

FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA
FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ
COLÉGIO: C.E. Cardeal Arcoverde
PROFESSORA: Janete Maria Jesus de Sá
MATRÍCULA: 0825192-8
SÉRIE: 3ª série do Ensino Médio
TUTOR: Bianca Coloneze
GRUPO: 3

PLANO DE TRABALHO SOBRE GEOMETRIA ANALÍTICA

Janete Maria Jesus de Sá
janetemjdesa@ig.com.br

1. Introdução

A invenção da Geometria Analítica é atribuída a René Descartes (1596-1650) e a Pierre de Fermat (1601-1665), matemáticos franceses. A ideia de dar significado às operações algébricas por meio de interpretações geométricas deu origem a atual Geometria Analítica.

Iniciar este conteúdo com os alunos da terceira série do Ensino Médio é bem simples, pois todos já conhecem o plano cartesiano e seus quadrantes, sabem marcar um ponto ou dizer suas coordenadas. A novidade começa no cálculo da distância entre esses pontos que será trabalhada de forma prática com papel quadriculado. O software GeoGebra também será um recurso utilizado em sala para visualização. Depois o aluno aprenderá a avaliar se os pontos são colineares, isto é, se estão alinhados; para isso irá trabalhar com o determinante da matriz de ordem 3. Com base nesse artifício o aluno será capaz de encontrar a *equação geral da reta*. E a partir daí encontrará outras equações e suas particularidades, como a *equação reduzida da reta*.

Os exercícios sempre serão aplicados como forma de fixação da aprendizagem. Inclusive exercícios contextualizados para que o aluno compreenda a aplicabilidade do conteúdo.

2. Desenvolvimento

Atividade 1:

- **Habilidade relacionada:**

Observação, raciocínio lógico, coordenação motora e cálculos.

Descritores:

H16 – Resolver problemas que envolvam a distância entre dois pontos no plano cartesiano.

- **Pré-requisitos:**

Coordenadas de um ponto;

Módulo de um número;

Teorema de Pitágoras.

- **Tempo de Duração:**

2 tempos de aula (no ensino noturno corresponde a 90 minutos).

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

Papel quadriculado;

Régua;

Notebook e Data Show;

GeoGebra.

- **Organização da turma:**

Divisão da turma em duplas.

- **Objetivos:**

-Levar o aluno a determinar a distância entre pontos com a mesma abscissa;

-Levar o aluno a determinar a distância entre pontos com a mesma ordenada;

-Levar o aluno a calcular a distância entre pontos de abscissas e ordenadas distintas, utilizando o Teorema de Pitágoras;

-Levar o aluno desenvolver a fórmula da distância entre dois pontos;

-Levar o aluno a observar no GeoGebra a representação dos pontos e o valor do segmento que uni dois pontos (distância entre dois pontos);

-Levar o aluno a socialização do trabalho em grupo.

