremos constante o peso da caixa de areia e, portanto, a pressão no gás. Desta vez, porém, o reservatório térmico será controlado de modo a variarmos a temperatura T do gás. Medindo-se o volume ocupado pelo gás como função da temperatura, que V é diretamente proporcional a T

$$V = C_3 T, \quad (6.3)$$

onde C_3 é uma constante, obtida a partir do coeficiente angular da reta no gráfico $V \times T$, construído com os dados experimentais. A relação entre V e T , com N e p mantidos constantes, é também chamada Lei de Charles, ou Lei de Gay-Lussac.

A equação de estado do gás ideal

As leis enunciadas acima podem ser combinadas numa única lei relacionando, ao mesmo tempo, as quatro variáveis de estado N , p , V e T :

$$\frac{pV}{NT} = k, \quad (6.4)$$

onde k é uma constante universal chamada *constante de Boltzmann*, cujo valor é

$$k = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}.$$

Podemos reescrever a Equação 6.4 utilizando o conceito de *mol*. Lembre-se de que 1 *mol* de uma substância corresponde a N_A moléculas desta substância, onde $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ é o número de Avogadro. Neste caso, podemos escrever o número total N de moléculas em um gás em termos de N_A e do número de moles n no gás: $N = n N_A$, e reescrever a Equação 6.4 como

$$pV = nRT, \quad (6.5)$$

onde $R = N_A k$ é uma nova constante chamada *constante universal dos gases*. Substituindo o número de Avogadro e a constante de Boltzmann, obtemos o valor $R = 8,31 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$. A princípio, nem todos os gases satisfazem à Equação 6.5. Aqueles que a satisfazem são denominados *gases ideais*, e a Equação 6.5 é chamada, portanto, **Lei do Gás Ideal**. Uma vez que ela relaciona as variáveis de estado de um gás, ela também é denominada *equação de estado* do gás ideal. De maneira geral, a equação de estado de um gás qualquer é uma equação da forma:

$$f(p, V, T, n) = 0.$$

f é uma função das variáveis de estado (p , V , T e N), cuja forma específica depende do tipo de gás estudado. Assim sendo, a Equação 6.5 vale para um tipo particular de gases, os gases ideais.

O comportamento macroscópico de um gás certamente depende das suas características microscópicas. Se a Equação 6.5 caracteriza macroscopicamente um gás ideal, quais devem ser as características microscópicas de um tal gás?

Exemplo 1

O volume de um pneu de caminhão é de cerca de 1500 in^3 . O pneu é cheio de ar e a pressão manométrica é de $28,3 \text{ lb/in}^2$ para uma temperatura de $-12,4^\circ \text{C}$. Calcule a pressão manométrica do ar no pneu quando a temperatura subir para $35,0^\circ \text{C}$ e o pneu expandir seu volume para 1600 in^3 . A pressão atmosférica em unidades do sistema britânico é de cerca de $14,7 \text{ lb/in}^2$.

Solução:

Para calcularmos a pressão final do ar no pneu, utilizaremos a Lei do Gás Ideal. Uma vez que não há variação do número de moléculas, a quantidade pV/T deve permanecer constante. Neste caso,

$$\frac{p_i V_i}{T_i} = \frac{p_f V_f}{T_f}.$$

Devemos levar em conta a pressão atmosférica, uma vez que o dado inicial fornece apenas a pressão manométrica. Assim, $p_i = 43,0 \text{ lb/in}^2$. Equacionando para p_f obtemos que

$$p_f = p_i \frac{V_i}{V_f} \frac{T_f}{T_i} = 43,0 \text{ lb/in}^2 \frac{1500 \text{ in}^3}{1600 \text{ in}^3} \frac{308,0 \text{ K}}{260,6 \text{ K}} = 47,6 \text{ lb/in}^2.$$

Lembre-se de que devemos sempre expressar a temperatura em Kelvin ao utilizarmos a Lei do Gás Ideal. A pressão manométrica será, portanto,

$$47,6 \text{ lb/in}^2 - 14,7 \text{ lb/in}^2 = 32,9 \text{ lb/in}^2.$$

Exemplo 2

Dois recipientes de volumes $V_A = 1,5 \text{ l}$ e $V_B = 3,0 \text{ l}$ contêm um mesmo gás, que pode ser tratado como um gás ideal, e estão conectados por um tubo estreito. Inicialmente, os dois recipientes estão à mesma temperatura $T_0 = 20^\circ \text{ C}$, e à mesma pressão $p_0 = 1,7 \text{ atm}$. O recipiente maior é, então, aquecido até $T_B = 120^\circ \text{ C}$, enquanto o menor permanece à temperatura inicial ($20,0^\circ \text{ C}$). Calcule a pressão final do gás supondo que não há vazamentos.

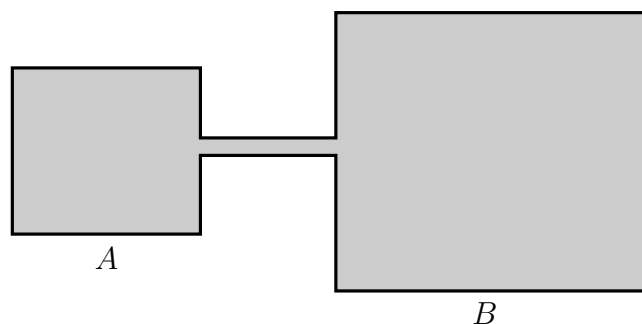


Figura 6.2: Dois recipientes com volumes diferentes contêm o mesmo gás ideal. Os recipientes são conectados por um tubo estreito.

Solução:

Uma vez que os dois recipientes estão conectados, a pressão em ambos deve ser sempre a mesma. Aplicando a Lei do Gás Ideal à condição inicial do sistema obtemos:

$$p_0 = \frac{N_A k T_0}{V_A} = \frac{N_B k T_0}{V_B} \Rightarrow \frac{N_B}{N_A} = \frac{V_B}{V_A}. \quad (6.6)$$

Após o aquecimento do recipiente maior, as moléculas se redistribuem entre os dois recipientes através da conexão pelo tubo estreito. Nesta nova condição, a Lei do Gás Ideal nos fornece a nova pressão p' do sistema:

$$p' = \frac{N'_A k T_0}{V_A} = \frac{N'_B k T_B}{V_B} \Rightarrow \frac{N'_A}{N'_B} = \frac{V_A}{V_B} \frac{T_B}{T_0}. \quad (6.7)$$

Dividindo a Eq.(6.7) pela Eq.(6.6) encontramos as seguintes relações:

$$p' = p_0 \frac{N'_A}{N_A} \quad \text{e} \quad \frac{N'_B}{N_B} = \frac{T_0}{T_B} \frac{N'_A}{N_A} \quad (6.8)$$

Contudo, não conhecemos o número de moléculas no sistema, mas sabemos que, não havendo vazamentos, o número total de moléculas nos dois recipientes deve permanecer constante, ou seja,

$$N_A + N_B = N'_A + N'_B . \quad (6.9)$$

Dividindo a Eq.(6.9) por N_A e utilizando a Eq.(6.6) encontramos

$$\frac{N'_A}{N_A} + \frac{N'_B}{N_A} = 1 + \frac{V_B}{V_A} = 3,0 . \quad (6.10)$$

Porém, usando as Eqs.(6.6) e (6.8), podemos escrever

$$\frac{N'_B}{N_A} = \frac{N_B}{N_A} \frac{N'_B}{N_B} = \frac{V_B}{V_A} \frac{T_0}{T_B} \frac{N'_A}{N_A} = \frac{N'_A/N_A}{3,0} .$$

Substituindo na Eq.(6.10), encontramos

$$\frac{N'_A}{N_A} = 3,0 - \frac{1}{3,0} = 2,7 . \quad (6.11)$$

Finalmente, substituindo na primeira das Eqs.(6.8), obtemos

$$p' = 2,7 p_0 = 2,7 \times 1,7 \text{ atm} = 4,6 \text{ atm} . \quad (6.12)$$

Resumo

Nesta aula, apresentamos uma descrição geral do que denominamos gás ideal. Estabelecemos as grandezas relevantes, pressão, temperatura, volume e número de moléculas (ou de moles), que constituem as variáveis de estado de um gás. Apresentamos ainda as leis que relacionam estas variáveis, para o caso de um gás ideal, e reunimos todas as leis numa única equação, a Equação de Estado do gás ideal. Fizemos, assim, uma descrição macroscópica do gás, sem nos preocuparmos com o estado de movimento de seus constituintes fundamentais, ou seja, átomos e moléculas. Na próxima aula apresentaremos a Teoria Cinética que incorpora conceitos estatísticos à descrição mecânica das partículas de um gás. Veremos como a Teoria Cinética nos permite entender o comportamento macroscópico do gás a partir de conceitos microscópicos.

Exercícios

1. Considerando o ar como um gás ideal, estime o número de moléculas de ar por cm^3 , a uma temperatura de 30°C , ao nível do mar ($p \approx 1 \text{ atm}$).

2. Uma garrafa de oxigênio em estado gasoso, com $1,5\text{ l}$, encontra-se a uma temperatura de 25° C e pressão de 100 kPa .
 - (a) Qual será a nova pressão do oxigênio se a temperatura for elevada até 45° C ?
 - (b) Quantos moles de oxigênio devemos deixar escapar da garrafa para que a pressão volte ao seu valor original?
3. Um mergulhador encontra-se no fundo de um lago com 45 m de profundidade, onde a temperatura é de $5,0^{\circ}\text{ C}$. Ao respirar ele solta uma bolha com $25,0\text{ cm}^3$ de volume. A bolha sobe e atinge a superfície do lago onde a temperatura é de $20,0^{\circ}\text{ C}$. Supondo que, ao subir, a temperatura do ar na bolha seja igual à da água que a circunda, calcule o seu volume imediatamente antes de alcançar a superfície do lago.
4. Um recipiente A contém um gás ideal sob pressão de $4,0\text{ atm}$ e à temperatura de 270 K . Um tubo estreito liga o recipiente A a outro recipiente B, cujo volume é cinco vezes maior que o de A. O recipiente B contém o mesmo gás ideal à temperatura de 360 K e pressão de $2,0\text{ atm}$. A válvula que separa os dois recipientes é aberta e o gás atinge o equilíbrio com uma pressão igual nos dois recipientes. Porém, a temperatura de cada recipiente permanece inalterada. Qual a pressão final do sistema? (**Sugestão:** O número total de moles do gás nos dois recipientes permanece inalterado após a abertura da válvula)

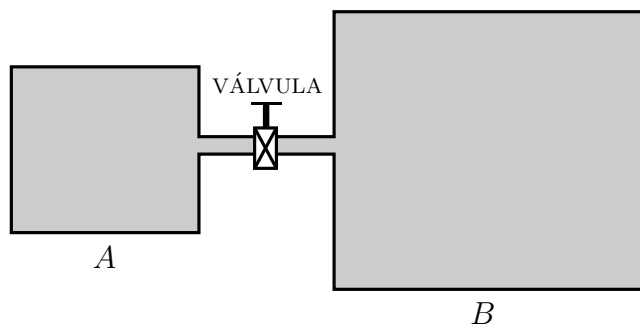


Figura 6.3: Dois recipientes com volumes diferentes contém o mesmo gás ideal a temperaturas e pressões distintas. Os recipientes são conectados por um tubo estreito contendo uma válvula que será aberta, igualando as pressões.

5. Uma das extremidades de um tubo em U, parcialmente cheio de mercúrio, é selada de maneira a confinar o ar existente entre ela e a superfície do mercúrio. Neste momento, os dois ramos do tubo estão equilibrados, isto é, possuem a mesma altura de mercúrio. A altura da coluna de

ar no ramo selado é, inicialmente, $h = 20,0 \text{ cm}$. Considere que o ar se comporta como um gás ideal.

- (a) Se a temperatura do ramo selado for triplicada, qual será a nova altura h' da coluna de ar? (**Observe que, ao expandir-se, o ar empurra a coluna de mercúrio, variando a pressão na superfície de contato entre os dois fluidos.**)
- (b) Para que o ar retorne ao seu volume original, adicionamos mercúrio ao ramo aberto do tubo em U, mantendo a temperatura do sistema constante. Qual deve ser o desnível Δh de mercúrio entre os dois ramos para que a coluna de ar retorne à altura inicial?

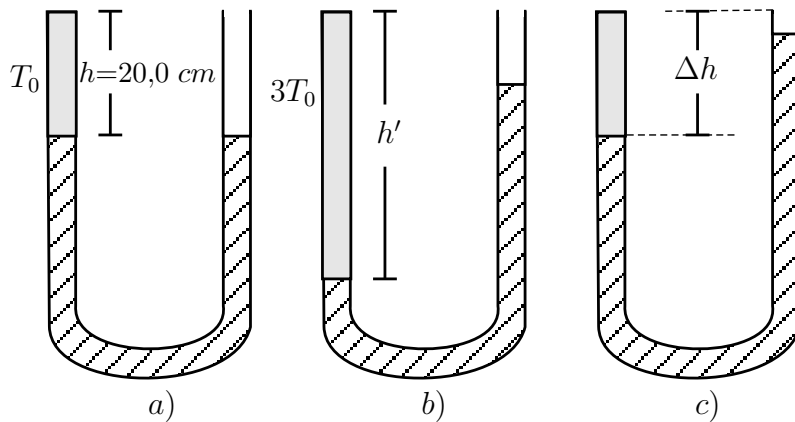


Figura 6.4: a) Tubo em U parcialmente cheio de mercúrio. O ramo esquerdo do tubo é selado, confinando o ar em seu interior; b) a temperatura do ramo selado é triplicada, expandindo o ar no seu interior; c) mais mercúrio é adicionado ao ramo livre, de maneira a comprimir a coluna de ar até que esta retorne ao seu volume inicial.

Aula 7 – A Teoria Cinética dos Gases

Objetivos

O aluno deverá ser capaz de:

- Estabelecer um modelo microscópico para um gás ideal.
- Formular as interpretações cinéticas da pressão e da temperatura.

Introdução

Uma vez conhecidas as leis que regem o comportamento macroscópico de um gás, uma pergunta surge naturalmente: será possível deduzir estas leis aplicando-se as leis básicas da Mecânica Newtoniana aos constituintes fundamentais de um gás, isto é, seus átomos e moléculas? Ao formularmos as leis que regem o comportamento de um gás, utilizamos grandezas como pressão e temperatura, que caracterizam o gás por inteiro. A conexão entre o comportamento macroscópico de um gás e suas propriedades microscópicas requer uma interpretação da pressão e da temperatura em termos das grandezas microscópicas como força e momento linear, por exemplo. Isto é o que chamamos interpretação cinética, cuja formulação constitui o objetivo central desta aula.

Modelo de gás ideal

Antes de iniciarmos a descrição microscópica propriamente dita, devemos precisar o que entendemos como sendo um *gás ideal*. Ou seja, nossa descrição microscópica deverá pressupor algumas características do comportamento do gás a nível molecular. Nossas hipóteses básicas são:

1. O número de moléculas no gás é muito grande (da ordem do número de Avogadro).
2. As dimensões típicas de uma molécula são muito inferiores à distância média entre duas moléculas do gás. Isto significa que o volume ocupado pelas moléculas é desprezível se comparado ao volume do recipiente que contém o gás.
3. As moléculas movem-se constantemente e aleatoriamente em todas as direções. Isto ocasiona colisões das moléculas entre si e com as paredes

do recipiente. A aleatoriedade deste movimento garante que, se tomarmos qualquer direção do espaço, o número de moléculas movendo-se no sentido positivo desta direção é igual ao número de moléculas movendo-se no sentido negativo. Por exemplo, no esquema da Figura 7.1 o número médio de moléculas com $v_x > 0$ é igual ao número médio de moléculas com $v_x < 0$. Esta hipótese é bastante razoável, pois, do contrário, teríamos um acúmulo do gás em um dos lados do recipiente.

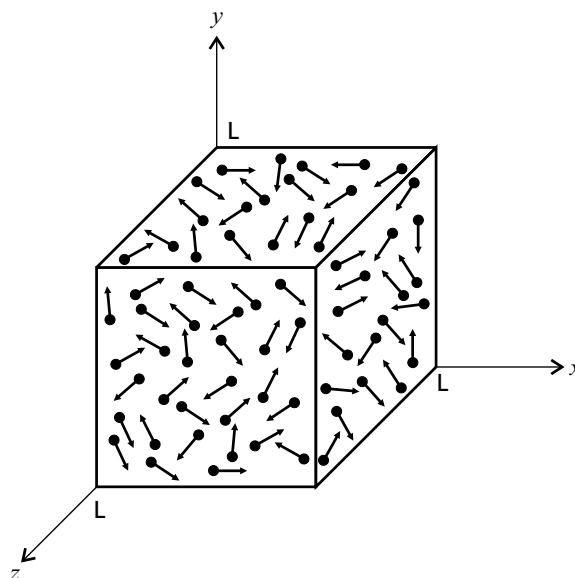


Figura 7.1: As moléculas de um gás movem-se aleatoriamente pelo volume do recipiente. O número médio de moléculas com $v_x > 0$ é igual ao número médio de moléculas com $v_x < 0$.

4. As forças de interação entre as moléculas, ou das moléculas com as paredes do recipiente são de curto alcance e de curta duração. Isto significa que estas forças só atuam a curtas distâncias, durante as rápidas colisões sofridas pelas moléculas. A duração das colisões é, em geral, muito menor do que o tempo médio transcorrido entre duas colisões consecutivas.
5. As colisões sofridas pelas moléculas do gás (entre si ou com as paredes do recipiente) são elásticas. Portanto, a energia cinética total das moléculas deve permanecer constante. Mesmo que algumas moléculas efetuem colisões inelásticas, podemos supor que, em média, a energia cinética ganha nestas colisões é igual à energia perdida.

Interpretação cinética da pressão

No contexto da teoria cinética, podemos entender a pressão exercida por um gás sobre as paredes do recipiente que o contém como consequência das colisões entre as moléculas do gás e a superfície deste recipiente. Nestas colisões, as moléculas transferem momento linear para as paredes, dando origem à pressão do gás sobre o recipiente.

Para simplificarmos nossa discussão, vamos considerar o recipiente cúbico com aresta L da Figura 7.1, contendo um gás ideal constituído de moléculas de massa m . Considere a face do recipiente perpendicular ao eixo x , localizada em $x = L$ como mostra a Figura 7.2. Ao colidir com esta face do recipiente, apenas a componente da velocidade da molécula normal à face, isto é, v_x , sofrerá alguma alteração. As componentes v_y e v_z devem permanecer inalteradas. Uma vez que a massa do recipiente é muito maior do que m , a componente v_x será praticamente invertida após a colisão.

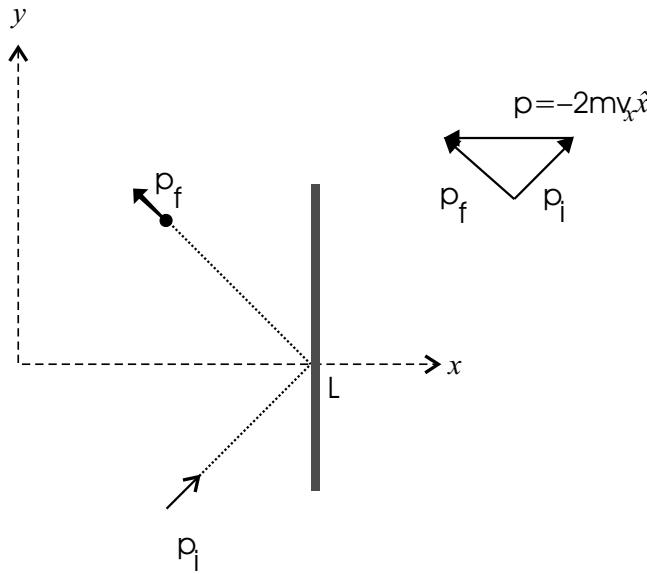


Figura 7.2: Visão lateral da colisão de uma molécula do gás com uma das paredes do recipiente. A componente da velocidade normal à parede é invertida após a colisão.

Portanto, sendo $\vec{p}_i = m(v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z})$ o momento linear da molécula antes da colisão, o momento linear após a colisão será $\vec{p}_f = m(-v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z})$, de maneira que a variação de momento sofrida pela molécula é dada por

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -2m v_x \hat{x} . \quad (7.1)$$

Uma vez que o momento linear total da molécula mais o recipiente é conservado na colisão, o momento transferido à parede será $-\Delta\vec{p} = 2m v_x \hat{x}$. Como dissemos anteriormente, esta transferência de momento dá origem a uma força de contato e à pressão do gás sobre o recipiente. Para calcularmos a pressão exercida, devemos considerar as colisões de diversas moléculas com as paredes. Para tal, tomaremos uma região do gás vizinha à parede localizada em $x = L$, por exemplo. Esta região é delimitada pela parede e por um quadrado imaginário, de lado L , paralelo à parede, e situado em $x = L - \Delta x$ como mostra a Figura 7.3.

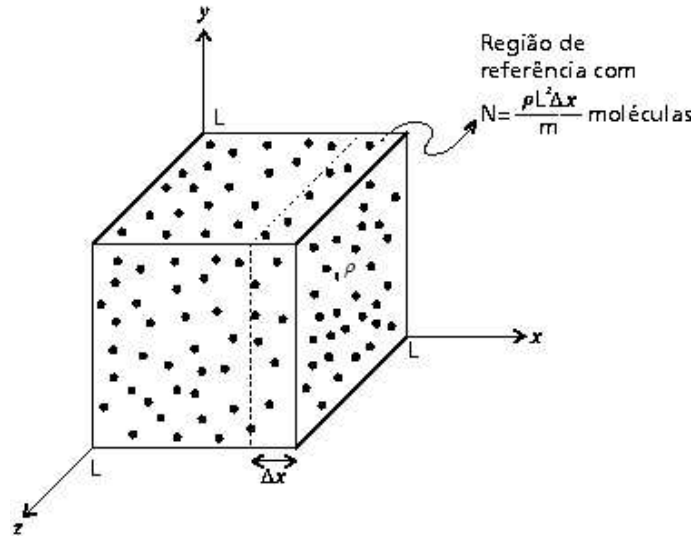


Figura 7.3: Região de referência para o cálculo da pressão do gás sobre as paredes do recipiente. Somente as moléculas com $v_x > 0$ colidem com a parede, contribuindo para a pressão do gás.

A região assim delimitada possui volume $V = L^2 \Delta x$, e o número médio de moléculas no seu interior é

$$N = \frac{\rho V}{m} = \frac{\rho L^2 \Delta x}{m} . \quad (7.2)$$

As diversas moléculas no interior da região possuem velocidades diferentes. Em média, o tempo gasto por uma molécula com componente v_x da velocidade (as componentes v_y e v_z são irrelevantes) para atingir a parede é $\Delta t = \Delta x / v_x$. Portanto, a força média exercida por esta molécula será (lembre-se de que o momento transferido à parede é $-\Delta\vec{p} = 2m v_x \hat{x}$.)

$$\vec{f} = -\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{2m v_x^2}{\Delta x} \hat{x} . \quad (7.3)$$

Note que o momento transferido, bem como a força \vec{f} , são perpendiculares à parede.

A força total exercida sobre a parede é obtida somando-se as contribuições individuais das moléculas. Contudo, é importante notar que apenas as moléculas que se movem em direção à parede ($v_x > 0$) irão colidir. Logo, a força média total exercida sobre a parede será

$$\vec{F} = \sum \vec{f} = \frac{2m}{\Delta x} \left(\sum_{v_x > 0} v_x^2 \right) \hat{x}. \quad (7.4)$$

Uma vez que o movimento das moléculas é aleatório, é razoável considerarmos que metade das moléculas no interior da região se aproxima da parede do recipiente ($v_x > 0$), enquanto a outra metade se afasta ($v_x < 0$), de maneira que

$$\sum_{v_x > 0} v_x^2 = \frac{1}{2} \sum v_x^2 \rightarrow \vec{F} = \frac{m}{\Delta x} \left(\sum v_x^2 \right) \hat{x}. \quad (7.5)$$

Uma definição muito útil à teoria cinética é a de *velocidade média quadrática*:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_{N_0}^2}{N_0}} = \sqrt{\frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} v_n^2}, \quad (7.6)$$

onde $v_n^2 = v_{nx}^2 + v_{ny}^2 + v_{nz}^2$ é a velocidade escalar da n -ésima molécula ao quadrado, e o somatório estende-se sobre as N_0 moléculas do gás. Para representarmos o valor médio de uma grandeza tomado sobre o número de moléculas do gás, colocaremos a grandeza em questão entre $\langle \rangle$ ¹. Por exemplo, para o valor médio do quadrado da velocidade escalar das moléculas do gás teremos:

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^{N_0} v_n^2 \equiv \langle v^2 \rangle.$$

Assim, a velocidade média quadrática é dada por $v_{\text{rms}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$.

Levando-se em conta a hipótese 3 do nosso modelo de gás ideal (movimento aleatório das moléculas em todas as direções), esperamos que as médias quadráticas tomadas nas três direções sejam iguais, isto é, $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \langle v^2 \rangle / 3$. Além disso, se o gás for homogêneo, ou seja, suas diferentes partes apresentarem as mesmas propriedades, as médias quadráticas tomadas em qualquer fração do volume do gás devem coincidir com a média

¹Obs.: Em alguns livros o valor médio de uma grandeza é representado colocando-se uma barra sobre a grandeza em questão. Por exemplo, $\overline{v^2}$ no lugar de $\langle v^2 \rangle$.

calculada sobre o gás por inteiro. Isto será válido desde que a fração de gás considerada ainda possua um número muito grande de moléculas. Assim sendo, aplicando estas idéias à nossa região de interesse obtemos:

$$\sum v_x^2 = N \langle v_x^2 \rangle = \frac{N}{3} \langle v^2 \rangle . \quad (7.7)$$

Substituindo as Eqs.(7.2) e (7.7) na Eq.(7.5) obtemos

$$\vec{F} = \frac{N m}{3 \Delta x} \langle v^2 \rangle \hat{x} = \frac{1}{3} \rho L^2 \langle v^2 \rangle \hat{x} . \quad (7.8)$$

Finalmente, a pressão exercida é dada pela força normal à superfície por unidade de área:

$$p = \frac{|\vec{F}|}{L^2} = \frac{1}{3} \rho \langle v^2 \rangle . \quad (7.9)$$

A Eq.(7.9) constitui a expressão desejada para a pressão do gás em termos de características microscópicas do gás como a velocidade média quadrática. Conforme veremos a seguir, a temperatura do gás também está relacionada de maneira simples com v_{rms} . Em contrapartida, a Eq.(7.9) nos permite estimar a velocidade das moléculas de um gás conhecendo-se sua pressão e sua densidade.

Exemplo 1

Mostre que, em uma mistura de gases que não interagem quimicamente, a pressão total exercida sobre as paredes do recipiente é igual à soma das pressões que cada um dos constituintes da mistura exerceria se estivesse sozinho no recipiente. Esta é a Lei de Dalton.

Solução:

Para estendermos nossas conclusões a uma mistura de gases, voltemos à força média exercida por uma molécula sobre a parede do recipiente, dada pela Eq.(7.3). Na presença de dois tipos de moléculas com massas m_1 e m_2 , a força média exercida por cada tipo de molécula será

$$\vec{f}_1 = \frac{2 m_1 v_{1x}^2}{\Delta x} \hat{x} ,$$

para as moléculas de massa m_1 , e

$$\vec{f}_2 = \frac{2 m_2 v_{2x}^2}{\Delta x} \hat{x} ,$$

para as de massa m_2 . Portanto, a força total exercida na parede do recipiente será

$$\vec{F} = \sum \vec{f}_1 + \sum \vec{f}_2 = \left(\frac{N_1 m_1}{3 \Delta x} \langle v_1^2 \rangle + \frac{N_2 m_2}{3 \Delta x} \langle v_2^2 \rangle \right) \hat{x} ,$$

onde N_1 e N_2 são os números de moléculas de cada tipo no interior da região de interesse mostrada na Figura 7.3. Note que $N_1 m_1 = \rho_1 L^2 \Delta x$ e $N_2 m_2 = \rho_2 L^2 \Delta x$ (ρ_1 e ρ_2 são as densidades de cada tipo de gás no recipiente), de maneira que

$$\vec{F} = \left(\frac{1}{3} \rho_1 \langle v_1^2 \rangle + \frac{1}{3} \rho_2 \langle v_2^2 \rangle \right) L^2 \hat{x}.$$

Finalmente, a pressão total exercida pela mistura será:

$$p = p_1 + p_2, \quad (7.10)$$

onde

$$p_1 = \frac{1}{3} \rho_1 \langle v_1^2 \rangle \quad \text{e} \quad p_2 = \frac{1}{3} \rho_2 \langle v_2^2 \rangle,$$

são as pressões parciais de cada tipo de gás na mistura, isto é, as pressões que cada tipo de gás exerceria se estivesse sozinho no recipiente.

