FUNDAÇÃO CECIERJ/ CONSÓRCIO CEDERJ
SEEDUC/RJ

FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

MATEMÁTICA 3 º ANO/ 3° BIMESTRE 2013

PLANO DE TRABALHO

GEOMETRIA ANALÍTICA

TAREFA 2

CURSISTA: CLÁUDIA GOMES DE SOUZA
TUTOR(A): DANUBIA DE ARAUJO MACHADO

SANTO ANTÔNIO DE PÁDUA – RJ
2013

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Porque nos torna tão pouco felizes esta maravilhosa ciência aplicada, que economiza trabalho e torna a vida mais fácil? A resposta é simples: porque ainda não aprendemos a nos servir dela com bom senso.

Einstein (1879 – 1955)

Neste plano, a Geometria Analítica será abordada com uma situação problema com o intuito de que o aluno perceba a grande importância da Matemática para o agir do homem frente à sua realidade. Outros problemas serão disponibilizados bem como os roteiros de ação 1 e 2, tem-se a perspectiva da idéia de variação que estimula a maturidade cognitiva, bem como a modelagem matemática dessas situações-problema por intermédio de fórmulas, expressões que tratam o conteúdo.

Com o uso de recursos tecnológicos: computador e multimídias, os alunos serão estimulados a conhecer as tecnologias desenvolvidas para dinamizar o ensino da Matemática. Elas auxiliam a aprendizagem e ajudam na visualização de propriedades da Matemática essenciais para a construção do saber e do pensar matemático.

Os materiais concretos utilizados na confecção de gráficos permitem através de uma construção articular diferentes conceitos de modo prazeroso e criativo, o aluno é o agente capaz de transpor informações do contexto para a construção e vice-versa.

A situação-problema que introduz os conceitos abordados serão retiradas do livro texto adotado, assim como algumas atividades de compreensão e aplicação dos conceitos dados, outras serão retiradas do fórum de discussão que atendem ao objetivo deste plano de contextualização. Serão usados os roteiros de ação 1 e 2, em que primeiro será usado para avaliar o entendimento do conteúdo e o segundo para introduzir e desenvolver eles acrescentarão ao estudo da Geometria Analítica discussão em grupo, ajuda o aluno a fazer conjecturas e construir os conceitos envolvidos de forma didática e dinâmica. Os alunos precisam ser incentivados e motivados durante as atividades propostas, alguns somente as realizam se o professor interferir, e outros mesmo com atendimento individual e até com a monitoria de outros colegas as realizam parcialmente.

Este plano de trabalho terá a duração de 10 aulas num total de 500 minutos distribuídas em módulos de 50 minutos. Serão reservados: 2 aulas para avaliação individual.

DESENVOLVIMENTO

CONCEITOS BÁSICOS E A RETA

- Habilidades H16 - Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos no plano cartesiano. D13 – Identificar a localização de pontos no plano cartesiano.
- Pré-Requisitos Identificar um ponto no plano através das suas coordenadas; Teorema de Pitágoras; módulo de um número real.
- Duração: 4 AULAS : 200 min
- Recursos educacionais utilizados: Folha de atividade, malha, régua, caneta e papel quadriculado, folha com as atividades do roteiro de ação 1.
- Organização da turma: No primeiro momento turma organizada em duplas ou em grupo de três alunos, propiciando trabalho organizado e colaborativo e no segundo momento somente em dupla.
- Objetivos: Representar pontos e segmentos no plano cartesiano, Calcular a distância entre dois pontos usando o Teorema de Pitágoras. Determinar a equação que permite calcular a distância entre dois pontos, conhecendo as suas coordenadas.
- Avaliando: Participação nas atividades, as contribuições dadas, o reconhecimento da função na forma algébrica, a realização do cálculo de equações, a interpretação correta das questões envolvidas no contexto apresentado, a resolução dos exercícios propostos para verificação dos conceitos abordados.
- Metodologia: Esta aula inicia-se com uma situação problema onde o aluno deve representá-la na malha para responder aos questionamentos propostos. Pretende-se que o aluno represente pontos no plano cartesiano bem como avaliar seus conhecimentos sobre os eixos cartesianos. Logo a seguir ele deve identificar a que pontos estão associados cada objeto envolvido na situação problema. Será estimulado o cálculo das distâncias verticais e horizontais. Logo a seguir, será proposto o cálculo da distância entre os pontos dos segmentos que formam um triângulo retângulo e assim introduzir o Teorema de Pitágoras para o cálculo da hipotenusa.

  Apresentar alguns problemas de aplicação para avaliar a estratégia utilizada na situação inicial. Estes problemas envolvem outras ciências como geometria, física, geografia. Em algumas delas um breve contexto ora histórico ora informativo sobre o assunto tratado na questão. Para revisitar o conteúdo e determinar a equação que permite calcular a distância entre dois pontos será utilizado o roteiro de ação 1.

O PONTO

- Visão do aluno do livro texto para esclarecer a metodologia e os objetivos propostos. **Fonte: MODERNA. Conexões com a Matemática/Editora responsável Juliane Matsubara Barroso, obra coletiva, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. 1 ed. . São Paulo: Moderna, 2010. v 3. 82, 83 p.**

1. O ponto

O corpo de bombeiros de certa região florestal recebeu o chamado de um grupo de pessoas que se perdeu em uma caminhada na mata. Para o resgate, há um helicóptero, que está posicionado a 8 km ao norte do centro médico local, conforme indica o esquema da página ao lado. Qual a menor distância que o helicóptero deve percorrer até encontrar as pessoas perdidas?
A menor distância que o helicóptero percorrerá até o local onde se encontra o grupo é dada pela distância entre o ponto A (localização do Helicóptero) e o ponto B (localização do grupo de pessoas), assinalados no esquema.
Sabemos que a menor distância entre dois pontos é a medida do segmento de extremidades A e B.

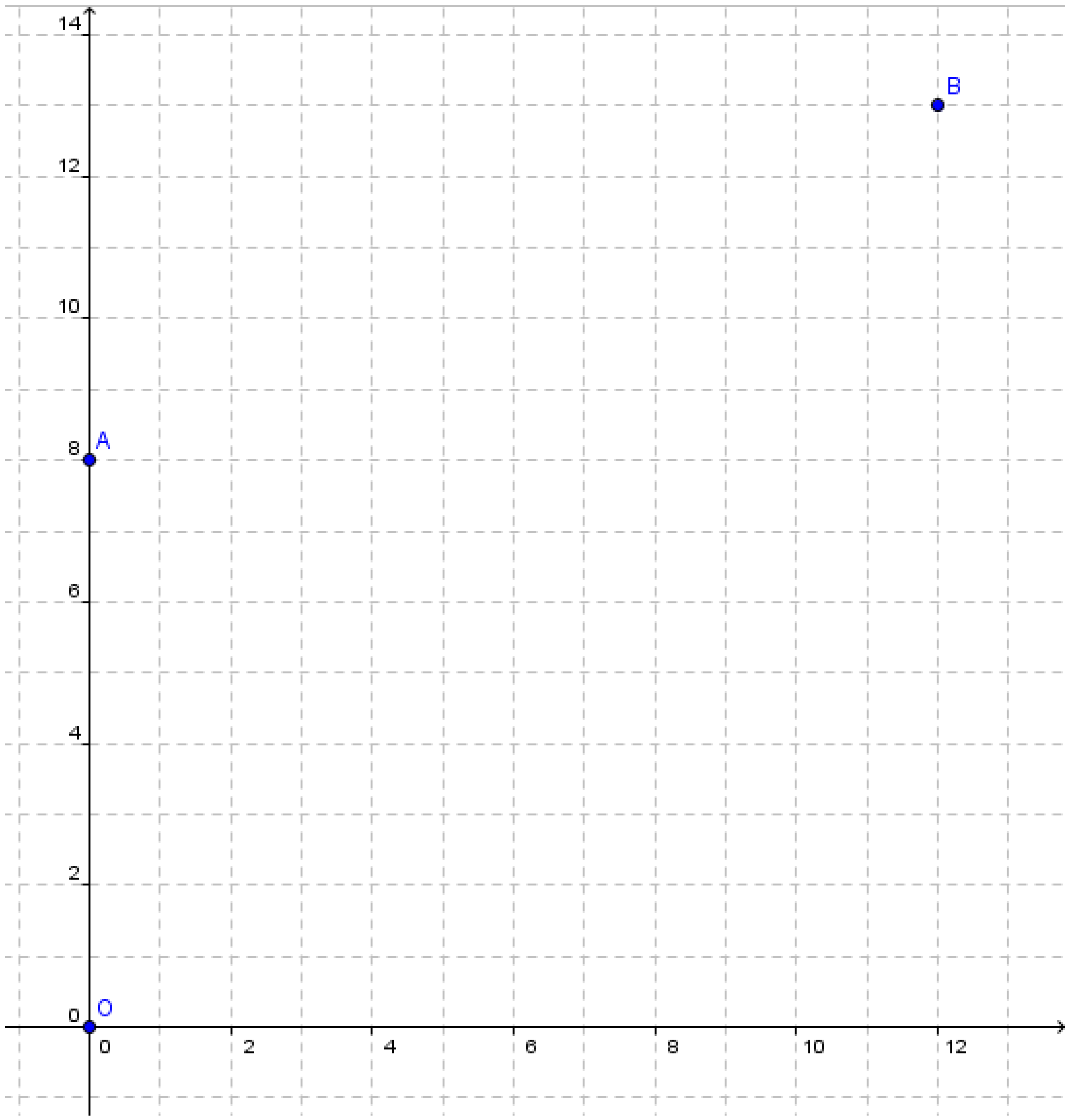
Neste capítulo, estudaremos o sistema cartesiano ortogonal e a distância entre dois pontos – ferramentas que serão usadas na resolução desse problema.
A Geometria Analítica fundamenta-se no estudo de pontos, retas e curvas, por meio do qual é possível transpor inúmeros problemas geométricos para a linguagem algébrica.

1.1 Sistema cartesiano Ortogonal

A Geometria Analítica estuda curvas e figuras por meio de equações, e analisa essas equações através de gráficos, estabelecendo relações com a Álgebra e a geometria, plana e espacial. Assim, uma figura geométrica pode ter suas propriedades analisadas e estudadas por processos algébricos, o que facilita a resolução de vários problemas.
A seguir, faremos um estudo do ponto sob enfoque da Geometria Analítica.
O sistema ortogonal cartesiano ortogonal é formado por dois eixos perpendiculares entre si. O eixo x (horizontal) é o eixo das abscissas, e o eixo y (vertical) é o eixo das ordenadas. Os eixos se cruzam no ponto Q(0,0), denominado origem das coordenadas do plano cartesiano.
Podemos localizar qualquer ponto P do plano cartesiano por meio de um único par ordenado (x,y) de números reais e, reciprocamente, dado um par ordenado (x,y) de números reais, a este fica associado, um único ponto P pertencente ao plano.

ATIVIDADE 1

1)Copie o esquema de seu livro para a malha disponibilizada.
Agora, relacione cada ponto ao objeto representado na malha.



O ponto O (Localização do centro médico) à origem das coordenadas do plano artesiano (0,0);
O ponto A (localização do helicóptero) ao par ordenado (0,8);
O ponto B (localização do grupo de pessoas) ao par ordenado (12,13).

Livro texto pág. 84.

O pai da Filosofia moderna

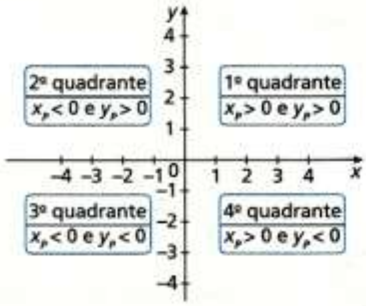
O plano cartesiano é também conhecido por sistema de coordenadas cartesianas. O termo *cartesiano* vem do nome do idealizador desse sistema de localização de pontos no plano, o filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), considerado por muitos o pai da Filosofia moderna. No livro *O caderno secreto de Descartes*, misto de biografia e aventura investigativa, o autor retrata a infância e a formação de Descartes e os encontros com filósofos e matemáticos que influenciaram seu pensamento. Além disso, apresenta controvérsias religiosas e políticas da época, escritos do filósofo que não foram publicados e as circunstâncias suspeitas de sua morte.

O caderno secreto de Descartes, de Amir D. Aczel. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2007. 232 p.

REPRODUÇÃO

Quadrantes

Os eixos do plano cartesiano dividem esse plano em quatro quadrantes, numerados no sentido anti-horário. A figura abaixo indica essa numeração e as condições para que um ponto *P* pertença ao quadrante.



ADILSON SECCO

2) Responda as questões a seguir com seu grupo:

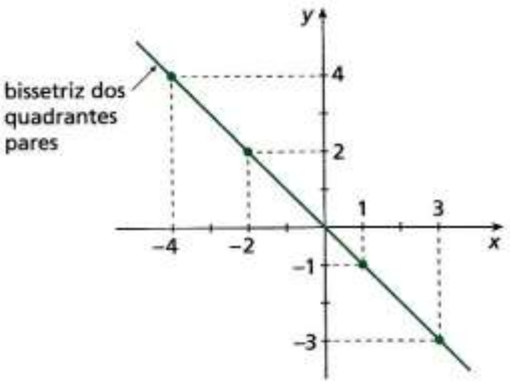
a) Em que quadrante está localizado no ponto A, que tem abscissa diferente de zero e ordenada – $\sqrt{3}$?

No 3º quadrante ou no 4º quadrante.

b) Como podemos escrever as coordenadas de um ponto P qualquer que está localizado na bissetriz dos quadrantes pares?

Troque ideias com o seu grupo e consulte a página 84 do seu livro observe o gráfico e analise novamente a pergunte.

Já a bissetriz do 2º e do 4º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes pares**.

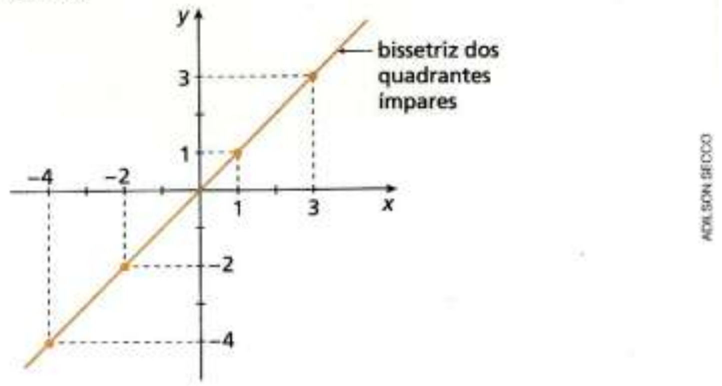


P(-k, k), k $\in$ R

c) Como podemos escrever as coordenadas de um ponto P qualquer que está localizado na bissetriz dos quadrantes ímpares?

Troque ideias com o seu grupo e consulte a página 84 do seu livro observe o gráfico e analise novamente a pergunte.

No plano cartesiano, a bissetriz do 1º e do 3º quadrantes é chamada de **bissetriz dos quadrantes ímpares**.



P(k, k), k∈ R

d)Construa na malha disponibilizada, um plano cartesiano e represente nele os pontos P(8,0) e Q(0,6).