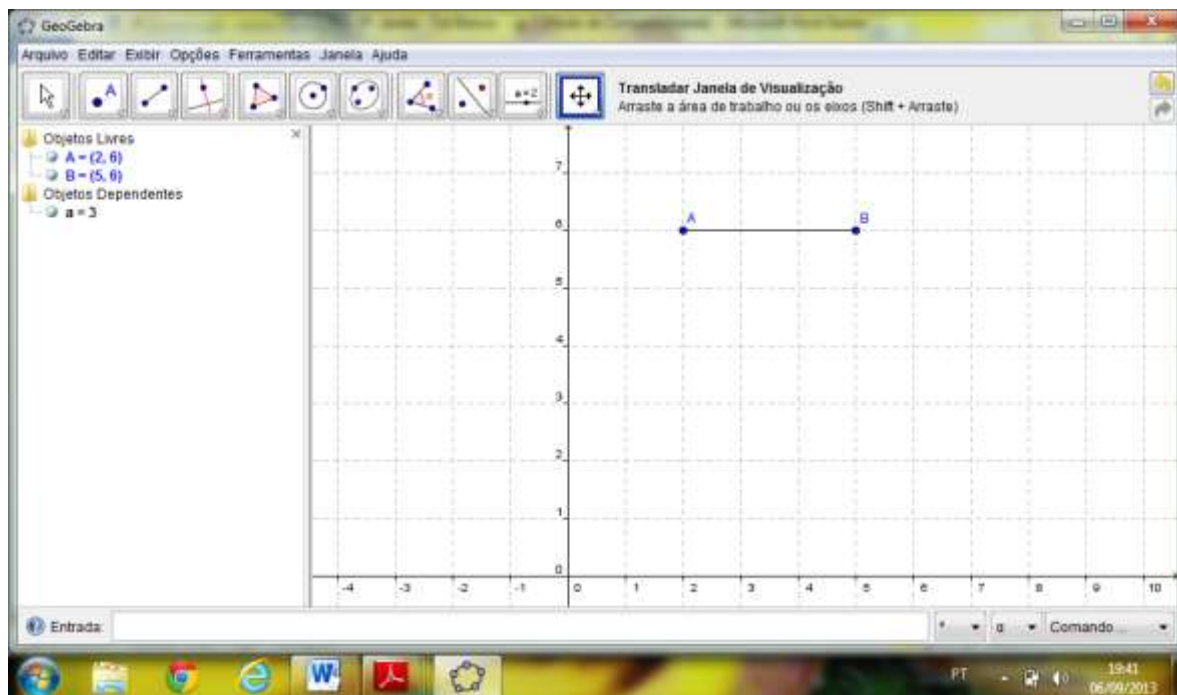
▪ **Metodologia adotada:**

1º- Divisão da turma em duplas;

2º- O professor pedirá que a dupla desenhe o plano cartesiano no papel quadriculado e marque os seguintes pontos A (2,6) e B(5,6);

3º- Depois cada dupla irá unir os pontos traçando um segmento e contando o número de quadriculas e anotará a distância entre os dois pontos;

4º- O professor faz no GeoGebra tudo o que foi pedido:

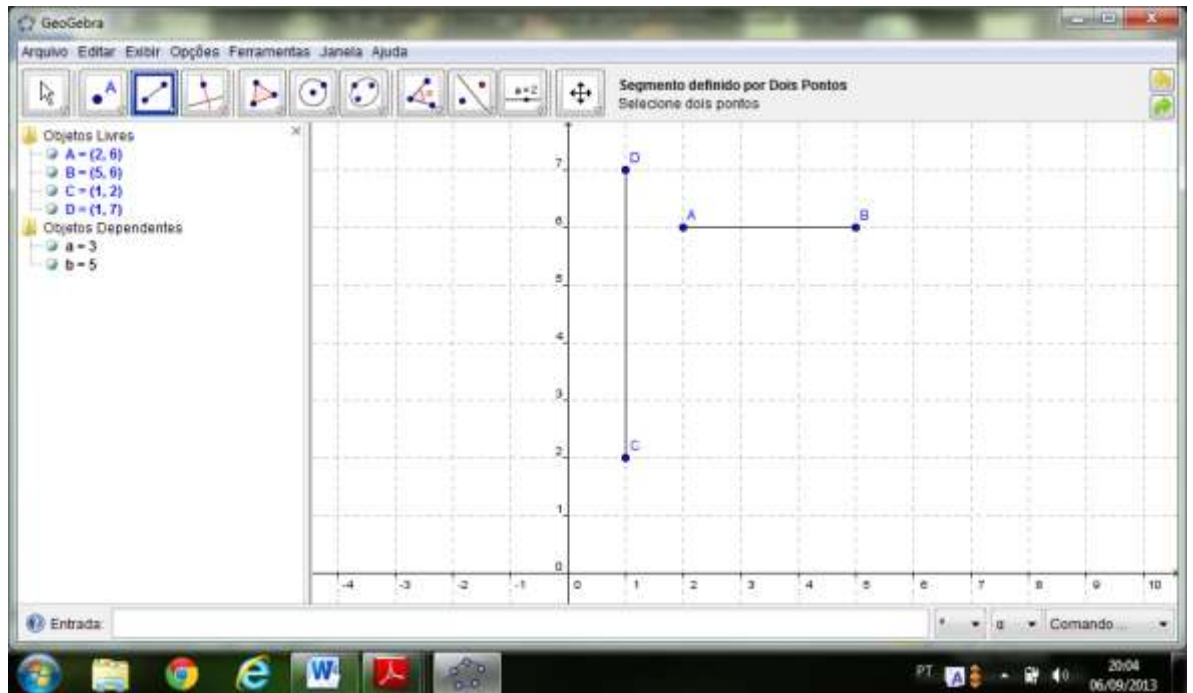


5º- O professor pergunta se seria possível determinar esta distância sem representar graficamente, isto é, somente com as coordenadas. E como seria?