Interpretação cinética da temperatura

A partir do cálculo da pressão usando a teoria cinética, podemos relacionar a temperatura, uma propriedade macroscópica, com características microscópicas de um gás. Começamos multiplicando os dois membros da Eq.(7.9) pelo volume V , obtendo:

$$pV = \frac{1}{3} \rho V \langle v^2 \rangle, \quad (7.11)$$

onde ρV é a massa total do gás, que também pode ser escrita como nM , onde M é a massa molar (massa de um mol do gás) e n é o número de moles de gás contido no volume V . Substituindo o valor da massa teremos:

$$pV = \frac{1}{3} nM \langle v^2 \rangle. \quad (7.12)$$

Podemos, a seguir, relacionar a Eq.(7.12) com Θ , o valor da energia cinética total de translação do gás, a qual por sua vez é dada por:

$$\Theta = \frac{1}{2} (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2) = \frac{1}{2} m (N \langle v^2 \rangle), \quad (7.13)$$

onde N é o número total de moléculas. Como a massa total do gás nM é igual a Nm , podemos escrever a Eq.(7.12) como:

$$pV = \frac{1}{3} Nm \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} nM \langle v^2 \rangle \right). \quad (7.14)$$

Podemos combinar então este resultado com a já conhecida equação de estado dos gases ideais $pV = nRT$:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} n M \langle v^2 \rangle \right) = nRT,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} RT. \quad (7.15)$$

Portanto, podemos concluir que a energia cinética média molar de um gás ideal é proporcional à sua temperatura. Desta forma estabelecemos um vínculo entre a temperatura, grandeza macroscópica que caracteriza o estado de um gás ideal, e um parâmetro microscópico, a energia cinética das moléculas que constituem este gás. Este vínculo nos permite uma melhor compreensão do conceito de temperatura (para o caso do gás ideal), antes definido de forma muito geral, pela Lei Zero da Termodinâmica, discutida na Aula 5.

É importante ressaltar que a velocidade de que falamos nas equações apresentadas é a velocidade das moléculas em relação ao centro de massa do sistema. Ao colocar, por exemplo, um cilindro de gás em movimento, a velocidade do cilindro não contribuirá para o aumento da energia cinética média e, portanto, não se traduzirá em aumento de temperatura do gás.

Uma outra relação interessante é obtida dividindo ambos os membros da Eq.(7.15) pelo número de Avogadro N_A :

$$\frac{1}{2} \frac{M}{N_A} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T. \quad (7.16)$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (7.17)$$

que é a expressão da Eq.(7.15) para apenas uma molécula. Esta equação nos faz concluir que a energia cinética média de cada molécula é determinada pela temperatura.

Quando temos dois gases cujas moléculas têm massa molecular m_1 e m_2 a uma dada temperatura T , a razão entre as velocidades médias quadráticas dos dois gases é dada por:

$$\frac{v_{1\text{rms}}}{v_{2\text{rms}}} = \sqrt{\frac{\langle v_1^2 \rangle}{\langle v_2^2 \rangle}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}, \quad (7.18)$$

sendo portanto igual à raiz quadrada da razão entre as massas moleculares dos dois gases.

Este resultado pode ser usado para efetuar a separação de dois gases misturados entre si. O esquema utilizado para esta finalidade está mostrado na Figura 7.4.a. Dois vasos, um deles contendo a mistura gasosa, e o outro evacuado, são separados por uma parede porosa. Como a velocidade quadrática média das moléculas do gás mais leve é maior do que a das moléculas do outro gás, a vazão do gás mais leve, ao passar de um vaso para outro, será relativamente maior do que a do gás mais pesado.

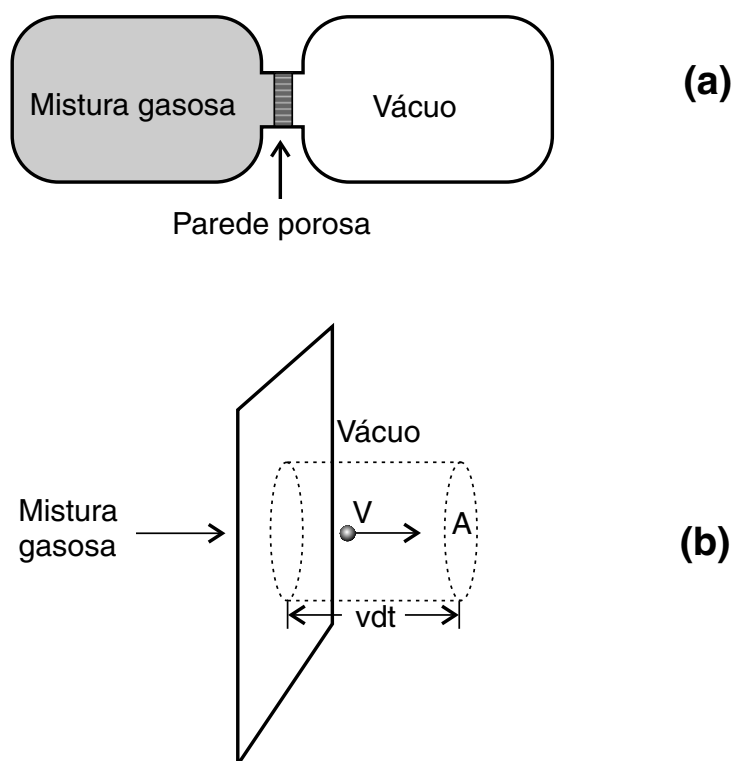


Figura 7.4: a) esquema utilizado para a separação isotópica de misturas gasosas; b) visão ampliada da passagem de uma molécula por um poro da parede de separação.

O número de moléculas de um determinado gás ao passar por um poro (aqui tomado um pequeno orifício na parede de separação dos dois vasos em um intervalo de tempo dt será igual ao número de moléculas de gás contido em um volume $Avdt$, onde A é a área do furo e v é a velocidade das moléculas do gás (ver Fig, 7.4.b). O número de moléculas atravessando o furo será, então, igual a $\frac{N}{V}Avdt$ onde $\frac{N}{V}$ é o número de moléculas de um determinado tipo por unidade de volume presente, originalmente, no vaso que contém a mistura gasosa. Se a razão entre os números de moléculas dos dois gases da mistura original for igual a $\frac{N_1}{N_2}$, então a razão entre as vazões dos gases que atravessam o furo será igual a:

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{AdtN_1v_{1\text{rms}}}{AdtN_2v_{2\text{rms}}} = \frac{N_1v_{1\text{rms}}}{N_2v_{2\text{rms}}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \frac{N_1}{N_2}. \quad (7.19)$$

Portanto, se o gás 1 for o mais leve, sua concentração em relação ao gás 2 é enriquecido por um fator α ao atravessar a parede porosa. O fator α , chamado fator de separação, então, é dado por: vaso originalmente em vácuo.

$$\alpha = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (7.20)$$

Esta técnica é utilizada para separar, através da massa, isótopos de um mesmo elemento. Este é o caso da separação de isótopos de Urânio radioativo, o que será discutido no exemplo 2 a seguir.

Exemplo 2

O urânio encontrado natural (como encontrado em minérios) tem essencialmente dois isótopos, o ^{235}U e o ^{238}U . O segundo é bem mais abundante (abundância igual a 99,3%). E apenas o primeiro, o ^{235}U , é adequado para utilização em processos nucleares, pois fissiona-se facilmente. Determine a abundância de ^{235}U em um gás de fluoreto de urânio, após o mesmo passar 400 vezes por uma parede porosa. Observe que no gás original, é observada a abundância original do urânio.

Solução:

Como originalmente a abundância é a natural, a razão isotópica na mistura de fluoretos original é igual a

$$\frac{N_{^{235}\text{UF}_6}}{N_{^{238}\text{UF}_6}} = \frac{0,007}{0,993}.$$

Cada vez que uma mistura dos dois isótopos de fluoreto gasoso passa pela parede porosa, a mistura se enriquece em ^{235}U de um fator α dado por:

$$\alpha = \sqrt{\frac{m_{^{235}\text{UF}_6}}{m_{^{238}\text{UF}_6}}} = \sqrt{\frac{M_{^{235}\text{UF}_6}}{M_{^{238}\text{UF}_6}}},$$

onde M_x é a massa molar do isótopo x . Após passar 400 vezes a mistura por uma parede porosa, ela será enriquecida no isótopo de massa 235 de um fator α^{400} . A massa molar do $^{235}\text{UF}_6$ é igual a $0,349\text{kg/mol}$ e a do $^{238}\text{UF}_6$ é igual a $0,352\text{kg/mol}$, então, a relação isotópica final será:

$$\frac{N'_{^{235}\text{UF}_6}}{N'_{^{238}\text{UF}_6}} = \frac{0,007}{0,993} \left(\sqrt{\frac{0,352}{0,349}} \right)^{400} = 0,039.$$

Expressando o resultado em termos de uma fração cujos denominador e numerador somem 1, temos:

$$\frac{N'_{^{235}\text{UF}_6}}{N'_{^{238}\text{UF}_6}} = \frac{0,038}{0,962}.$$

Ou seja, após passar 400 vezes por uma parede porosa, a abundância do $^{235}\text{UF}_6$ aumenta de 0,3% para 3,8%.

Resumo

Nesta aula, construímos um modelo microscópico para um gás ideal e estabelecemos uma conexão entre as descrições microscópica e macroscópica deste tipo de gás. As grandezas macroscópicas, como pressão e temperatura, foram interpretadas em termos de grandezas microscópicas. Mostramos que, por um lado, a pressão está relacionada com a transferência de momento linear às paredes do recipiente, e, por outro lado, a temperatura de um gás está ligada à energia média de cada molécula. Em ambos os casos, a velocidade média quadrática das moléculas de um gás desempenha um papel fundamental na relação entre as grandezas macroscópicas e microscópicas.

Exercícios

1. A massa de uma molécula de H_2 é $3,3 \times 10^{-24}\text{g}$. Sabendo-se que $4,8 \times 10^{23}$ moléculas de hidrogênio colidem, por segundo, contra $2,0\text{cm}^2$ de parede, num ângulo de 37° com a normal à parede, e com velocidade escalar de $2,0 \times 10^5\text{cm/s}$, calcule a pressão exercida por elas sobre a parede.

2. A 44°C e $2,46 \times 10^{-2} \text{ atm}$ a densidade de um gás é $6,60 \times 10^{-6} \text{ g/cm}^3$.
 - (a) Determine v_{rms} para as moléculas do gás.
 - (b) Determine a massa molecular do gás e o identifique.
3. A que temperatura a energia cinética média de uma molécula de um gás ideal é igual a $0,01 \text{ eV}$?
4. A que temperatura os átomos de gás nitrogênio têm a mesma velocidade média quadrática que as moléculas de argônio a 100°C ?
5. Um recipiente contém uma mistura de dois gases ideais. Um dos gases tem massa molecular M_1 e três moles dele estão presentes no recipiente. O outro tem massa molecular $M_2 = 3 M_1$ e dois moles deste gás estão presentes no recipiente.
 - (a) Qual a razão entre as velocidades médias quadráticas das moléculas dos dois gases? Em média, quais moléculas se movem mais rapidamente, as mais leves ou as mais pesadas?
 - (b) Que fração da pressão total sobre a parede do recipiente é devida ao segundo gás?

Aula 8 – Trabalho e energia em um gás ideal

Objetivos

- Compreender a definição da energia interna de um gás ideal.
- Familiarizar-se com o cálculo de trabalho realizado sobre um gás ideal.

Introdução

A formulação de uma lei de conservação da energia nas trocas ocorridas entre o gás e o ambiente externo, traz, naturalmente, a necessidade de definirmos uma forma de energia associada ao gás. Trata-se da *energia interna* de um gás, que é a energia de movimento de suas moléculas. Na Aula 7 já estabelecemos uma relação entre temperatura e energia cinética molecular. Nesta aula veremos como esta relação nos permite estimar a energia contida em um gás devido à agitação de suas moléculas, isto é, sua energia interna.

A expansão ou compressão de um gás envolve a troca de energia deste com o ambiente que o circunda. Esta troca de energia ocorre através da realização de trabalho *pelo* ou *sobre* o gás. Trataremos ainda desta questão e veremos como calcular o trabalho realizado quando um gás sofre uma variação de volume. Alguns casos especiais serão abordados, como variações de volume a pressão constante, temperatura constante, ou em isolamento térmico.

Energia interna de um gás ideal

Nosso objetivo inicial será discutir todas as contribuições relevantes para a energia inerente às moléculas de um gás ideal, ou *energia interna* de um gás ideal. Para isso, devemos contabilizar todas as contribuições possíveis para a energia cinética e potencial de um gás ideal.

Consideremos, inicialmente, a energia cinética. Uma vez que consideramos, no modelo de gás ideal, as moléculas como sendo partículas pontuais, a única contribuição a ser levada em conta é a relativa ao movimento de translação das moléculas do gás. Pelo fato de moléculas pontuais não apresentarem movimento de vibração ou rotação, não teremos contribuição à energia cinética relacionada com estes movimentos.

A contribuição da energia potencial das moléculas, por sua vez, é nula. Primeiramente, temos que as moléculas de um gás ideal não interagem à

distância, entre si ou com as paredes, o que faz anular as respectivas energias potenciais de interação. O mesmo acontece com as interações intramoleculares. Uma vez que as moléculas são consideradas partículas pontuais, não devemos levar em conta as contribuições relativas à energia potencial molecular, ou à energia potencial vibracional ou elástica.

Em conclusão, para um gás ideal, só temos uma contribuição para a energia interna: a energia cinética de translação das moléculas do gás. Mas é preciso lembrar que, ao desenvolvermos o modelo de um gás ideal, concluímos que a temperatura do gás depende da energia cinética média de translação das moléculas. Portanto podemos, a partir da equação (15) da aula 7, obter a seguinte expressão para E_{int} , a energia interna:

$$E_{int} = n\left(\frac{1}{2}M\langle v^2 \rangle\right) = \frac{3}{2}nRT, \quad (8.1)$$

ou seja, a energia interna de um gás ideal não depende da pressão ou do volume do gás, depende apenas de sua temperatura.

Vamos supor agora que o nosso gás ideal seja composto por moléculas diatômicas, em vez de monoatômicas, como temos considerado até o momento. Consideremos também que estas moléculas sejam rígidas, ou seja, que a distância entre os átomos não mude com o tempo. Ao escrevermos uma expressão para a energia cinética de uma molécula deste gás, devemos também incluir a energia cinética de rotação das moléculas. Para cada molécula, o termo de energia cinética rotacional será descrito por:

$$K_{rot} = \frac{1}{2}I_{x'}\omega_{x'}^2 + \frac{1}{2}I_{y'}\omega_{y'}^2, \quad (8.2)$$

onde $I_{x'(y')}$ é o momento de inércia da molécula em relação ao eixo x(y) da molécula, como mostrado na Figura (8.1.b) e $\omega_{x'(y')}$ é a velocidade angular para rotação em torno do eixo x(y). Observe que não foi incluída a rotação em torno do eixo z da molécula, uma vez que o momento de inércia em relação a este eixo deve anular-se, devido às pequenas dimensões dos átomos que compõem a molécula. A energia cinética da molécula diatômica em questão será então dada por:

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_{x'}\omega_{x'}^2 + \frac{1}{2}I_{y'}\omega_{y'}^2, \quad (8.3)$$

que é a contribuição que cada molécula dará à energia interna do gás composto por moléculas diatômicas. Então, para o caso da molécula diatômica rígida, a equação (8.1) não descreverá mais corretamente a energia interna

do gás, pois a energia cinética das moléculas não terá apenas os termos relativos ao movimento de translação. Para se obter uma expressão para a energia interna de um gás que inclua outras contribuições além da energia cinética translacional, deve-se calcular a energia cinética média por molécula, e depois multiplicar pelo número de moléculas N . Isto pode ser realizado no contexto da *Mecânica Estatística Clássica*, assunto que será discutido ao final deste curso. Pode-se mostrar, dentro deste contexto, o teorema chamado **Teorema da Equipartição da Energia**, o qual tem o seguinte enunciado:

Quando o número de partículas é grande, e nos casos onde prevalece a Mecânica Newtoniana, cada um dos termos que se apresentam como contribuição independente à energia, e sejam expressos de forma quadrática, tem a mesma energia média igual a $\frac{1}{2}kT$

A Figura (8.1) mostra a aplicação do teorema da equipartição da energia em três casos, com diferentes configurações moleculares. Primeiramente, na Figura (8.1.a), temos o caso de moléculas monoatômicas. Neste caso só há energia cinética, que é escrita como

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$$

ou seja, com três termos quadráticos. Aplicando o teorema da equipartição, teremos a energia média por molécula igual a $3 \times \frac{1}{2}kT$. Ou seja, a energia interna do gás será então igual a:

$$(E_{int})_{mono} = \frac{3}{2}NkT = \frac{3}{2}nRT,$$

como está na equação (8.1)

Na Figura (8.1.b), está mostrado o caso da molécula rígida discutido nos parágrafos anteriores. Neste caso, a energia total envolve as energias cinéticas translacional e rotacional, e é escrita na forma

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I_{x'}\omega_{x'}^2 + \frac{1}{2}I_{y'}\omega_{y'}^2,$$

ou seja, a expressão da energia envolve cinco termos quadráticos independentes, o que, pelo teorema da equipartição, traduz-se em uma energia média igual a $5 \times \frac{1}{2}kT$, ou seja, a energia interna pode ser escrita como:

$$(E_{int})_{di,rot} = \frac{5}{2}NkT = \frac{5}{2}nRT,$$

Ainda em relação a moléculas diatômicas, pode-se também considerar o caso em que a molécula pode vibrar ao longo de seu eixo (ver Figura 8.1.c), ou seja, os átomos da molécula podem oscilar em torno de suas

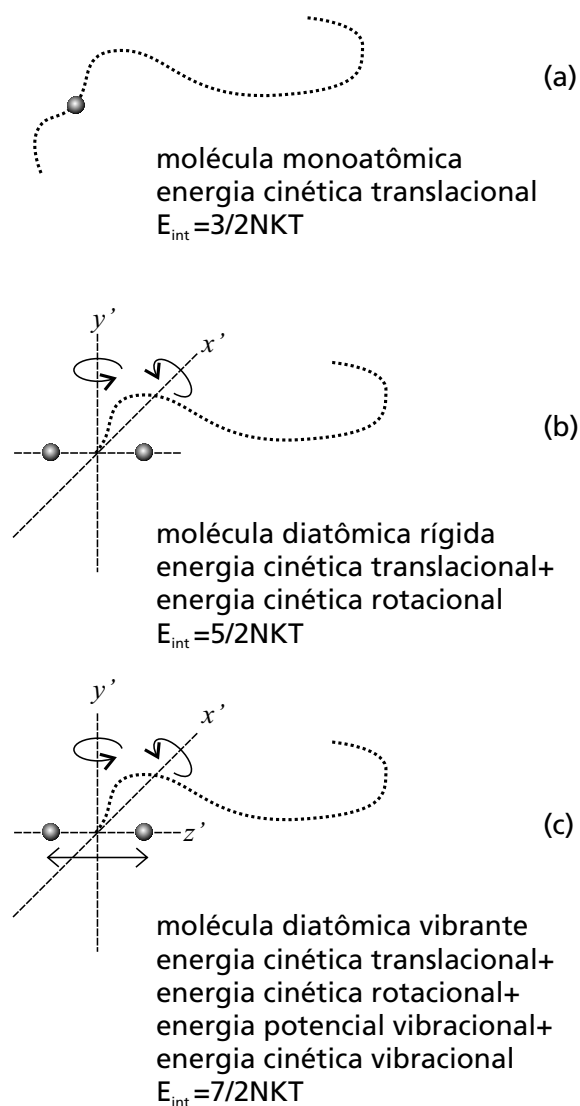


Figura 8.1: (a) Molécula monoatômica; (b) Molécula diatômica rígida; (c) Molécula diatômica com vibração.

posições de equilíbrio. Neste caso, a energia da molécula terá mais dois termos quadráticos. O primeiro é a energia potencial vibracional (ou elástica), com energia proporcional a $(x' - x'_0)^2$, onde x' é a distância instantânea entre os dois átomos que compõem a molécula e x'_0 é a distância de equilíbrio, exatamente como se a molécula fosse composta por duas massas unidas por uma mola. Da mesma forma, a energia cinética vibracional é proporcional a v_R^2 , onde v_R é a velocidade relativa entre os dois átomos da molécula, ao longo do eixo x' . Desta forma, concluímos que, para a molécula diatômica vibratória, a expressão da energia envolve sete termos quadráticos, portanto

a energia interna será igual a:

$$(E_{int})_{di,rot,vib} = \frac{7}{2}NkT = \frac{7}{2}nRT.$$

Trabalho realizado sobre um gás ideal

Considere a situação descrita na Figura 8.2, na qual um recipiente contendo um gás ideal possui um êmbolo móvel de área A . Um objeto de massa m é apoiado sobre o êmbolo. Ao variarmos o volume do gás, variando sua pressão, a massa m será deslocada. Por exemplo, se aumentarmos a temperatura do gás, este irá se expandir, suspendendo a massa m .

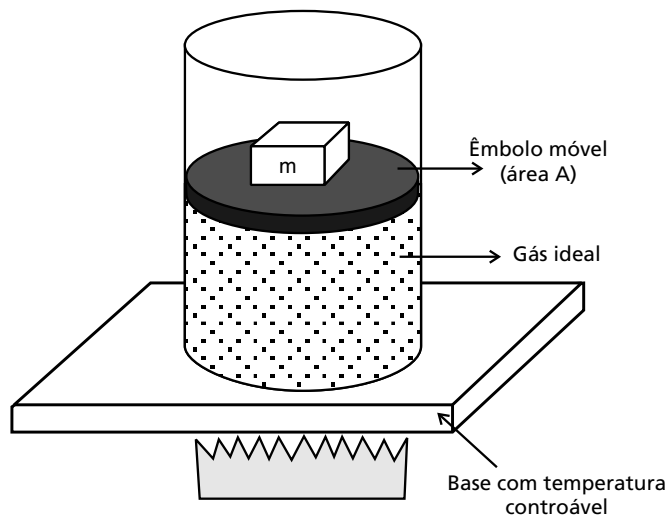


Figura 8.2: Recipiente contendo um gás ideal e um êmbolo móvel sobre o qual repousa uma massa m .

A força exercida pelo gás sobre o êmbolo aponta para cima, e tem módulo igual ao produto da pressão do gás pela área A do êmbolo, ou seja, $\vec{F} = p A \hat{y}$. Pela terceira lei de Newton, o êmbolo reage a esta força, exercendo uma força de mesmo módulo e sentido contrário sobre o gás, isto é, $\vec{F}' = -\vec{F}$. Portanto, ao deslocarmos o êmbolo de uma altura infinitesimal dy , o trabalho realizado por \vec{F}' é dado por $dW = \vec{F}' \cdot d\vec{y} = -p A dy$. Frequentemente, representamos as transformações sofridas por um gás num diagrama que relaciona sua pressão com seu volume, isto é, num diagrama $p \times V$. Por isto, será interessante expressar o trabalho realizado em termos destas grandezas. Note que o produto $A dy$ é justamente a variação infinitesimal do volume do gás, de maneira que $dW = -p dV$. O trabalho total realizado por \vec{F}' será,

então, dado por

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} p dV , \quad (8.4)$$

onde V_i e V_f são, respectivamente, os volumes inicial e final do gás. Assim, num diagrama $p \times V$ como o da Figura 8.3, o módulo do trabalho realizado sobre o gás é dado pela área embaixo da curva que representa p como função de V .

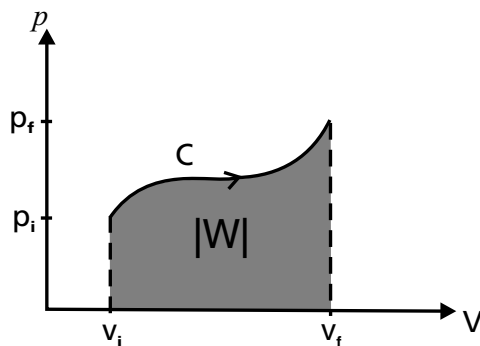


Figura 8.3: Diagrama $p \times V$. A expansão de um gás desde o volume inicial V_i até o volume final V_f é representada pela curva C . O módulo do trabalho realizado é igual à área sob a curva C .

Note que, quando o gás é comprimido, temos $dV < 0$ e $V_f < V_i$, de maneira que $W > 0$. Isto significa que o meio externo realiza trabalho **sobre o gás**. Em contrapartida, quando o gás se expande temos $dV > 0$ e $V_f > V_i$, de maneira que $W < 0$. Neste caso, o trabalho é realizado **pelo gás** sobre o meio externo, representado pelo êmbolo e a massa m . Conforme veremos mais tarde, o trabalho realizado pelas forças que o gás exerce no ambiente externo está associado à troca de energia entre o gás e este ambiente. Portanto, veremos que um trabalho negativo representa a perda de energia pelo gás para o ambiente, enquanto um trabalho positivo significa que o gás recebe energia do ambiente. De posse da Eq.(8.4), podemos calcular o trabalho realizado pelo ou sobre o gás quando este sofre uma transformação. Contudo, observe que se o gás sofrer alterações de temperatura ou pressão, mas seu volume permanecer constante, teremos $W = 0$. De fato, num diagrama $p \times V$, uma alteração deste tipo é representada por uma linha vertical, sob a qual a área compreendida é nula. Portanto, a realização de trabalho pelo ou sobre o gás numa transformação qualquer requer a variação do seu volume.

Trabalho realizado a pressão constante

Suponha que o gás da Figura 8.2 sofra uma expansão, a uma pressão constante p_0 , desde o volume inicial V_i até o volume final V_f . Para tal, podemos aumentar a temperatura do gás e manter constante a massa m sustentada pelo êmbolo móvel. De fato, teremos uma expansão a pressão constante, de maneira que este processo é representado por uma linha horizontal no diagrama $p \times V$, conforme mostramos na Figura 8.4. O cálculo do trabalho neste caso é bastante simples. Como a pressão é constante, podemos fatorar p na integral da Eq.(8.4):

$$W = -p_0 \int_{V_i}^{V_f} dV = -p_0 (V_f - V_i). \quad (8.5)$$

Portanto, o módulo do trabalho realizado pelo gás será igual à área retangular sob a reta horizontal que representa a pressão como função do volume.

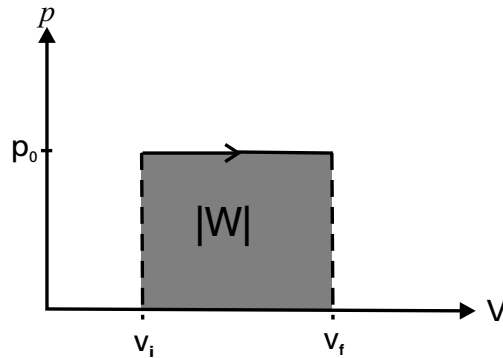


Figura 8.4: Expansão de um gás a pressão constante.