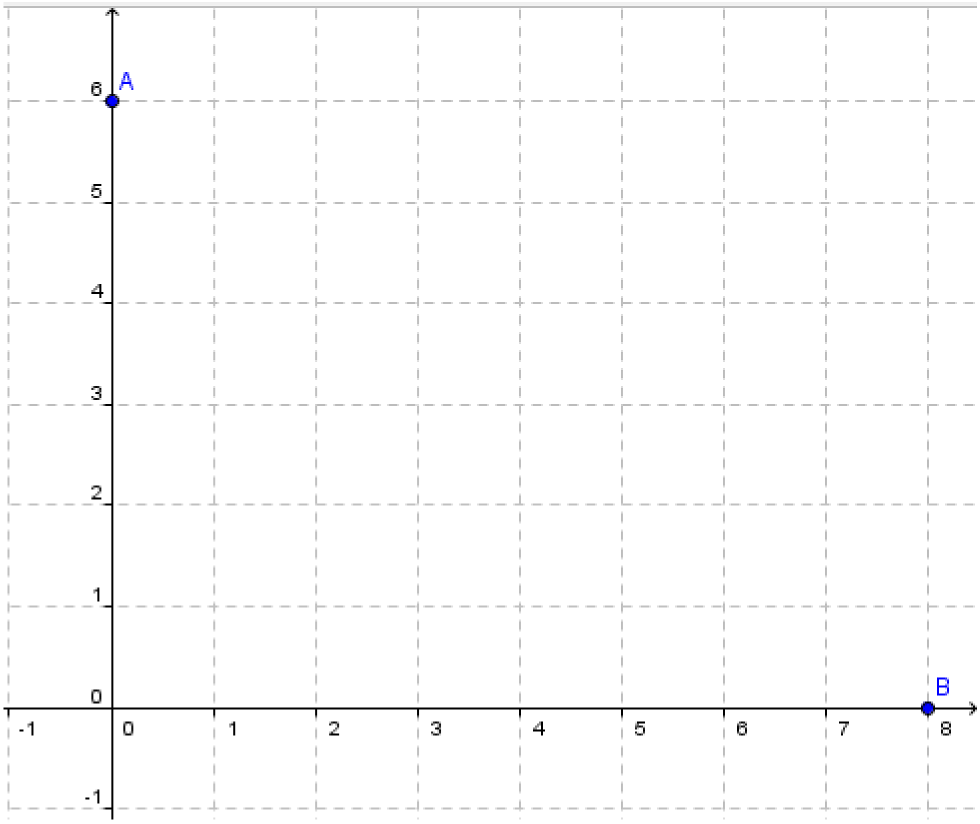


Figura feita no geogebra pelo autor deste PT

e)Calcule a distância entre o ponto P e a origem do plano cartesiano.

D=8

f)Calcule a distância entre o ponto Q e a origem do plano cartesiano.

D=6

g)Elabore uma estratégia para determinar a medida do segmento determinado pelos pontos P e Q representados no plano cartesiano. Você pode resolver esse item com seu grupo mas também pode trocas com os demais colegas.

Espera-se que os alunos utilizem o Teorema de Pitágoras.

h)Calcule a distância entre os pontos P e Q usando a estratégia elaborada n item anterior.

D= 10

i)Escreva, em função de a e b, a medida de um segmento que tem como extremidade os pontos A(a,0) e B(0,b).

Resposta: medida = $\sqrt{a^2 + b^2}$

1.2 Distância entre dois pontos

Em muitas situações cotidianas, precisamos conhecer a distância entre dois pontos. Um exemplo é o problema que estamos analisando, no qual foram fornecidas as localizações de um grupo de pessoas na floresta (ponto B), a serem resgatadas por um helicóptero (ponto A). Uma pergunta relevante é: a que distância o helicóptero está do grupo de pessoas?

Para responder à questão, considere no plano cartesiano feito por você no início da unidade.

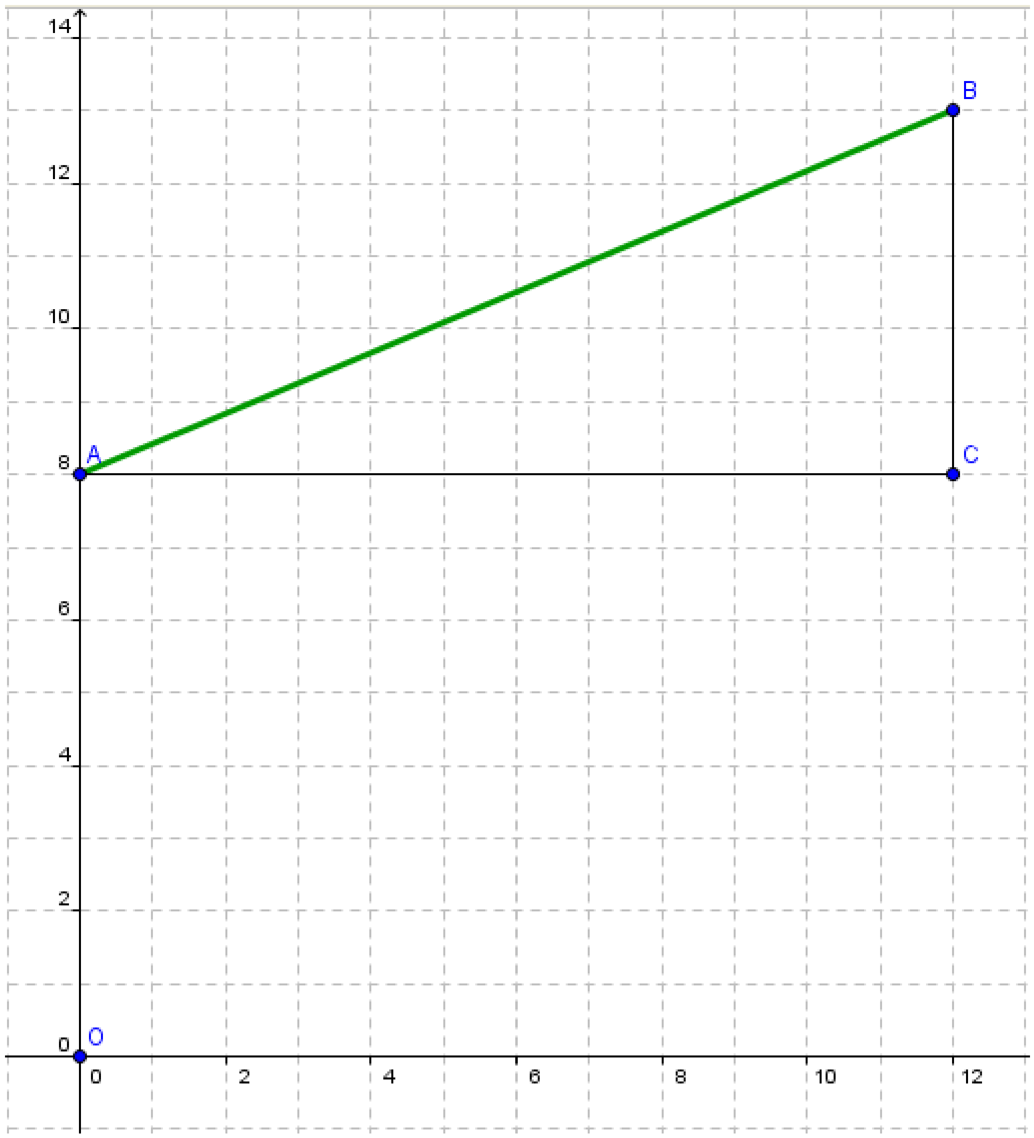
I)Marque um ponto auxiliar C(12,8). Ligue os pontos AC, AB e AB representando-os como segmentos de reta.

II)Determine a distância do ponto A ao C (dA,C).

III) Determine a distância do ponto B ao C (dB,C).

IV) Determine a distância do ponto A ao B (dA,B).

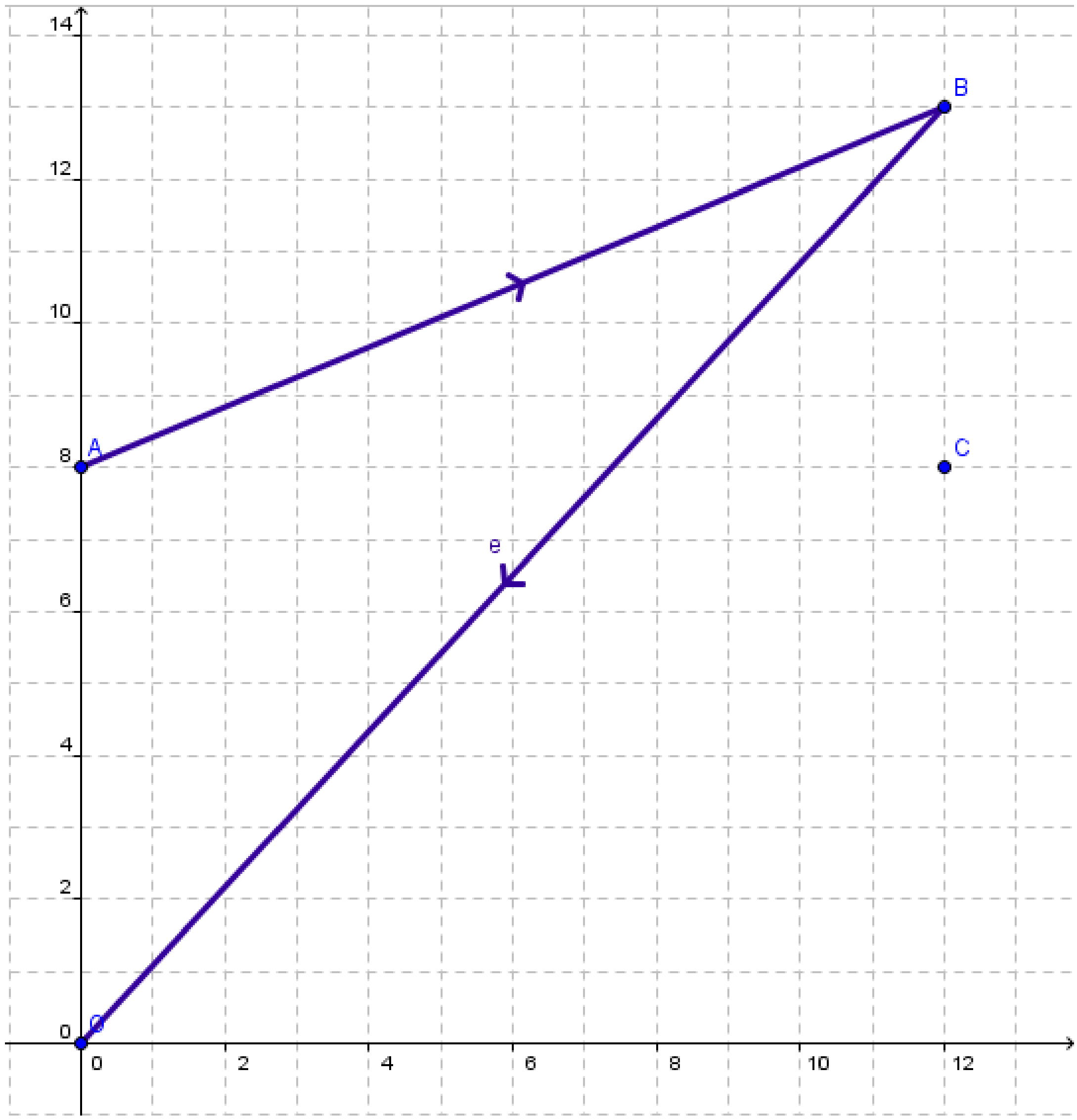
Os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo retângulo. Agora determine a distância pedida através do Teorema de Pitágoras.



O helicóptero está 13km distante do grupo de pessoas.

REFLITA

Qual seria a distância percorrida pelo helicóptero da sua localização inicial ao centro médico local, passando pelo ponto de resgate das pessoas?



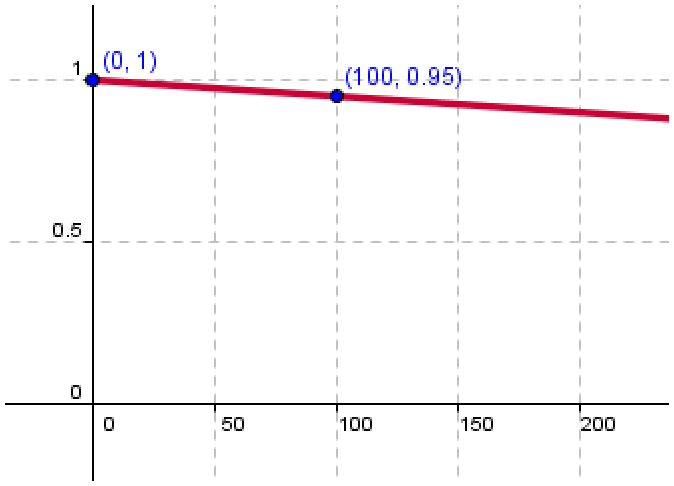
A distância percorrida seria 13 + 17,69 = 30,69 km aproximadamente.

VAMOS APLICAR O QUE APRENDEMOS

Fonte: MODERNA. Conexões com a Matemática/Editora responsável Juliane Matsubara Barroso, obra coletiva, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. 1 ed. . São Paulo: Moderna, 2010. v 3. 124 p.

01)(Adaptada) A pressão atmosférica diminui conforme subimos em relação ao nível do mar, onde a pressão é de 1 atm. A 100 metros de altura, a pressão é de 0,95 atm. Se a variação de pressão é linear, represente num plano cartesiano essa função com os pontos (0,1) e (100; 0,95) e determine a distância entre os dois pontos.

Resposta:



0A distância ente A e B, representada pelo segmento AB é 100.

Fonte: por SANDRA MARA ROCHA DE SOUZA RIO DE JANEIRO - sábado, 24 agosto 2013, 23:41 disponível em: http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ava22/mod/forum/discuss.php?d=12763

02) (Adaptada) Um engenheiro quer construir uma estrada de ferro nos pontos de coordenadas (2,3) e (4,7), devendo a trajetória da estrada ser retilínea, Qual é o comprimento em quilômetros dessa estrada de ferro?

Resposta: O comprimento desta estrada de ferro é de aproximadamente 4,47 km.