(A resposta esperada seria sim, pois $d = X_B - X_A = 5 - 2 = 3$)

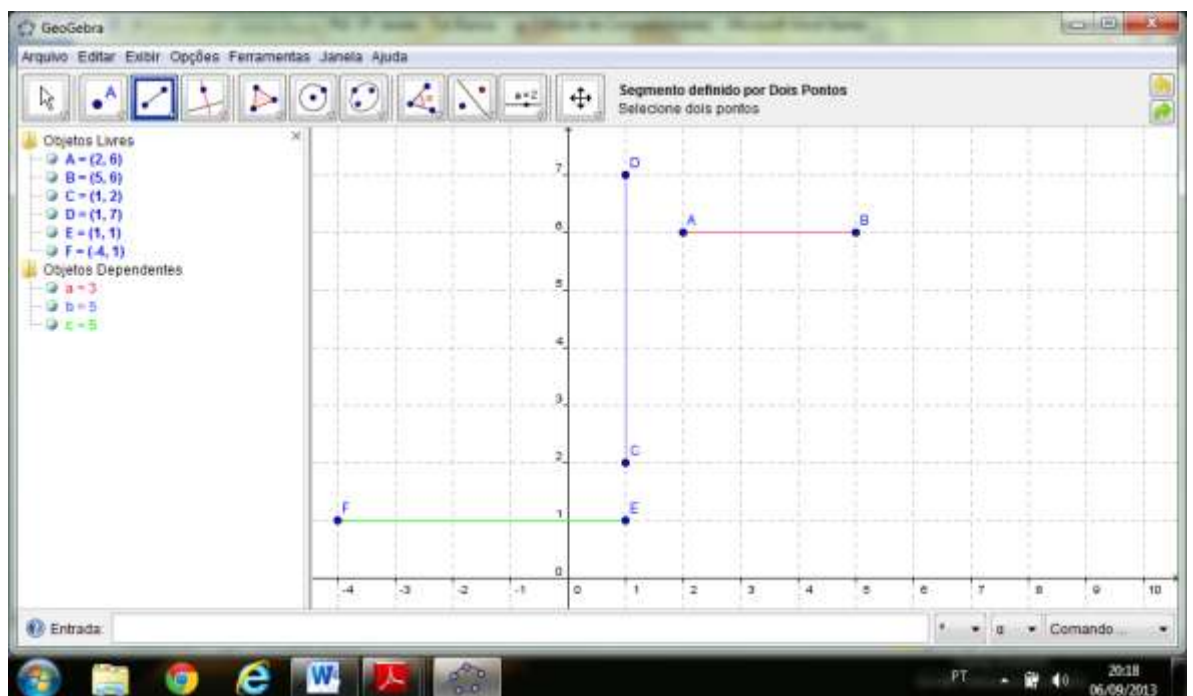
6º - O professor pede que repita o procedimento para C (1, 2) e D (1, 7), mas que antes de marcarem tentem calcular a distância entre esses dois pontos a partir de suas coordenadas;

(Resultado esperado: $d = Y_B - Y_A = 7 - 2 = 5$)



7º- E como seria com os pontos E (1,1) e F (-4,1);

(Resultado esperado: $d = |-4 - 1| = 5$)