Trabalho realizado a temperatura constante

Quando, mantendo a temperatura constante, um gás expande-se ou contrai-se, o produto da pressão com o volume permanece constante:

$$pV = cte. = nRT \quad (8.6)$$

Num diagrama pV , a variação da pressão com a temperatura será dada por $p = \frac{cte.}{V}$, que é a equação de uma hipérbole, cuja curva está representada na Figura (8.5). O trabalho realizado sobre o sistema numa expansão a temperatura constante, entre os volumes V_i e V_f será dado então por:

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} p dV = -nRT \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = -nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad (8.7)$$

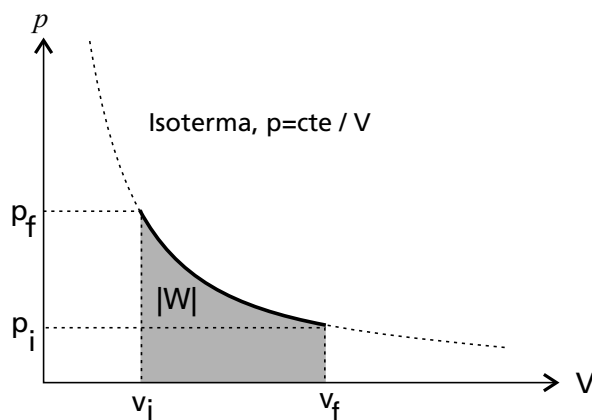


Figura 8.5: Expansão de um gás a temperatura constante.

Devemos notar que o trabalho realizado é negativo para uma expansão ($V_f > V_i$). Portanto, neste caso, o sistema cede energia para o reservatório térmico que mantém a temperatura do gás constante.

Exemplo 1 Um mol de gás sofre um processo de compressão, partindo de um volume igual a $0,5\text{ m}^3$, e atingindo um volume igual a $0,1\text{ m}^3$, sendo a pressão inicial igual a 100 Pa e a pressão final igual a 40 Pa . Calcule o trabalho realizado para os processos descritos a seguir, e mostrados na Figura (8.6):

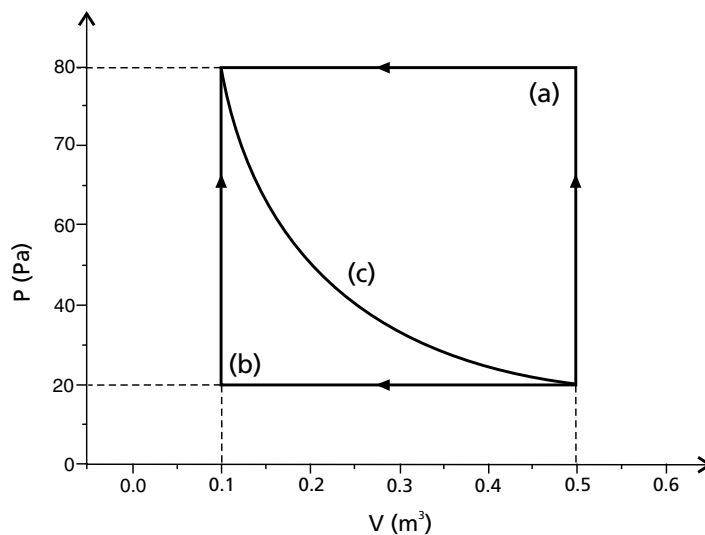


Figura 8.6: Processos de compressão do exemplo 1.

(a) Inicialmente a volume constante ($0,5\text{ m}^3$), com a pressão variando de 20 e 100 Pa ; após o que o gás é comprimido, variando-se o volume de 0,5 a $0,1\text{ m}^3$, à pressão de 100 Pa .

(b) Inicialmente a pressão constante, variando-se o volume de $0,5$ a $0,1 \text{ m}^3$, à pressão de 20 Pa ; após o que aumenta-se a pressão de 20 e 100 Pa , a volume constante ($0,1 \text{ m}^3$).

(c) Seguindo a isoterma que passa pelos pontos inicial e final do diagrama pV .

Solução

Pelo processo (a), o trabalho será igual a 0 no primeiro trecho (volume constante). No segundo trecho, o trabalho será dado por:

$$W = - \int_{0,5}^{0,1} p dV = -100 \text{ Pa} \times [V]_{0,5}^{0,1} = 0,4 \times 100 \text{ J} = 40 \text{ J}$$

Então $W_a = 40 \text{ J}$.

Pelo processo (b), no primeiro trecho, o trabalho será dado por:

$$W = - \int_{0,5}^{0,1} p dV = -20 \text{ Pa} \times [V]_{0,5}^{0,1} = 0,4 \times 20 \text{ J} = 8 \text{ J}$$

No segundo trecho, o trabalho é nulo pois a pressão aumenta a volume constante. Portanto, o trabalho total será igual a $W_b = 8 \text{ J}$.

Quanto ao processo (c), é interessante observar se os pontos inicial e final realmente estão sobre uma isoterma, o que de fato acontece, pois $P_i V_i = 20 \times 0,5 \text{ Pa m}^3 = P_f V_f = 100 \times 0,1 \text{ Pa m}^3 = 10 \text{ Pa m}^3$. O trabalho, então, será dado por:

$$W_c = - \int_{0,5}^{0,1} P dV = - \int_{0,5}^{0,1} \frac{10}{V} dV = -10 \ln\left(\frac{0,1}{0,5}\right) = -10 \ln(0,2) = 16,1 \text{ J}.$$

É interessante observar que apenas estimando, no diagrama pV , as áreas abaixo das curvas que definem os caminhos para cálculo de trabalho, pode-se concluir que $W_b < W_c < W_a$.

Trabalho realizado em isolamento térmico

Os processos em que se impõe isolamento térmico são denominados processos adiabáticos. Em um processo adiabático, como não há troca de calor com o exterior, devemos esperar que a temperatura do gás varie, quando sobre ele realiza-se trabalho, ou quando o gás realiza trabalho sobre o exterior.

No diagrama pV a curva de expansão de um gás submetido a condições adiabáticas deve seguir a equação ¹:

¹Por enquanto, deveremos aceitar esta dependência funcional, a qual será justificada posteriormente.

$$pV^\gamma = \text{const.}, \quad (8.8)$$

onde a constante γ representa a razão entre calores específicos, e é determinada experimentalmente para cada gás, sendo que os valores típicos variam na faixa de 1,1 a 1,8. A Figura (8.7) mostra que a curva corresponde a uma variação da pressão em função do volume para uma expansão adiabática ($p = \frac{\text{cte.}}{V^\gamma}$), juntamente com uma curva de expansão a temperatura constante partindo do mesmo ponto (V_i, p_i) inicial. Como podemos observar nessa figura, a curva correspondente à expansão adiabática tem valores sempre menores que a correspondente à expansão isotérmica que parte do mesmo ponto. Podemos agora, a partir da equação (8.8), calcular o trabalho correspondente a uma expansão adiabática:

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} p dV = - \int_{V_i}^{V_f} \frac{p_i V_i^\gamma}{V^\gamma} dV = -p_i V_i^\gamma \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V^\gamma} = -\frac{p_i V_i^\gamma}{\gamma - 1} (V_i^{1-\gamma} - V_f^{1-\gamma}) \quad (8.9)$$

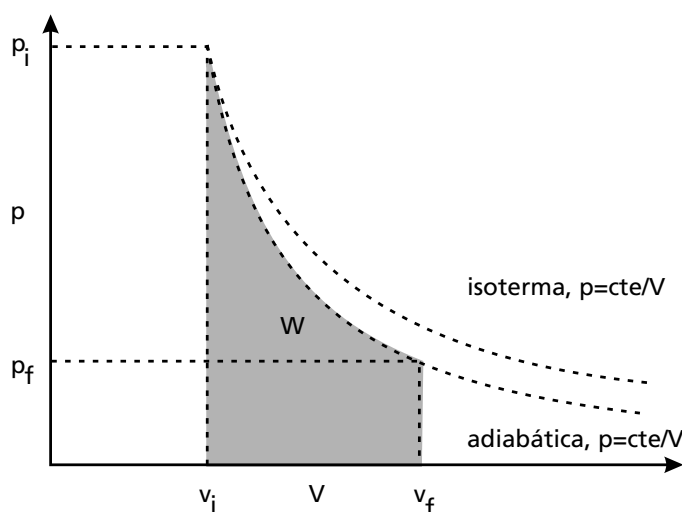


Figura 8.7: Expansão adiabática de um gás.

Trabalho e energia em um gás ideal

A força que um gás exerce sobre sua vizinhança, devido à sua pressão, não é conservativa. O trabalho de uma força conservativa não depende da trajetória seguida pelo sistema, enquanto o trabalho realizado nas transformações de um gás depende da trajetória. De fato, isto pode ser visto facilmente se analisarmos a transformação de um gás desde uma condição inicial com pressão p_i e volume V_i , até uma condição final com pressão p_f

e volume V_f . Considere que esta transformação seja feita por dois caminhos alternativos, conforme está representado no diagrama $p \times V$ da Figura 8.8. No caminho ABD , a pressão do gás é aumentada a volume constante desde p_i até p_f (isto pode ser feito aquecendo-se o gás a volume constante). Em seguida, é permitida a expansão do gás a pressão constante (igual a p_f) desde o volume V_i até o volume V_f . Uma vez que no trecho AB o volume permanece constante, temos $W_{AB} = 0$. Já no trecho BD , a pressão permanece constante, de modo que $W_{BD} = -p_f (V_f - V_i)$, de acordo com a Eq.(8.5). O trabalho total realizado será, então,

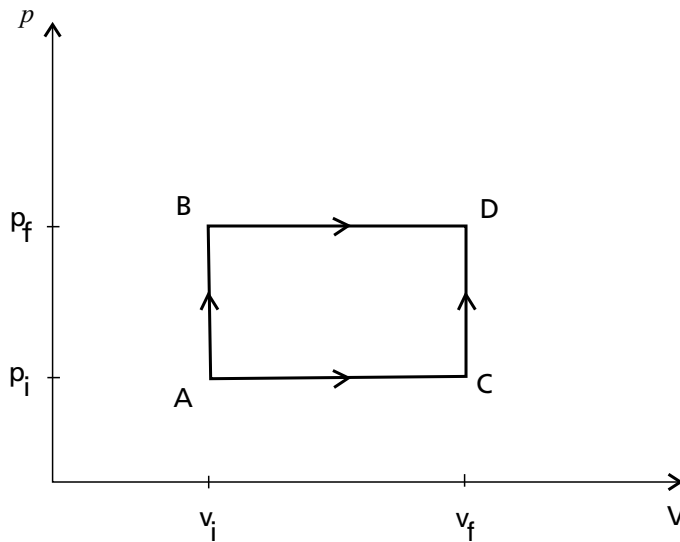


Figura 8.8: Diagrama pV : transformações realizadas por caminhos alternativos

$$W_{ABD} = W_{AB} + W_{BD} = -p_f (V_f - V_i). \quad (8.10)$$

Em contrapartida, seguindo o caminho ACD , temos primeiro uma expansão do gás de V_i até V_f a pressão constante (igual a p_i), e depois o aumento de pressão a volume constante desde p_i até p_f . Neste caso, $W_{AC} = -p_i (V_f - V_i)$ e $W_{CD} = 0$. Portanto, o trabalho total realizado será

$$W_{ACD} = W_{AC} + W_{CD} = -p_i (V_f - V_i). \quad (8.11)$$

Das Eqs.(8.10) e (8.11) fica claro que $W_{ABD} \neq W_{ACD}$. Porém, os estados inicial e final do gás são os mesmos em ambas as transformações realizadas. Isto demonstra nossa afirmação de que as forças exercidas pelo ou sobre o gás não são conservativas.

O trabalho de uma força conservativa depende apenas das condições inicial e final do sistema. Neste caso, podemos associar uma forma de energia à força conservativa, de modo que o trabalho realizado seja igual à diferença de energia no sistema entre os estados final e inicial. Na Mecânica Clássica, é desta maneira que definimos a energia potencial associada a uma força conservativa. A energia potencial é uma *energia de configuração*, isto é, ela depende das variáveis, ou coordenadas, que descrevem o *estado* de um sistema mecânico. Por exemplo, a energia potencial armazenada em uma mola de constante elástica k depende do deslocamento x da mola com relação à sua posição de equilíbrio:

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 . \quad (8.12)$$

Chegamos aqui a um ponto que requer uma reflexão acerca do trabalho e energia em um gás. Já dissemos na Aula 6 que as variáveis que descrevem o *estado* de um gás são p , V , T e N . Em outro ponto desta aula, mostramos que a energia interna de um gás ideal está relacionada com sua temperatura T . Isto significa que a energia interna é uma energia de configuração para um gás. De fato, voltando às transformações descritas no diagrama da Figura 8.8, a variação de energia interna do gás entre os estados inicial e final não depende do caminho seguido pelo gás entre estes dois estados. Por exemplo, supondo-se um gás monoatômico, teremos

$$\Delta E_{int}^{ABD} = \Delta E_{int}^{ACD} = \frac{3}{2} N k (T_f - T_i) , \quad (8.13)$$

onde k é a constante de Boltzmann e N é o número de moléculas no gás. Ou seja, ΔE_{int} depende apenas das temperaturas final (T_f) e inicial (T_i) do gás, e não da trajetória seguida. Portanto, o trabalho realizado pelo ou sobre o gás não pode explicar sozinho a variação de energia ocorrida. Neste caso, a formulação de uma lei de conservação requer a existência de outra forma de troca de energia entre o gás e o ambiente externo. Esta será a motivação principal da nossa próxima aula.

Resumo

Através da Teoria Cinética dos gases, estabelecemos a relação entre a energia interna de um gás (que é a energia de movimento de suas moléculas) e sua temperatura. Formulamos o teorema da equipartição da energia, que nos dá a energia interna por molécula como sendo $1/2 k T$ para cada termo quadrático na sua energia. Comentamos ainda que a energia interna depende

apenas das variáveis de estado do gás, sendo que para um gás ideal ela depende somente da temperatura.

Em seguida, discutimos o cálculo do trabalho realizado quando um gás sofre uma transformação em suas variáveis de estado. Vimos que o **módulo** do trabalho corresponde à área sob a curva que representa a trajetória descrita seguida pelo gás no diagrama $p \times V$. Sempre que o gás se expande, o trabalho realizado é negativo, significando que o gás realiza trabalho sobre o meio externo. Do contrário, quando o gás é comprimido, o trabalho é positivo, e o meio externo realiza trabalho sobre o gás. Alguns particulares como transformações a pressão constante, temperatura constante, ou em isolamento térmico foram considerados.

Finalmente, discutimos o caráter não conservativo das forças de interação entre o gás e as paredes do recipiente. Vimos que o trabalho realizado por um gás depende da trajetória seguida, e que, portanto, não pode explicar sozinho a variação de energia do gás. Assim, concluímos que deve haver outra forma de troca de energia entre o gás e o ambiente externo. Este será o objeto da próxima aula.

Exercícios

1. Calcule a energia cinética de rotação de 1 mol de O_2 a $30,0^\circ\text{C}$.
2. Um gás ideal sofre uma compressão adiabática a partir de $p_i = 100 \text{ kPa}$, $V_i = 5,0 \text{ m}^3$, $T_i = -30,0^\circ\text{C}$, até $p_f = 1.500 \text{ kPa}$, $V_f = 0,40 \text{ m}^3$.
 - (a) Calcule o valor de γ .
 - (b) Determine a temperatura final.
 - (c) Calcule o número de moles do gás.
 - (d) Calcule a energia cinética de translação total por mol antes e depois da compressão.
 - (e) Calcule a razão entre a velocidade média quadrática antes da compressão e a velocidade média quadrática depois da compressão.
3. Uma amostra de um gás ideal se expande desde $0,5$ até $2,5 \text{ m}^3$. Nesta expansão, a pressão do gás diminui de $30,0$ até $10,0 \text{ Pa}$. A expansão do gás pode ser feita por um dos três caminhos mostrados na Figura 8.9.

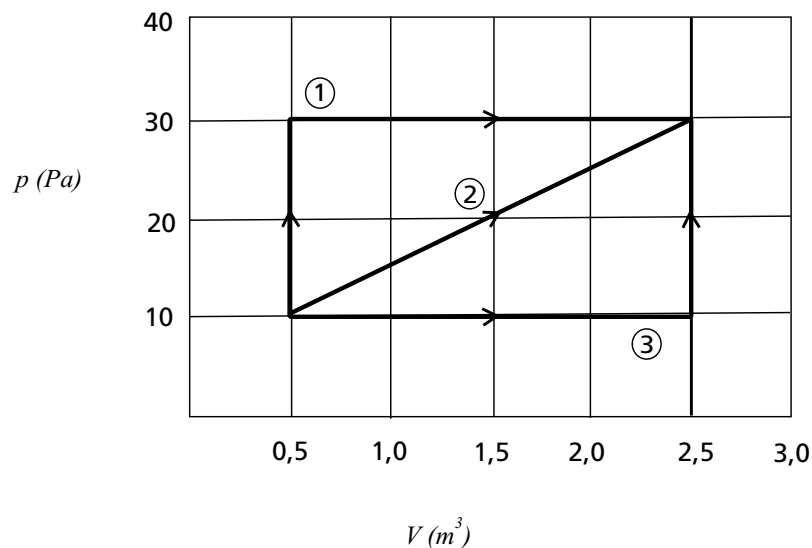


Figura 8.9: Diagrama $p \times V$ representando os três possíveis caminhos para a expansão do gás do exercício 3.

- (a) Calcule o trabalho realizado por cada um dos três caminhos considerados.
 - (b) Calcule a variação da energia interna do gás, sabendo-se que se trata de um gás monoatômico.
4. Calcule o trabalho realizado por um agente externo na compressão isotérmica de $1,25 \text{ mol}$ de oxigênio, a partir do volume de $25,2 \text{ l}$ e da pressão de $1,48 \text{ atm}$, até o volume de $14,2 \text{ l}$.
 5. Quatro litros de um gás ideal com $\gamma = 1,40$ encontra-se a uma temperatura de 300 K e pressão de $1,30 \text{ atm}$. Ele é comprimido adiabaticamente até a metade do seu volume original.
 - (a) Calcule a pressão final do gás.
 - (b) Calcule a temperatura final do gás.
 - (c) Calcule o trabalho realizado sobre o gás.

Aula 9 – Calor e transferência de energia

Objetivos

Ao final desta aula o aluno deverá ser capaz de:

- Compreender o conceito de calor e suas aplicações.
- Entender a definição de capacidade calorífica e calor específico.

Introdução

Na última aula discutimos o caráter não conservativo do trabalho realizado por um gás ideal. Como vimos, o trabalho realizado pelo gás numa transformação pode depender da trajetória seguida pelo sistema entre as condições inicial e final no diagrama $p \times V$. Uma vez que a variação de energia interna do gás não deve depender da trajetória, concluímos que o trabalho não pode explicar sozinho as trocas de energia entre o gás e o ambiente externo. Deste modo, concluímos também que deve existir outra forma de transferência de energia. Chamaremos *calor* a energia trocada entre um sistema termodinâmico qualquer (um gás, por exemplo) e sua vizinhança, como consequência da diferença de temperatura entre eles. Assim, a noção de calor surge vinculada à transferência de energia. Em outras palavras, calor é uma forma de **energia em trânsito**. Neste momento, é importante enfatizarmos a diferença entre calor e energia interna. Muitas vezes somos tentados a confundir estes conceitos e construir afirmativas **errôneas** do tipo *um corpo muito quente possui muito calor*. O calor não é uma característica intrínseca de um sistema. Não faz sentido falarmos do calor contido em um corpo. Calor é uma forma de troca de energia com o ambiente externo.

Tratando-se de uma forma de troca de energia, é natural que o calor seja expresso em unidades de energia. Assim sendo, no sistema internacional (SI) de unidades, utilizamos o joule (J). Contudo, historicamente, antes de ser estabelecida a relação entre calor e transferência de energia, já existiam outras unidades. Algumas delas são utilizadas atualmente, como *caloria* (*cal*) e *unidade térmica britânica* (*Btu*). Os fatores de conversão destas unidades para o joule são:

$$1 \text{ cal} = 4,186 \text{ J} \text{ e } 1 \text{ Btu} = 1.055 \text{ J}.$$

Em nosso metabolismo, a queima de açúcares produz energia química para o nosso corpo. Por isso, em Nutrição, muitas vezes expressamos a

quantidade de energia que pode ser fornecida por um determinado alimento. Para esta finalidade, utilizamos freqüentemente a quilocaloria (*Cal* ou *kcal*). Assim,

$$1 \text{ Cal} = 1.000 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}.$$

Já a unidade térmica britânica é freqüentemente adotada na especificação da capacidade de um aparelho condicionador de ar. Assim, um aparelho com capacidade de 7.500 Btu/h é capaz de transferir 7.500 Btu ou $7,9125 \times 10^6 \text{ J}$ de energia para fora do ambiente durante o tempo de 1 h .

Infelizmente, a capacidade de um aparelho condicionador de ar é popularmente expressa em *Btu*, o que é **incorreto**. A capacidade de um aparelho está ligada à energia transferida por unidade de tempo. Portanto, a unidade correta é o *Btu/h* ou ainda o *J/h*.

Historicamente, a relação entre calor e energia mecânica foi estabelecida por James Joule em 1850. Este físico inglês obteve um equivalente mecânico do calor através de um experimento engenhoso esquematizado na Figura 9.1. A queda de dois objetos de massa m foi utilizada para movimentar um conjunto de pás imersas num recipiente com água. A agitação da água provocava o seu aquecimento, e a definição original da *caloria* era a quantidade de calor necessária para aumentar a temperatura de 1 g de água, de $14,5^\circ\text{C}$ para $15,5^\circ\text{C}$. Assim sendo, Joule mediu a variação de temperatura da água para obter a quantidade de calorias equivalente ao trabalho mecânico $W = 2 m g h$ realizado pela queda dos pesos de uma altura h . Desde 1948 o Joule foi adotado como a unidade do sistema internacional (SI) para calor. Desse modo, usamos para o calor a mesma unidade utilizada para expressarmos trabalho e energia.

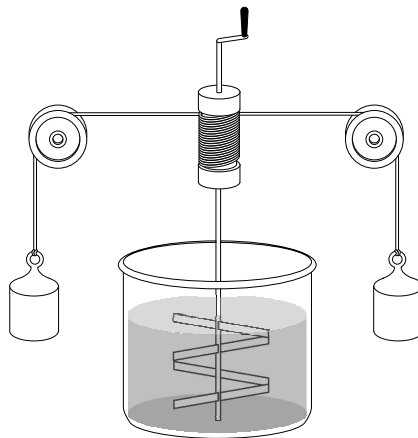


Figura 9.1: Esquema do experimento de Joule.

Capacidade calorífica e calor específico

Quando transferimos energia, na forma de calor, a um corpo, algumas das propriedades macroscópicas deste corpo podem mudar. Quando pensamos nos efeitos da transferência de calor a um corpo, a primeira coisa que vem à cabeça é que o corpo esquentará, ou seja, aumentará a sua temperatura. Ao receber uma quantidade Q de calor, a variação de temperatura ΔT sofrida por um corpo dependerá de como evoluem outras características do sistema, durante a transferência. Um exemplo deste fato é uma certa quantidade de gás dentro de um cilindro, o qual é fechado por um pistão móvel. A variação de temperatura assumirá valores diferentes se o pistão estiver fixo, ou se este estiver livre e sobre ele apoiar-se um peso constante.

Levando-se sempre em conta as condições a que está submetido um corpo, podemos caracterizar seu comportamento em face da transferência de energia na forma de calor, definindo a grandeza chamada *capacidade calorífica*, C' , a razão entre o calor Q e a variação de temperatura ΔT :

$$C' = \frac{Q}{\Delta T}, \quad (9.1)$$

O conhecimento da capacidade calorífica de um corpo permite, por exemplo, saber qual a quantidade de calor Q que se deverá dar a este corpo, para variar a sua temperatura de ΔT . Mas devemos observar que, em geral, a capacidade calorífica de um corpo varia com a temperatura, devendo-se considerar os valores de C' obtidos através da Equação (9.1) como um valor médio para uma determinada faixa de temperatura. Podemos definir valores da capacidade calorífica para uma dada temperatura, no limite em que $\Delta T \rightarrow 0$.

A capacidade calorífica serve apenas para estudar um determinado corpo. Para descrever o comportamento de uma substância em face da transferência de calor, é necessário definir a *capacidade calorífica específica* ou o *calor específico* c ou seja, a capacidade calorífica por unidade de massa de um corpo constituído por uma determinada substância:

$$c = \frac{C'}{m} = \frac{Q}{m\Delta T}, \quad (9.2)$$

onde m é a massa do corpo. As mesmas observações feitas para C' com respeito à variação em função da temperatura valem para o calor específico c .

Se conhecemos a massa m de um corpo, e o calor específico c da substância que o constitui, podemos calcular a quantidade de calor necessária

para elevar sua temperatura, de um valor inicial T_i a um valor final T_f . Basta dividir o intervalo de temperatura em N intervalos ΔT_n , e realizar a soma:

$$Q = \sum_{n=1}^N mc_n \Delta T_n . \quad (9.3)$$

Fazendo-se $\Delta T_n \rightarrow 0$ (limite infinitesimal), obtemos:

$$Q = m \int_{T_i}^{T_f} c \, dT , \quad (9.4)$$

onde c pode variar com a temperatura, ou seja, $c = c(T)$. No caso do calor específico da substância variar pouco no intervalo de temperatura considerado (como a água, cujo calor específico varia menos de 1% no intervalo de temperatura de 0 a 100°C), o calor necessário para aquecer o corpo de T_i a T_f pode ser descrito de forma mais simples:

$$Q = mc(T_f - T_i) . \quad (9.5)$$

É importante ressaltar que, complementarmente à utilização da Equação (9.2) para a definição do calor específico, deve-se especificar em que condições foi obtida a variação da temperatura. Uma condição muito utilizada na determinação de calores específicos é a pressão atmosférica (pressão constante), enquanto se transmite calor ao corpo. Além de calor específico à pressão constante, designado por c_p , podemos definir outras condições, como, por exemplo, volume constante. Em geral, calores específicos obtidos em diferentes condições têm valores diferentes.

Na Tabela 9.1 estão mostrados os calores específicos de diversas substâncias determinados à pressão constante.

Substância	Capacidade Calorífica ($J/kg.K$)	Capacidade Calorífica Específica ($J/mol.K$)
<i>Substâncias Sólidas Puras</i>		
Chumbo	129	26,7
Tungstênio	135	24,8
Prata	236	25,5
Cobre	387	24,6
Carbono	502	6,02
Alumínio	900	24,3
<i>Outros Sólidos</i>		
Latão	380	
Granito	790	
Vidro	840	
Gelo ($-10^{\circ}C$)	2220	
<i>Líquidos</i>		
Mercúrio	139	
Álcool etílico	2430	
Água do mar	3900	
Água	4190	

Tabela 9.1: Capacidades caloríficas de algumas substâncias.

Calores de Transformação

Quando adicionamos calor a um corpo, nem sempre a temperatura deste varia. Quando uma amostra de uma substância muda de *estado* ou de *fase*, ela permanece à temperatura na qual ocorre a transformação, até que a mesma se processe por completo. Uma panela de água em ebulição, por exemplo, a pressão de 1 *atm*, permanecerá à temperatura de $100^{\circ}C$, até que toda a água contida na panela se transforme em vapor d'água. O mesmo tipo de comportamento ocorre em outros processos, como condensação de vapor d'água, congelamento de água e fusão de gelo.

Chamamos *calor de transformação* ou *calor latente*, representado por L , a quantidade de calor por unidade de massa necessária para realizar o processo de mudança de fase. O calor transferido em uma mudança de fase é então dado por:

$$Q = Lm, \quad (9.6)$$

onde m é a massa da amostra de substância que muda de fase. Os calores latentes em processos de vaporização e fusão são chamados, respectivamente, *calor de vaporização* e *calor de fusão*. Os calores de vaporização e fusão de algumas substâncias estão mostrados na Tabela 9.2.

Substância	Ponto de Fusão (K)	Calor de Fusão (kJ/kg)	Ponto de Ebulição (K)	Calor de Vaporização (kJ/kg)
Hidrogênio	14,0	58,6	20,3	452
Oxigênio	54,8	13,8	90,2	213
Mercúrio	234	11,3	630	296
Água	273	333	373	2256
Chumbo	601	24,7	2013	858
Prata	1235	105	2485	2336
Cobre	1356	205	2840	4730

Tabela 9.2: Calores de transformação de algumas substâncias.