Fonte: por SANDRA WILLIAM MARQUES NITEROI - domingo, 25 agosto 2013, 21:34

prova do CEFET-RN/2008

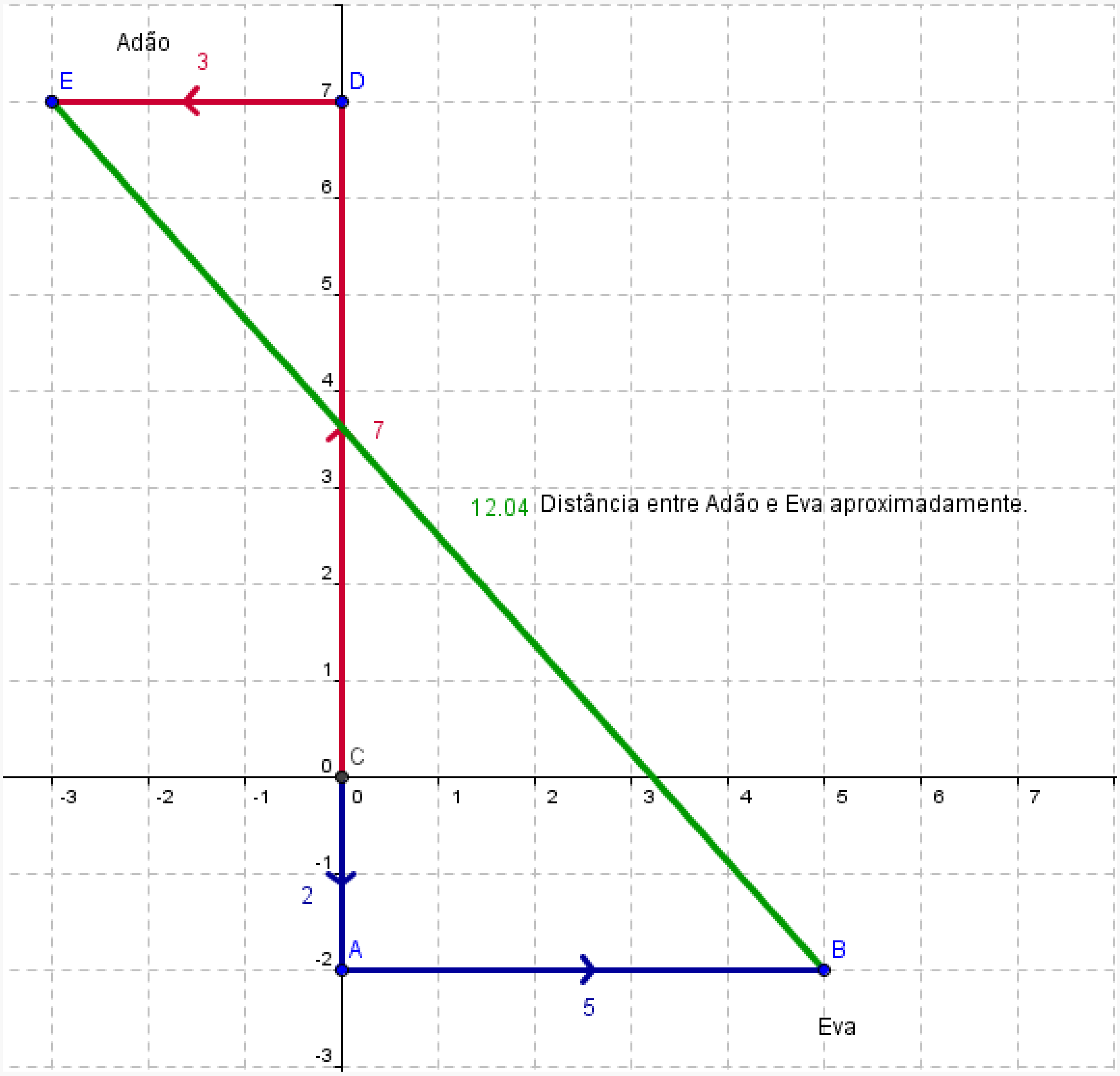
03)Leia o texto com atenção e volte na página do seu livro texto de número 83 e se oriente pela rosa dos ventos quanto às posições Norte, Sul, Leste e Oeste.

O que são os pontos cardeais?

Como o próprio nome diz: são pontos e significam pontos principais ou pontos de referência. Através deles é possível localizar qualquer lugar sobre a superfície da Terra, são eles: o Norte e o Sul que apontam na direção dos pólos terrestre; o Leste e o Oeste que apontam para o lado do nascer e do por do Sol, cruzando a linha Norte-Sul. CUIDADO, o Leste e o Oeste não apontam sempre para o ponto onde o Sol nasce ou se põe e sim para o lado do nascente ou lado do poente. Durante o ano, o Sol nasce em pontos diferentes do lado do nascente e se põe em pontos diferentes do poente. Por isso, não podemos dizer que o Sol nasce sempre a Leste e se põe sempre a Oeste. Dependendo da época do ano a diferença, entre o nascente (ponto onde o Sol nasceu) e o Leste verdadeiro, é grande. (http://www.cdcc.usp.br/cda/ensino-fundamental-astronomia/parte1a.html)

Entretanto, é sabido que a menor distância entre dois pontos na superfície da Terra só pode ser representada com uma reta.(http://pt.wikipedia.org/wiki/Ponto_cardeal).

"Dois amigos, Adão e Eva, encontram-se na origem de um sistema cartesiano ortogonal. Eles só podem dar um passo de cada vez para Norte, Sul, Leste ou Oeste. Cada passo é representado, nesse sistema, pelo deslocamento de uma unidade para uma das direções mencionadas anteriormente. Eva deu 2 passos para o Sul, depois deu 5 passos para o Leste e parou. Adão deu 7 passos para o Norte, depois deu 3 passos para o Oeste, mais 3 passos para o Sul e parou. Após esses passos, qual será a distância entre Adão e Eva?"



AGORA VAMOS AVALIAR O QUE APRENDEMOS?

ROTEIRO DE AÇÃO 1

ATIVIDADE 1

1. Observando a Figura 1, identifique as coordenadas dos pontos indicados e complete as Tabelas 1, 2 e 3.

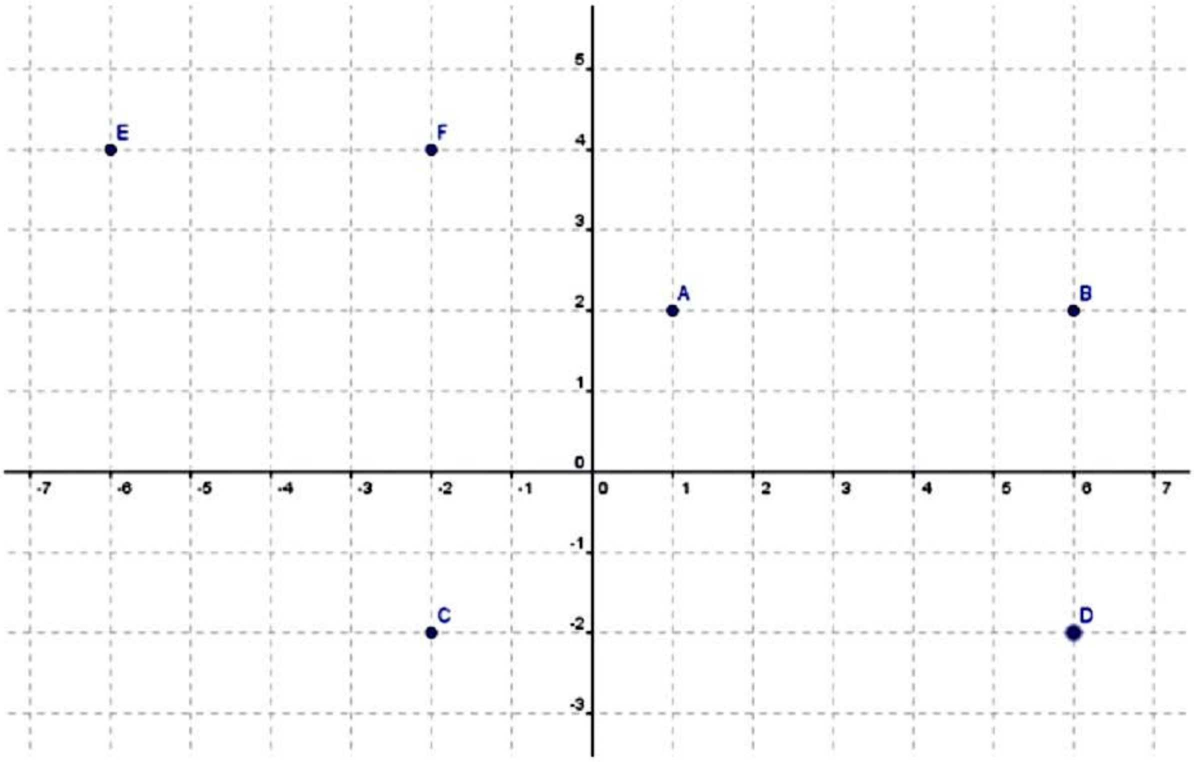


Figura 1

Ponto	Coordenada
A	(,)
B	(,)
Tabela 1	

Ponto	Coordenada
C	(,)
D	(,)
Tabela 2	

Ponto	Coordenada
E	(,)
F	(,)
Tabela 3	

Os valores esperados são:

Ponto	Coordenada
A	(1, 2)
B	(6, 2)
Tabela 1	

Ponto	Coordenada
C	(-2, -2)
D	(6, -2)
Tabela 2	

Ponto	Coordenada
E	(-6, 4)
F	(-2, 4)
Tabela 3	

2. Considerando como unidade de medida o tamanho do quadrado da malha; determine a distância entre os pares de pontos: A e B, C e D, E e F, C e F, D e B. Isto é, calcule o comprimento dos segmentos AB, CD, EF, CF e DB, mostrados nas Figuras 2 e 3. Complete as Tabelas 4 e 5 para organizar as informações.

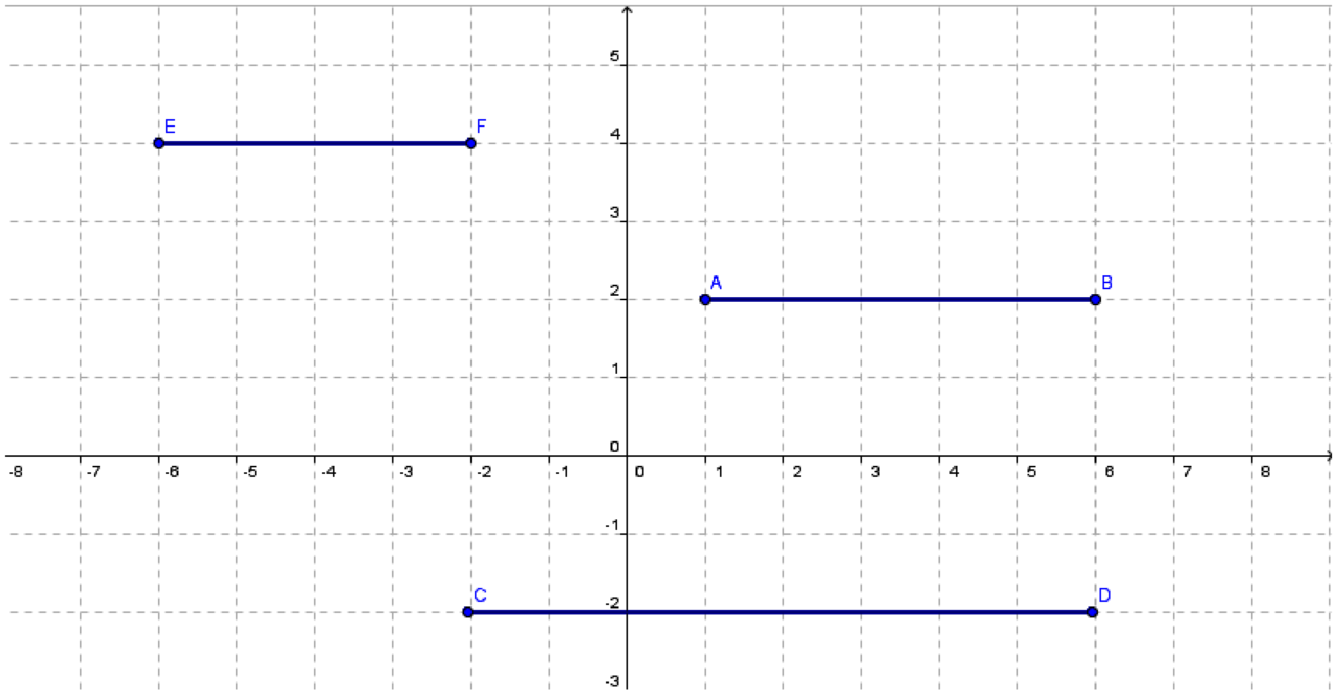


Figura 2, feita pelo autor do PT

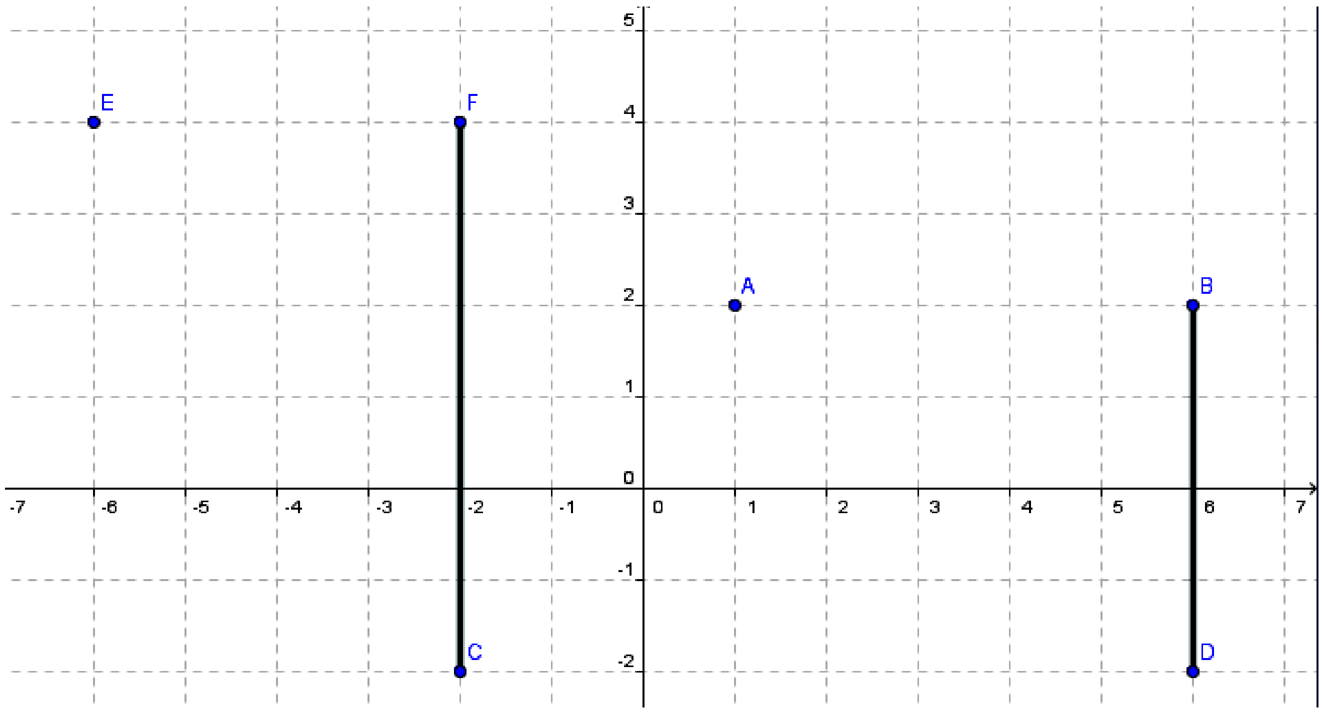


Figura 3, feita pelo autor do PT

Segmento	Medida
AB	5
CD	
EF	
Tabela 4	

Segmento	Medida
DB	
CF	
Tabela 5	

Os valores esperados são:

Segmento	Medida
AB	5
CD	8
EF	4
Tabela 4	

Segmento	Medida
DB	4
CF	6
Tabela 5	

3. Para encontrar as distâncias pedidas no item 2, você deve ter contado o número de quadrados existentes entre os pontos, pois a medida dos lados de cada quadrado da malha apresenta comprimento unitário. Esse procedimento pode ser confirmado algebricamente, fazendo apenas a diferença entre os valores das coordenadas que apresentam valores diferentes. Verifique esse fato e complete as Tabelas 7, 8, 9 e 10, seguindo o exemplo mostrado na Tabela 6, onde d(A, B) representa a distância entre os pontos A e B (o comprimento do segmento AB).