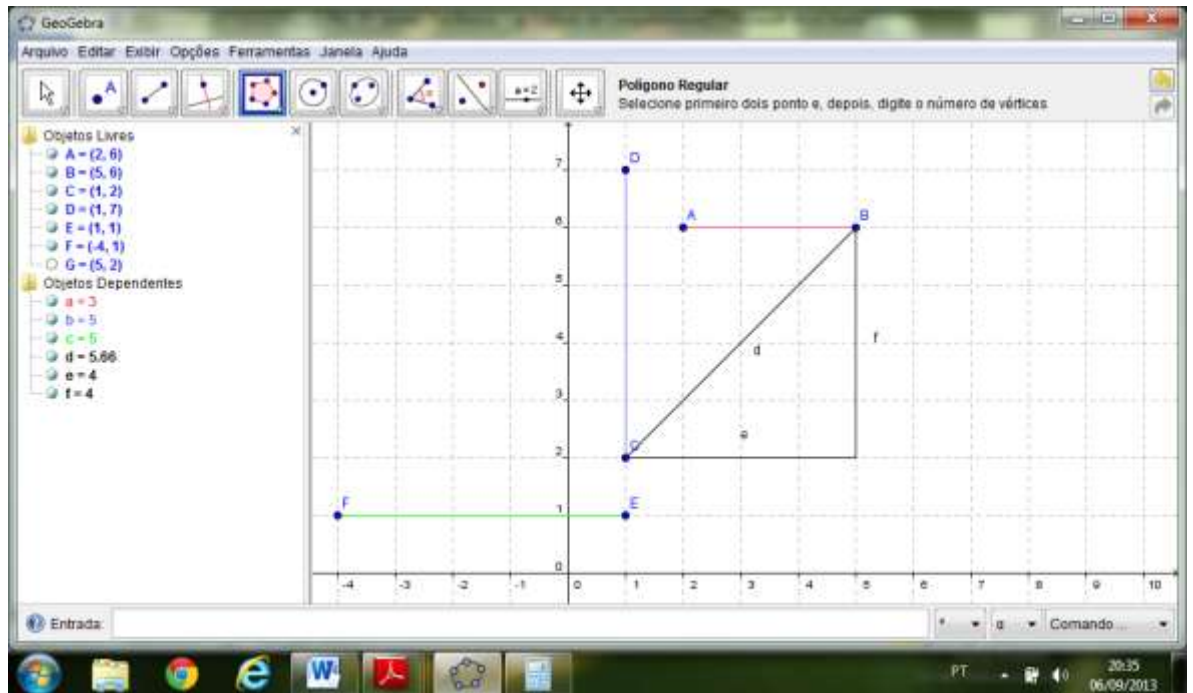


8º- Trace um segmento de B até C, qual é esta distância?

(Dica: Pense no Teorema de Pitágoras, cuja hipotenusa é o segmento BC e os catetos as diferenças entre abscissas e entre as ordenadas dos pontos B e C)

O professor deixará que os alunos raciocinem e cheguem ao resultado:

$$d = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} \cong 5,66$$



Logo em seguida pede para que os alunos pensem numa fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos.

9º- Depois de um breve tempo o professor orienta os alunos para chegar a fórmula da distância entre dois pontos:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

10º - O professor distribui a seguinte lista de exercícios:

1) Encontre a distância entre os pontos dados.

a) A(5,2) e B(1,3)

b) C(-1,4) e D(-2,-3)

c) E(-4,-3) e O(0,0)

2) Mostre que o triângulo de vértices (2,4), (5,1) e (6,5) é isósceles e calcule seu perímetro.

3) João comprou um terreno retangular limitado por 4 estacas representadas pelos pontos A(1,1), B(1,5), C(6,1) e D(6,5). Ele deseja cercar esse terreno com quatro fios de arame de cada lado. Quantos metros de arame serão necessários?

Atividade 2:

- **Habilidade relacionada:**

Observação, raciocínio lógico, coordenação motora e cálculos.

Descritores:

H15 – Identificar a equação de uma reta apresentada, a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação.

H32 – Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3.

- **Pré-requisitos:**

Regra de Sarrus.

- **Tempo de Duração:**

4 tempos de aula (no ensino noturno corresponde a 180 minutos).

- **Recursos Educacionais Utilizados:**

Papel quadriculado;

Notebook e Data Show;

GeoGebra.

- **Organização da turma:**

Divisão da turma em duplas.