Exemplo 1

Um professor de Física, pai de uma criança recém-nascida, precisa preparar água para o banho de seu filho à uma temperatura de 38°C . Ele dispõe, para o banho, de $10,0\ell$ de água a 60°C . Que quantidade de gelo a 0°C ele precisa adicionar à água quente para obter a temperatura adequada?

Solução:

Para reduzir a temperatura de 10ℓ ($\sim 10\text{kg}$) de 60°C a 37°C será necessário adicionar a quantidade de calor igual a:

$$Q = mc\Delta T = 10\text{ kg} \times 4190\text{ J/kgK} \times (38 - 60)^{\circ}\text{C} = -921.8\text{ kJ},$$

mas esta quantidade de calor deverá ser cedida pelo gelo, e corresponderá ao calor latente necessário para fundi-lo, mais o calor necessário para elevar a

temperatura do gelo fundido, de 0°C a 38°C , ou seja:

$$Q = mL + mc\Delta T = m \times 333 \text{ kJ/kg} + m \times 4,19 \text{ kJ/kgK} \times 38^{\circ}\text{C} = m \times 492,2 \text{ kJ/kg}.$$

Portanto, temos:

$$m = \frac{921,8}{492,2} \text{ kg} \simeq 1,9 \text{ kg},$$

ou seja, será necessário adicionar 1,9kg de gelo à água quente.

Capacidades caloríficas dos sólidos

Analisando a Tabela 9.1, podemos constatar que os calores específicos das substâncias sólidas variam largamente. Mas podemos, em vez da capacidade calorífica específica, ou do calor específico, analisar a *capacidade calorífica molar*, ou capacidade calorífica por mol da substância, que é definida por:

$$C = \frac{C'}{n} = \frac{Q}{n \Delta T}, \quad (9.7)$$

onde n é o número de moles da amostra da substância que tem capacidade calorífica C' .

A Tabela 9.1 mostra, para as substâncias sólidas, além do calor específico, a capacidade calorífica molar. Analisando os dados desta tabela, podemos concluir que, à exceção do cobre, os valores de C são bastante próximos de 25 J/molK . Como se trata de substâncias puras, os números analisados traduzem-se na capacidade calorífica por átomo de substância, o que se constitui em uma confirmação da constituição atômica da matéria.

A Figura 9.2 mostra a capacidade calorífica molar em função da temperatura para o chumbo, o alumínio e o carbono. Devemos observar que quando T tende a zero, o valor de C também tende a zero para os três elementos. Por outro lado, quando a temperatura tende para valores altos, à exceção do carbono, a capacidade calorífica molar aproxima-se do valor de Dulong-Petit. Em contrapartida, a variação de C em função da temperatura é bastante diferente para os três elementos. Pode-se especular que o fato de o carbono não apresentar o valor de Dulong-Petit para a capacidade calorífica a altas temperaturas é devido à variação mais lenta de seu valor de C em função da temperatura comparativamente a do alumínio, a qual por sua vez, é mais lenta do que a do chumbo.

Dulong e Petit, em 1819, foram os primeiros a constatar a invariância da capacidade calorífica molar das substâncias sólidas elementares.

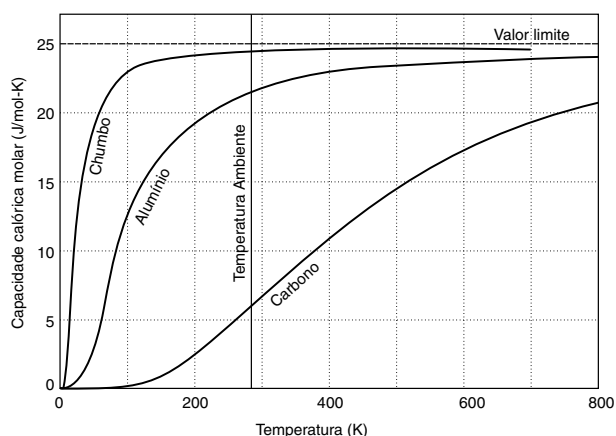


Figura 9.2: Variação da capacidade calorífica molar em função da temperatura para chumbo, alumínio e carbono.

A Figura 9.3 mostra que, de fato, esta especulação deve corresponder à realidade. Esta figura mostra a variação da capacidade calorífica molar, em função da temperatura, para vários sólidos. Este gráfico foi preparado usando o artifício de adotar escalas diferenciadas de temperatura para cada sólido, de modo a tentar fazer coincidir as curvas de C em função de T . Por isso, a abscissa do gráfico é apresentada como $\frac{T}{T_D}$, onde T_D (conhecido como *temperatura de Debye*) é o fator de escala.

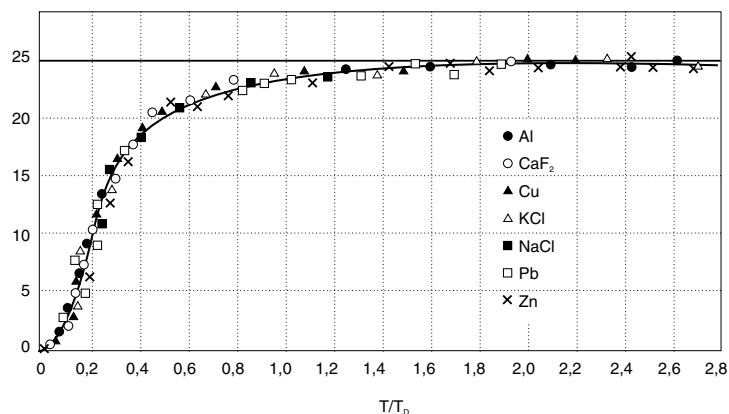


Figura 9.3: Variação da capacidade calorífica molar de diversas substâncias sólidas, em função da temperatura reduzida $\frac{T}{T_D}$.

A Figura 9.3 evidencia então, um comportamento universal para os sólidos elementares. Este comportamento pode ser entendido levando-se em consideração o modelo de sólidos apresentado na Aula 5 deste curso: os átomos de um sólido vistos como massas interligadas umas às outras, por

meio de molas. Uma vez que, num sólido, o movimento dos átomos está restrito à oscilação em torno do ponto de equilíbrio, podemos admitir, se supusermos que não se realiza trabalho sobre o sólido, que a única contribuição a ser levada em conta em sua energia interna é a relativa à vibração. Utilizando o *Teorema da Equipartição da Energia*, também apresentado na Aula 5, podemos calcular a energia interna de um sólido elementar. Cada átomo do sólido pode vibrar em três direções (x, y, z). Como o movimento vibratório contribui para a energia com dois termos quadráticos (energia cinética e energia potencial), podemos concluir que a energia interna molar de um sólido pode ser escrita como:

$$E_{int} = 2 \times 3 \times N_A \times \left(\frac{1}{2}kT\right) = 3RT. \quad (9.8)$$

Como não estamos realizando trabalho sobre o sólido, para elevarmos sua temperatura de ΔT será necessário fornecer um fluxo de calor por mol ($\frac{Q}{n}$) igual a $3R\Delta T$. A capacidade calorífica molar a **volume constante** será então dada por:

$$C_V = \frac{Q}{n} \frac{1}{\Delta T} = 3R = 24,9 J/molK, \quad (9.9)$$

valor que é extremamente próximo ao de Dulong-Petit.

Lembre que não se está realizando trabalho sobre o sólido. Portanto, seu volume permanece constante.

Capacidades caloríficas de um gás ideal

A capacidade calorífica de um gás ideal depende do tipo de transformação sofrida por ele. Por exemplo, se o recipiente que contém o gás possuir paredes diatérmicas rígidas, o gás troca calor com o ambiente externo, mantendo seu volume constante. Porém, a pressão do gás deve variar de acordo com a sua equação de estado. A capacidade calorífica do gás nestas condições é dita *capacidade calorífica a volume constante*. Em contrapartida, se o recipiente contendo o gás possuir paredes diatérmicas móveis, mas a pressão do gás for mantida constante durante as trocas de calor com o ambiente externo, temos a *capacidade calorífica à pressão constante*. Veremos a seguir como estas capacidades caloríficas podem ser facilmente calculadas a partir dos resultados da Teoria Cinética.

Capacidade calorífica a volume constante

Considere a situação ilustrada na Figura 9.4. Um gás ideal é colocado no interior de um recipiente cilíndrico com um êmbolo móvel. Suponha que um calor Q seja cedido ao gás. A energia transferida ao gás pode ser armazenada na forma de energia cinética de suas moléculas, variando, portanto, a energia interna E_{int} do gás, ou ser utilizada para a realização de trabalho sobre o êmbolo móvel.

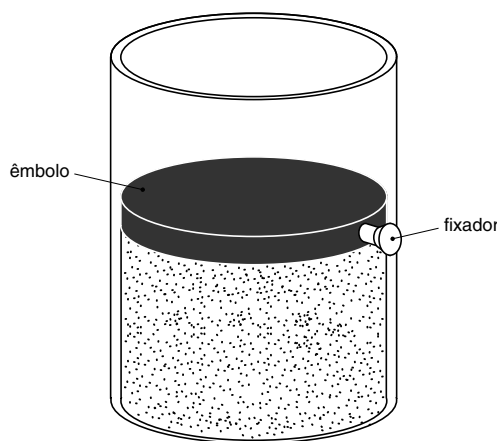


Figura 9.4: Recipiente cilíndrico com um êmbolo móvel, que pode ser fixado quando quisermos manter o volume constante.

Se o êmbolo for fixado, o volume do gás permanecerá constante, de maneira que $W = 0$, e a energia transferida ao gás será armazenada na forma de energia cinética de suas moléculas. Ou seja, o calor irá se transformar em energia interna do gás, causando a variação:

$$\Delta E_{int} = Q. \quad (9.10)$$

Assim sendo, a capacidade calorífica *molar* a volume constante, simbolizada por C_V , é dada por:

$$C_V = \frac{Q}{n \Delta T} = \frac{\Delta E_{int}}{n \Delta T}, \quad (9.11)$$

onde n é o número de moles do gás. Ou seja, C_V representa a energia necessária para elevarmos de 1 K a temperatura de 1 mol de gás, a volume constante.

De acordo com a Teoria Cinética dos gases, a temperatura e a energia interna de um gás ideal estão diretamente relacionados. Portanto, ao variarmos a energia interna de um gás, variamos também a sua temperatura.

Por exemplo, de acordo com a Equação(1) da Aula 8, temos

$$\Delta E_{int} = \frac{3}{2} n R \Delta T, \quad (9.12)$$

para um gás monoatômico. Assim sendo, a capacidade calorífica molar a volume constante de um gás monoatômico é:

$$C_V = \frac{3}{2} R = 12,5 \text{ J/mol} \cdot K \quad (\text{gás monoatômico}). \quad (9.13)$$

Para gases diatômicos e poliatômicos temos:

$$C_V = \frac{5}{2} R = 20,8 \text{ J/mol} \cdot K \quad (\text{gás diatômico}), \quad (9.14)$$

$$C_V = 3 R = 24,1 \text{ J/mol} \cdot K \quad (\text{gás poliatômico}). \quad (9.15)$$

Capacidade calorífica à pressão constante

Suponhamos que o gás do recipiente da Figura 9.4 sofra uma transformação à pressão constante. Por exemplo, se liberarmos o êmbolo do recipiente, e aplicarmos sobre ele uma força constante, a pressão do gás irá permanecer constante. Neste caso, de acordo com a equação de estado do gás ideal, qualquer transformação no gás envolverá uma variação de temperatura e volume. Assim sendo, considere que a temperatura do gás varie de T a $T + \Delta T$, enquanto sua pressão é constante e igual a p_0 . Na Figura 9.5 este processo está representado pelo segmento de reta ab . Além disso, representamos, ainda, as isotermas associadas às temperaturas inicial e final da transformação. Queremos calcular o calor Q recebido pelo gás do ambiente externo nesta transformação e obtermos a capacidade calorífica molar à pressão constante, C_p , dada por:

$$C_p = \frac{Q}{n \Delta T}. \quad (9.16)$$

Porém, note que, neste caso, o cálculo do calor não é tão simples quanto o do caso anterior (a volume constante), pois há duas contribuições para a variação da energia interna do gás. Uma é o calor recebido Q , e a outra é o trabalho W sobre o gás, ou seja,

$$\Delta E_{int} = Q + W. \quad (9.17)$$

De acordo com as convenções que adotamos, tanto Q como W serão positivos caso contribuam para o aumento da energia interna do gás, e negativos

em caso contrário. Para calcularmos C_p , precisamos obter Q em função de ΔT . Isto pode ser facilmente alcançado obtendo-se primeiro ΔE_{int} e W em função de ΔT , e depois substituindo-se estes resultados na Equação(9.17).

O trabalho realizado a pressão constante, conforme vimos na Aula 8, é simplesmente:

$$W = -p \Delta V = -n R \Delta T, \quad (9.18)$$

onde a segunda igualdade segue diretamente da equação de estado do gás ideal. A Equação(9.18) fornece, assim, a relação desejada entre W e ΔT . Resta ainda obtermos ΔE_{int} em termos de ΔT . Para tal, vamos considerar um processo hipotético a volume constante representado pelo segmento ac na Figura 9.5. Neste caso, temos, de acordo com a Equação(9.11), que

$$\Delta E_{int}^{ac} = n C_V \Delta T. \quad (9.19)$$

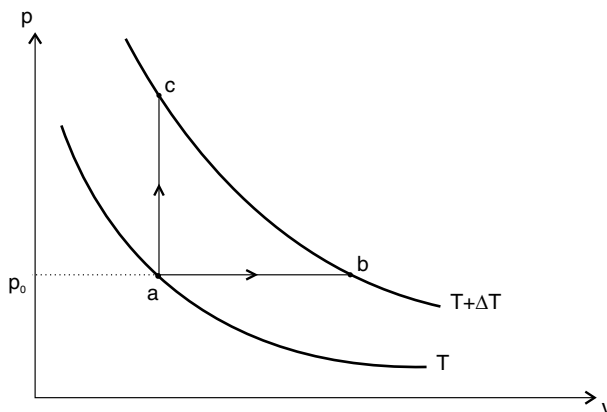


Figura 9.5: Diagrama $p \times V$ representando as transformações a volume constante e à pressão constante entre as isothermas T e $T + \Delta T$.

Contudo, note que a variação de energia interna do gás depende apenas da variação de temperatura, e não do caminho percorrido no diagrama $p \times V$. Como tanto o processo ab quanto o ac envolvem a mesma variação de temperatura ΔT , ambos os processos produzem a mesma variação de energia interna do gás, ou seja,

$$\Delta E_{int}^{ab} = \Delta E_{int}^{ac} = n C_V \Delta T. \quad (9.20)$$

Finalmente, substituindo as Equações (9.18) e (9.20) na Equação (9.17), obtemos

$$n C_V \Delta T = n C_p \Delta T - n R \Delta T ,$$

ou

$$C_p = C_V + R . \quad (9.21)$$

Portanto, o valor de C_p é obtido imediatamente a partir do valor de C_V :

$$C_p = \frac{5}{2} R = 20,8 \text{ J/mol} \cdot K \quad (\text{gás monoatômico}), \quad (9.22)$$

$$C_p = \frac{7}{2} R = 29,1 \text{ J/mol} \cdot K \quad (\text{gás diatômico}), \quad (9.23)$$

$$C_V = 4 R = 33,3 \text{ J/mol} \cdot K \quad (\text{gás poliatômico}). \quad (9.24)$$

O calor específico se relaciona com a capacidade calorífica molar através de $c = C/M$ onde M é a massa molar da substância. Assim, podemos também definir os calores específicos, a volume constante e à pressão constante, de um gás como sendo

$$c_V = \frac{C_V}{M} \quad \text{e} \quad c_p = \frac{C_p}{M} . \quad (9.25)$$

Na Tabela 9.3 listamos as capacidades caloríficas molares de alguns gases juntamente com os valores dos gases ideais correspondentes.

Gás	C_p ($J/mol \cdot K$)	C_V ($J/mol \cdot K$)	$C_p - C_V$ ($J/mol \cdot K$)
Ideal Monoatômico	20,8	12,5	8,3
He	20,8	12,5	8,3
Ar	20,8	12,5	8,3
Ideal diatômico	29,1	20,8	8,3
H ₂	28,8	20,4	8,4
N ₂	29,1	20,8	8,3
O ₂	29,4	21,1	8,3
Ideal poliatômico	33,3	24,9	8,3
CO ₂	37,0	28,5	8,5
NH ₃	36,8	27,8	9,0

Tabela 9.3: Capacidades caloríficas molares de alguns gases.

Exemplo 2

A massa de um átomo de hélio é $6,66 \times 10^{-27} \text{ kg}$. Calcule o calor específico a volume constante c_V para o hélio gasoso em $J/kg \cdot K$ a partir da capacidade calorífica molar a volume constante C_V .

Solução:

O hélio é um gás nobre e, portanto, monoatômico. Em um mol de hélio temos $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ átomos; portanto, sua massa molar é

$$M_{He} = 6,02 \times 10^{23} \times 6,66 \times 10^{-27} \text{ kg/mol} = 4,01 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}.$$

Assim sendo, seu calor específico a volume constante é

$$c_V = \frac{\frac{3}{2} R}{M_{He}} = 3,12 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot K.$$

O calor específico à pressão constante também é facilmente obtido de

$$c_p = \frac{\frac{5}{2} R}{M_{He}} = 5,19 \times 10^3 \text{ J/kg} \cdot K.$$

Exemplo 3

Quanto calor devemos ceder a $1,50 \text{ moles}$ de oxigênio (O_2) para dobrar o seu volume à pressão constante, partindo de uma temperatura inicial de 280 K ?

Solução:

Uma vez que a expansão do gás ocorrerá à pressão constante, devemos dobrar sua temperatura para que ele atinja o dobro do volume inicial. De fato, utilizando a equação de estado do gás ideal na condição inicial:

$$p_1 V_1 = n R T_1 , \quad (9.26)$$

e na condição final:

$$2 p_1 V_1 = n R T_2 , \quad (9.27)$$

e dividindo a Equação (9.26) pela (9.27) obtemos facilmente:

$$T_2 = 2 T_1 = 560 \text{ K}. \quad (9.28)$$

Logo, a variação de temperatura do gás é $\Delta T = 280 \text{ K}$. Uma vez que o gás se expande à pressão constante, podemos calcular o calor Q recebido por ele como sendo

$$\begin{aligned} Q &= n C_p \Delta T = \frac{7}{2} n R \Delta T \\ &= 3,5 \times 1,50 \text{ moles} \times 8,31 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K}) \times 280 \text{ K} = 1,22 \times 10^4 \text{ J}, \end{aligned}$$

onde utilizamos a capacidade calorífica molar de um gás diatômico.

Resumo

Nesta aula, foi introduzido o conceito de calor como energia transferida entre dois sistemas em consequência da diferença de temperatura entre eles. Estabelecemos a equivalência entre calor e trabalho mecânico mencionando a célebre experiência de Joule. Definimos ainda grandezas como a capacidade calorífica e o calor específico, que são medidas da energia necessária para alterar-se a temperatura de um sistema. Aplicamos esses conceitos a um gás ideal e calculamos sua capacidade calorífica quando este sofre dois tipos básicos de transformações: a volume constante e à pressão constante. Vimos que as duas capacidades caloríficas se relacionam de forma bastante simples através de $C_p = C_V + R$.

Exercícios

- 1) Um pedaço de alumínio, com massa igual a $100g$, é aquecido à temperatura de $90^{\circ}C$, após o que é colocado em contato com $100ml$ de água a $20^{\circ}C$, dentro de um recipiente termicamente isolado. Calcule o calor trocado no processo, e determine a temperatura final atingida.
- 2) Que massa de vapor d'água a $100^{\circ}C$ precisa ser misturada a $2kg$ de gelo, à temperatura de $0^{\circ}C$ em um vaso termicamente isolado, para que o líquido resultante tenha a temperatura de $45^{\circ}C$?
- 3) Uma amostra de $5,32\text{ moles}$ de um gás ideal diatômico é aquecido de $54,6\text{ K}$ a pressão constante.
 - a) Calcule o calor Q recebido pelo gás.
 - b) Calcule a variação da energia cinética de **rotação** do gás.
- 4) Vinte gramas de nitrogênio (N_2) são aquecidos de $30^{\circ}C$ a $180^{\circ}C$, no interior de um recipiente com paredes rígidas.
 - a) Calcule o número de moles de N_2 no recipiente.
 - b) Calcule o calor recebido pelo gás.
 - c) Calcule a variação de energia interna do gás.
- 5) Um recipiente de volume $V = 100\text{ l}$ está preenchido com um certo gás diatômico, e possui um pequeno furo que permite a troca de gás com o exterior. O gás do recipiente é aquecido desde uma temperatura inicial $T_i = 10^{\circ}C$ à temperatura final $T_f = 30^{\circ}C$, mantendo-se a pressão constante $p_0 = 1,0\text{ atm}$.
 - a) Calcule a variação, em número de moles, da quantidade de gás no recipiente.
 - b) Calcule a variação de energia interna do gás no recipiente.

Aula 10 – A Primeira Lei da Termodinâmica

Objetivos

Ao final desta aula, o aluno deverá ser capaz de:

- Descrever a Primeira Lei da Termodinâmica e aplicá-la.
- Entender o fenômeno da transmissão de calor.

Introdução

Na Aula 9, tratamos o conceito de calor como uma forma de transferência de energia entre dois sistemas, em consequência da diferença de temperatura entre eles. Assim sendo, podemos atribuir a troca de energia entre um sistema termodinâmico e suas vizinhanças a dois mecanismos básicos: realização de trabalho (W) e troca de calor (Q). Portanto, é natural que a formulação de uma lei de conservação da energia para um sistema termodinâmico contemple estes dois mecanismos.

No caso de um gás, uma questão conceitual importante surge ao considerarmos diferentes trajetórias no diagrama $p \times V$. Já comentamos anteriormente que o trabalho realizado sobre ou pelo gás, quando este sofre uma transformação entre os pontos (p_i, V_i) e (p_f, V_f) , depende da trajetória seguida entre estes dois pontos. Contudo, sabemos também que a energia interna do gás depende apenas da sua temperatura; portanto, a variação de energia independe da trajetória. Uma vez que esta variação de energia decorre da realização de trabalho e da troca de calor, esta última também deverá depender da trajetória seguida no diagrama $p \times V$. Apesar de dependerem da trajetória, as grandezas Q e W devem se combinar para fornecer uma grandeza independente da trajetória seguida pelo sistema: a variação de energia interna. Este será o objeto principal da aula de hoje. A formulação de uma lei de conservação da energia para um sistema termodinâmico e suas aplicações nos levarão a resultados de importância histórica acerca do funcionamento das máquinas térmicas.

Nesta aula, discutiremos ainda os mecanismos de transmissão de calor.

A Primeira Lei da Termodinâmica

A nossa discussão da Primeira Lei da Termodinâmica será iniciada considerando processos baseados em gases ideais. Vimos, na Aula 6, que a energia interna de um gás ideal só depende de sua temperatura. Por outro lado, na Aula 8, constatamos que o trabalho realizado sobre (ou pelo) sistema, entre dois pontos do diagrama $p \times V$, depende da trajetória seguida pelo processo no plano $p - V$. O leitor pode retornar à seção Trabalho e energia em um gás ideal da Aula 8, e constatar de novo que os trabalhos realizados são diferentes, quando se percorre os caminhos ABD e ACD mostrados na Figura 8.8.

Se admitirmos que a conservação da energia também é satisfeita por sistemas termodinâmicos, e lembrarmos que a variação da energia interna do sistema só depende de seus estados inicial e final (para um gás ideal é o mesmo que depender apenas da variação da temperatura), concluiremos que o referido sistema deverá trocar quantidades diferentes de calor com a vizinhança ao percorrer os caminhos alternativos citados, de modo a manter constante a variação da energia interna do sistema. Esta conclusão é melhor expressa pela equação:

$$W_{ABD} + Q_{ABD} = W_{ACD} + Q_{ACD} = E_D - E_A = \Delta E_{int} , \quad (10.1)$$

onde W e Q são, respectivamente, o trabalho realizado sobre o sistema e o calor trocado, quando o sistema percorre cada trajetória no plano $p - V$. Dizendo de outra forma, devemos considerar que a variação da energia interna de um gás ideal deve se igualar à soma do trabalho realizado e do calor trocado durante a realização de um determinado processo. Um outro aspecto a observar na discussão deste exemplo é que, em um processo cíclico, a soma $Q + W$ do calor e do trabalho será nula, uma vez que os estados inicial e final são os mesmos, ou seja, não há variação da energia interna do gás.

A discussão que fizemos agora foi baseada em um gás ideal. Outros sistemas termodinâmicos têm comportamentos diferentes dos de um gás ideal, suas variáveis de estado e a maneira de calcular o trabalho podem ser também diferentes das do gás ideal. Mesmo assim, devemos considerar que a Equação (10.1) tem validade para qualquer sistema termodinâmico. Ou seja, em primeiro lugar, devemos considerar que a troca de energia entre qualquer sistema termodinâmico e sua vizinhança se dá através da realização de trabalho, e da troca de calor. Em segundo lugar, devemos admitir que a energia total (sistema + vizinhança) se conserva, como postula a Primeira

Lei da Termodinâmica:

$$\Delta E_{int} = Q + W , \quad (10.2)$$

isto é, **a variação da energia interna de um sistema termodinâmico é igual à soma de todo o calor trocado com a vizinhança, com todo o trabalho realizado pela vizinhança sobre este sistema.** Deve-se compreender que esta lei se refere a um sistema inicialmente em equilíbrio, com energia interna E_i , que recebe a quantidade de calor Q e o trabalho W , fazendo-o evoluir para um novo estado de equilíbrio com energia interna E_f , sendo $\Delta E_{int} = E_f - E_i$.

Em geral, como discutimos para os gases ideais, o trabalho realizado sobre o sistema se refere ao movimento das paredes que definem a fronteira entre o sistema e sua vizinhança, como, por exemplo, o movimento de um pistão dentro de um cilindro de gás. Mas outras formas de trabalho também podem ser consideradas, como o trabalho realizado por campos elétricos ou magnéticos.

A Primeira Lei da Termodinâmica também pode ser expressa em sua forma diferencial:

$$dE_{int} = dQ + dW . \quad (10.3)$$

Como o calor Q e o trabalho W não representam variáveis de estado, as diferenciais dQ e dW devem ser entendidas como quantidades muito pequenas, infinitesimais, de calor e trabalho. Ela estabelece o Princípio da Conservação da energia em processos termodinâmicos, mas não fornece uma descrição completa dos mesmos, pois não discrimina quais desses processos são fisicamente aceitáveis. A Primeira Lei será complementada pela Segunda Lei, que trata da reversibilidade dos processos termodinâmicos e será discutida nas próximas aulas.

Aplicações da Primeira Lei

Para possibilitar a você uma ambientação melhor no uso da Primeira Lei da Termodinâmica, a seguir serão mostrados alguns exemplos de aplicações desta lei em processos termodinâmicos. Começaremos pela dedução da dependência entre $p - V$ ($pV^\gamma = \text{constante}$) em processos adiabáticos, a qual foi utilizada sem demonstração na Aula 8.

Processos adiabáticos

No caso de um gás isolado do exterior por paredes isolantes, iremos utilizar a Primeira Lei para determinar a relação entre a pressão p e o volume V do gás. Neste caso, o sistema está termicamente isolado de seu exterior, não havendo transferência de calor ($Q = 0$). Portanto, a Primeira Lei será escrita na forma:

$$dE_{int} = W , \quad (10.4)$$

ou seja, apenas o trabalho realizado sobre o sistema contribui para a variação da energia interna do gás.