Ponto	Coord.
A	(1 , 2)
B	(6 , 2)
d(A, B) = 6 - 1 = 5	
Tabela 6	

Ponto	Coord.
C	(,)
D	(,)
D(C, D) =	
Tabela 7	

Ponto	Coord.
E	(,)
F	(,)
D(E, F) =	
Tabela 8	

Ponto	Coord.
C	(,)
F	(,)
D(C, F) =	
Tabela 9	

Ponto	Coord.
B	(,)
D	(,)
D(B, D) =	
Tabela 10	

Neste último exercício do item 3, para manter o sinal positivo no valor da distância, foi necessário manter uma ordem na subtração. Dessa forma, as coordenadas dos pontos que se encontram à direita devem ser subtraídas das coordenadas dos pontos que se encontram à esquerda, assim como, as coordenadas dos pontos que se encontram na parte superior devem ser subtraídas das coordenadas dos pontos que se encontram na parte inferior. Para simplificar esse procedimento, basta tomar apenas o módulo da diferença das coordenadas de valores diferentes. Veja o exemplo:

$$d(A, B) = |6 - 1| = |1 - 6| = 5.$$

No exercício do item 3, é importante chamar a atenção para o fato de estarmos calculando medidas. Por isso, precisamos de valores positivos. Nesse sentido, utilizar o módulo é muito apropriado. Os valores esperados são:

Ponto	Coord.
A	(1 , 2)
B	(6 , 2)
d(A, B) = 6 - 1 = 5	
Tabela 6	

Ponto	Coord.
C	(-2 , 2)
D	(6 , 2)
D(C, D)= 6 -(-2)= 8	
Tabela 7	

Ponto	Coord.
E	(-6 , 4)
F	(-2 , 4)
D(E, F)= 6 -(-2)= 8	
Tabela 8	

Ponto	Coord.
C	(-2 ,-2)
F	(-2, 4)
D(C, F)= 4 -(-2)= 6	
Tabela 9	

Ponto	Coord.
B	(6 , 2)
D	(6 ,-2)
D(B, D)= 2 -(-2)= 4	
Tabela 10	

4. Você seria capaz de escrever uma fórmula para distância entre pontos? Pense nos exemplos que vimos até agora, troque ideias com seus colegas e registre a seguir suas conclusões.

____

____.

5. Na Tabela 11, você deve escrever uma equação que permita determinar a distância entre dois pontos que possuem a mesma abscissa. Na Tabela 12, por sua vez, você deve escrever uma equação que permita calcular a distância entre dois pontos que possuem a mesma ordenada. Lembre-se: o módulo é importante, pois estamos tratando de medida!

Ponto	Coordenada
M	(x_1 , y_1)
N	(x_1 , y_2)
d(M, N) = | |	
Tabela 11	

Ponto	Coordenada
P	(x_1 , y_1)
Q	(x_2 , y_1)
d(P, Q) = | |	
Tabela 12	

Neste momento, esperamos que os alunos cheguem a:

$$d(M, N) = |y_1 - y_2| \text{ e } d(P, Q) = |x_1 - x_2|$$

Acreditamos que eles sejam capazes, afinal, já estão concluindo o ensino médio. De qualquer maneira, é importante que você se certifique de que todos chegaram à solução. Se necessário, recorra a outros exemplos numéricos, mas não deixe de incentivá-los a expor suas opiniões e raciocínios.

ATIVIDADE 2

Nesta segunda atividade trabalharemos com a construção de triângulos retângulos cujas hipotenusas são definidas por dois pontos dados e cujos catetos são paralelos aos eixos coordenados.

É importante destacar que essa construção será sempre possível, desde que os pontos fornecidos não se encontrem na mesma linha horizontal ou na mesma linha vertical. Veja, como exemplo, as Figuras 4 e 5.

Figura 4, feita pelo autor deste PT

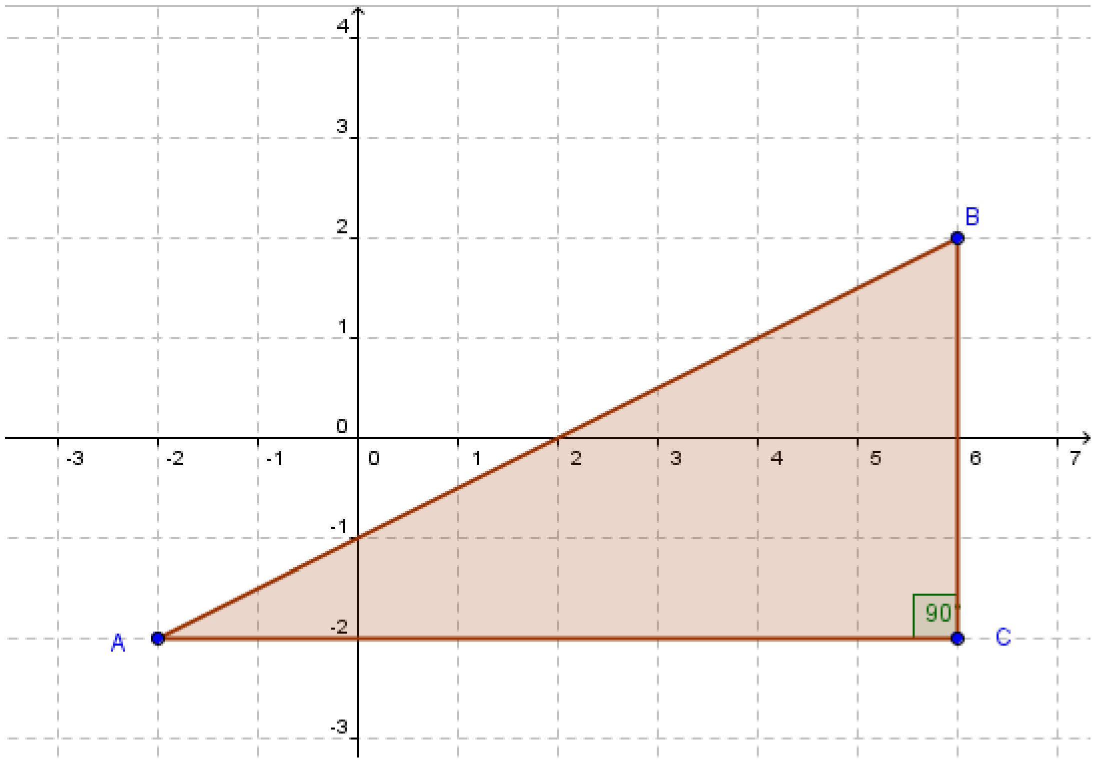


Figura 5, feita pelo autor deste PT

Como você deve ter observado, na Figura 5 foi necessário inserir um ponto auxiliar (ponto C).

Esse ponto se encontra na linha horizontal que passa pelo ponto A e na linha vertical que passa pelo ponto B. Isso nos garante que temos um ângulo reto nesse vértice.

1. Utilizando um papel quadriculado com os eixos coordenados desenhados, identifique e marque os pontos A(3,-8), B(-5, -2), E(7, 10) e D(4,5).
2. Ligue os pontos A e B através de um segmento de reta. Faça o mesmo para os pontos D e E.
3. Feito isso, desenhe dois triângulos retângulos cujas hipotenusas são definidas pelos segmentos AB e DE, com catetos paralelos aos eixos coordenados. Em seguida, marque os pontos auxiliares C e F, os quais completam o terceiro vértice em cada um dos triângulos desenhados.

Nas Tabelas 13 e 14, indique as coordenadas dos pontos C e F, respectivamente.

Triângulo 1	
A	(-3,8)
B	(-5,-2)
C	(,)
Tabela 13	

Triângulo 2	
E	(7,10)
D	(4,5)
F	(,)
Tabela 14	

Compare os seus resultados com os de seus colegas.

Professor, neste momento, é importante comentar com os alunos que é sempre possível construir dois triângulos retângulos com as características exigidas nos itens 1, 2 e 3. Você pode apresentar a Figura 6, como exemplo.

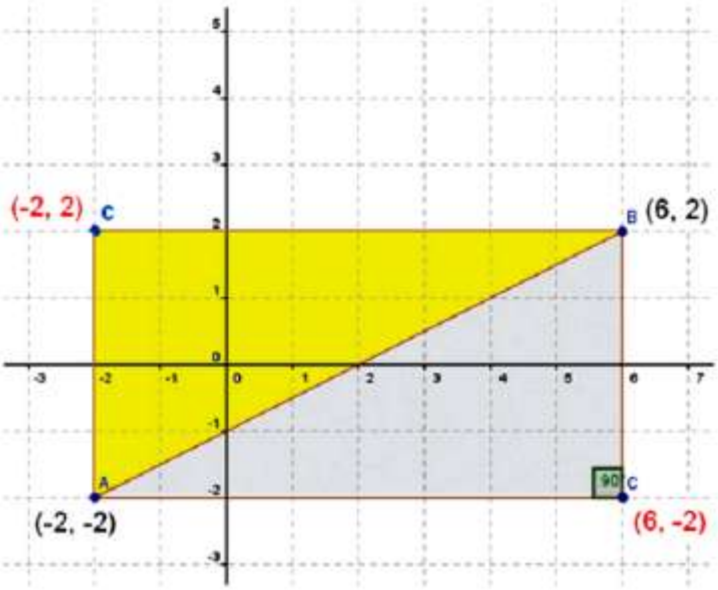
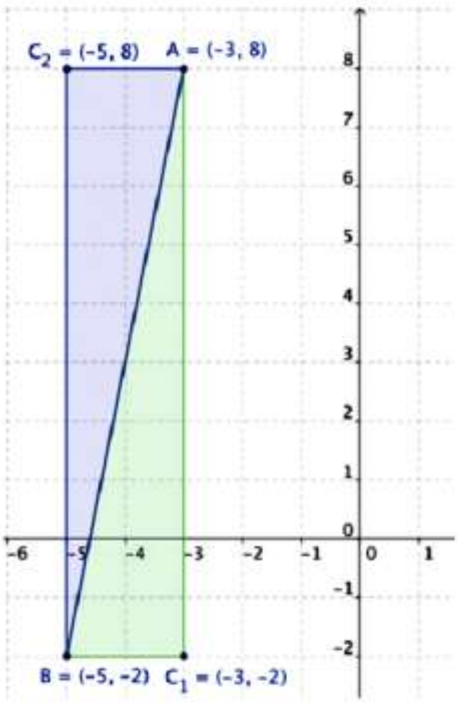
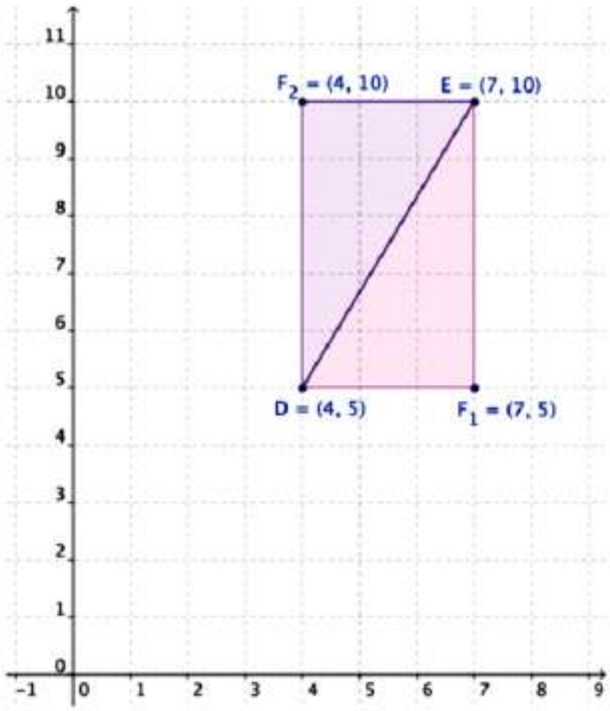


Figura 6

Com os dados fornecidos nos itens 1, 2 e 3, seus alunos devem chegar aos seguintes triângulos:



Triângulo 1



Triângulo 2

Como destacamos acima, para cada par de pontos, temos dois triângulos possíveis com as características citadas.

4. Observe os triângulos retângulos ABC e DEF desenhados no item anterior. Como você determinaria a distância entre os pontos A e B e entre os pontos D e E? Troque ideias com seus colegas e registre a seguir suas conclusões.

____

____.

Esperamos que os alunos tenham conseguido descobrir que a distância entre dois pontos pode ser calculada usando o Teorema de Pitágoras. Para isso, precisarão utilizar a fórmula já encontrada na atividade anterior para determinar a medida dos catetos. Neste momento, é importante destacar que os alunos podem obter esses valores observando a figura. Isso não está errado. Muito pelo contrário, mostra que eles estão pensando a respeito do que estão fazendo.

Incentive a participação dos alunos, sobretudo, na exposição de suas opiniões, propiciando uma discussão entre eles para que o seu aprendizado tenha, realmente, significado.

5. Determine a medida dos lados de cada um dos triângulos, utilize as Tabelas 15 e 16 para registrar os valores.

Triângulo 1	
Lado	**Medida**
AC	d(A,C) = | |
BC	d(B,C) = | |
AB	$d(A,B) = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} =$

Tabela 15

Triângulo 2	
Lado	**Medida**
DF	d(D,F) = | |
FE	d(F,E) = | |
DE	$d(D,E) = \sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2} =$

Tabela 16

Como para cada par de pontos temos dois triângulos. Esteja atento aos valores que cada aluno irá encontrar, pois esses valores não são únicos. Na tabela a seguir, colocamos os valores possíveis de serem encontrados pelos alunos.

Triângulo 1	
Lado	**Medida**
AC	$d(A, C_1) = \|8 - (-2)\| = 10$ $d(A, C_2) = \|-5 - (-3)\| = 2$
BC	$d(B, C_1) = \|-5 - (-3)\| = 2$ $d(B, C_2) = \|8 - (-2)\| = 10$
AB	$d(A,B) = \sqrt{(10)^2 + (2)^2} = \sqrt{104}$
Tabela 15	

Triângulo 2	
Lado	**Medida**
DF	$d(D, F1) = \|4 - 7\| = 3$ $d(D, F2) = \|10 - 5\| = 5$
FE	$d(F1, E) = \|10 - 5\| = 5$ $d(F2, E) = \|4 - 7\| = 3$
DE	$d(D,E) = \sqrt{(5)^2 + (3)^2} = \sqrt{34}$
Tabela 16	

6. Observando a Figura 7 e lembrando o que fizemos até agora, você seria capaz de determinar as coordenadas do ponto C indicado na figura? Converse com seus colegas sobre as coordenadas encontradas e chegue, junto com eles, a um valor único.