- **Objetivos:**

-Levar o aluno a testar o alinhamento de três pontos calculando o determinante da matriz de 3ª ordem (Regra de Sarrus);

-Levar o aluno a encontrar a equação geral da reta a partir de dois pontos;

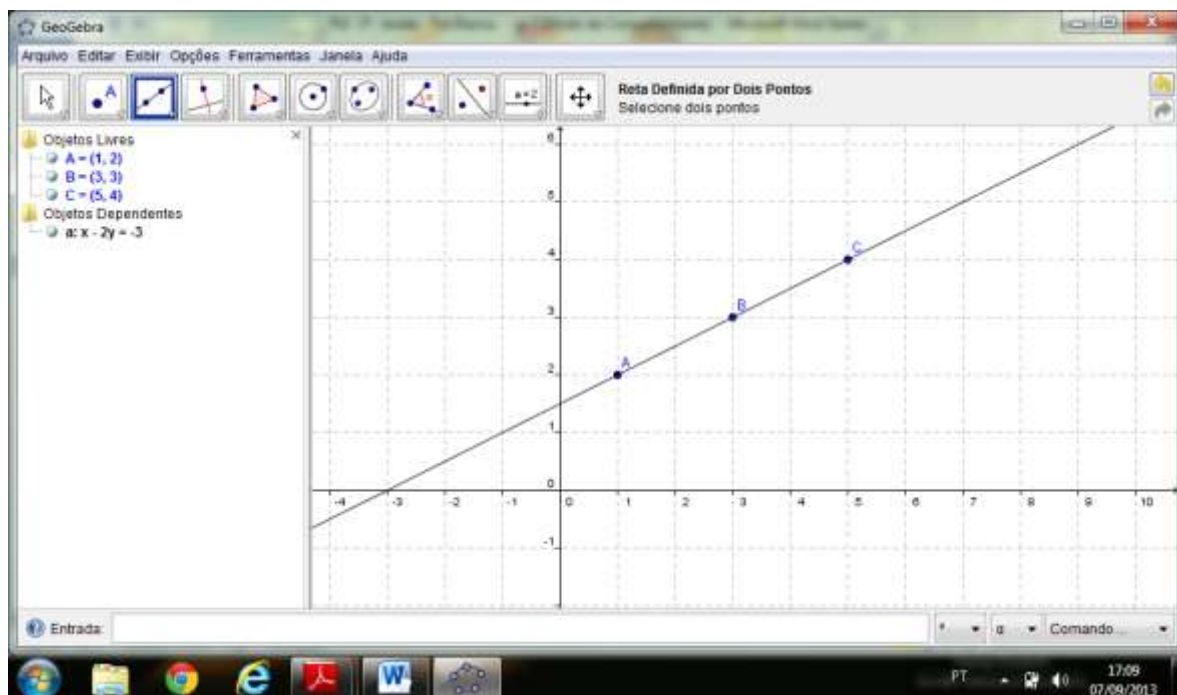
-Levar ao conhecimento do aluno a equação reduzida da reta e o cálculo dos coeficientes;

-Levar o aluno a observar a construção da reta no GeoGebra, assim como os tipos equações da reta partindo de dois pontos;

-Levar o aluno a socialização do trabalho em grupo.

▪ **Metodologia adotada:**

- 1º- Divisão da turma em duplas;
- 2º- O professor pedirá que a dupla desenhe o plano cartesiano no papel quadriculado e marque os seguintes pontos A (1,2), B(3,3) e C(5,4);
- 3º- O professor pergunta se esses pontos são colineares, isto é, estão alinhados;
(Resposta esperada: Sim, basta traçar a reta que passa pelos três pontos.)



- 4º- O professor pergunta é possível dizer que três pontos distintos estão alinhados apenas com as coordenadas sem representar graficamente. Depois de deixar os alunos pensarem, o professor diz que basta calcular o determinante de 3ª ordem da matriz formada pelas coordenadas dos três pontos, cuja a terceira coluna será formada de zero. Se o resultado for zero estão alinhados, caso contrário não. E mostra:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 1 = 3 + 10 + 12 - 15 - 4 - 6 = 0$$

- 5º- Agora vamos verificar se os pontos abaixo estão alinhados:

a) (-2,3), (0,0) e (6,-9)

b) (-2,3), (0,0) e (-3,2)

(Resposta esperada: letra a estão alinhados e letra b não estão alinhados)