Como a energia interna de um gás ideal depende apenas da temperatura, podemos utilizar, para expressar dE_{int} , o calor específico a volume constante C_V :

$$\Delta E_{int} = n C_V dT . \quad (10.5)$$

Como $dW = -p dV$ podemos escrever, relacionando as Equações (10.4) e (10.5):

$$p dV = -n C_V dT . \quad (10.6)$$

Podemos, de modo a tentar obter uma expressão para $V dp$, escrever a equação de estado do gás na forma diferencial:

$$d(pv) = d(nRT) , \quad (10.7)$$

ou seja,

$$p dV + V dp = n R dT . \quad (10.8)$$

Substituindo a Equação (10.6) na Equação (10.8), e rearranjando os membros da equação resultante teremos:

$$V dp = n C_V dT + n R dT = n (C_V + R) dT . \quad (10.9)$$

Lembrando a relação entre C_p e C_V ($C_p = C_V + R$) determinada na Aula 9, temos:

$$V dp = n C_p dT . \quad (10.10)$$

É importante ressaltar que não utilizamos a Equação (10.5) por estarmos tratando de um processo a volume constante. (Podemos utilizá-la devido ao fato da energia interna de um gás ideal depender apenas da temperatura.)

A necessidade de obter-se uma expressão para $V dp$ em função de dT ficará clara ao fim da presente discussão.

Finalmente, dividindo a Equação (10.10) pela Equação (10.6), temos:

$$\frac{V dp}{p dV} = -\frac{n C_p dT}{n C_V dT} = -\frac{C_p}{C_V} = -\gamma, \quad (10.11)$$

equação que pode ser rearranjada, de modo a se obter:

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}. \quad (10.12)$$

Integrando a Equação (10.12) entre os estados inicial e final, temos:

$$\begin{aligned} \int_i^f \frac{dp}{p} &= -\gamma \int_i^f \frac{dV}{V} \\ \ln \frac{p_f}{p_i} &= \gamma \ln \frac{V_i}{V_f}, \text{ ou seja,} \\ p_i V_i^\gamma &= p_f V_f^\gamma. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Finalmente chegamos à equação que relaciona a pressão p com o volume V de um gás ideal submetido a condições adiabáticas:

$$pV^\gamma = \text{constante} \quad (10.14)$$

Mas podemos também, de modo a determinar a relação entre T e V em processos adiabáticos, explicitar a equação de estado na Equação (10.14):

$$\begin{aligned} pV^\gamma &= (\text{constante})_1 \\ (pV)V^{\gamma-1} &= (\text{constante})_1 \\ nRTV^{\gamma-1} &= (\text{constante})_1 \\ TV^{\gamma-1} &= \frac{(\text{constante})_1}{nR} = (\text{constante})_2, \end{aligned} \quad (10.15)$$

onde utilizamos a notação $(\dots)_{1,2}$ para evidenciar que os produtos pV^γ e $TV^{\gamma-1}$ são constantes, mas constantes diferentes.

Processos isotérmicos em um gás ideal

No caso de gases ideais, o fato de a temperatura permanecer constante, resulta na invariância da energia interna, ou seja, $\Delta E_{int} = 0$, o que resulta, pela aplicação da Primeira Lei em:

$$Q + W = 0, \quad (10.16)$$

o que leva a:

$$Q = -W, \quad (10.17)$$

ou seja, para um gás ideal à temperatura constante, o calor trocado é o simétrico do trabalho realizado.

Processos a volume constante em um gás

Se o volume de um gás é constante, não há realização de trabalho. A aplicação da Primeira Lei resulta em:

$$\Delta E_{int} = Q , \quad (10.18)$$

ou seja, a variação da energia interna deve ser totalmente atribuída à transferência de calor.

Processos Cíclicos

Em um processo cíclico, como o representado esquematicamente em diagrama $p - V$ na Figura 10.1, o sistema parte de um estado, e retorna ao mesmo estado, após algumas operações. Como a energia interna depende apenas do estado do sistema, a variação de energia interna será nula em processos cíclicos, uma vez que o estado inicial e o final coincidem. Portanto, $\Delta E_{int} = 0$ e:

$$Q + W = 0 , \quad (10.19)$$

em um ciclo fechado.

Exemplo 1

O processo cíclico mostrado na Figura 10.1 é composto por dois trechos adiabáticos ($\bar{a}\bar{b}$ e $\bar{c}\bar{d}$) e dois trechos isotérmicos ($\bar{b}\bar{c}$ e $\bar{d}\bar{a}$). Este tipo de processo, muito importante para o estudo de máquinas térmicas e refrigeradores, é conhecido como *Ciclo de Carnot*. Em relação ao ciclo mostrado na Figura 10.1, determine, sabendo que o processo é realizado por n moles de um gás monoatômico ideal: (a) as temperaturas dos trechos isotérmicos; (b) o trabalho realizado sobre o sistema em cada um dos trechos; e (c) o calor em cada um dos trechos.

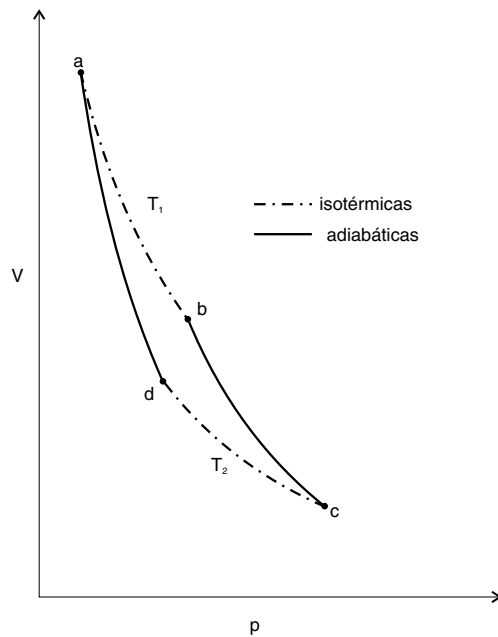


Figura 10.1: Diagrama $p \times V$ mostrando um processo cíclico em um gás ideal, composto por dois trechos isotérmicos (às temperaturas T_1 e T_2) e dois trechos adiabáticos. Este processo é conhecido como *Ciclo de Carnot*.

Solução:

(a) Em um processo isotérmico, $pV = nRT$, portanto, as duas temperaturas requeridas são:

$$T_1 = \frac{p_a V_a}{nR} = \frac{p_b V_b}{nR} = T_2 = \frac{p_c V_c}{nR} = \frac{p_d V_d}{nR}.$$

(b) Em primeiro lugar, calcularemos o trabalho nos trechos isotérmicos, o que já foi feito na Aula 8 (ver Equação (7) da Aula 8).

$$W_{ab} = -nRT_1 \ln \left(\frac{V_b}{V_a} \right),$$

que é menor que zero, uma vez que $V_b > V_a$.

Analogamente, o trabalho no trecho cd será dado por:

$$W_{cd} = -nRT_2 \ln \left(\frac{V_d}{V_c} \right) = nRT_2 \ln \left(\frac{V_c}{V_d} \right),$$

que é maior que zero, uma vez que $V_c > V_d$.

Agora, considerando os trechos adiabáticos, lembremos que o trabalho em processos adiabáticos de gases ideais já foi determinado na Aula 8

(Equação 9 da Aula 8):

$$W_{bc} = \frac{1}{\gamma - 1}(p_c V_c - p_b V_b) = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_2 - T_1),$$

que é menor que zero, pois $T_2 < T_1$.

Analogamente, no trecho $\bar{d}a$, teremos:

$$W_{da} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_1 - T_2),$$

que é maior que zero, uma vez que $T_2 < T_1$.

(c) Só é necessário o cálculo do calor nos trechos isotérmicos, uma vez que, nos trechos adiabáticos, $Q = 0$. Em cada um dos trechos isotérmicos, a variação da energia interna é nula, uma vez que a temperatura é constante. Portanto, temos:

$$W + Q = 0 \text{ e, portanto, } W = -Q,$$

então teremos:

$$Q_{ab} = -W_{ab} = nRT_1 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right) > 0,$$

$$Q_{cd} = -W_{cd} = -nRT_2 \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right) < 0.$$

Resumindo os resultados dos itens (a) e (b):

Trecho	W	Q
$\bar{a}b$	$-nRT_1 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$	$nRT_1 \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)$
$\bar{b}c$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)$	0
$\bar{c}d$	$nRT_2 \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right)$	$-nRT_2 \ln\left(\frac{V_c}{V_d}\right)$
$\bar{d}a$	$\frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_2)$	0

Expansão livre

Este processo está esquematizado na Figura 10.2. Um recipiente tem uma parede divisória, que o divide em dois, sendo que as duas metades se comunicam por meio de uma válvula que está inicialmente fechada. Uma das metades contém um gás em equilíbrio, e a outra está em vácuo. Abre-se a válvula, e o gás expande-se de uma metade para outra, sem realização de trabalho e sem troca de calor com o exterior, uma vez que o recipiente tem paredes adiabáticas. Portanto, $\Delta E_{int} = 0$, ou seja, o gás permanece à mesma temperatura. Este processo é um exemplo de processo *fora do equilíbrio*.

Inicialmente, o gás está em equilíbrio, representado por determinado ponto do diagrama $p \times V$. Ao final do processo, o sistema estará também em equilíbrio, sendo representado por um outro ponto no diagrama $p \times V$, sobre uma mesma isoterma. Mas não será possível representar o processo por uma curva unindo os dois pontos no diagrama, pois, durante a expansão, o gás não terá pressão e volume bem definidos.

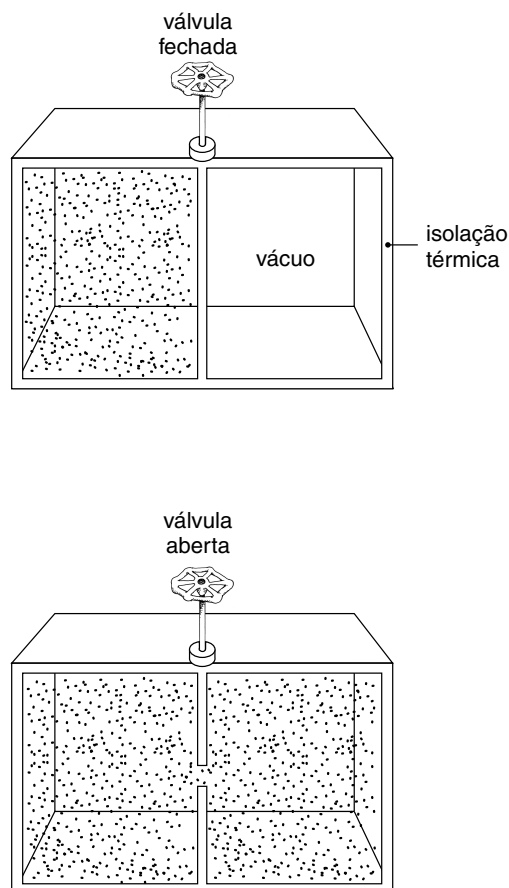


Figura 10.2: Esquema do processo de expansão livre de um gás.

A transmissão do calor

Na Aula 9 tratamos o conceito de calor como energia em trânsito. Contudo, ainda não discutimos como ocorre esta troca de energia. Vamos descrever a seguir os três mecanismos básicos de transmissão do calor.

Condução

Ao aquecermos a extremidade de um objeto metálico como um prego, por exemplo, constatamos que, após algum tempo, a temperatura da outra extremidade também torna-se elevada. Podemos entender este fato interpretando-o em termos da agitação térmica dos átomos que constituem o objeto. De fato, devido ao aquecimento, os átomos da extremidade aquecida inicialmente possuem um movimento de agitação com grandes amplitudes. A interação com os átomos vizinhos transmite esta agitação para as outras regiões do objeto, até que este seja aquecido por completo. Assim sendo, é fácil observar que ao segurarmos a cabeça de um prego e colocarmos sua ponta numa chama, queimaremos nossa mão após algum tempo.

Para construirmos uma descrição quantitativa do fenômeno da condução, considere a condução de calor por uma barra comprida, cujas extremidades são mantidas em contato com dois **reservatórios térmicos** a temperaturas distintas, T_A e T_B , sendo $T_A > T_B$. Esta situação está descrita na Figura 10.3a. Suponha que a troca de calor pela superfície lateral da barra seja desprezível, ou seja, que haja um isolamento térmico lateral, de maneira que a barra troque calor apenas com os reservatórios. Em consequência da diferença de temperatura entre as extremidades da barra, surge um fluxo de calor ao longo desta.

Por enquanto, vamos concentrar nossa atenção num trecho da barra limitado por duas seções retas de área A e distantes de Δx , como mostra a Figura 10.3 a. A temperatura varia ao longo da barra, de modo que as duas seções retas que delimitam o trecho considerado estão a temperaturas distintas T e $T + \Delta T$. A taxa de transmissão de calor $H = Q/\Delta t$ representa a quantidade de calor que flui entre as duas seções por unidade de tempo. Experimentalmente, sabemos que esta taxa é proporcional à área A das seções retas e à diferença de temperatura ΔT entre elas. Além disso, H deve ser inversamente proporcional à distância Δx entre as duas seções. Portanto, obtemos experimentalmente:

$$H = \frac{Q}{\Delta t} \propto -A \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (10.20)$$

Chamamos *reservatório térmico* um sistema com uma capacidade calorífica muito grande, isto é, capaz de trocar calor sem modificar sua temperatura apreciavelmente.

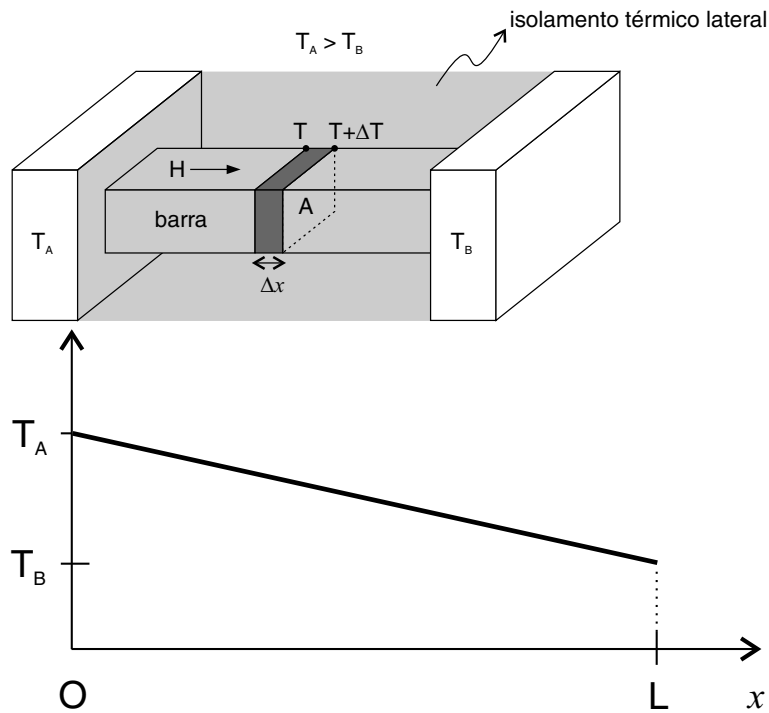


Figura 10.3: a) Condução de calor por uma barra com extremidades em contato térmico com reservatórios a temperaturas fixas T_A e T_B . A barra é isolada lateralmente, trocando calor apenas pelas extremidades. b) dependência linear da temperatura da barra com a coordenada x ao longo da direção de condução do calor.

O sinal negativo foi incluído de modo a fornecer um valor positivo de H . De fato, se escolhermos o sentido positivo do eixo x como sendo o sentido do fluxo de calor, a temperatura T da barra deverá decrescer com x , pois o calor flui das regiões mais quentes para as mais frias. Assim sendo, temos $\Delta T/\Delta x < 0$ e $H > 0$. Chamamos *condutividade térmica* (k) a constante de proporcionalidade, de maneira que

$$H = \frac{Q}{\Delta T} = -k A \frac{\Delta T}{\Delta x}. \quad (10.21)$$

Assim, uma substância é considerada melhor condutora quanto maior for o seu valor de k . Nos sólidos, a condutividade térmica está relacionada com a condutividade elétrica. Assim, os materiais sólidos bons condutores de calor também são bons condutores de eletricidade. Na Tabela 10.1 mostramos as condutividades térmicas de algumas substâncias. Note que as

condutividades térmicas dos metais é muito superior às dos gases. Na Tabela 10.1 estão relacionadas ainda as condutividades térmicas de alguns materiais de construção freqüentemente utilizados para o isolamento térmico. Note que, de fato, estes materiais possuem valores muito baixos de k .

Material	k ($W/m \cdot K$)
Metais	
Aço	14
Chumbo	35
Alumínio	235
Cobre	401
Prata	428
Gases	
Ar (seco)	0,026
Hélio	0,15
Hidrogênio	0,18
Materiais de construção	
Espuma de poliuretano	0,024
Lã de vidro	0,043
Fibra de vidro	0,048
Pinho	0,11
Vidro de janela	1,0

Tabela 10.1: Condutividades térmicas de algumas substâncias.

Uma aplicação simples da Equação (10.21) pode ser feita para uma barra de comprimento L e seção reta uniforme de área A . Neste caso, temos um regime de transmissão *estacionário* ou *permanente*, ou seja, as temperaturas e as taxas de transmissão de calor ao longo da barra não variam com o tempo. Obviamente, o calor flui da extremidade de temperatura mais alta (T_A) para a de temperatura mais baixa (T_B). Nestas condições, a taxa de transmissão de calor H é a mesma para todos os pontos da barra e pode ser calculada diretamente a partir da Equação (10.21) aplicada às extremidades da barra:

$$H = -k A \frac{T_B - T_A}{L - 0} = k A \frac{T_A - T_B}{L} . \quad (10.22)$$

Uma vez que a taxa de transmissão de calor não varia de um ponto a outro, é fácil ver que a temperatura deve variar linearmente ao longo da barra. Se escolhermos a origem do eixo x na extremidade à temperatura mais alta (T_A), e o orientarmos no sentido do fluxo de calor (de A para B), então a temperatura diminuirá com x , conforme é mostrado na Figura 10.3b. Neste caso, o coeficiente angular da reta $T \times x$ será negativo, de modo que

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} = -\frac{T_A - T_B}{L} = \text{cte} .$$

Portanto,

$$T(x) = T_A - \frac{T_A - T_B}{L} x . \quad (10.23)$$

Freqüentemente, os materiais de construção são qualificados em termos da *resistência térmica* (R) definida por

$$R = \frac{L}{k} . \quad (10.24)$$

Note que, quanto menor a condutividade, maior a resistência térmica. Esta última, porém, depende ainda da espessura do material. Bons isolantes térmicos devem ter alto valor de R .

Podemos ainda formular a definição diferencial de H tomando o limite $\Delta x \rightarrow 0$ na Equação (10.21). Deste modo, temos:

$$H = -k A \frac{dT}{dx} . \quad (10.25)$$

A derivada dT/dx é chamada *gradiente de temperatura*. Assim, quanto maior o gradiente de temperatura, maior a taxa de condução H . Uma vez que o eixo x foi orientado no sentido de condução do calor, o sinal negativo expressa o fato de que a temperatura diminui no sentido de condução.

Exemplo 2

Dois materiais distintos com condutividades térmicas k_1 e k_2 são empregados na composição de uma camada dupla com espessuras L_1 e L_2 , conforme é mostrado na Figura 10.4. As duas camadas possuem a mesma área A e estão sujeitas às temperaturas T_1 e T_2 de cada lado da dupla camada. Calcule a taxa de transmissão de calor através da dupla camada em regime estacionário.

Solução:

Podemos utilizar a Equação (10.22) para calcular o fluxo de calor em cada camada separadamente. Para tal, vamos considerar T_i a temperatura

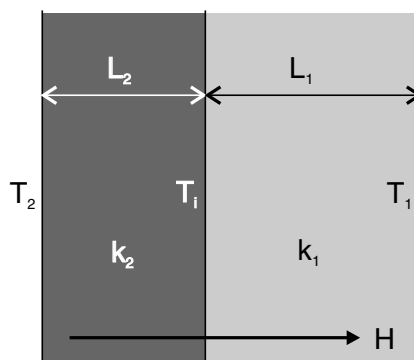


Figura 10.4: Condução de calor através de uma camada dupla composta por materiais com condutividades térmicas diferentes.

na interface entre as duas camadas. Assim sendo, o fluxo de calor na camada 2 é

$$H_2 = \frac{k_2 A (T_2 - T_i)}{L_2},$$

e na camada 1 é

$$H_1 = \frac{k_1 A (T_i - T_1)}{L_1}.$$

No regime estacionário, não deve ocorrer o acúmulo de calor na interface, de modo que o fluxo que chega (H_2) deve ser igual ao que sai dela (H_1), ou seja,

$$\frac{k_2 A (T_2 - T_i)}{L_2} = \frac{k_1 A (T_i - T_1)}{L_1}.$$

Resolvendo para T_i e substituindo em qualquer uma das expressões para H_1 ou H_2 , obtemos

$$H = \frac{A (T_2 - T_1)}{(L_2/k_2) + (L_1/k_1)} = \frac{A (T_2 - T_1)}{R_2 + R_1},$$

onde R_1 e R_2 são as resistências térmicas de cada camada. É fácil generalizar este resultado para qualquer quantidade de camadas em série:

$$H = \frac{A (T_2 - T_1)}{\sum_n (L_n/k_n)} = \frac{A (T_2 - T_1)}{\sum_n R_n}. \quad (10.26)$$

Convecção

A transmissão de calor por convecção ocorre quando um fluido (líquido ou gasoso) é parcialmente aquecido, gerando uma temperatura não uniforme ao longo do fluido. Neste caso, surgem correntes de convecção que representam o transporte macroscópico de matéria do fluido entre regiões com

temperaturas diferentes. Por exemplo, ao aquecermos localmente um gás na presença da gravidade, a porção aquecida torna-se menos densa e sobe devido à ação do empuxo da vizinhança mais fria do gás. Assim, é bem conhecido o fato de que, ao ser aquecido, o ar sobe, formando uma corrente de convecção para o alto.

As condições climáticas dependem fortemente das correntes de convecção atmosféricas. As correntes térmicas que se dirigem da terra para o céu são muito utilizadas por aves e pilotos de planadores. Também nos oceanos, os gradientes de temperatura têm papel importante na formação das correntes marítimas.

Radiação

Suponha que dois corpos a temperaturas diferentes sejam colocados, um diante do outro, numa região evacuada, isto é, na ausência de um meio condutor de calor entre eles. Após algum tempo, eles atingem o equilíbrio térmico através da troca de calor por *radiação*, isto é, ondas eletromagnéticas. Sabemos hoje que a luz é um fenômeno ondulatório de origem eletromagnética. Utilizamos o termo *radiação* de forma genérica para este tipo de ondas que serão estudadas com mais detalhes no curso de Física 4. A luz corresponde apenas ao espectro (conjunto de frequências) visível pelo olho humano.

De maneira geral, todos os corpos emitem radiação por causa da agitação térmica de seus átomos. Chamamos a esta emissão *radiação de corpo negro*. Quanto maior a temperatura de um corpo, maior a potência emitida por ele. Assim sendo, dois corpos colocados um diante do outro, trocam energia através da radiação de corpo negro. Enquanto o corpo de mais alta temperatura emite mais do que absorve, o contrário ocorre para o corpo de temperatura mais baixa. Por esse motivo, após algum tempo, o corpo mais quente se resfria e o mais frio se aquece até que o equilíbrio térmico seja atingido.

A radiação é o mecanismo responsável pela troca de energia entre a terra e o sol, por exemplo. É também este o mecanismo pelo qual nos aquecemos ao nos posicionarmos diante de uma fogueira. O corpo humano, a uma temperatura média de 36°C , emite radiação com frequências na faixa do infravermelho. Por isto, os visores de infravermelho são utilizados para visão noturna.

Resumo

Nesta aula formulamos a Primeira Lei da Termodinâmica, que expressa a conservação da energia nas transformações sofridas por um sistema termodinâmico. Conforme discutimos, a formulação de uma tal lei depende da definição de energia interna como uma variável de estado. De fato, vimos que o calor trocado (Q) e o trabalho realizado (W), numa transformação qualquer, dependem da trajetória seguida pelo sistema no diagrama $p \times V$. Contudo, a soma dessas grandezas é independente da trajetória, sendo determinada apenas pelas condições inicial e final do sistema após a transformação. Isto nos permite definir a energia interna como uma variável de estado, cuja variação numa transformação é igual à soma $Q + W$. Vimos ainda que, numa transformação cíclica, a variação total da energia interna do sistema deve ser nula, uma vez que o estado inicial é retomado ao final do ciclo. A formulação da Primeira Lei nos permitiu ainda algumas aplicações úteis como o cálculo do trabalho realizado em um processo adiabático.

Encerramos a aula discutindo os principais mecanismos de transmissão do calor, como condução, convecção e radiação. Uma ênfase particular foi dada ao estudo quantitativo do fenômeno de condução.

Exercícios

1) Um sistema termodinâmico executa o ciclo $ABCA$, mostrado no diagrama $p \times V$ da Figura 10.5

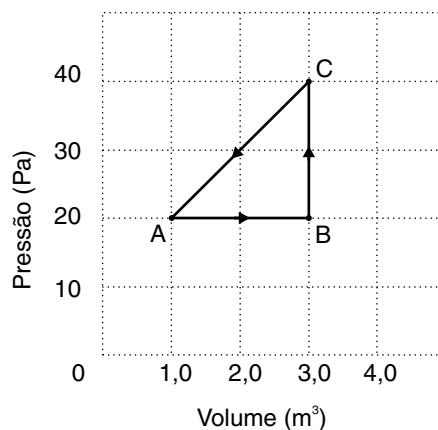


Figura 10.5: Diagrama $p \times V$ representando o ciclo $ABCA$.

- a) Calcule os trabalhos W_{AB} , W_{BC} e W_{CA} trocados em cada trecho do ciclo.
 b) Calcule os calores Q_{AB} , Q_{BC} e Q_{CA} trocados em cada trecho do ciclo.
- 2) Considere um mol de um gás ideal com capacidade calorífica molar $c_V = 20,7 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ realizando o ciclo representado na Figura 10.6, onde a pressão é dada em kPa e o volume em litros. O processo b é isotérmico.

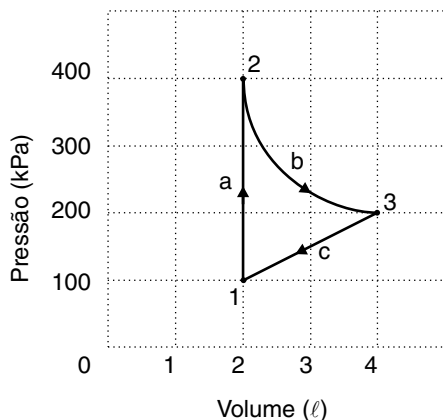


Figura 10.6: Diagrama $p \times V$ representando o ciclo abc .

- a) Calcule a temperatura do estado 2.
 b) Calcule o calor total absorvido no ciclo.
- 3) O funcionamento de um motor a gasolina pode ser descrito aproximadamente pelo ciclo de Otto, cujo diagrama $p \times V$ está desenhado na Figura 10.7. Os processos $2 \rightarrow 3$ e $4 \rightarrow 1$ são adiabáticos, enquanto $1 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 4$ ocorrem a volume constante.
- a) Supondo que o motor empregue um gás diatômico ($\gamma = 7/5 = 1,4$), calcule o trabalho W realizado e o calor Q trocado pelo gás em cada trecho do ciclo.
 b) Calcule as temperaturas do gás em cada um dos vértices do ciclo.
 c) Supondo que o motor funcione a 2.000 rpm, calcule a potência fornecida por ele.

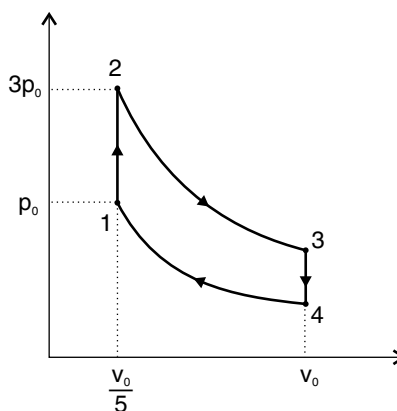


Figura 10.7: Diagrama $p \times V$ representando o ciclo de Otto.