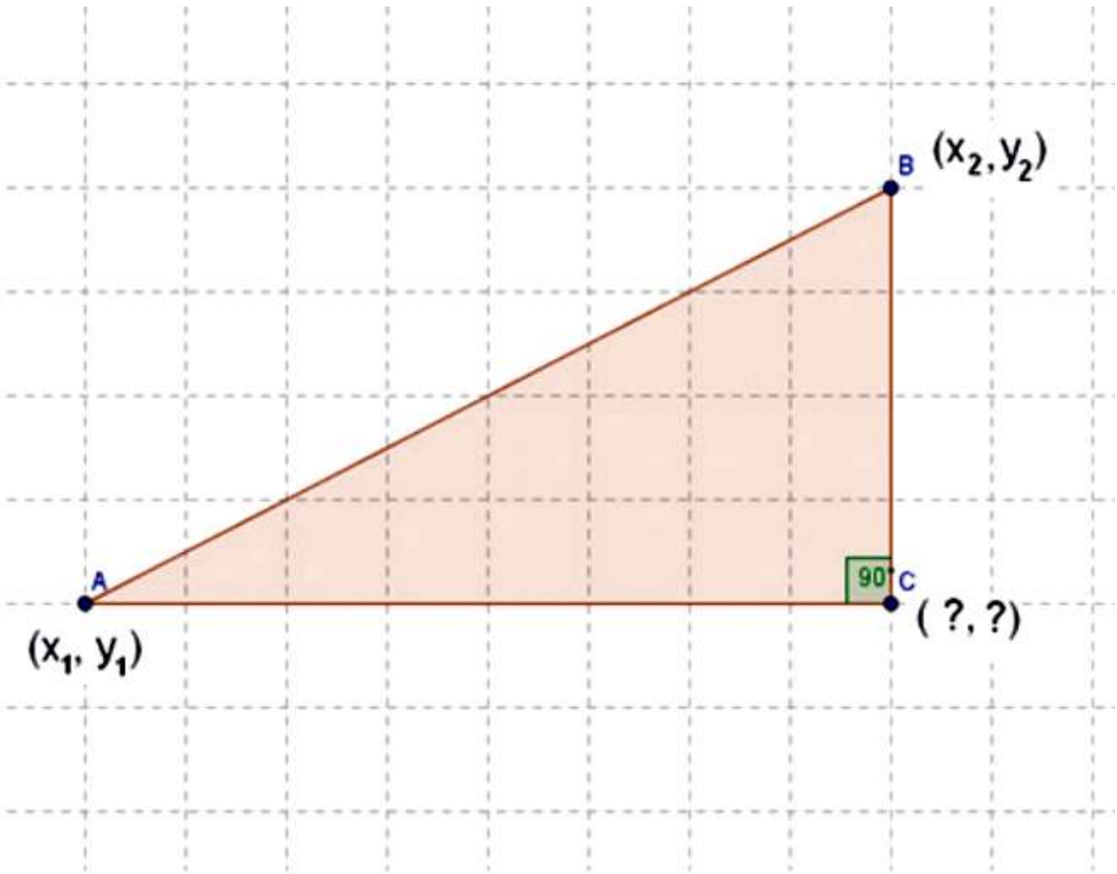


Figura 7

Quanto ao item 6, os alunos devem chegar a $C=(x_2, y_1)$. Se você perceber que seus alunos não conseguem chegar a esse valor, faça com a turma mais exemplos numéricos. O desenho dos eixos coordenados também pode ajudar.

7. Considerando dois pontos A e B, mostrados na Figura 7, de coordenadas (x1,y1) e (x2, y2), respectivamente, e o ponto C encontrado no item anterior, determine a medida dos catetos AC e BC.-

____

____.

8. Usando o Teorema de Pitágoras, encontre a expressão que calcula a distância entre os pontos A e B. Complete as suas respostas nas Tabelas 17 e 18.

Triângulo ABC	
A	(x_1, y_1)
B	(x_2, y_2)
C	(,)

Tabela 17

Triângulo ABC	
Lado	**Medida**
AC	d(A,C) = | |
BC	d(B,C) = | |
AB	d(A,B) = $\sqrt{(\quad)^2 + (\quad)^2}$ =

Tabela 18

Neste item 8, os alunos devem usar a propriedade

$$|x_1 - x_2|^2 = |x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 \text{ e } |y_1 - y_2|^2 = |y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$$

para chegar à expressão:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Essa é a equação que determina a distância entre dois pontos quaisquer $A(x_1; y_1)$ e $B(x_2; y_2)$, no plano cartesiano.

Comente com os seus alunos sobre a grande importância, na geometria analítica, da equação que calcula a distância entre dois pontos. Comente que esta é usada em diversas aplicações, tais como encontrar equações de diversos lugares geométricos. Sempre a álgebra seguindo junto com a geometria. Aproveite ainda para trabalhar mais outros exemplos, para enriquecer e aprimorar os conteúdos apreendidos neste roteiro.

Encontrando a Equação de uma Reta

- Habilidades: – H15 – Identificar a equação de uma reta apresentada, a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação. Identificar e determinar as equações geral e reduzida de uma reta.
- Pré-Requisitos: Identificar um ponto no plano, através das suas coordenadas. Desenhar uma reta definida por dois pontos. Conhecer e identificar o ângulo de inclinação de uma reta. Conhecer a definição da razão trigonométrica tangente. Identificar e saber calcular esta razão em triângulos retângulos.
- Duração: 2 AULAS : 100 min
- Recursos educacionais utilizados: Folha de atividade, régua, caneta, papel quadriculado, transferidor, régua de 30 cm e calculadora científica.
- Organização da turma: Turma organizada em grupos de dois ou três alunos, propicianDo trabalho organizado e colaborativo.

- Objetivos: Relembrar os conceitos sobre o ângulo de inclinação definido por uma reta. Compreender o conceito de coeficiente angular de uma reta. Perceber que, para o cálculo do coeficiente angular e a equação de uma reta é necessário e suficiente, conhecer as coordenadas de dois pontos dessa reta.

Cálculo do coeficiente angular de uma reta conhecendo dois pontos e a equação de uma reta.

ROTEIRO DE AÇÃO 2

Calculando o Coeficiente Angular

1)Fazendo uso de um papel quadriculado, com os eixos coordenados desenhados na parte central e utilizando como unidade de medida o tamanho da malha retangular do papel (como é visto na figura 1), marque os pontos A(2,4) e B(11,10). Em seguida, usando uma régua e uma caneta, faça o desenho de uma reta definida por estes dois pontos.

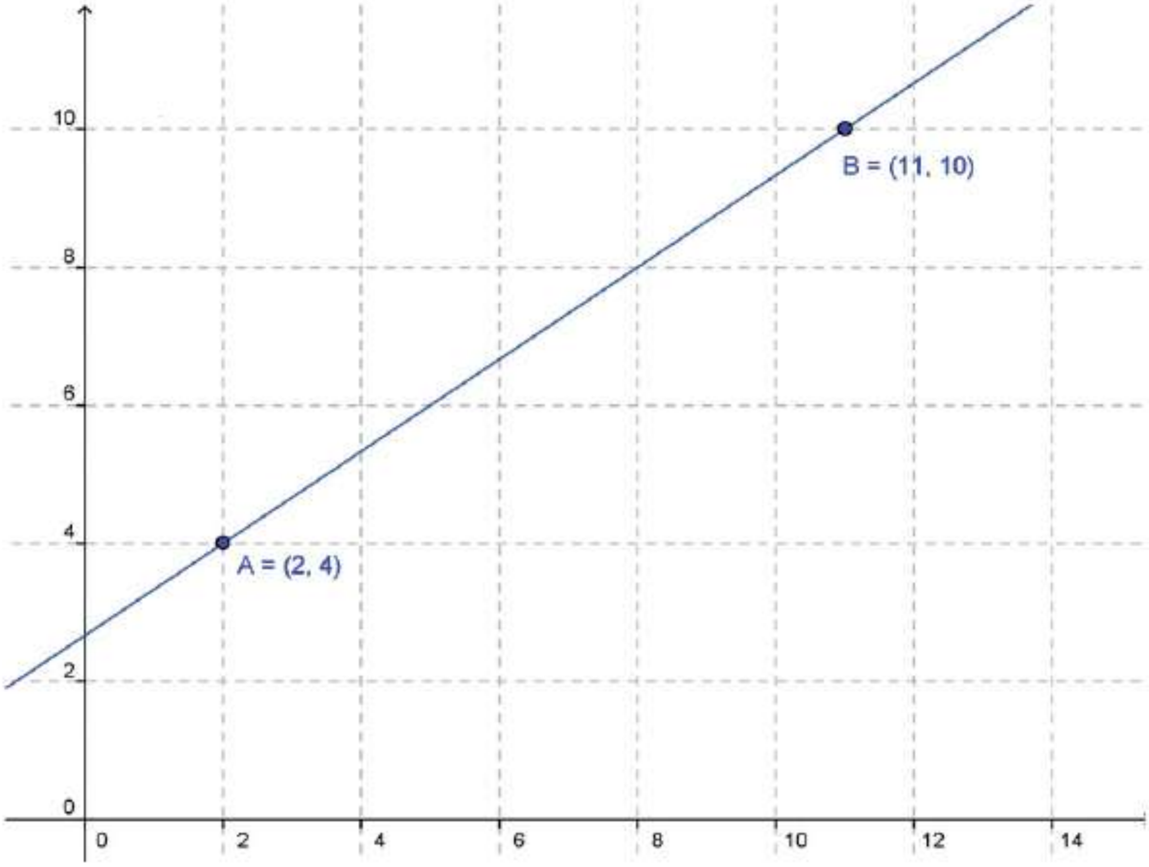


Figura 1
Fonte: Figura feita pelo autor.

Professor, neste momento é válido relembrar com o seu aluno a seguinte definição:

Dados $A(x_A, y_A)$ *e* $B(x_B, y_B)$, *denominamos o coeficiente angular da reta definida por estes dois pontos, a seguinte expressão:*

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\textit{Variação das ordenadas}}{\textit{Variação das abscissas}}.$$

No cálculo do coeficiente angular, é importante ter cuidado com a ordem da posição dos valores na subtração, pois isto pode levá-lo a cometer um erro muito comum de sinal, observe:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\left(\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}\right).$$

Portanto,

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \neq \frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$$

2)Calcule o coeficiente angular *m* da reta definida pelos pontos A(2,4) e B(11,10) e registre o resultado a seguir.

____
____.

Esperamos que o seu aluno conclua que:

$$m = \frac{10-4}{11-2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

3)Utilizando o mesmo papel quadriculado do item 1, marque os pontos C(5,6), D(-4,0) e E(-10,-4).

4)Os pontos C, D e E, do item 3, se encontram na reta desenhada?

-
____
____.

Esperamos que os alunos concluam que os pontos C, D e E estão sobre a reta desenhada no papel quadriculado. Certifique-se de que todos os alunos marcaram os pontos e a reta de forma correta. Se a reta não for traçada de forma correta os pontos C, D e E podem não ficar sobre esta reta. Nesse caso, a sua intervenção é fundamental.

5)Calcule o coeficiente angular das retas definidas pelos pares de pontos indicados no item 3 e complete a Tabela1, a seguir:

Pares de Pontos	Coeficiente Angular
Pontos C e D	$m_1 = \dfrac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \dfrac{[\ ]-[\ ]}{[\ ]-[\ ]} = [\ \ ]$
Pontos D e E	$m_2 = \dfrac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \dfrac{[\ ]-[\ ]}{[\ ]-[\ ]} = [\ \ ]$
Pontos C e E	$m_3 = \dfrac{y_E - y_C}{x_E - x_C} = \dfrac{[\ ]-[\ ]}{[\ ]-[\ ]} = [\ \ ]$

Tabela 1

Espera-se que o aluno encontre no item 5 o seguinte:

Pares de Pontos	Coeficiente Angular
Pontos C e D	$m_1 = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{[\ 0\ ] - [\ 6\ ]}{[\ -4\ ] - [\ 5\ ]} = \left[\frac{2}{3}\right]$
Pontos D e E	$m_2 = \frac{y_E - y_D}{x_E - x_D} = \frac{[\ -4\ ] - [\ 0\ ]}{[\ -10\ ] - [\ -4\ ]} = \left[\frac{2}{3}\right]$
Pontos C e E	$m_3 = \frac{y_E - y_C}{x_E - x_C} = \frac{[\ -4\ ] - [\ 6\ ]}{[\ -10\ ] - [\ 5\ ]} = \left[\frac{2}{3}\right]$

Tabela 1

Concluindo assim que $m_1 = m_2 = m_3 = m = \frac{2}{3}$.

6)Observando todos os resultados obtidos, responda as seguintes perguntas:

a) Uma reta pode ter mais de um coeficiente angular? Justifique sua resposta.

____

____.

b) O valor do coeficiente angular de uma reta independe dos pontos encolhidos sobre ela? Justifique sua resposta.

____

____.

No item 6, as respostas esperadas são: não e sim, para a) e b), respectivamente.

7)Considerando as conclusões obtidas no item anterior, determine o valor de *b*, para que o ponto H(-1, b) se encontre na mesma reta definida pelos pontos A e B, dos itens anteriores.

8) Sugestão: Determine a expressão que calcula o coeficiente angular, usando os pontos A e H ou os pontos B e H. Em seguida, iguale esta expressão ao coeficiente angular esperado.

____
____
____
__________________________.

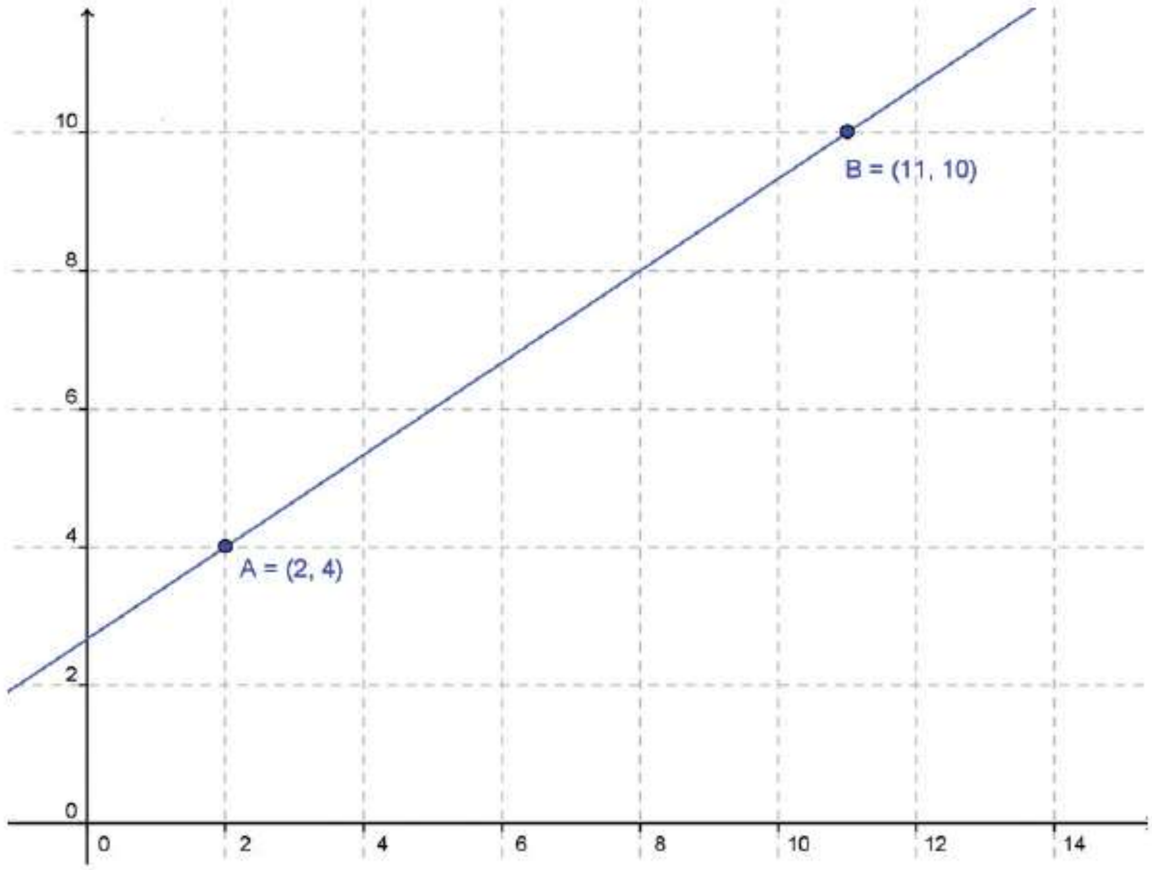
9)Verifique se o seu resultado encontrado algebricamente é, de fato, correto, localizando o ponto H no gráfico da reta.