4) Quatro recipientes contêm, cada um, 1 mol de gás oxigênio (O_2) à pressão de $0,2 \text{ atm}$ e à temperatura de 27°C . Em cada recipiente a pressão é reduzida à metade por um processo diferente:

- Recip. I: Mantendo contato com um reservatório térmico à temperatura constante de 27°C ;
- Recip. II: Sem alterar o tamanho do recipiente;
- Recip. III: Sem deixar calor entrar ou sair;
- Recip. IV: Através de uma expansão livre.

Sabendo que $\gamma = 7/5$ para o O_2 , calcule para cada um destes processos:

- o volume final do recipiente;
- a variação ΔE_{int} na energia interna do gás;
- o calor Q trocado pelo gás, e
- construa um diagrama $p \times V$ indicando as trajetórias correspondentes a cada um dos processos realizados.

5) Uma janela de vidro tem uma área de $1,5 \text{ m}^2$ e espessura de $0,5 \text{ cm}$. Num dia de calor, a temperatura externa chega a 40°C . Conhecendo as condutividades térmicas do vidro: $1 \text{ W/m} \cdot \text{K}$ e do ar: $0,026 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, calcule:

- a) A quantidade de calor que flui por segundo através do vidro, se a temperatura interna for mantida a 20°C ;
- b) O fluxo de calor para uma janela com "dupla vitragem", isto é, formada por dois painéis de vidro separados por $0,5\text{ cm}$ de ar. Considere os painéis com as mesmas dimensões da janela do item a), bem como as mesmas temperaturas interna e externa.

Aula 11 – A Segunda Lei da Termodinâmica

Objetivos

- Entender a 2ª Lei da Termodinâmica e saber aplicá-la às máquinas térmicas e aos refrigeradores.
- Entender o ciclo de Carnot.

Introdução

A formulação da 1ª Lei da Termodinâmica, junto com a definição de energia interna, nos forneceu uma ferramenta poderosa para a descrição quantitativa de um sistema termodinâmico. A 1ª Lei restringe as trocas de energia entre um sistema e sua vizinhança, impondo a conservação da energia total. Contudo, quando tratamos de sistemas termodinâmicos, podemos imaginar processos que respeitam a 1ª Lei, isto é, que conservam a energia, mas que nunca são observados na Natureza. Por exemplo, ao colocarmos uma pedra de gelo num recipiente contendo água quente, observamos que o gelo se derrete e a água se resfria até a temperatura de equilíbrio. Neste caso, a energia flui, na forma de calor, da água quente para o gelo, de modo que a energia total do sistema água + gelo permaneça constante. A 1ª Lei é, portanto, respeitada.

Imagine agora uma situação hipotética, na qual, ao misturarmos gelo e água num recipiente isolado, o gelo se resfrie e a água se aqueça ainda mais, com transferência de energia do gelo para a água. Note que, a princípio, podemos supor, sem problemas, que a energia total do sistema permaneça inalterada, de modo que a 1ª Lei ainda seja respeitada. Contudo, é senso comum que um tal processo NUNCA ocorra espontaneamente, mesmo não sendo proibido por nenhuma das leis que estudamos até o momento. Portanto, é natural que esteja faltando algo na termodinâmica estudada até aqui. Trata-se da 2ª Lei da Termodinâmica, a qual começaremos a estudar nesta aula.

Inicialmente, iremos formular a 2ª Lei no contexto do funcionamento de máquinas térmicas e refrigeradores. Veremos de que modo esta lei aparece como uma limitação natural ao desempenho desses dispositivos. Nesse contexto, definiremos o ciclo de Carnot, cujo desempenho é o melhor que podemos esperar de um sistema termodinâmico real.

Máquinas térmicas

O que chamamos “máquinas térmicas” são dispositivos concebidos para converter calor em trabalho útil. Melhor dizendo, na forma de calor, uma certa quantidade de energia flui para um sistema (a nossa máquina térmica), e uma fração dessa energia que entrou sai do sistema na forma de trabalho mecânico. Essa é a base do funcionamento, por exemplo, da máquina a vapor, ou do motor a combustão interna. Nesta seção você irá se familiarizar com o conceito de máquina térmica e estudar seu rendimento.

Um cilindro de gás dotado de um êmbolo móvel, em contato com um reservatório à temperatura constante, como mostrado na Figura 11.1, é um exemplo de máquina térmica. Se o gás está inicialmente a uma temperatura T , o cilindro com volume V e o gás a uma pressão p , o sistema será representado por um ponto (p_i, V_i) no plano $p \times V$. Podemos retirar um pouco do peso que está sobre o pistão, fazendo com que este suba, realizando um trabalho negativo (o gás se expande, ou seja, o sistema realiza trabalho sobre o exterior). Como está em contato com um reservatório à temperatura T , a energia interna do gás não se altera, sendo necessário, para que a temperatura se mantenha constante, que o sistema absorva calor do reservatório. Se retirássemos passo a passo pequenas quantidades de peso do cilindro, o processo seria semelhante ao mostrado na Figura 11.2, ou seja, uma expansão isotérmica. É claro que esta máquina seria pouco prática, uma vez que, se ela funcionasse durante um certo tempo, chegaria o momento que a retirada de peso do pistão não seria mais possível, ou o pistão alcançaria o topo do cilindro, impedindo o funcionamento de nossa máquina

Lembre-se da 1ª Lei da Termodinâmica: Em um ciclo, $\Delta E_{int} = 0 = Q + W$. Portanto $Q > 0$, uma vez que $W < 0$.

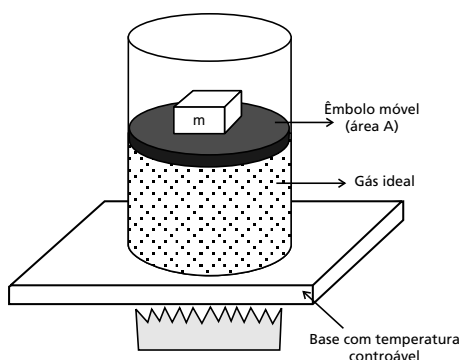


Figura 11.1: Exemplo de máquina térmica: cilindro de gás em contato com um reservatório à temperatura constante.

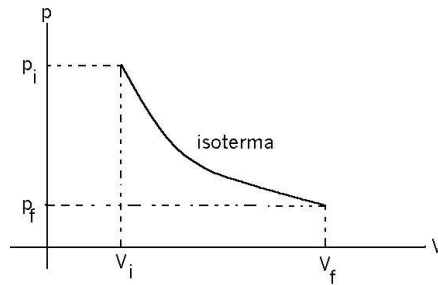


Figura 11.2: Processo termodinâmico referente à máquina térmica mostrada na Figura 11.1.

Uma máquina térmica baseada em um processo cíclico seria mais facilmente utilizada para a realização de trabalho útil. A Figura 11.3 mostra um exemplo de máquina térmica um processo cíclico. O ciclo mostrado na Figura 11.3 é composto por trechos a volume constante e à pressão constante, sendo, por isso, representado por um retângulo no diagrama $p \times V$.

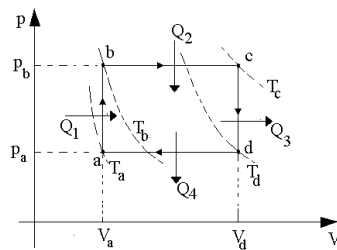


Figura 11.3: Processo cíclico composto por trechos a volume constante, e trechos a pressão constante.

Iremos agora discutir com mais detalhe o ciclo referido no parágrafo anterior. Desta forma, você poderá compreender melhor os conceitos envolvidos no funcionamento de uma máquina térmica. Em primeiro lugar, você pode observar que cada um dos vértices do retângulo está sobre uma isoterma. A única exceção possível seria os pontos b e c pertencerem à mesma isoterma, o que não invalidaria a discussão a seguir. Se levarmos em conta a lei dos gases ideais ($pV = nRT$), podemos facilmente chegar à conclusão que $T_a < T_b \leq T_d < T_c$, relação que nos permite avaliar a variação da energia interna do gás durante o processo. A seguir determinaremos o sinal do calor trocado durante cada etapa do ciclo, baseando-nos na 1ª Lei da Termodinâmica ($\Delta E_{int} = Q + W$):

- 1 - Trecho ab

Neste trecho, o cilindro de gás está inicialmente à temperatura T_a , ocupando o volume V_a . Então, aumentamos gradualmente a temperatura do reservatório, com o pistão fixado com volume V_a . A energia interna também aumentará ($\Delta E_{int} > 0$) e, uma vez que o volume permanece constante no trecho, o trabalho se anula ($W_1 = 0$). Portanto temos que:

$$Q_1 > 0 .$$

- 2 - Trecho bc

Neste trecho, o gás está inicialmente em contato com o reservatório à temperatura T_b . Faz-se então aumentar gradualmente a temperatura do gás, com peso constante sobre o pistão. fazendo com que o gás venha a se expandir a pressão constante. Portanto, $W < 0$ (o sistema realiza trabalho sobre a vizinhança). Como no trecho ab , $\Delta E_{int} > 0$, teremos que:

$$Q_2 > 0 .$$

- 3 - Trecho cd

Neste trecho, o pistão é novamente fixado (agora no volume V_c), fazendo-se a temperatura cair gradualmente. Desta forma, ocorrerá o decréscimo da energia ($\Delta E_{int} < 0$) e, como $W = 0$, teremos que:

$$Q_3 < 0 .$$

- 4 - Trecho da

Neste trecho, novamente operando à pressão constante, o trabalho é positivo ($W > 0$, a vizinhança realiza trabalho sobre o sistema), e a energia interna do gás diminui ($\Delta E_{int} < 0$), portanto:

$$Q_4 < 0 .$$

Constatamos então que, para o ciclo mostrado na Figura 11.3, o calor entra no sistema nos trechos ab e cd , totalizando $Q_{entra} = Q_1 + Q_2$, e sai do sistema nos trechos cd e da , totalizando $Q_{sai} = Q_3 + Q_4$. No que se refere ao trabalho, observamos que o sistema realiza sobre a vizinhança, no trecho bc , uma quantidade de trabalho igual a $-mgh$, onde mg é o peso colocado sobre o êmbolo neste trecho, e h é a altura máxima atingida pelo pistão durante esta etapa. No trecho da , ao levar o pistão à sua posição inicial, a vizinhança

realiza sobre o sistema um trabalho de valor absoluto menor do que na etapa bc , uma vez que o peso colocado sobre o êmbolo é menor nesta etapa, ou seja, a pressão é menor. O trabalho total W realizado é então negativo. Podemos escrever o balanço de energia deste sistema, para ciclo completo, da seguinte forma:

$$W + Q = 0 ,$$

ou

$$W = -Q . \quad (11.1)$$

O valor absoluto do trabalho será então dado por:

$$|W| = |Q| = |Q_{entra}| - |Q_{sai}|. \quad (11.2)$$

Podemos, então, descrever o processo mostrado na Figura 11.3 da seguinte forma: **ao se fornecer a quantidade de calor $|Q_{entra}|$ ao sistema, realizou-se o trabalho mecânico $|W|$, e liberou-se a quantidade $|Q_{sai}|$ de calor para a vizinhança.**

Para caracterizar a eficácia de uma máquina térmica ao produzir trabalho a partir de calor, definimos a sua **eficiência** e :

$$e = \frac{|W|}{|Q_{entra}|} , \quad (11.3)$$

que é expressa em função dos valores absolutos para obter-se um valor positivo.

Utilizando a Equação (11.2), também podemos escrever eficiência na seguinte forma:

$$e = \frac{|Q_{entra}| - |Q_{sai}|}{|Q_{entra}|} = 1 - \frac{Q_{sai}}{Q_{entra}} , \quad (11.4)$$

Uma máquina térmica seria 100% eficiente (teria $e = 1$), se Q_{sai} , o calor cedido à vizinhança, fosse igual a zero, o que é equivalente a dizer que todo o calor que entra é convertido em trabalho. A **2ª Lei da Termodinâmica** diz que não é possível construir uma máquina térmica com eficiência perfeita. Um dos enunciados da 2ª Lei, também chamado Enunciado de **Kelvin-Plank**, é o seguinte:

Não é possível, em um processo cíclico, converter totalmente calor em trabalho, sem que qualquer outra modificação ocorra.

A referida ocorrência de outra modificação no ciclo mostrado na Figura 11.3 é a liberação de calor ao ambiente. De acordo com a 2ª Lei, é impossível anular totalmente este calor cedido à vizinhança.

A Figura 11.4 mostra uma maneira de representar esquematicamente uma máquina térmica. A Figura 11.4.b representa uma máquina térmica real que retira o calor Q_A de um reservatório à temperatura T_A , que é convertido parcialmente no trabalho W , finalmente cedendo o calor Q_B ao reservatório à temperatura T_B . Neste esquema, as quantidades de calor Q_A e Q_B podem ser provenientes de etapas diferentes do processo, o mesmo ocorrendo com o trabalho W . A Figura 11.4.a representa uma máquina térmica perfeita que retira o calor Q_A de um reservatório à temperatura T_A , e o converte totalmente em trabalho. Esta representação esquemática pressupõe uma série de operações realizadas com uma substância operante. No caso da máquina a vapor, por exemplo, a queima de combustível provê o reservatório à temperatura T_A , que fornece o calor Q_A para gerar o vapor d'água (substância operante), responsável pela realização do trabalho mecânico W , e cede o calor Q_B à atmosfera, que desempenha o papel de reservatório à temperatura T_B .

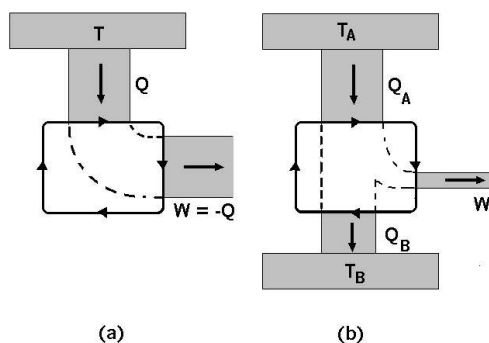


Figura 11.4: Representação de uma máquina térmica: (a) perfeita; (b) real.

Exemplo 1: Um gás monoatômico ideal é utilizado como substância operante em uma máquina térmica cujo diagrama $p \times V$ é semelhante ao mostrado na Figura 11.3, sendo $p_a = p_d = 0,2kPa$, $p_b = p_c = 0,4kPa$, $V_a = V_b = 0,02m^3$ e $V_c = V_d = 0,05m^3$. Determine a eficiência desta máquina térmica.

Solução:

A eficiência será dada por:

$$e = \frac{|W|}{|Q_{entra}|}.$$

O trabalho realizado no ciclo é dado por:

$$\begin{aligned} W &= -p_b(V_c - V_b) + p_a(V_c - V_b) = (p_a - p_b)(V_c - V_b) \\ &= -20 \times 10^3 Pa \times 0,3 m^3 = -6,0 \times 10^3 J. \end{aligned}$$

A entrada de calor no sistema é dada por $Q_{entra} = Q_{ab} + Q_{bc}$. No trecho {ab}, o volume é constante, o que leva a:

$$\begin{aligned} Q_{ab} &= \Delta E_{int} = \frac{3}{2} n R \Delta T = \frac{3}{2} (p_b - p_a) V_a \\ &= \frac{3}{2} \times 20 \times 10^3 Pa \times 0,2 m^3 = 6 \times 10^3 J. \end{aligned}$$

No trecho bc, o calor é dado por:

$$\begin{aligned} Q_{bc} &= p_b(V_c - V_b) + \frac{3}{2} n R \Delta T = p_b(V_c - V_b) + \frac{3}{2} p_b(V_c - V_b) \\ &= \frac{5}{2} \times 40 \times 10^3 Pa \times 0,3 \times 10^3 m^3 = 30 \times 10^3 J. \end{aligned}$$

Finalmente, a eficiência da máquina térmica é dada por:

$$e = \frac{|-6J|}{|36J|} = \frac{1}{6}.$$

Refrigeradores

Um *refrigerador* é uma máquina que trabalha em um processo cíclico, semelhante ao representado na Figura 11.3, só que percorrido em sentido inverso (anti-horário). A representação esquemática de um refrigerador é semelhante à da máquina mostrada na Figura 11.4, só que operada ao contrário. Um refrigerador retira o calor de um reservatório à baixa temperatura T_B e o envia em direção a um reservatório à alta temperatura T_A . A Figura 11.5.a mostra a representação de um refrigerador real, no qual é necessária a realização de trabalho sobre o sistema para enviar o calor do reservatório de baixa temperatura para o de alta temperatura. A Figura 11.4.b mostra um refrigerador perfeito, no qual $|Q_A| = |Q_B|$.

Como na máquina térmica, o refrigerador trabalha sob um processo cíclico, sendo nula a variação de energia interna em um ciclo, portanto:

$$|W| = |Q| = |Q_A| - |Q_B|. \quad (11.5)$$

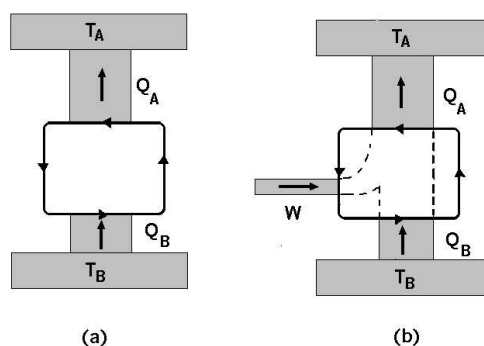


Figura 11.5: Representação de um refrigerador: (a) perfeita; (b) real.

Em um refrigerador, por ser este uma máquina térmica operada ao contrário, $Q_B < 0$, $Q_A > 0$ e $W > 0$. No refrigerador é a vizinhança que realiza trabalho sobre a substância operante.

Podemos definir, também, para o refrigerador, uma grandeza que define a sua eficácia. Fazendo analogia com a máquina térmica, definimos o coeficiente de desempenho K de um refrigerador:

$$K = \frac{|Q_B|}{|W|} = \frac{|Q_B|}{|Q_A| - |Q_B|}, \quad (11.6)$$

No contexto do estudo de refrigeradores pode-se propor um outro enunciado para a 2ª Lei da Termodinâmica, conhecido como *Enunciado de Clausius*:

Não é possível, em um processo cíclico, fazer fluir calor de um corpo para outro mais quente sem que outra mudança ocorra.

A outra mudança a que este enunciado se refere é a realização de trabalho. O Enunciado de Clausius equivale a dizer que não existem refrigeradores perfeitos.

Em uma geladeira doméstica, a substância operante é um gás liquefeito, o Freon, que circula em seu interior. O reservatório de baixa temperatura é o interior da geladeira, onde ficam guardados os alimentos, e o de alta temperatura é o ambiente onde está a geladeira. O trabalho sobre a substância operante é realizado por um motor elétrico, que aciona um compressor.

Os dois enunciados da 2ª Lei da Termodinâmica são equivalentes. Para mostrar isso, utilizaremos a associação de uma máquina térmica perfeita com um refrigerador, como apresentado na Figura 11.6. Nesta associação

(Figura 11.6.a), o trabalho W , gerado a partir da conversão total do calor Q_A , é utilizado para operar um refrigerador, que retira uma quantidade de calor Q'_B do reservatório de baixa temperatura, e transfere o calor Q'_A para o reservatório de alta temperatura. O resultado desta associação (Figura 11.6.b) é um refrigerador perfeito, que retira o calor Q'_B do reservatório à temperatura T_B , e o transfere, sem realização de trabalho ao reservatório à temperatura T_A . Portanto, verificamos a equivalência dos dois enunciados.

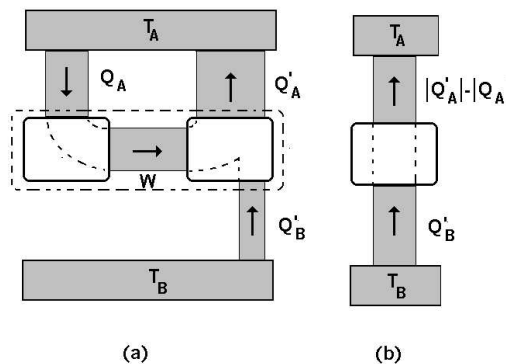


Figura 11.6: (a) Refrigerador real acionado por uma máquina perfeita;
 (b) Refrigerador perfeito equivalente à associação.

O Ciclo de Carnot

Como você pode constatar nas duas seções anteriores, a 2ª Lei da Termodinâmica proíbe a realização de máquinas térmicas e refrigeradores perfeitos. Mas esta limitação não é muito precisa. A 2ª Lei proíbe 100% de eficiência para uma máquina térmica. Mas será que 99,99% seriam realizáveis? Ou melhor, há algum outro tipo de limitação ao desempenho de uma máquina térmica? É o que será considerado agora, com a discussão de uma máquina que opera com um ciclo especial, o *Ciclo de Carnot*.

Podemos considerar, como foi enfatizado na introdução, que existem processos termodinâmicos irreversíveis. Um exemplo de processo termodinâmico irreversível é a transferência de calor de um corpo quente para um corpo frio. Não é de forma nenhuma aceitável, mesmo para um leigo em termodinâmica, que uma máquina térmica que envolva transferências de calor deste tipo não possa ser considerada reversível. Ou seja, não é concebível que, ao se inverter o sentido de funcionamento de uma máquina envolvendo um processo de transferência de calor entre uma fonte quente e uma fonte fria, se faça retornar à fonte fria o calor cedido à fonte quente. Um outro exemplo é a geração de calor através de atrito entre as partes móveis de uma máquina térmica ou refrigerador.

De modo a aumentar o rendimento de máquinas térmicas e refrigeradores, faz-se necessário evitar, na sua concepção, processos irreversíveis de transferência de calor. O Ciclo de Carnot, descrito a seguir, é uma máquina térmica constituída apenas por processos reversíveis.

Vejamos o Ciclo de Carnot para um gás ideal como substância operante, colocado dentro de um cilindro dotado de pistão, e utilizando dois reservatórios de temperatura, um de alta temperatura (T_A) e outro de baixa temperatura (T_B). O Ciclo de Carnot é constituído por quatro processos reversíveis. Dois deles são isotérmicos (equivalendo aos dois reservatórios de temperatura), enquanto os outros dois são adiabáticos. Nesta configuração, a transferência de calor será feita apenas à temperatura constante, e concomitante com a realização de trabalho. A Figura 11.7 mostra a representação de um Ciclo de Carnot no plano $p \times V$, cujas etapas são detalhadas a seguir:

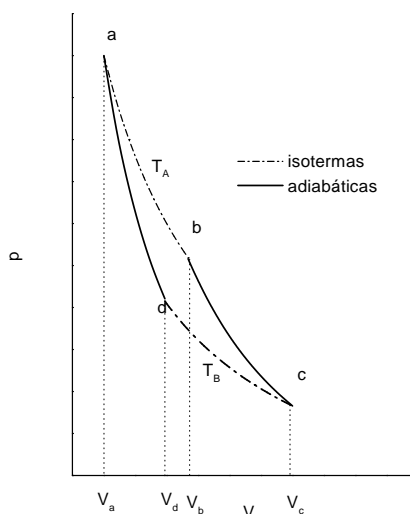


Figura 11.7: Ciclo de Carnot

- 1 - Trecho ab

Neste trecho, o cilindro com gás é colocado no reservatório de alta temperatura (T_A), sendo que o gás está inicialmente no ponto a do ciclo. A seguir, remove-se peso do pistão, gradualmente, fazendo com que o gás se dilate vagarosamente (o pistão sobe) até atingir o ponto b do ciclo. Como se trata de um processo isotérmico, a variação da energia interna é nula e, portanto:

$$\Delta E_{int} = 0 = Q_A + W_a^b.$$

Como $W_a^b < 0$ (trabalho realizado pelo sistema), então o sistema absorve calor nesta etapa ($Q_A > 0$).

- 2 - Trecho bc

Neste trecho, retira-se o cilindro do reservatório à temperatura T_A , isola-se o cilindro (processo adiabático), ao mesmo tempo em que se retira vagarosamente mais peso do cilindro, até o ponto c do ciclo ser atingido. Como o trecho bc constitui-se em um processo adiabático, $Q = 0$, sendo a variação da energia interna dada por:

$$\Delta E_{int} = W_b^c < 0,$$

o que faz com que a temperatura caia para T_B .

- 3 - Trecho cd

Este trecho começa com a colocação do cilindro no reservatório à temperatura T_B , após o que se adiciona peso ao pistão, lentamente, fazendo o gás se comprimir, isotermicamente, até o ponto d do ciclo ser atingido. Como na etapa ab , a variação da energia interna do gás é nula. Como o processo trata-se de uma compressão, o trabalho W_c^d é positivo, sendo portanto o calor $Q_B < 0$, ou seja, o sistema absorve calor do reservatório.

- 4 - Trecho da

Neste trecho, isola-se novamente o cilindro, e continua-se a retirar peso do pistão, gradualmente, fazendo o gás se comprimir adiabaticamente. Como a transferência de calor é nula ($Q=0$) e o trabalho é positivo ($W > 0$), a energia interna do gás aumenta, fazendo a temperatura subir novamente até T_A ($\Delta E_{int} < 0$), retornando ao ponto a do ciclo.

Passaremos, agora, a calcular o rendimento de uma máquina térmica baseado no Ciclo de Carnot. Utilizaremos a definição de eficiência dada pela Equação (11.4):

$$e = 1 - \frac{Q_{sai}}{Q_{entra}} = 1 - \frac{Q_B}{Q_A}.$$

Precisaremos calcular, então, as quantidades de calor Q_A e Q_B . Para isso, aplicaremos a 1ª Lei da Termodinâmica aos trechos ab e da , os quais constituem-se em processos isotérmicos. Portanto, a variação da energia interna do gás é nula nos dois trechos, e o calor em cada um deles será dado por $Q = -W$, de modo que

$$|Q| = |W|.$$

No trecho ab teremos:

$$Q_A = \int_{V_a}^{V_b} \frac{nRT_A}{V} dV = nRT_A \ln \frac{V_b}{V_a}.$$

Analogamente, no trecho cd teremos:

$$Q_B = NRT_B \ln \frac{V_c}{V_d},$$

de modo que:

$$\frac{|Q_{sai}|}{|Q_{entra}|} = \frac{|Q_B|}{|Q_A|} = \frac{T_A \ln \frac{V_b}{V_a}}{T_B \ln \frac{V_c}{V_d}}. \quad (11.7)$$

Para simplificar a Equação (11.7), vamos nos utilizar do fato que os trechos bc e da são adiabáticos e utilizar a Equação 15 da Aula 10 para escrever:

$$T_A V_b^{\gamma-1} = T_B V_c^{\gamma-1} \quad (11.8)$$

e

$$T_A V_a^{\gamma-1} = T_B V_d^{\gamma-1}. \quad (11.9)$$

Dividindo a Equação (11.8) pela Equação (11.9), teremos então:

$$\frac{V_b^{\gamma-1}}{V_a^{\gamma-1}} = \frac{V_c^{\gamma-1}}{V_d^{\gamma-1}}, \quad (11.10)$$

que é equivalente a :

$$\frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}. \quad (11.11)$$

Substituindo a Equação (11.11) na Equação (11.7), teremos então:

$$\frac{|Q_A|}{|Q_B|} = \frac{T_A}{T_B} . \quad (11.12)$$

A Equação (11.12), se escrita recuperando os sinais originais, tem a forma:

$$\frac{Q_A}{T_A} + \frac{Q_B}{T_B} = 0 . \quad (11.13)$$

Esta equação assumirá grande importância na próxima aula, na discussão da entropia. Voltando ao cálculo da eficiência da máquina de Carnot, teremos então:

$$e = 1 - \frac{Q_{sai}}{Q_{entra}} = 1 - \frac{Q_B}{Q_A} = 1 - \frac{T_B}{T_A} = \frac{T_A - T_B}{T_A} . \quad (11.14)$$

Pode-se mostrar, também, que o refrigerador de Carnot, ou seja, a máquina de Carnot operada ao contrário, tem o seu coeficiente de desempenho dado por:

$$K = \frac{T_B}{T_A - T_B} . \quad (11.15)$$

Você pode, como exercício, demonstrar o resultado da Equação 11.15.