Como o valor do coeficiente angular de uma reta é sempre único e independe do par de pontos escolhidos, usando os pontos A e H, o aluno deverá chegar a seguinte equação:

$$\frac{b-4}{-1-2} = \frac{2}{3}.$$

De onde, encontrará o valor **b**=2.

No item 8, note que se o aluno encontrar uma resposta diferente, o ponto H não pertencerá a reta que passa pelos pontos A e B. Isto dará a ele uma prova real com apelo geométrico muito forte. Isto é extremamente eficaz para a aprendizagem da geometria!



ATIVIDADE 2

Relacionando o Coeficiente angular com o ângulo de inclinação

Caro aluno, para a realização desta atividade é necessário que você recorde um pouco de seus conhecimentos apreendidos no primeiro ano, com relação ao gráfico da função polinomial do primeiro grau, que corresponde a uma reta. Além disso, é importante lembrar, também, do ângulo de inclinação da reta no plano cartesiano, o qual é definido no sentido anti-horário, a partir do semi-eixo positivo X, como mostra figura 2.

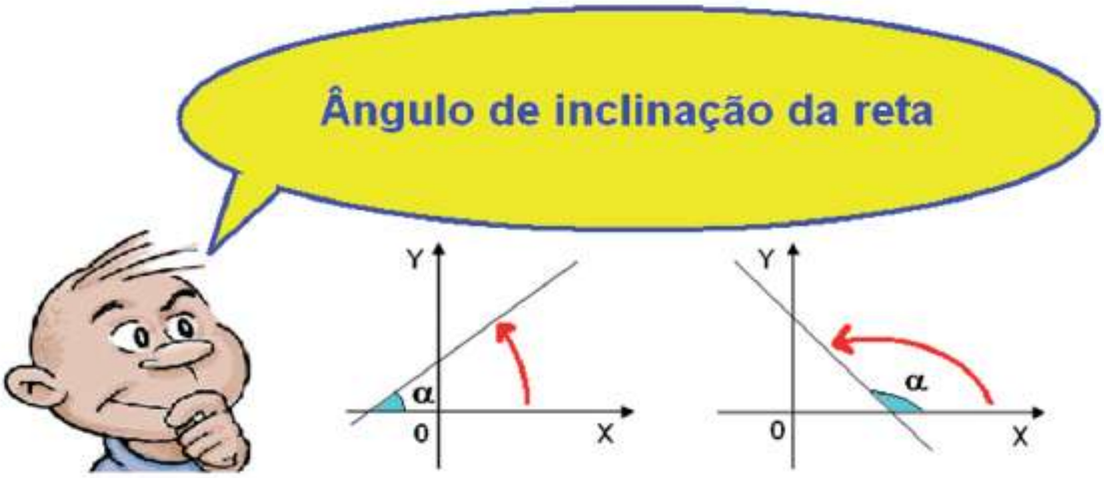


Figura 2

Fonte: Figura feita pelo autor.

1)Com ajuda de um transferidor, faça a medida do ângulo de inclinação da reta desenhada na atividade anterior. Anote o resultado.

____
____

2)Compare o valor da tangente do ângulo de inclinação com o coeficiente angular, usando no máximo duas casas decimais. Desconsiderando as pequenas diferenças em consequência das aproximações, existe alguma relação entre estes valores? Justifique sua resposta.

____
____
____

3)Usando o mesmo papel quadriculado dos itens anteriores, escolha e marque outros dois pontos quaisquer, os quais devem definir uma reta com ângulo de inclinação maior do que 90º (veja, como exemplo, a figura 3).

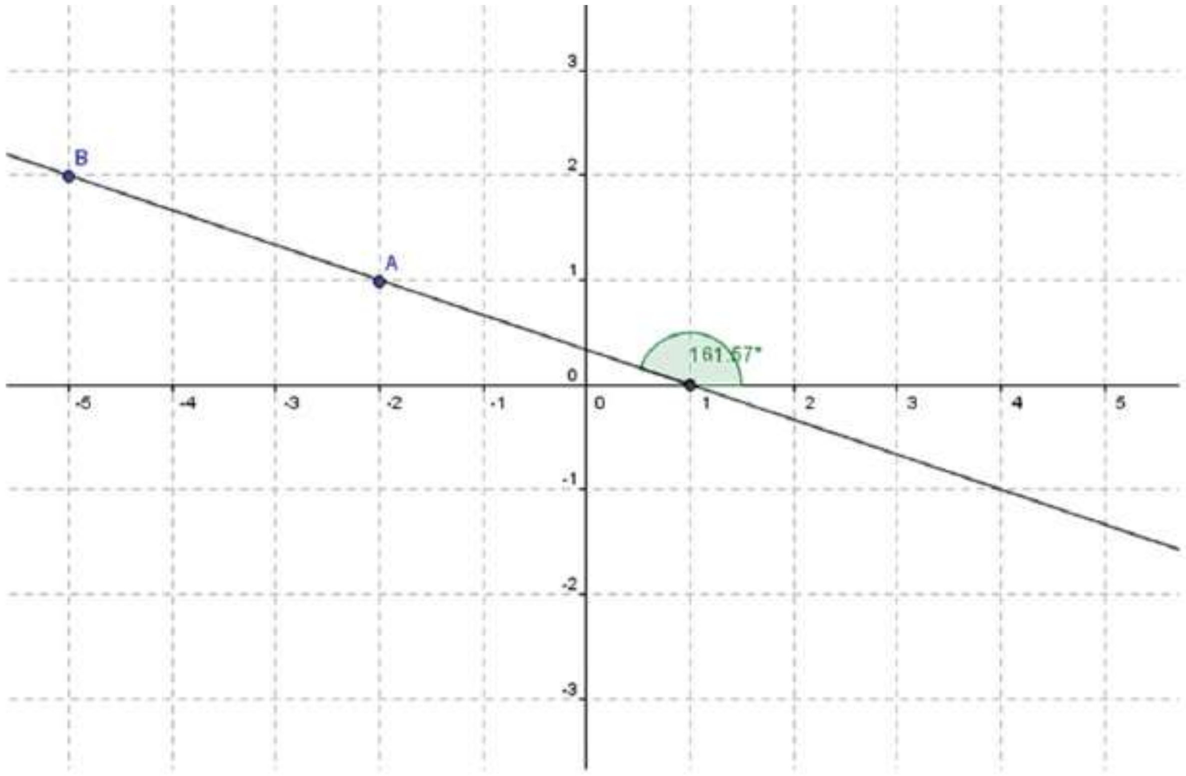


Figura 3

Fonte: Figura feita pelo autor.

4)A seguir, determine o ângulo de inclinação desta nova reta e calcule depois a sua tangente. Anote o ângulo e o valor de sua tangente a seguir.

____

5)Calcule o valor do coeficiente angular definido por estes dois pontos e compare-o com o valor obtido no item 4. Comente com seus colegas, confirme suas conclusões e registre-as a seguir.

____

Professor, o uso da calculadora científica é fundamental para esta atividade, caso os seus alunos não possuam, utilize a calculadora do computador.

Nos itens 1 e 2, seu aluno deve encontrar um ângulo entre 30^0 e 35^0 (uma vez que o valor aproximado é $33,69^0$), e consequentemente uma tangente entre 0,57 e 0,70 (o valor aproximado é 0,66). Instigue seus alunos a fazerem medições mais precisas, de forma que eles consigam comprovar que a tangente se aproxima de $\frac{2}{3} \cong 0,66$, o coeficiente angular da reta, calculado anteriormente. Lembre aos seus alunos que o ato de medir é uma ação comparativa, depende da precisão dos instrumentos que estamos utilizando e está sempre sujeito a uma aproximação.

Já nos itens 3, 4 e 5, observamos pela figura 3, os pontos A(-2,1) e B(-5,2) definem uma reta cujo coeficiente angular *m* é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-1}{-5-(-2)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3} = -0,333\ldots.$$

Além disso, o seu ângulo de inclinação é 161,57°. Portanto, a sua tangente é dada por:

Tg(161,57°) ≈ -0,333237. O que confirma as nossas conclusões de forma empírica.

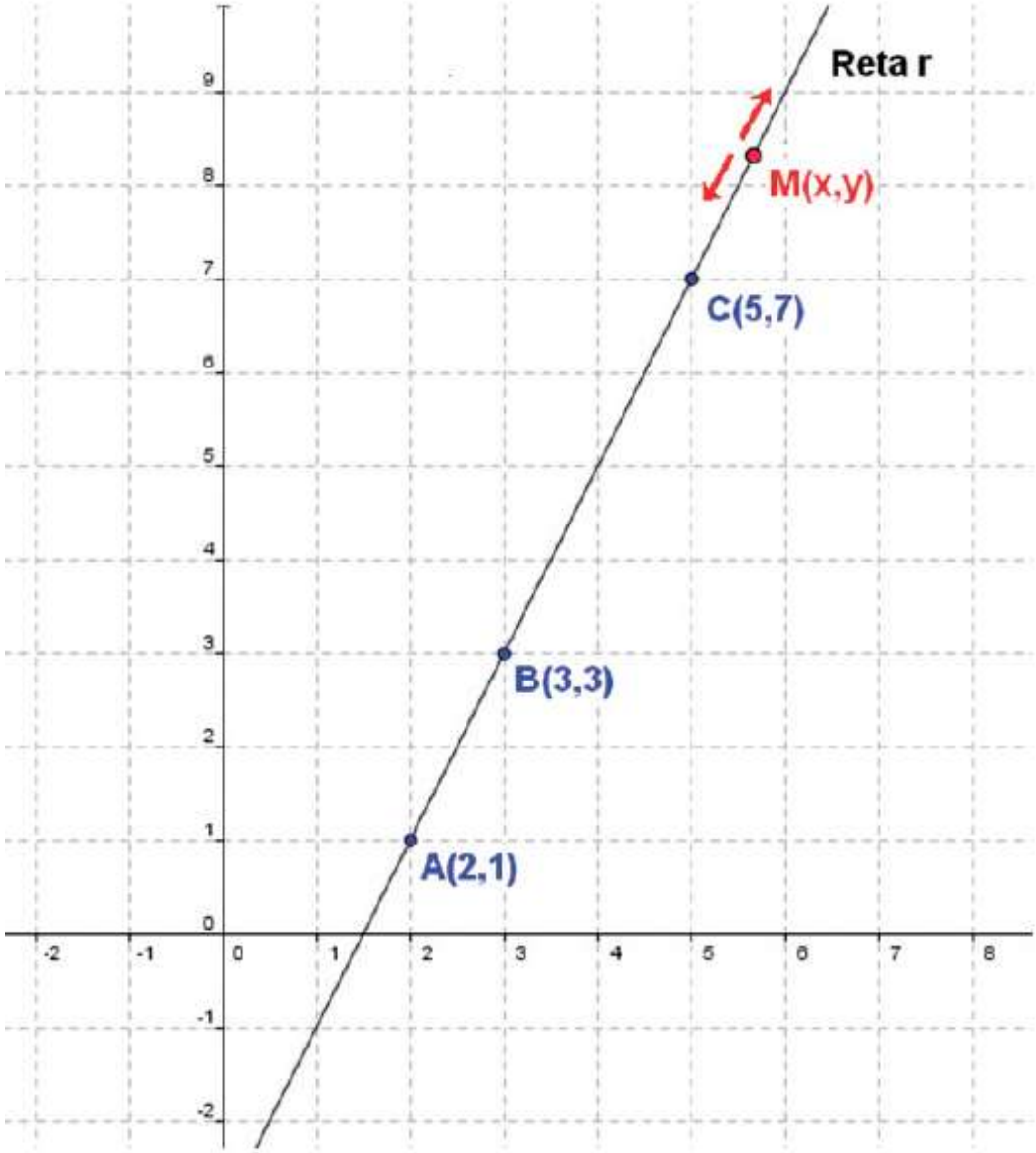
No final desta atividade, esperamos que o aluno tenha conseguido entender que o coeficiente angular de uma reta é igual a tangente do ângulo de inclinação. Este passo é importante para a nossa próxima atividade, onde os nossos alunos deverão descobrir um método que lhes permita calcular a equação de uma reta, conhecendo dois de seus pontos, ou um ponto e o seu coeficiente angular.

ATIVIDADE 3

Descobrindo a equação da Reta

Considere a reta r, mostrada na figura 4.

Figura 4
Fonte: Figura feita pelo autor.


Reta r
M(x,y)
C(5,7)
B(3,3)
A(2,1)
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

1. Determine o coeficiente angular *m* da reta *r* e verifique a sua igualdade, completando a Tabela 2 com as expressões correspondentes.

Pares de Pontos	Coeficiente Angular
Pontos A e B	$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$
Pontos A e C	$m_2 = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{[\ ]-[\ ]}{[\ ]-[\ ]} = [\ ]$
Pontos B e C	$m_3 = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{[\ ]-[\ ]}{[\ ]-[\ ]} = [\ ]$

Tabela 2

2. Tomando os pontos A e M, determine a expressão que permite calcular o coeficiente angular da reta *r*. Observe que a sua equação deve apresentar as variáveis *x*, *y* e *m*.

No item 1, seu aluno deve concluir que:

$$2=m_1=m_2=m_3.$$

No item 2, esperamos que ele conclua que:

$$\frac{y-1}{x-2} = m.$$

Pela expressão já conhecida que define o coeficiente angular.

3)O valor do coeficiente angular m, na equação do item 2, pode ser substituído pelo valor 2? Comente com seus colegas e justifique a sua resposta.

____

____

4)Após ter substituído a expressão *m* pelo valor 2, a equação encontrada é válida para qualquer ponto (x,y) na reta? E no ponto A, ela também é válida? Discuta com seus colegas e justifique a sua resposta.

5. Se fizermos agora, uma pequena manipulação algébrica, para eliminar o denominador, isto é,

$$\frac{y-1}{x-2}=2 \text{ que implica em } (y-1)=2.(x-2)=2x-4.$$

De onde segue

$$y=2x-3.$$

Esta nova equação será válida para qualquer ponto (x,y) na reta? Comente com os seus colegas e justifique a sua resposta.

.

6. Verifique se os pontos A, B, e C pertencem à reta *r*, isto é, substitua as coordenadas dos pontos na equação $y=2x-3$.

Veja um exemplo:

Verificando se o ponto C(5,7) pertence à reta:

Considerando x=5 e substituindo na equação, temos y= 2(5)-3 = 7. Logo, o ponto C(5,7) pertence à reta, pois as suas coordenadas satisfazem a equação.

7)Para finalizar, proceda de forma análoga ao item 2, ou seja, utilize um ponto genérico que chamamos de M e o ponto B, determinando uma expressão que permite calcular o coeficiente angular da reta r. Com isto, obtenha novamente uma equação com variáveis *x*, *y* e *m*. Faça as manipulações algébricas necessárias para eliminar o denominador. Registre a equação encontrada a seguir.

8) Que relação existe entre as equações encontradas? Comente com seus colegas e registre suas conclusões.

Esperamos que o aluno conclua, no item 3, que o coeficiente angular é sempre igual a 2, neste exemplo. E que, sendo assim, ele poderá substituir o m pelo valor 2.

Já no item 4, o aluno deve perceber que o ponto M é um ponto genérico e que, sendo assim, a expressão obtida é uma expressão geral, independente do ponto escolhido.

No item 7, esperamos que os seus alunos encontrem a mesma equação da reta do item 5, ou seja, $y=2x-3$. Para isso eles devem manipular a expressão:

$$\frac{y-3}{x-3} = m = 2 \Rightarrow (y-3) = 2.\,(x-3) = 2x-6 \Rightarrow y = 2x-3.$$

Após essa manipulação, esperamos que eles concluam que a equação da reta será sempre a mesma, conforme pedido no item 8.

Neste momento, é importante comentar com os alunos que, dado um ponto de $P(x_0, y_0)$ uma reta *r* e o seu coeficiente angular *m*, ao considerar um ponto qualquer M(x,y) da mesma reta, chegaremos à seguinte expressão:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0} = m\,,$$

O que implicará em:

$$(y - y_0) = m(x - x_0)\,.$$

Esta equação é denominada a equação da reta *r*.

Caso sejam fornecidos dois pontos da reta, primeiro devemos calcular o coeficiente angular e posteriormente usar a equação acima utilizando qualquer um dos pontos.

9. Para fechar a nossa atividade, vamos testar os conhecimentos adquiridos. Considere a reta *r* definida pelos pontos A(1,4) e B(2,1).

a) Encontre o coeficiente angular da reta *r*.

b) Determine a equação da reta *r*.

No item 9, o aluno deve concluir que o coeficiente angular da reta é dado pela expressão dada abaixo:

$$m = \frac{1-4}{2-1} = -3$$

Como vimos, com o coeficiente angular, podemos tomar um ponto genérico M(x,y) e um ponto qualquer da reta e obter a equação da reta. Veja:

$$\frac{y-1}{x-2} = m = -3 \Rightarrow (y-1) = -3.(x-2) = -3x+6 \Rightarrow y = -3x+7.$$

ROTEIRO DE AÇÃO 3

- Habilidades: – H15 – Identificar a equação de uma reta apresentada, a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação. Identificar e determinar as equações geral e reduzida de uma reta.
- Pré-Requisitos: Identificar um ponto no plano, através das suas coordenadas. Desenhar uma reta definida por dois pontos. Conhecer e identificar o ângulo de inclinação de uma reta. Conhecer a definição da razão trigonométrica tangente. Identificar e saber calcular esta razão em triângulos retângulos.
- Duração: 2 AULAS : 100 min
- Recursos educacionais utilizados: Folha de atividade, computador com software GeoGebra instalado, datashow, calculadora científica (em geral disponível no computador).
- Organização da turma: Turma organizada em duplas, propiciando um trabalho organizado e colaborativo.
- Objetivos: Verificar a relação existente entre o coeficiente angular e o ângulo de inclinação. Encontrar a equação da reta, a partir do coeficiente angular e de um ponto. Identificar o valor do coeficiente angular na equação da reta.
- Cuidados especiais: agendar o uso do laboratório de informática e computador com projetor de mídia integrado para ser levado à sala de aula.

ATIVIDADE 1

Coeficiente angular e o ângulo de inclinação

Para começar esta atividade, é importante lembrar que para calcular o coeficiente angular de uma reta definida por dois pontos, por exemplo, $A(x_A;y_A)$ e $B(x_B;y_B)$, devemos usar a seguinte expressão:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\textit{variação das ordenadas}}{\textit{variação das abscissas}}$$

Então, agora, vamos lá!

1. Após ter iniciado o programa *GeoGebra*, deixe a tela no formato ideal para a execução do nosso trabalho. Para isso, dê um clique com o mouse, seguindo a sequência dada nas Figuras 1 e 2.

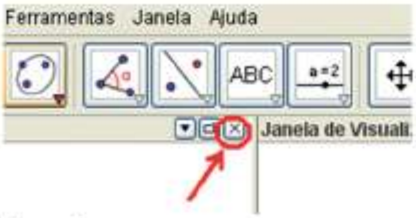


Figura 1
Fonte: Figura feita pelo autor.

Figura 2
Fonte: Figura feita pelo autor.

O formato ideal desejado é o de uma malha quadrangular com linhas tracejadas, com os eixos coordenados desenhados, como mostrado na Figura 3.

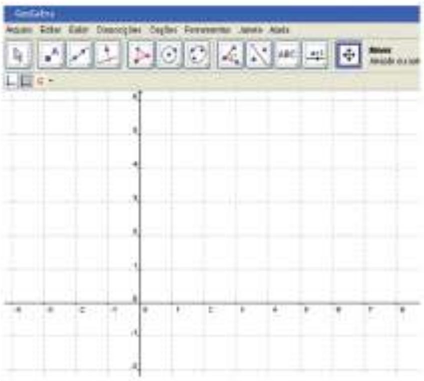


Figura 3
Fonte: Figura feita pelo autor.

Caso queira movimentar a janela de visualização, clique na opção indicada na Figura 4 e, em seguida, marque a opção "Mover Janela de Visualização", como mostra a Figura 5.

Figura 4
Fonte: Figura feita pelo autor.

Figura 5
Fonte: Figura feita pelo autor.

Posteriormente, coloque o cursor em qualquer lugar da malha, deixe apertado o botão esquerdo do mouse e movimente-o. Você observará o deslocamento da tela. Nesse caso, para melhor visualização, recomendamos deixar centralizados os eixos coordenados.

Dica sobre o GeoGebra :

a. Caso tenha executado algum procedimento equivocado e queira recuperar o seu trabalho até aquele momento, basta procurar pelo ícone mostrado na Figura 6 e marcar na opção "Desfazer" ou, se preferir, faça "Ctrl+Z".

Figura 6

Fonte: Figura feita pelo autor.

b. Caso queira aproximar ou afastar a imagem na tela, basta deixar apertadas, simultaneamente, as teclas "Ctrl" e "(+)" para aproximar, ou "Ctrl" e "(-)" para afastar.

Professor, neste primeiro momento, esperamos que os alunos se ambientem com o *GeoGebra*. Lembramos, mais uma vez, que esse *software* é uma ferramenta muito rica e, por isso, não deixe de experimentá-lo você mesmo. É importante que siga as orientações previamente para que entenda as possíveis dificuldades que seus alunos poderão ter.

2) Agora, marque dois pontos no plano cartesiano. Para isso, você deve procurar pela opção "Novo ponto", como mostra a Figura 7.

Observe a Figura 8 e leve o cursor até a posição indicada pelo ponto A e clique com o botão esquerdo do mouse. Você deverá ver o ponto A marcado na sua tela. Repita o mesmo processo para marcar o ponto B.

Figura 7
Fonte: Figura feita pelo autor.

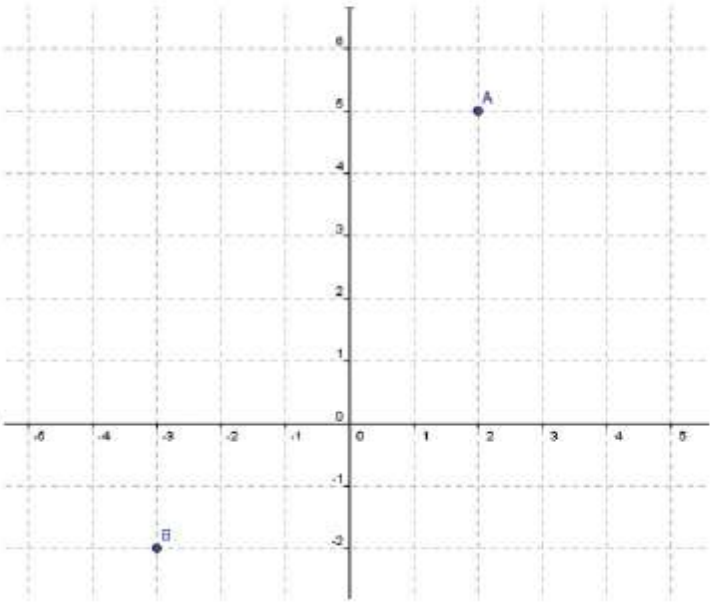


Figura 8
Fonte: Figura feita pelo autor.

3. Observando os pontos A e B, identifique as suas coordenadas e calcule o coeficiente angular da reta definida por eles. Organize os dados, completando as Tabelas 1 e 2 com os valores encontrados.

Ponto	Coordenada
A	(,)
B	(,)
Tabela 1	

Pares de Pontos	Coordenada
Pontos A e B	$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\quad - \quad}{\quad - \quad} =$
Tabela 2	

Seus alunos devem obter:

Ponto	Coordenada
A	(2 , 5)
B	(-3 , -2)
Tabela 1	

Pares de Pontos	Coordenada
Pontos A e B	$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-5}{-3-2} = \frac{-7}{-5} = 1{,}4$
Tabela 2	

Repare que optamos por fixar a escolha dos pontos para que não haja dúvidas entre os alunos durante a execução da atividade.

4)Agora, desenhe a reta que passa pelos pontos A e B. Para isso, você deve procurar pela opção “Reta Definida por Dois Pontos”, como mostra a Figura 9. Em seguida, clique no ponto A. Neste momento, você observará o desenho de uma reta que se desloca com o movimento do mouse. Para fixar tal reta, clique no ponto B. Você deve obter uma reta como indicada na Figura 10.

Figura 9
Fonte: Figura feita pelo autor.

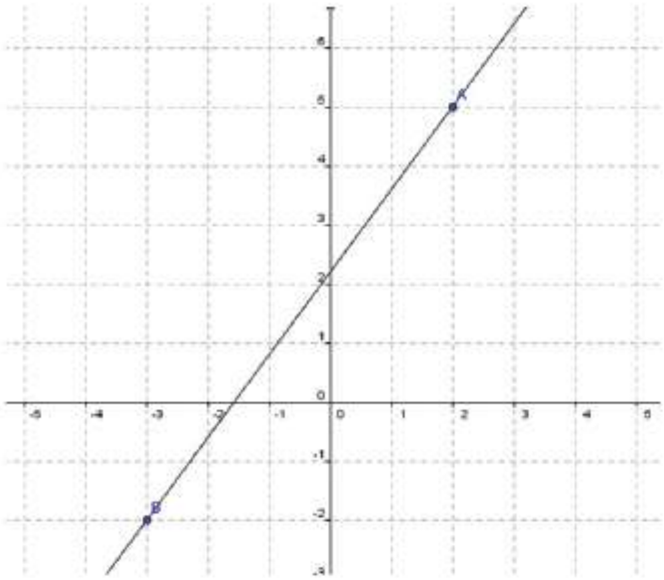


Figura 10
Fonte: Figura feita pelo autor.

5) Meça o ângulo de inclinação da reta definida pelos pontos A e B. Para isso, você deve, primeiramente, marcar dois pontos de apoio: o ponto de interseção da reta com o eixo-X (ponto C) e outro ponto localizado à sua direita, sobre o eixo-X (ponto D). Observe a Figura 11.

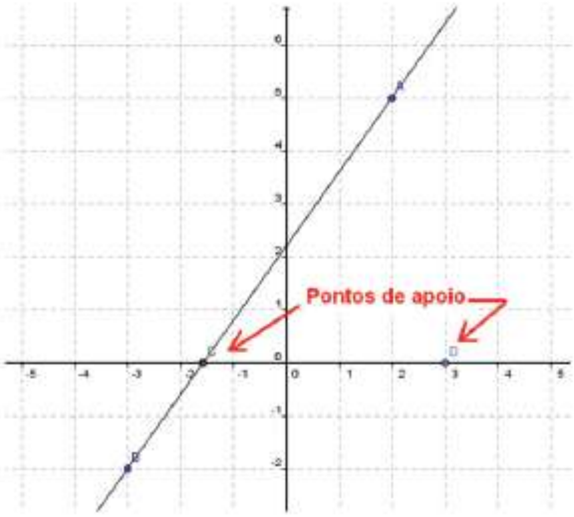


Figura 11
Fonte: Figura feita pelo autor.

Para medir o ângulo de inclinação, você deve procurar pela opção “Ângulo”, mostrada na Figura 12. Em seguida, siga a seguinte sequência: clique no ponto D, depois no ponto C e finalize no ponto A. Neste momento, você observará a medida do ângulo de inclinação da reta, como na Figura 13.

Figura 12
Fonte: Figura feita pelo autor.

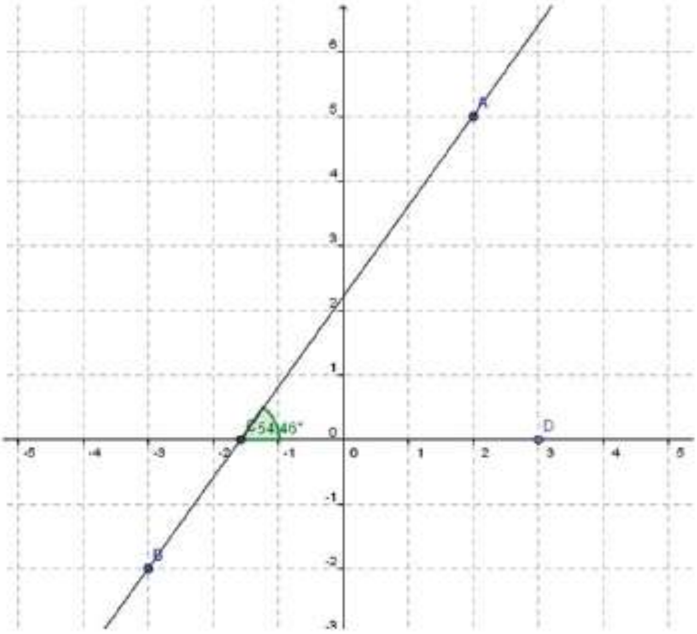


Figura 13
Fonte: Figura feita pelo autor.

Para o item 4, os alunos não devem encontrar muita dificuldade. Já no item 5, mais uma vez, seu papel é fundamental para que os alunos obtenham o ângulo corretamente. Para isso, é importante seguir a sequência sugerida. Caso contrário, o ângulo obtido pode não ser o determinado entre o semieixo positivo de X e a reta. Os pontos de apoio são essenciais neste momento, certifique-se de que a turma os marcou corretamente.

6. Com o ângulo obtido no item 5, calcule o valor da tangente desse ângulo de inclinação, usando uma calculadora científica. Complete a Tabela 3 com os resultados obtidos. Anote, também na Tabela 3, o valor do coeficiente angular encontrado no item 3.

Ângulo de inclinação da reta	$\alpha =$
Tangente do ângulo de inclinação	$tg(\alpha) =$
Coeficiente angular	$m =$
Tabela 3	

No item 6, o resultado esperado é:

Ângulo de inclinação da reta	$\alpha = 54,46^0$
Tangente do ângulo de inclinação	$tg(\alpha) \cong 1,399$
Coeficiente angular	$m = 1,4$
Tabela 3	

7. Você observou alguma relação existente entre os valores encontrados para a tangente do ângulo de inclinação e o coeficiente angular da reta? Comente com seus colegas e juntos cheguem a uma conclusão. Registre suas conclusões a seguir.

____

____

____

Professor, neste momento, é importante comentar com os alunos que a conclusão que esperamos deles é a percepção da relação de igualdade entre os valores do coeficiente angular e a tangente do ângulo de inclinação da reta, isto é:

$m = tg(\alpha)$.

Você pode comentar com eles que essa conclusão decorre da própria definição geométrica dessas grandezas. Para demonstrar melhor esse fato, você pode apresentar a Figura 14, onde, por questões didáticas consideraremos os pontos $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ no primeiro quadrante, definindo um ângulo de inclinação agudo.