O Teorema de Carnot

Carnot propôs o seguinte teorema acerca do funcionamento de máquinas térmicas, baseado na máquina de Carnot:

O rendimento de uma máquina térmica, que opere entre duas temperaturas dadas, não pode ser maior que o rendimento de uma máquina de Carnot que opere entre essas mesmas temperaturas.

Ou seja, o rendimento dado pela Equação (11.14) constitui-se em limite superior para o rendimento de qualquer máquina térmica. A violação deste teorema constitui-se, também, em violação da 2ª Lei da Termodinâmica. Para mostrar isto, vamos supor que uma determinada máquina M tem o seu rendimento e_M maior que o rendimento e_C de uma máquina de Carnot, que funciona entre as temperaturas máxima e mínima da máquina M . Vamos fazer a máquina M operar acoplada a uma máquina de Carnot que funcione com seu ciclo invertido, ou seja, como um refrigerador, como mostra a Figura 11.8.a. A máquina M extrai o calor Q_1 do reservatório de alta temperatura e entrega o calor Q_2 ao reservatório de baixa temperatura, realizando, neste

processo, o trabalho W . O refrigerador de Carnot, então, utiliza o trabalho W para retirar o calor $|Q'_2|$ do reservatório frio (temperatura T_2) e fornecer o calor $|Q'_1|$ ao reservatório quente (temperatura T_2).

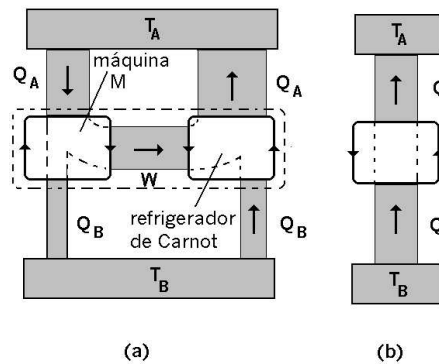


Figura 11.8: (a) Representação da associação entre uma máquina térmica genérica e um refrigerador de Carnot. (b) Refrigerador resultante da associação.

Fazendo o balanço de todo o calor transferido na associação das duas máquinas, temos que a fonte fria cede o calor $|Q'_1| - |Q_1|$ e a fonte quente recebe o calor $|Q'_2| - |Q_2|$. Podemos aplicar a 1ª Lei da Termodinâmica a cada uma das máquinas:

Máquina M :

$$|W| = |Q_2| - |Q_1| .$$

Máquina de Carnot:

$$|W| = |Q'_2| - |Q'_1| .$$

Portanto, teremos que:

$$|Q_2| - |Q_1| = |Q'_2| - |Q'_1| , \quad (11.16)$$

ou seja,

$$|Q'_1| - |Q_1| = |Q'_2| - |Q_2| = Q , \quad (11.17)$$

A hipótese de partida é que o rendimento da máquina M excede o de uma máquina de Carnot que funciona entre as temperaturas T_1 e T_2 , ou seja:

$$e_M > e_C , \quad (11.18)$$

de modo que,

$$\frac{|W|}{|Q_2|} > \frac{|W|}{|Q_2|} \quad \text{ou} \quad |Q'_2| > |Q_2|.$$

O que nos leva a concluir que $Q > 0$, ou seja, que a associação da máquina M com a máquina de Carnot resulta em um refrigerador perfeito (Figura 11.8.b), ou seja, em uma máquina que leva uma quantidade de calor Q de uma fonte fria a uma fonte quente, sem que qualquer outra coisa ocorra, violando, portanto, a 2ª Lei. Logo, a violação do Teorema de Carnot leva a uma violação da 2ª Lei da Termodinâmica. Se, em vez disso, $e_M \leq e_C$, o calor Q será menor ou igual a zero, invertendo, portanto, o sentido da transferência de calor da máquina mostrada na Figura 11.8.b, deixando de violar a 2ª Lei.

De fato, a máquina de Carnot constitui-se no limite de eficiência possível de ser atingido por uma máquina térmica.

Resumo

De modo a discutir a 2ª Lei da Termodinâmica, introduzimos o conceito de máquina térmica e refrigerador, utilizando processos termodinâmicos cíclicos. A 2ª Lei da Termodinâmica foi enunciada para máquinas térmicas (Enunciado de Kelvin-Planck) e refrigeradores (Enunciado de Clausius), excluindo a possibilidade da construção de máquinas perfeitas. Foram introduzidos os conceitos de máquina e de refrigerador de Carnot, baseados em processos termodinâmicos reversíveis. Discutindo a operação destas máquinas, estabelecemos o Teorema de Carnot, que impõe como limite superior para o rendimento de qualquer máquina térmica, o rendimento da máquina de Carnot. Concluindo, demonstramos a equivalência entre a 2ª Lei da Termodinâmica e o Teorema de Carnot.

Exercícios

1) Um motor de combustão operando com gasolina pode ser, com um certo nível de aproximação, representado pelo ciclo mostrado na Figura 11.9. Suponha que a substância operante desta máquina é um gás ideal monoatômico e utilize uma taxa de compressão de 3 : 1 (ou seja, $V_d = 3V_a$). Suponha que $p_b = 2p_a$.

- Determine a pressão e a temperatura em cada um dos vértices do ciclo;
- Calcule o rendimento do ciclo.

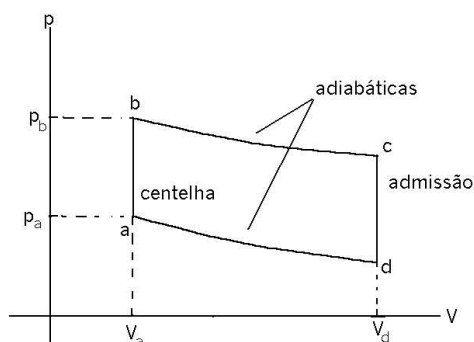


Figura 11.9: Exercício 1.

2) Uma geladeira, para resfriar o seu compartimento frio, precisa retirar 568 J de calor do mesmo. De modo a realizar este resfriamento, precisa realizar 153 J de trabalho.

- Calcule o coeficiente de desempenho do refrigerador.
- Qual é o calor cedido ao ambiente onde está localizada a geladeira?

3) Determine o rendimento de uma máquina de Carnot que opera entre as temperaturas máxima e mínima da máquina discutida no Exemplo 1, e compare com o rendimento obtido no Exemplo.

4) Uma máquina térmica funciona baseada no ciclo mostrado na Figura 11.10. O ciclo é composto por dois trechos a volume constante, os quais operam entre duas isotermas às temperaturas T_1 e T_2 .

- Obtenha o rendimento desta máquina térmica.
- Compare o rendimento desta máquina com o da máquina de Carnot, explicitando a origem da diferença observada.

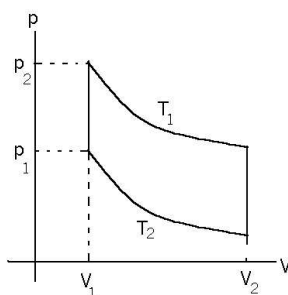


Figura 11.10: Exercício 4.

5) Mostre que a relação entre o rendimento de uma máquina térmica reversível ideal e o coeficiente de desempenho do refrigerador, que se tem ao operar a referida máquina térmica ao contrário, é dada por:

$$e = \frac{1}{K + 1} .$$

Aula 12 – Entropia

Objetivos

- Entender o conceito de entropia como uma função de estado e suas aplicações.
- Estabelecer a diferença entre processos reversíveis e irreversíveis através do conceito de entropia.
- Descrever a 2ª Lei da Termodinâmica em termos da entropia.

Introdução

A Lei Zero da Termodinâmica, que estabelece o conceito de equilíbrio térmico, está diretamente ligada à definição de temperatura. Da mesma forma, a formulação da 1ª Lei da Termodinâmica está ligada à definição de energia interna, uma quantidade a ser conservada nos processos termodinâmicos. Nesta aula, veremos que a 2ª Lei da Termodinâmica também está associada à definição de uma grandeza muito útil, a *entropia*. Esta definição está entre as mais importantes da Termodinâmica. Conforme veremos, a entropia é uma função de estado, cuja variação em um dado processo determina se este é reversível ou irreversível. Este é um aspecto fundamental desta nova grandeza, cujas conseqüências se apresentam tanto em questões práticas, como o funcionamento de máquinas térmicas e refrigeradores, quanto em questões conceituais acerca da termodinâmica do nosso universo. Por isso, o conceito de entropia tem tanta importância para a Física Contemporânea. Atualmente, o poder deste conceito já vem sendo explorado até mesmo em outras áreas, como na macroeconomia e na Teoria da Informação. De fato, hoje entendemos a entropia como uma medida do grau de *desordem* ou *desinformação* em um sistema.

Nesta aula, discutiremos, ainda, a formulação da 2ª Lei da Termodinâmica em termos da entropia. Esta formulação tem na sua abrangência, a sua maior beleza. De fato, trata-se de uma formulação mais geral do que as apresentadas na Aula 11, no contexto do funcionamento de refrigeradores e máquinas térmicas.

Uma nova função de estado

A definição de grandezas que dependam apenas do estado de um sistema, e não da trajetória seguida por este até o seu estado presente, é um procedimento bastante freqüente na construção das teorias físicas. De fato, lembre-se de que, para uma partícula sujeita à ação de forças conservativas, podemos definir uma energia potencial $U(x)$ como função de sua posição. A variação de U entre duas posições (*estados*) da partícula não depende da trajetória seguida por ela, mas apenas de suas posições inicial e final. Da mesma maneira, definimos a energia interna para um sistema termodinâmico. Quando o sistema evolui de um ponto a outro do diagrama $p - V$, a variação de energia interna também só depende dos estados inicial e final, e não da trajetória seguida entre eles. Assim, dizemos que a energia interna é uma função de estado do sistema. Outra forma de definirmos uma função de estado, que é equivalente à anterior, consiste em verificarmos se é nula a variação total da grandeza num ciclo fechado, ou seja, quando o sistema volta ao estado inicial.

Na Aula 11 (Equação 13), estudamos o ciclo de Carnot e vimos que o calor trocado pelo sistema no ciclo é tal que

$$\frac{Q_A}{T_A} + \frac{Q_B}{T_B} = 0, \quad (12.1)$$

sendo Q_A o calor recebido pelo sistema do reservatório à temperatura T_A , e Q_B o calor cedido pelo sistema ao reservatório à temperatura T_B . Uma vez que o calor trocado pelo sistema é nulo nos trechos adiabáticos do ciclo, podemos escrever que

$$\sum_{\text{ciclo}} \frac{Q}{T} = 0 \quad \text{ou} \quad \int_{\text{ciclo}} \frac{dQ}{T} = 0, \quad (12.2)$$

para o ciclo de Carnot.

Mostraremos agora que, de fato, a Equação (12.2) vale para qualquer processo cíclico **reversível**.

De fato, considere um processo arbitrário, como o representado na Figura 12.1, que leve o sistema desde a condição inicial (p_i, V_i) para a condição final (p_f, V_f) . Utilizando a 1ª Lei da Termodinâmica, podemos facilmente expressar o calor dQ trocado pelo sistema quando este sofre uma variação infinitesimal de volume dV e de temperatura dT :

$$dQ = dE_{\text{int}} + p dV = c_V dT + p dV. \quad (12.3)$$

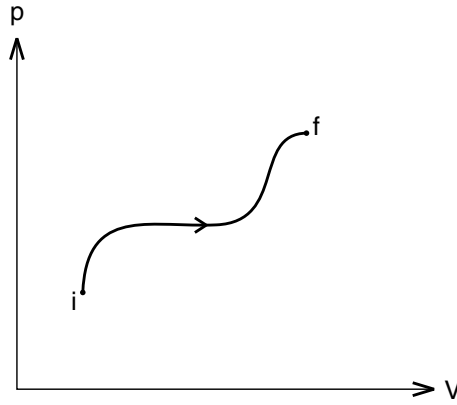


Figura 12.1: Diagrama $p - V$ representando uma transformação arbitrária de um gás ideal entre as condições inicial i e final f .

Assim, podemos escrever que

$$\int_i^f \frac{dQ}{T} = c_V \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} + \int_{V_i}^{V_f} \frac{p}{T} dV = c_V \ln T_f/T_i + n R \ln V_f/V_i, \quad (12.4)$$

onde utilizamos a equação de estado do gás ideal para escrever que $p/T = n R/V$ na integral de volume.

Lembrando que $c_p - c_V = n R$ e que $\gamma = c_p/c_V$, podemos ainda reescrever a Equação (12.4) como:

$$\int_i^f \frac{dQ}{T} = c_V \ln \left(\frac{T_f V_f^{\gamma-1}}{T_i V_i^{\gamma-1}} \right) = c_V \ln \left(\frac{p_f V_f^\gamma}{p_i V_i^\gamma} \right). \quad (12.5)$$

A Equação (12.5) nos mostra que a integração da quantidade infinitesimal dQ/T depende apenas dos valores iniciais e finais das variáveis de estado do sistema, e não do caminho percorrido. É fácil ver ainda que a integral da Equação (12.5) se anula quando o sistema completa um ciclo fechado. De fato, neste caso os valores iniciais e finais de p e V (ou T e V) são iguais, de modo que a função logarítmica da Equação (12.5) se anula. Assim, estendemos o resultado da Equação (12.2) para qualquer ciclo fechado. Como no caso da energia interna, podemos então definir uma nova função (ou variável) de estado chamada *entropia* S , de modo que $dS = dQ/T$, ou ainda

$$\int_i^f \frac{dQ}{T} = S_f - S_i = \Delta S. \quad (12.6)$$

No Sistema Internacional de unidades (SI), a entropia é expressa em Joule/Kelvin (J/K).

Lembre-se de que, na Aula 10, mostramos que $pV^\gamma = cte$ para um processo adiabático. Observando a segunda igualdade da Equação (12.5), é

fácil ver que a entropia deve permanecer constante quando o sistema sofre um processo adiabático. De fato, como $dQ = 0$ num processo adiabático, teremos, ainda, $dS = dQ/T = 0$. Logo, da Equação (12.6) vemos que $\Delta S = 0$ e $S_f = S_i$. Por isto, os processos adiabáticos também são chamados *isoentrópicos*.

A demonstração que acabamos de fazer se aplica apenas aos gases ideais. Contudo, é possível definirmos entropia de maneira geral e aplicarmos a Equação (12.6) a *qualquer sistema termodinâmico*, como um sólido, um líquido, ou, ainda, a sistemas magnéticos. Por isto, o conceito de entropia é de grande importância para toda a Termodinâmica.

Implicitamente, ao fazermos a integração em dQ/T , consideramos que o sistema termodinâmico observado permanece em equilíbrio, em cada intervalo infinitesimal. Assim sendo, as variáveis de estado do sistema são bem definidas durante todo o processo que leva o sistema de um estado a outro. Nestas condições, o processo é dito **reversível**. Portanto, nossa demonstração de que a variação total de entropia é nula num ciclo fechado, vale apenas para esta classe de processos. Na próxima seção, discutiremos alguns exemplos de processos que não atendem à condição de reversibilidade (processos **irreversíveis**), e veremos como calcular a variação de entropia nestes casos.

Processos reversíveis e irreversíveis

Na introdução da Aula 11, comentamos que, num sistema **isolado** formado por uma porção de gelo em contato térmico com uma porção de água quente, a troca de energia (calor) ocorre de maneira a transferir energia da parte mais quente do sistema para a mais fria. Em contrapartida, o processo inverso, isto é, o calor fluindo do gelo para a água quente, nunca é observado. Suponha que um cinegrafista filme a evolução do sistema ‘água + gelo’ desde a condição inicial até o equilíbrio térmico. Em seguida, este mesmo cinegrafista faz uma exposição do filme no sentido inverso, de maneira que o espectador observe a evolução de trás para a frente. Baseado no senso comum, o espectador logo se daria conta de que o filme está sendo exibido com o sentido invertido, pois o calor fluiria do gelo para a água quente. Esta é a noção básica do que chamamos *processos irreversíveis*: processos cuja evolução no sentido inverso do tempo não é fisicamente aceitável.

Outro exemplo claro de um processo irreversível é a expansão livre de um gás. Por exemplo, considere um recipiente termicamente isolado, dividido em duas partes iguais por uma partição, conforme é mostrado na Figura 12.2a. Um dos lados da partição é preenchido com um gás enquanto o outro está vazio. Suponha que esta partição seja quebrada, de maneira que o gás preencha todo o volume do recipiente como na Figura 12.2b. Como no caso anterior, a evolução invertida no tempo, na qual o gás espalhado pelo recipiente subitamente se concentra numa das metades deste, não é fisicamente aceitável. O cinegrafista também seria facilmente desmascarado se tentasse mostrar um filme da expansão livre de um gás em sentido inverso.

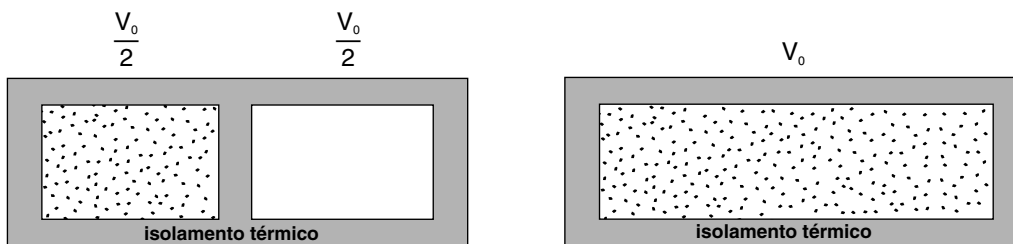


Figura 12.2: a) Recipiente termicamente isolado contendo uma partição que separa dois volumes iguais do recipiente. Um gás ideal está confinado do lado esquerdo, enquanto o lado direito está vazio. b) A partição é removida, e o gás se espalha por todo o volume do recipiente, até que o equilíbrio térmico seja reestabelecido.

Em contrapartida, um processo no qual um gás recebe calor de um reservatório térmico e realiza trabalho sobre sua vizinhança pode ser concebido em sentido inverso, desde que ele ocorra lentamente. Trata-se, portanto, de um processo reversível. Num diagrama $p - V$, um processo reversível pode ser representado por uma trajetória ligando os estados inicial e final. Ou seja, o sistema deve passar por estados de equilíbrio intermediários. Porém, nos processos irreversíveis, apenas os pontos inicial e final são de equilíbrio, de maneira que os pontos intermediários não admitem uma representação no diagrama $p - V$. Por exemplo, durante o intervalo de tempo extremamente curto da expansão livre de um gás, as variáveis de estado termodinâmicas como volume, temperatura e pressão não são bem definidas para o gás por inteiro. Estas variáveis só possuem valor bem determinado antes do início da expansão livre e depois que o equilíbrio térmico é atingido no final.

Uma questão surge, então: como podemos calcular a variação de entropia de um sistema quando este passa por um processo irreversível? A noção de entropia, como uma função de estado, nos diz que a variação de entropia num dado processo depende apenas das condições inicial e final.

Uma vez que estas condições são de equilíbrio, podemos utilizar qualquer processo auxiliar (**hipotético**) reversível, que leve o sistema do mesmo estado inicial para o mesmo estado final, e calcular a variação de entropia por este processo. Como a entropia depende apenas dos estados inicial e final, a variação de entropia no processo irreversível deve ser a mesma que aquela calculada no processo auxiliar. Portanto, obtemos a variação de entropia num processo irreversível, calculando-a através de um processo reversível auxiliar, que leve o sistema desde o estado inicial até o estado final considerados.

A seguir, mostraremos dois exemplos que ilustram esta idéia: expansão livre e transferência irreversível de calor.

Expansão livre

Considere novamente a situação ilustrada na Figura 12.2: um recipiente termicamente isolado de sua vizinhança, contendo uma partição que divide o recipiente em duas partes com volumes iguais a $V_0/2$. Suponha que o lado direito do recipiente esteja vazio, enquanto o lado esquerdo possui n moles de um gás ideal. A partição é, então, removida, deixando que o gás ocupe todo o volume do recipiente. Desejamos calcular a variação total de entropia do gás, desde a condição inicial até o reestabelecimento do equilíbrio térmico subsequente à remoção da partição.

Imediatamente após a remoção da partição, durante a expansão livre do gás até o equilíbrio final, o sistema estará fora de equilíbrio, de modo que as variáveis de estado do gás, como pressão, volume e temperatura, não são bem definidas. Neste caso, não faz sentido representarmos este tipo de processo por uma trajetória no diagrama $p - V$. Contudo, podemos representar as condições inicial e final de equilíbrio, e escolhermos um processo reversível auxiliar a fim de calcularmos a variação total de entropia. Uma vez que não há troca de calor nem realização de trabalho, a energia interna do gás deve ser a mesma antes e depois da expansão livre do gás. Além disso, a temperatura do gás também deve ser a mesma antes e depois da expansão, pois a energia interna de um gás ideal depende apenas de sua temperatura. Portanto, ainda que os pontos intermediários não possam ser representados no diagrama, sabemos que os estados final e inicial do gás se encontram sobre uma mesma isoterma.

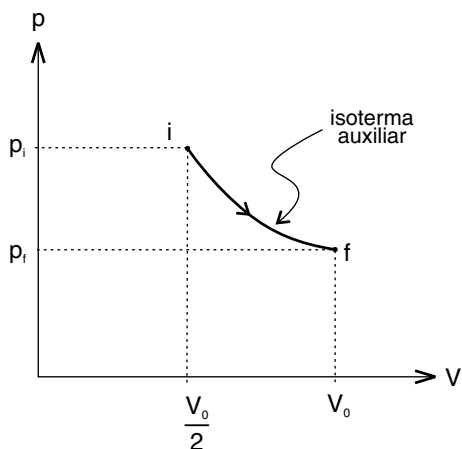


Figura 12.3: Diagrama $p-V$ representando as condições inicial i e final f da expansão livre de um gás ideal, juntamente com a isoterma auxiliar utilizada no cálculo da variação de entropia.

Assim sendo, vamos escolher um processo auxiliar isotérmico, que liga os pontos inicial e final do diagrama $p-V$ do gás, conforme mostrado na Figura 12.3. Neste caso, podemos utilizar a primeira igualdade da Equação (12.5), lembrando que $T_f = T_i$ sobre a isoterma, para obtermos

$$\Delta S = c_V (\gamma - 1) \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = n R \ln 2, \quad (12.7)$$

pois o volume final do gás é o dobro do volume inicial ($V_f = 2V_i$). Como não há contato térmico do recipiente com a vizinhança, a variação total de entropia do gás + vizinhança será positiva.

Transferência irreversível de calor

Considere dois blocos idênticos, de massa m e mesmo calor específico c . Os blocos estão inicialmente isolados termicamente entre si, e da vizinhança externa. As temperaturas iniciais dos blocos são T_1 e T_2 . Em seguida, os blocos são colocados em contato térmico um com o outro, permanecendo, ainda, isolados da vizinhança externa. O calor flui do bloco mais quente para o mais frio até que a temperatura de equilíbrio T_e seja atingida por ambos os blocos. Desejamos calcular a variação total de entropia do sistema + vizinhança externa desde a situação inicial até a condição de equilíbrio térmico.

Novamente, devemos substituir o processo real, onde os blocos trocam calor irreversivelmente, por dois processos auxiliares, nos quais cada bloco troca calor independentemente com um respectivo reservatório térmico,

cujas temperaturas podem ser variadas continuamente, de forma reversível. Portanto, em nossos processos auxiliares, o bloco 1 é colocado em contato térmico com um reservatório inicialmente a T_1 , cuja temperatura é variada lentamente até que a temperatura de equilíbrio T_e seja alcançada. A hipótese de variação lenta da temperatura do reservatório garante que o bloco permaneça em equilíbrio durante todo o processo. Da mesma forma, supõe-se que o bloco 2 está em contato com um reservatório inicialmente a T_2 , cuja temperatura é lentamente variada até T_e .

Ao sofrer uma variação infinitesimal de temperatura dT , cada bloco troca uma quantidade de calor $dQ = m c dT$ e sofre uma variação infinitesimal de entropia $dS = m c dT/T$. Portanto, a variação de entropia do bloco 1 será

$$\Delta S_1 = \int_i^f \frac{dQ}{T} = m c \int_{T_1}^{T_e} \frac{dT}{T} = m c \ln \frac{T_e}{T_1}. \quad (12.8)$$

Da mesma forma, a variação de entropia do bloco 2 será

$$\Delta S_2 = m c \int_{T_2}^{T_e} \frac{dT}{T} = m c \ln \frac{T_e}{T_2}. \quad (12.9)$$

Logo, a variação total de entropia será

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m c \ln \frac{T_e}{T_1} + m c \ln \frac{T_e}{T_2} = m c \ln \frac{T_e^2}{T_1 T_2}. \quad (12.10)$$

Uma vez que os blocos trocam calor, isolados da vizinhança externa, a conservação de energia (1ª Lei) exige que o calor total trocado seja nulo, isto é, o calor **cedido** pelo bloco mais quente deve ser igual ao calor **recebido** pelo bloco mais frio. Ou seja,

$$Q_1 + Q_2 = m c (T_e - T_1) + m c (T_e - T_2) = 0, \quad (12.11)$$

de modo que $T_e = (T_1 + T_2)/2$. Com isto, podemos escrever $T_e^2/T_1 T_2$ como:

$$\frac{T_e^2}{T_1 T_2} = \frac{(T_1 + T_2)^2}{4 T_1 T_2} = \frac{4 T_1 T_2 + (T_1 - T_2)^2}{4 T_1 T_2} = 1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4 T_1 T_2},$$

e, finalmente,

$$\Delta S = m c \ln \left[1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4 T_1 T_2} \right] > 0. \quad (12.12)$$

Uma vez que os blocos estão isolados da vizinhança externa, $\Delta S = 0$ para a vizinhança e a variação total de entropia dos blocos + vizinhança é positiva.

Note que, das Equações (12.8) e (12.9), podemos concluir que a entropia do bloco mais frio aumenta, enquanto a do bloco mais quente diminui. Suponha que o bloco 1 esteja inicialmente mais quente do que o bloco 2. Neste caso, $T_1 > T_e > T_2$, de modo que $\Delta S_1 < 0$ e $\Delta S_2 > 0$. Contudo, a variação total de entropia não depende disto. De fato, observe que na Equação (12.12), a diferença de temperatura entre os dois blocos está elevada ao quadrado, de maneira que $\Delta S > 0$, qualquer que seja o bloco inicialmente mais frio.

É interessante vermos, no contexto dos exemplos anteriores, como a noção de informação está contida no conceito de entropia. No caso da expansão livre, o gás ocupa um volume menor, inicialmente, do que após sua expansão. Portanto, podemos dizer que, de certa forma, possuímos mais informação sobre as posições de suas moléculas antes do que após a expansão. Neste caso, atribuímos o aumento da entropia do gás ao aumento da *desordem* ou *desinformação* no sistema.

Da mesma maneira, em nosso segundo exemplo, podemos dizer que temos mais informação acerca da distribuição de energia dos corpos antes, do que após o contato térmico. De fato, antes do contato, temos um bloco mais quente e outro mais frio. Logo, sabemos que a energia total do sistema se encontra em maior quantidade no primeiro do que no segundo. Depois que o equilíbrio térmico é atingido, perdemos o pouco de informação que tínhamos, pois, agora, a energia se encontra igualmente distribuída entre os dois blocos. Novamente, atribuímos o aumento da entropia à *desordem* criada.

Entropia e a 2ª Lei

Nas seções anteriores, definimos entropia e mostramos como calcular sua variação em processos reversíveis e irreversíveis. O papel desta nova função de estado é de grande importância para a termodinâmica, pois podemos utilizá-la para enunciar a 2ª Lei da seguinte maneira:

Em qualquer processo termodinâmico que ocorra entre dois estados de equilíbrio de um sistema, a entropia total do sistema + sua vizinhança permanece constante se o processo for reversível, e aumenta se o processo for irreversível. A entropia jamais diminui.

Podemos concluir que esta formulação da 2ª Lei da Termodinâmica é equivalente às anteriores. De fato, podemos investigar a variação total de entropia em cada um dos casos estudados na Aula 11.