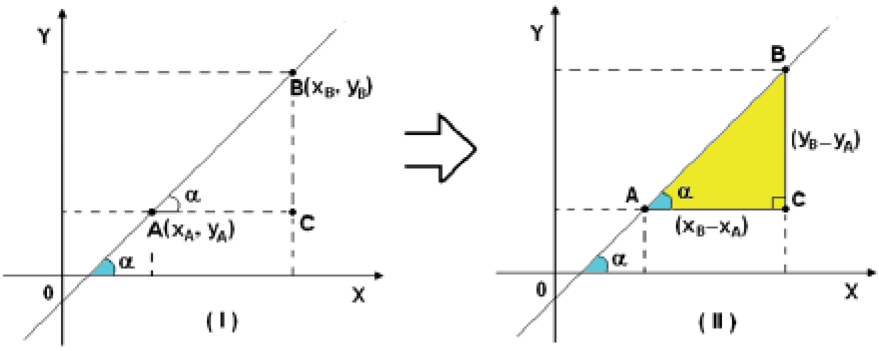


Figura 14

Sendo assim, considerando o triângulo ABC, na imagem (II), teremos:

$$tg(\alpha) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = m$$

É interessante comentar, também, que esse resultado é válido em qualquer quadrante e para ângulos obtusos, onde o valor da tangente será negativo.

ATIVIDADE 2

A equação da reta

O software GeoGebra é uma importante ferramenta tecnológica para aprender Geometria. Ele nos permite, por exemplo, visualizar a representação gráfica de uma determinada equação. Para isso, basta apenas digitar a equação no espaço “Entrada”, que se encontra na parte inferior esquerda, como indicado na Figura 15. Em seguida, deve ser dado um “Enter”. Dessa forma, aparecerá na tela o gráfico correspondente à equação digitada.

Figura 15

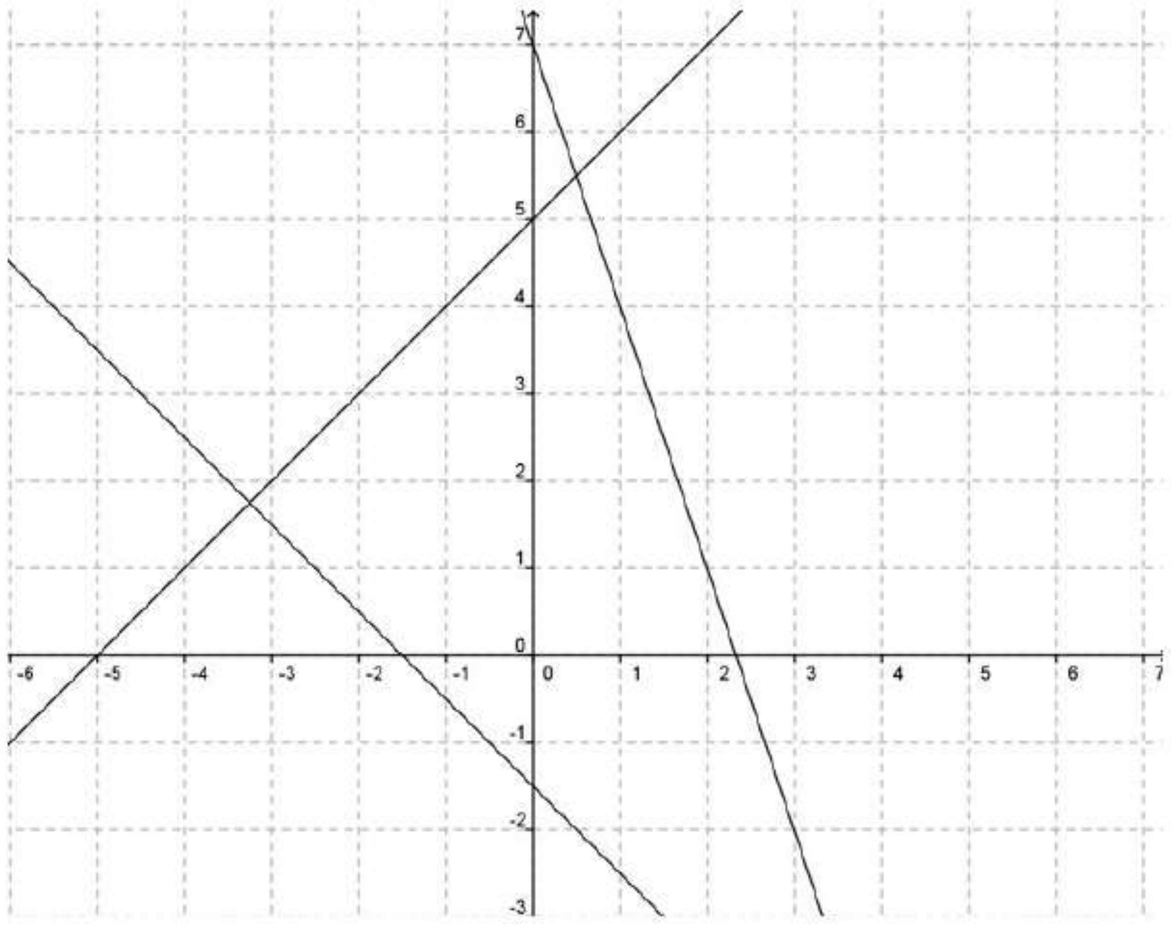
1)Para iniciar a nossa segunda atividade, limpe a sua tela principal. No ícone “Arquivo”, selecione a opção “Novo”, como mostra a Figura 16. Se preferir, feche e abra o programa novamente, mas não se esqueça de deixar a tela com a malha quadrangular com os eixos coordenados.

Figura 16

2)Usando o GeoGebra, faça o gráfico das equações do primeiro grau que se encontram na Tabela 4. Para isso, utilize a mesma tela, digitando uma equação de cada vez.

Retas	
Reta 1:	-x+y=5
Reta 2:	2x+2y+3=0
Reta 3:	y-4=-3(x-1)
Tabela 4	

Seus alunos devem encontrar os seguintes gráficos



3. Os gráficos desenhados no item 9 correspondem a uma reta? Justifique sua resposta.

____

____

4. Digite outras equações do primeiro grau e observe os gráficos gerados. Todos os gráficos desenhados são retas?

5. O que podemos concluir sobre o gráfico, no plano, de uma equação do primeiro grau? Discuta com seus colegas e registre suas conclusões.

Professor, com os itens 1, 2, 3, 4 e 5 esperamos que os alunos percebam que toda equação do primeiro grau, ou seja,

$$Ax + By + C = 0$$

representa, geometricamente, uma reta.

Além disso, é importante que eles percebam, também, que uma reta é sempre definida algebricamente por uma equação do primeiro grau.

Você pode aproveitar esse momento para comentar com os alunos que quando a equação é da forma

$$Ax + By + C = 0$$

onde todos os elementos se encontram no primeiro membro, ela é denominada de ***equação geral da reta***.

Por outro lado, se isolarmos a variável y no primeiro membro,

$$y = ax + b$$

a equação é denominada de ***equação reduzida da reta***.

6. Escreva as equações da Tabela 4 na forma reduzida, completando a Tabela 5.

Retas	Equação Reduzida
Reta 1:	
Reta 2:	
Reta 3:	
Tabela 5	

O aluno deve encontrar o seguinte:

Retas	Equação Reduzida
Reta 1:	$y = x + 5$
Reta 2:	$y = -x - \frac{3}{2}$
Reta 3:	$y = -3x + 7$
Tabela 5	

7. Encontre o ângulo de inclinação das retas 1, 2 e 3. Em seguida, calcule as tangentes desses ângulos e complete a Tabela 6. Para isso, use o procedimento adotado no item 5, marcando, nesse caso, três pontos de apoio, dois no eixo X e outro na parte superior da reta (veja Figura 11).

Retas	Equação Reduzida	Ângulo de Inclinação	Tangente do Ângulo
Reta 1:			
Reta 2:			
Reta 3:			
Tabela 6			

Professor, neste momento, seu papel é fundamental para auxiliar os alunos na sequência de pontos a serem marcados. Caso eles não sigam "ponto do eixo X", "interseção com eixo X"; "ponto do "alto" da reta", eles podem não obter o ângulo entre o semieixo X positivo e a reta. Certifique-se de que eles estejam obtendo o ângulo correto. Eles devem encontrar:

Retas	Equação Reduzida	Ângulo de Inclinação	Tangente do Ângulo
Reta 1:	$y = x + 5$	45^0	1
Reta 2:	$y = -x - \frac{3}{2}$	135^0	-1
Reta 3:	$y = -3x + 7$	$108{,}43^0$	$\cong -3$

Tabela 6

8. Observe o valor da tangente do ângulo de inclinação com o valor numérico do coeficiente da variável x na equação da forma reduzida. Existe alguma relação entre esses valores? Troque ideias com seus colegas e registre-as a seguir.

Por meio do item 8, e com a sua orientação, o aluno terá a oportunidade de verificar uma propriedade muito importante na equação da reta: quando ela se encontra na sua forma reduzida, o coeficiente numérico da variável x é, na realidade, o coeficiente angular da reta.

Isto é, se a equação de uma reta é dada por:

$$y = ax + b$$

Então,

$$a = m = tg(\alpha)$$

Dessa forma, conhecendo as coordenadas de dois pontos, é importante comentar com os alunos que **podemos encontrar a equação da reta que contém esses dois pontos.** Para isso, precisamos:

1. Calcular o coeficiente angular *m* da reta;
2. Encontrar o valor de *b*, substituindo um dos pontos na equação $y = mx + b$.

É importante destacar, também**, a seguinte observação: para que um ponto pertença a uma reta, ele tem que satisfazer necessariamente a sua equação.**

Por exemplo, o ponto $(3;7)$ pertence à reta $y = 2x + 1$, pois:

$x = 3$ implica em $y = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

9. Vamos colocar em prática os nossos conhecimentos adquiridos. Considere os pontos $A(2;-1)$ e $B(1;2)$.

   a. Calcule o coeficiente angular *m* da reta definida pelos pontos A e B.

   b. Supondo que $y = mx + b$ seja a equação da reta definida pelos pontos A e B, determine o valor de *b*.

   c. Escreva a equação reduzida da reta definida pelos pontos A e B.

Nesses itens, esperamos que os alunos encontrem:

a. $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-(-1)}{1-2} = \dfrac{3}{-1} = -3$.

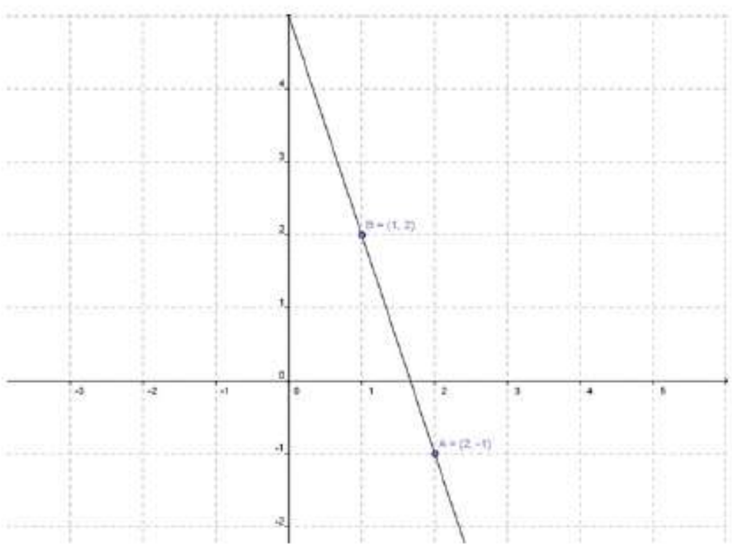
b. $y = mx + b = -3x + b$

Substituindo o ponto A, por exemplo, $-1 = -3 \cdot 2 + b$, ou seja, $b = 5$

c. $y = -3x + 5$

10)Verifique, usando o GeoGebra, se a sua resposta está de fato correta. Para isso, digite a equação encontrada no espaço “Entrada”, como visto na Figura 15. Após visualizar o gráfico, observse os pontos A(2,-1) e B(1,2) pertencem à reta. Caso isso aconteça, parabéns! Você acertou a questão. Caso contrário, verifique cuidadosamente as suas contas. Boa sorte!

No *GeoGebra*, os alunos poderão verificar:



Esse é um exercício interessante por si só. O aluno verifica toda a aprendizagem de reta com ele. Aproveitando esse último gráfico, podemos também pedir para que os alunos percebam se um determinado ponto dado pertence ou não à reta.

Esperamos que essas atividades tenham conseguido contribuir com o ensino das relações existentes entre o coeficiente angular e o ângulo de inclinação, assim como, para o aprendizado sobre a construção da equação de uma reta, conhecendo as coordenadas de dois pontos que a constituem. Aproveite essa oportunidade para enriquecer o conhecimento de seus alunos apresentando mais exemplos. Lembre-se que só você tem a visão clara dos limites possíveis a serem atingidos por seus alunos.

AVALIAÇÃO NESTE PLANO DE TRABALHO

Ao longo de todo o Plano de Trabalho foram deixados claros os critérios de avaliação.

A avaliação dos roteiros de ações será durante a implementação com o objetivo de identificar possíveis dúvidas que ainda existirem, a recuperação desses conceitos será mediante atividades de revisão e sem interromper o processo sendo o professor responsável por promovê-la durante todo o processo. Será dado atenção aos seguintes critérios a seguir nesta avaliação: Resolução das tarefas; participação no grupo e/ou dupla; as contribuições dadas; se representa pontos, segmentos e retas no plano cartesiano; se resolve problema que envolve a distância entre dois pontos; se escreve uma reta na forma reduzida e geral; a interpretação correta das questões envolvidas na atividade. Metodologia adotada nos roteiros de ações estimulam a pesquisa onde habilidades como observação, análise e manipulação do objeto os ajudam a construir os conceitos, deixando o aluno no centro da aprendizagem e o professor como um mediador, vai ampliar a discussão nos grupos pois eles trocam idéias entre si para a realização das tarefas promovendo uma ação organizada e a interação dos alunos, percebe-se que a aprendizagem dos conceitos através da investigação da representação geométrica facilita a compreensão e motiva.

Ficam assim quantificados os critérios de avaliação: os exercícios selecionados para a avaliação ao longo do processo somam 1 ponto; o envolvimento e a resolução das atividades mesmo resposta errada valerá 0,5 pontos; a avaliação pré-determinada na introdução desse Plano de Trabalho tem por objetivo uma reflexão do conteúdo tratado e prevê criteriosamente se o aluno consegue analisar, elaborar estratégias de resolução, calcular corretamente as questões levantadas que somam 1,5 pontos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EDITORA MODERNA. Conexões com a Matemática/Editora responsável Juliane Matsubara Barroso, obra coletiva, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. 1 ed. . São Paulo: Moderna, 2010. v 3.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. Matemática Ensino Médio. 4 ed. Reformulada. São Paulo: Saraiva, 2004. v. 3. 121, 122, 239, 240, 251 p.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática, volume único.1 ed. São Paulo: Ática, 2009.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. Matemática: uma nova abordagem. 1 ed. São Paulo: FTD, 2000. v3:

PROJETO SEEDUC. Fundação CECIERJ. Consórcio CEDEJ. Extensão. Roteiro de Ação 1, 2 e 3. Curso de Aperfeiçoamento 3º ano do Ensino Médio 3º bimestre/2013. Rio de Janeiro, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PDE/GESTAR II –Programa Gestão da Aprendizagem Escolar : Matemática – Matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos. TP6, caderno teoria e prática. Brasília: MEC/Semtec, 2008. 191, 192,193,194,195,196,197,198p.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares do Ensino Médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 1999.