- Máquinas ideais

Uma máquina ideal deve ser capaz de remover um calor $Q_A > 0$ de um reservatório à temperatura T_A , e convertê-lo **integralmente** em trabalho W . Note que devemos ter $W < 0$, pois a máquina deve realizar trabalho sobre a vizinhança. Uma vez que a máquina realiza um ciclo fechado, sua variação de entropia (isto é, da substância operante da máquina) deve ser nula. Em contrapartida, o reservatório **cede** um calor $-Q_A$ à máquina, de modo que a variação de entropia do reservatório será $-Q_A/T_A < 0$. Portanto, a variação total de entropia da máquina ideal + o reservatório (vizinhança) deve ser negativa para uma máquina ideal. Vemos imediatamente que tal máquina viola a formulação da 2ª Lei em termos da entropia.

Como vimos na Aula 11, uma máquina real requer um segundo reservatório térmico à temperatura $T_B < T_A$, ao qual ela cede uma quantidade de calor $Q_B < 0$. A variação de entropia do reservatório B será, portanto, $-Q_B/T_B > 0$. Esta variação de entropia positiva do reservatório B garante que a 2ª Lei, conforme a formulação acima, seja observada. Neste contexto, o melhor que podemos conseguir é a máquina de Carnot, para a qual a variação total de entropia (máquina + reservatório frio + reservatório quente) é nula.

- Refrigeradores ideais

Um refrigerador ideal deve ser capaz de transferir o calor $Q > 0$ de um reservatório **mais frio**, à temperatura T_B , para outro **mais quente**, à temperatura $T_A > T_B$, sem que qualquer outra mudança ocorra nos reservatórios ou em suas vizinhanças. Em outras palavras, o calor deve fluir do reservatório mais frio para o mais quente sem a realização de trabalho. Neste caso, a variação de entropia do reservatório mais quente será Q/T_A e a do reservatório mais frio será $-Q/T_B$. Portanto, a variação total de entropia será

$$\Delta S_{TOT} = \frac{Q}{T_A} - \frac{Q}{T_B} = Q \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right).$$

Uma vez que $T_A > T_B$, ΔS_{TOT} deve ser negativa, o que também viola nossa última formulação da 2ª Lei em termos da entropia. Note, ainda, que o

funcionamento de um refrigerador ideal pressupõe uma transferência de calor no sentido inverso ao que observamos na Natureza.

Resumo

Nesta aula definimos uma nova variável de estado chamada Entropia. Vimos como a entropia nos permite identificar um processo termodinâmico quanto à sua reversibilidade. Esta noção de reversibilidade assume um papel fundamental no contexto da Termodinâmica, pois dá ao princípio de aumento da entropia o status de lei. É a 2ª Lei da Termodinâmica, formulada em termos da nossa nova variável de estado. A importância da entropia aparece, ainda, ao mostrarmos a equivalência entre o novo enunciado da 2ª Lei e os enunciados anteriores. Assim, vimos, de forma muito simples, que tanto as máquinas quanto os refrigeradores ideais violam este novo enunciado.

Também discutimos qualitativamente a relação entre o conceito de entropia e a noção de desordem ou desinformação. Esta noção é de grande interesse atual, tanto em temas puramente acadêmicos, como a origem do nosso universo, quanto para as tecnologias modernas de informação, que participam de nosso cotidiano. A entropia de informação é muito utilizada na informática para dimensionar a capacidade de um algoritmo de compressão de dados, por exemplo. Trata-se, neste caso, do *empréstimo* de um conceito físico a outras áreas do conhecimento humano. Historicamente, este tipo de empréstimo já ocorreu diversas vezes, e mostra a força desta Ciência.

Exercícios

- 1) Três moles de um gás ideal dilatam-se desde o volume V_0 até o volume $V = 3,5 V_0$.
 - a) Calcule o trabalho realizado sobre o gás se a dilatação for isotérmica e ocorrer a $T = 400K$.
 - b) Calcule a variação de entropia, se houver.
 - c) Calcule qual seria a variação de entropia, se a dilatação fosse adiabática e reversível.
- 2) Podemos representar um processo termodinâmico qualquer num diagrama de temperatura versus entropia ($T - S$). Neste diagrama, um ciclo de Carnot é representado por um retângulo.

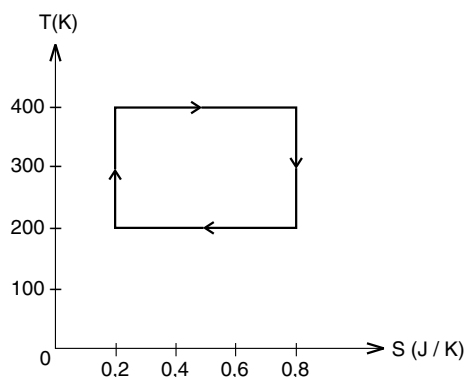


Figura 12.4: Diagrama $T - S$ representando um ciclo de Carnot.

- Explique o porquê.
 - Calcule o calor trocado pelo sistema para o ciclo de Carnot mostrado na Figura 12.4.
 - Calcule o trabalho realizado pelo sistema neste mesmo ciclo.
- 3) Um mol de um gás diatômico ideal passa pelo ciclo mostrado no diagrama $p - V$ da Figura 12.5, onde $V_2 = 3V_1$. Calcule, em termos de p_1 , V_1 , T_1 e R :

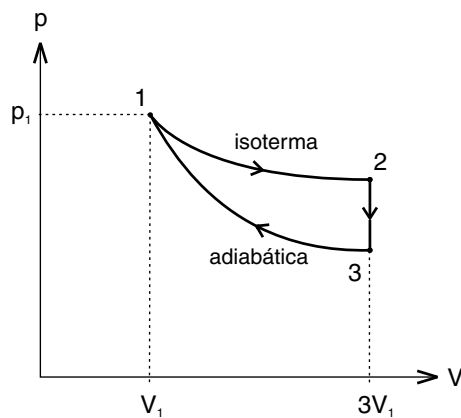


Figura 12.5: Diagrama $p - V$ representando o ciclo do Exercício 3.

- p_2 , p_3 e T_3 .
- W , Q , ΔE_{int} e ΔS para os três processos.

4) Um mol de um gás ideal monoatômico passa por dois processos diferentes, indo desde um estado inicial à pressão p_0 e volume V_0 , até um estado final à pressão $2p_0$ e volume $2V_0$:

(I) O gás se dilata isotermicamente até que o volume dobre e, então, a pressão é aumentada, a volume constante, até que o estado final seja alcançado.

(II) Ele é comprimido isotermicamente até que sua pressão dobre e, então, ele se dilata à pressão constante até que o estado final seja alcançado.

- a) Represente os dois processos em um diagrama $p - V$.
- b) Calcule o calor total absorvido pelo gás em cada processo.
- c) Calcule o trabalho realizado sobre o gás em cada processo.
- d) Calcule a variação de energia interna do gás.
- e) Calcule a variação de entropia do gás.

5) Um bloco de $50,0\text{ g}$ de cobre a 400 K e outro de chumbo de $100,0\text{ g}$ a 200 K são colocados em uma caixa termicamente isolada da vizinhança externa. No interior da caixa, os blocos estão em contato térmico entre si.

- a) Calcule a temperatura de equilíbrio do sistema formado pelos dois blocos.
- b) Calcule a variação de energia interna quando o sistema passa da condição inicial à de equilíbrio.
- c) Calcule a variação da entropia total do sistema.

Experimento 1

Determinação da densidade de um fluido através da determinação da pressão em função da profundidade

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Utilizar um manômetro de tubo aberto para determinar a pressão de um fluido em função da profundidade e, a partir desta, a densidade do fluido.

Conhecimentos importantes para a realização do experimento

- Fluido incompressível num campo gravitacional, Aula 1 da disciplina Física 2A, do Módulo 1. Você deve rever como varia a pressão em função da profundidade em um fluido incompressível na presença de gravidade (Equação 1.16.)
- Manômetro de tubo em U, na seção Medidas de pressão da Aula 2, do Módulo 1 da disciplina Física 2A. Você deve rever como se usa o manômetro de tubo em U para medir a pressão manométrica em um ponto.

Material utilizado

- Painel hidrostático (ref. EQ033/CIDEPe): manômetro de tubo em U, aberto, localizado à direita do painel.
- Tubo submersível e escala graduada acoplada, a serem gradualmente submersos no fluido estudado.
- Frasco Becker, destinado a conter o fluido estudado.
- Pinça de Mohr (dispositivo para estrangular a mangueira flexível à saída do ramo direito do manômetro).

- Seringa com extensão, para colocar água no manômetro.
- Pigmento para colorir a água do manômetro e facilitar a medida.

Esquema do experimento

A **Figura 1.1** mostra esquematicamente a montagem utilizada para a realização do experimento. Na figura, estão designados, pela numeração utilizada na seção anterior, alguns dos principais elementos da montagem. Ela também mostra os parâmetros que serão medidos durante o experimento, designados pela mesma representação utilizada no texto.

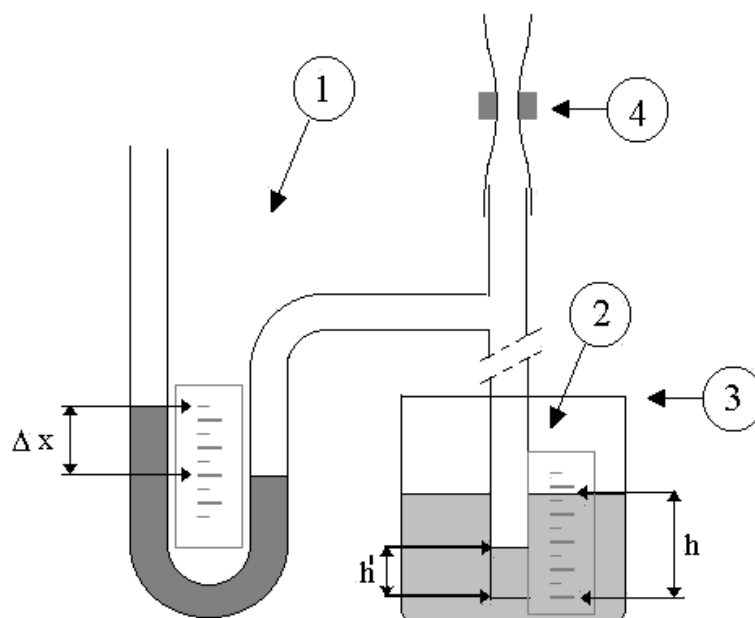


Figura 1.1: Esquema do equipamento utilizado no experimento.

Procedimento passo a passo para a realização do experimento

- Passo 1 - Carga de água no manômetro

Utilize a seringa com o prolongador para introduzir lentamente a água colorida com pigmento no manômetro, até o seu nível atingir o meio da escala graduada localizada entre os dois ramos do manômetro. Se por acaso ocorrer a formação de bolhas de ar, utilize a seringa com o prolongador para retirá-las.

- Passo 2 - Teste de vazamento

Estrangule a mangueira flexível com a pinça de Mohr e mergulhe a extremidade do tubo submersível no frasco Becker com água. Observe por trinta segundos o desnível entre os dois ramos do manômetro. Caso o desnível não se mantenha constante, haverá um vazamento. Para corrigi-lo, passe esmalte incolor nas junções das mangueiras.

- Passo 3 - Preparação para o experimento

Retire a pinça de Mohr e o Becker. Encoste um pano ou papel absorvente na extremidade do tubo submersível, de modo a remover qualquer porção de líquido que tenha ficado em sua extremidade. Nivela o zero da escala submersível com a extremidade do tubo metálico que a suporta. Regule a altura do painel de modo que a escala submersível fique aproximadamente 10mm acima do tampo da mesa.

- Passo 4 - Preparação do manômetro

Com as duas extremidades do manômetro abertas, coloque a pinça de Mohr na mangueira flexível. Caso haja algum desnível entre os dois ramos do manômetro, verifique o nivelamento do painel e/ou a existência de bolhas.

- Passo 5 - Preparação do experimento

Cuidadosamente, para evitar danos ao equipamento, coloque o tubo submersível dentro do Becker, que deve estar vazio. Coloque água no Becker até que a superfície do líquido toque a extremidade do tubo submersível. Caso haja algum desnível nos dois ramos do manômetro, goteje, cuidadosamente, mais água no seu ramo esquerdo, até que os níveis de água nos dois ramos se igualem novamente.

- Passo 6 - Realização do experimento

Coloque mais água no Becker, de modo a aumentar o seu nível em 5ml. Observe a água penetrar na extremidade mergulhada do tubo, de profundidade h' . Anote os valores de h , h' e Δx . Repita esse passo por seis vezes, de modo a obter um total de sete conjuntos de valores h , h' e Δx .

- Passo 7 - Análise dos resultados

Observe que podemos escrever a seguinte equação para a pressão p na superfície do líquido que penetra no tubo submerso:

$$p + \rho_{H_2O} g h' = p_0 + \rho_{H_2O} g h, \quad (1.1)$$

sendo a pressão manométrica medida dada por:

$$p - p_0 = \rho_{H_2O} g (h - h'), \quad (1.2)$$

ou seja,

$$\rho_{H_2O} g \Delta x = \rho_{H_2O} g (h - h'). \quad (1.3)$$

Tendo essa análise em mente, faça uma tabela com os pontos obtidos (Δx em função de $h - h'$) e faça um gráfico de Δx em função de $h - h'$. Muito provavelmente, você obterá uma reta com coeficiente angular próximo de 1,0.

Até o momento, apenas podemos concluir que a utilização da Lei de Stevin leva a resultados coerentes sem, na verdade, comprová-la experimentalmente¹.

- Passo 8 - Realização do experimento com glicerina

Retire cuidadosamente o Becker e jogue fora a água. Seque o frasco, coloque novamente o tubo submersível dentro dele e repita os passos 5 e 6, colocando glicerina no Becker, em vez de água.

- Passo 9 - Análise dos resultados

Faça novamente a tabela e o gráfico de Δx em função de $h - h'$ e determine a densidade da glicerina a partir desses resultados (é necessário justificar os seus cálculos).

¹ É preciso notar que utilizamos a Lei de Stevin para medir pressão.

- Passo 10 - Verificação do resultado obtido

Obtenha a densidade da glicerina pesando um volume conhecido desta substância. Não esqueça de pesar o Becker utilizado antes e depois subtrair o seu peso do resultado. Compare esse resultado com o resultado obtido no passo 9. O que você concluiu?

Experimento 2

Verificação da Lei de Boyle-Mariotte

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Verificar a Lei de Boyle-Mariotte por intermédio da compressão isotérmica de um gás.

Conhecimentos importantes para a realização do experimento

- Relação entre volume e pressão de um gás ideal, Aula 6 da disciplina Física 2A. Você deve rever como varia o volume de um gás ideal em função da pressão, quando a temperatura é mantida constante (Equação 6.2).

Material utilizado

- Conjunto de seringa graduada e manômetro (ref. EQ037C/CIDEPe)

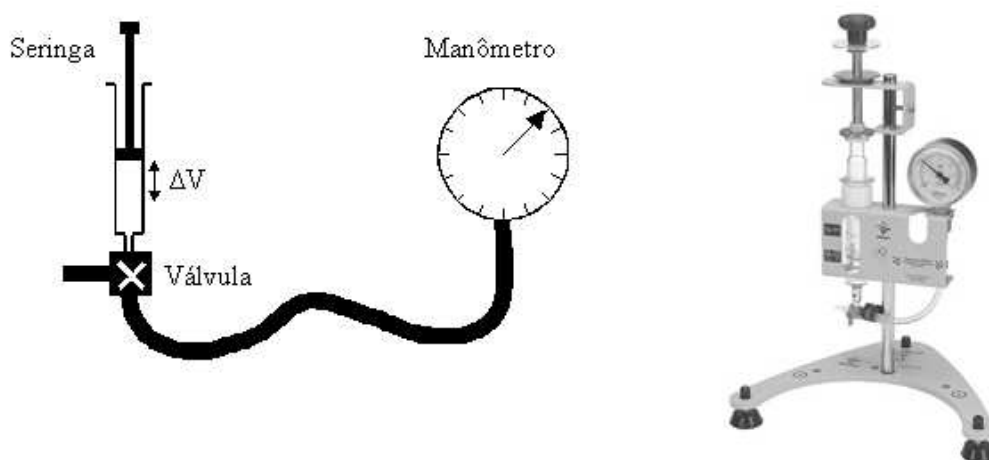


Figura 2.1: Esquema do equipamento utilizado no experimento.

Esquema do experimento

A **Figura 2.1** mostra o esquema da montagem utilizada para a realização do experimento. Ela consiste de uma seringa com êmbolo móvel, montada sob um parafuso de suporte e conectada a um manômetro por uma mangueira. O parafuso de suporte pressiona o êmbolo da seringa, permitindo a variação gradual do volume de gás confinado nela. O gás que utilizaremos será o ar, cujo comportamento é próximo do de um gás ideal para as nossas condições experimentais. O ar é admitido no sistema por meio de uma válvula que, alternativamente, conecta o interior da seringa com o exterior ou com o manômetro. Quando a válvula é fechada, o ar é confinado no interior da seringa e na mangueira de conexão. A variação do volume do ar confinado pode ser medida com o auxílio da graduação existente na parede da seringa. Além disso, o parafuso de suporte possui uma calibração que permite avaliarmos a variação de volume a cada volta do parafuso. A variação de pressão do ar em relação à pressão atmosférica pode ser lida a partir do manômetro.

Análise teórica

A Lei de Boyle-Mariotte afirma que o produto da pressão p pelo volume V de um gás ideal deve permanecer constante quando este passa por transformações isotérmicas ($T = \text{cte}$):

$$pV = \text{cte} \quad (2.1)$$

Uma dificuldade que temos em nosso aparato experimental é o desconhecimento do volume total do gás confinado, uma vez que não sabemos o volume do gás na mangueira e no interior do manômetro. Assim sendo, ao variarmos o volume do gás, faremos medidas da diferença entre o volume inicial (desconhecido) e o novo volume para cada nova posição do êmbolo:

$$\Delta V = V_0 - V \quad (2.2)$$

Portanto, usando a Lei de Boyle-Mariotte, temos que:

$$p_0 V_0 = pV = p(V_0 - \Delta V) \rightarrow \Delta V = -\frac{p_0 V_0}{p} + V_0 \quad (2.3)$$

Logo, ΔV e $\frac{1}{p}$ têm uma relação linear do tipo $\Delta V = \frac{a}{p} + b$, com coeficiente angular $a = -p_0 V_0$ e coeficiente linear $b = V_0$. Observe que p é a pressão total sobre o gás, de modo que devemos adicionar à leitura do manômetro a pressão atmosférica $p_0 = 1,01 \times 10^5 Pa = 1,03 kgfcm^{-2}$.

Procedimento experimental

- Passo 1 - Admissão do ar

Com a válvula de admissão do ar aberta, eleve o êmbolo da seringa até que o volume inicial de 20ml seja alcançado. Em seguida, feche a válvula de admissão, confinando o ar no interior da seringa.

- Passo 2 - Teste de vazamento

Girando o parafuso de suporte do êmbolo, comprima o ar no interior da seringa até o volume de 10ml, e anote o valor da pressão manométrica. Mantenha o sistema nessa posição e observe se a leitura do manômetro permanece inalterada. O vazamento de ar acarreta uma diminuição da pressão manométrica com o tempo. Sempre há pequenos vazamentos, mas se eles forem suficientemente pequenos, poderão ser desprezados desde que a sequência de medidas não dure muito tempo. Caso a pressão manométrica diminua muito rapidamente, mesmo com o êmbolo imóvel, verifique a posição da válvula e as conexões da mangueira com a seringa e o manômetro.

- Passo 3 - Medida de p e ΔV

Uma vez certo de que não há vazamentos importantes no sistema, proceda às medidas de p e ΔV . Cada volta no parafuso de suporte do êmbolo corresponde a uma diminuição de 0,44ml no volume do gás. Para a medida de p , lembre-se de adicionar o valor da pressão atmosférica à leitura do manômetro. Faça dez medidas de ΔV e dos valores correspondentes de p , e construa um gráfico de $\Delta V \times \frac{1}{p}$ em uma folha de papel milimetrado. Trace a reta que melhor se ajuste aos pontos experimentais e calcule os coeficientes angular e linear desta reta.

Experimento 3

Calorimetria

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Estudar as trocas de calor entre corpos a temperaturas distintas.
- Medir a capacidade calorífica de um calorímetro.
- Medir o calor específico de uma substância sólida.

Conhecimentos importantes para a realização do experimento

- Definições de capacidade calorífica e calor específico, Aula 9.

Material utilizado

- 1 calorímetro de água (ref. EQ085A/CIDEPe);
- 1 termômetro;
- 1 agitador;
- 1 copo de Becker de 250ml, com 100ml de água gelada;
- 1 copo de Becker de 250ml, com 100ml de água à temperatura ambiente;
- 1 copo de Becker de 250ml vazio;
- 1 proveta graduada de 100ml.

Esquema do experimento

A **Figura 1** mostra de modo esquemático a montagem utilizada para a realização do experimento. Ela consiste de um calorímetro didático transparente de constituição robusta, com vaso externo de vidro resistente ao calor e vaso central de alumínio. Possui ainda um conjunto isolante de separação e

centragem dos frascos em aço inoxidável e silicone, um agitador, uma tampa transparente de apoio periférico para alinhamento e fechamento simultâneo dos vasos, além de um termômetro com escala de -10 a 110°C . Apresenta-se predominantemente em vidro natural, acrílico polido e silicone.

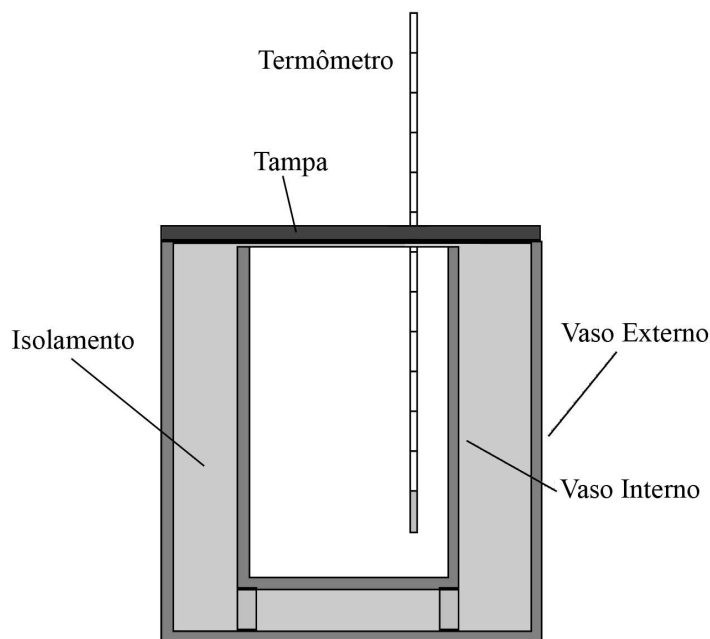


Figura 3.1: Esquema do equipamento utilizado no experimento.

Análise teórica

O presente experimento é dividido em duas etapas. Na primeira, iremos medir a capacidade calorífica do nosso calorímetro. Na segunda, mediremos o calor específico de um bloco de alumínio. Assim sendo, faremos, a seguir, a descrição teórica de cada parte.

Como vimos na Aula 9, a capacidade calorífica nos dá uma informação global sobre as variações de temperatura de um corpo quando este troca calor com sua vizinhança. É, portanto, uma característica do corpo por inteiro. Já o calor específico é uma característica particular de uma substância. Uma vez que o calorímetro é composto de diversas partes com substâncias diferentes, é mais conveniente lidar com sua capacidade calorífica do que tentarmos obter o calor específico de suas diferentes partes. Assim sendo, mediremos, na primeira parte do experimento, a capacidade calorífica do nosso calorímetro, para em seguida realizarmos uma medida do calor específico do alumínio.

Capacidade calorífica do calorímetro

Para determinarmos a capacidade calorífica do calorímetro, iremos, inicialmente, introduzir neste uma massa m_a de água fria e, após algum tempo, medir a temperatura inicial do calorímetro com água fria T_1 . Em seguida, adicionaremos a mesma massa m_a de água morna à temperatura T_2 . Após algum tempo, o equilíbrio térmico é atingido à temperatura T_e . Supondo não haver perdas de calor para o ambiente externo ao calorímetro, a soma do calor cedido pela água morna com o calor recebido pelo calorímetro contendo água fria deve ser nula:

$$m_a c_a (T_e - T_1) + C_{cal} (T_e - T_1) + m_a c_a (T_e - T_2) = 0, \quad (3.1)$$

onde c_a é o calor específico da água e C_{cal} é a capacidade calorífica do calorímetro, que queremos determinar.

Calor específico do alumínio

Nesta parte, determinaremos o calor específico do alumínio. Para tal, vamos, inicialmente, preparar o calorímetro contendo uma massa m_a de água à temperatura ambiente T_{amb} . Em seguida, vamos inserir no interior do calorímetro um bloco de alumínio de massa m_{al} , preparado inicialmente à temperatura T_{al} . Finalmente, mediremos a temperatura de equilíbrio térmico T_e do sistema e obteremos o calor específico do alumínio a partir do balanço das trocas de calor no sistema:

$$m_a c_a (T_e - T_{amb}) + C_{cal} (T_e - T_{amb}) + m_{al} c_{al} (T_e - T_{al}) = 0, \quad (3.2)$$

onde c_{al} é o calor específico do alumínio.

Procedimento experimental

Capacidade calorífica do calorímetro

- Passo 1

Coloque 50ml de **água fria** (cerca de 10°C **abaixo da temperatura ambiente**) no interior do calorímetro.

- Passo 2

Prepare 50ml de **água morna** (cerca de 10°C **acima da temperatura ambiente**).

- Passo 3

Meça e anote a temperatura T_1 do calorímetro com **água fria**.

- Passo 4

Meça e anote a temperatura T_2 da **água morna**.

- Passo 5

Derrame a **água morna** no interior do calorímetro com água fria.

- Passo 6

Agite a mistura de maneira leve e constante, observando o aumento da temperatura do sistema. Meça e anote a temperatura máxima alcançada, isto é, a temperatura T_e de equilíbrio térmico entre o calorímetro e a mistura.

- Passo 7

De posse das medidas de temperatura que você efetuou e sabendo que 1ml de água possui 1g de massa, substitua os dados experimentais na Equação (3.1) e calcule a capacidade calorífica do calorímetro.

- Passo 8

Repita o experimento mais duas vezes e calcule a média dos valores obtidos para a capacidade calorífica do calorímetro. Ao final de cada experimento, esvazie o calorímetro e espere alguns minutos para que ele retorne à temperatura ambiente.

Calor específico do alumínio

- Passo 1

Coloque 100ml de água à temperatura ambiente no interior do calorímetro. Tampe o conjunto e introduza o termômetro no interior do calorímetro.

- Passo 2

Meça e anote a massa m_{al} do bloco de alumínio que será utilizado.

- Passo 3

Coloque o bloco de alumínio no interior do Becker com 100ml de água à temperatura ambiente, e aqueça o conjunto até começar a ebulição da água. Em seguida, aguarde três minutos, agitando levemente o bloco de alumínio no interior da água quente.

- Passo 4

Meça e anote a temperatura inicial T_{al} do bloco de alumínio e da água quente.

- Passo 5

Meça e anote a temperatura ambiente T_{amb} do calorímetro com água.

- Passo 6

Transporte o bloco de alumínio, com o auxílio de um fio, para o interior do calorímetro. Deposite SUAVEMENTE o bloco de alumínio no fundo do calorímetro, tomando MUITO CUIDADO para não quebrar o calorímetro. Tampe o calorímetro e introduza o termômetro no orifício da tampa.

- Passo 7

Agite a mistura de maneira leve e constante, observando o aumento da temperatura do sistema. Meça e anote a temperatura máxima alcançada, isto é, a temperatura T_e de equilíbrio térmico do sistema.

- Passo 8

De posse das medidas de temperatura que você efetuou, substitua os dados experimentais na equação (3.2) e calcule o calor específico do alumínio.

ISBN 85-7648-072-7



9 788576 480723



UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



**Ministério
da Educação**