- 6º- Baseado na avaliação de alinhamento dos pontos vamos encontrar a equação geral da reta dado dois pontos, basta montar o determinante de 3ª ordem (Regra

de Sarrus) forçando a igualdade nula. Observe:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$X \cdot 2 \cdot 1 + Y \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 3 - X \cdot 1 \cdot 3 - Y \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

$$2X + 3Y + 3 - 6 - 3X - Y = 0$$

$$-X + 2Y - 3 = 0$$

7º - Agora vamos praticar o que aprendemos:

Considere o triângulo de vértice $A(0,0)$, $B(1,3)$ e $C(4,0)$. Determine as equações gerais das retas suportes dos lados desse triângulo.

(Resultados esperados: $AB \rightarrow -3x + y = 0$, $BC \rightarrow x + y - 4 = 0$ e como A e C pertencem ao eixo x, $y = 0$)

8º - Outra forma de encontrar a equação da reta a partir de dois pontos distintos é calcular o coeficiente angular da equação reduzida da reta:

$$y = mx + n$$

(Esta equação é semelhante a lei de uma função afim ($y = ax + b$), já conhecida pelo aluno)

Para determinar o coeficiente angular (m) basta calcular a razão entre a diferença entre as ordenadas dos pontos pela diferença entre as abscissas;

$$m = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$$

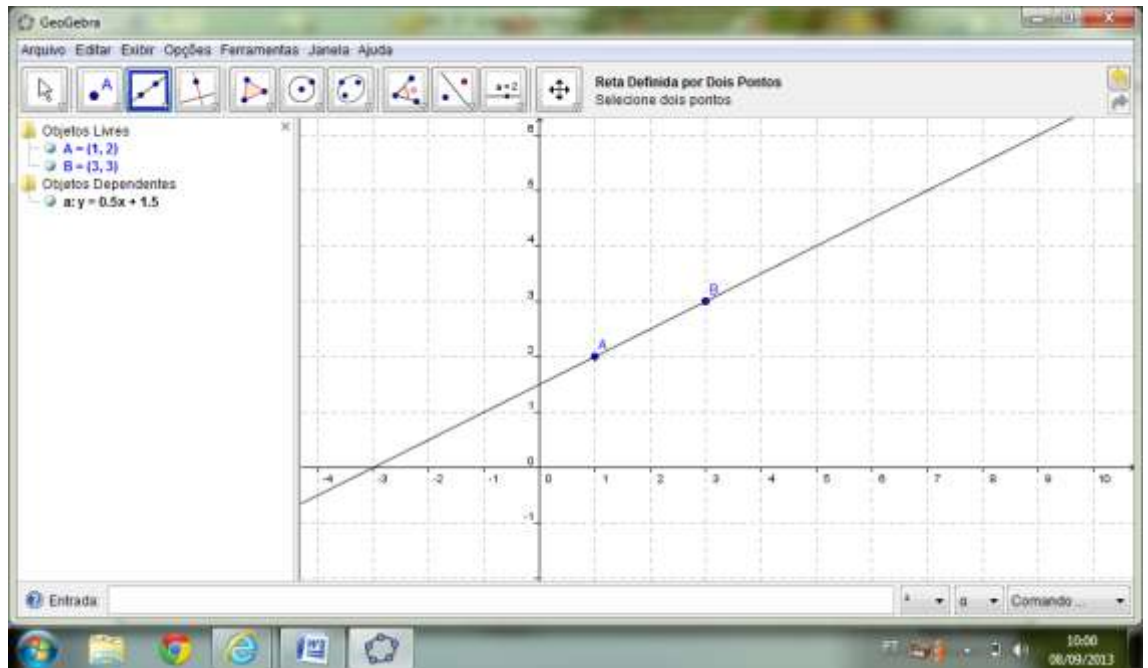
Temos que n é o coeficiente linear e indica onde a reta intercepta o eixo das ordenadas (eixo y), mas para descobrir sem representar graficamente basta substituindo o valor de m e a coordenada de um ponto na equação reduzida da reta, observe:

$$3 = \frac{1}{2} \cdot 3 + n$$

$$3 - \frac{3}{2} = n$$

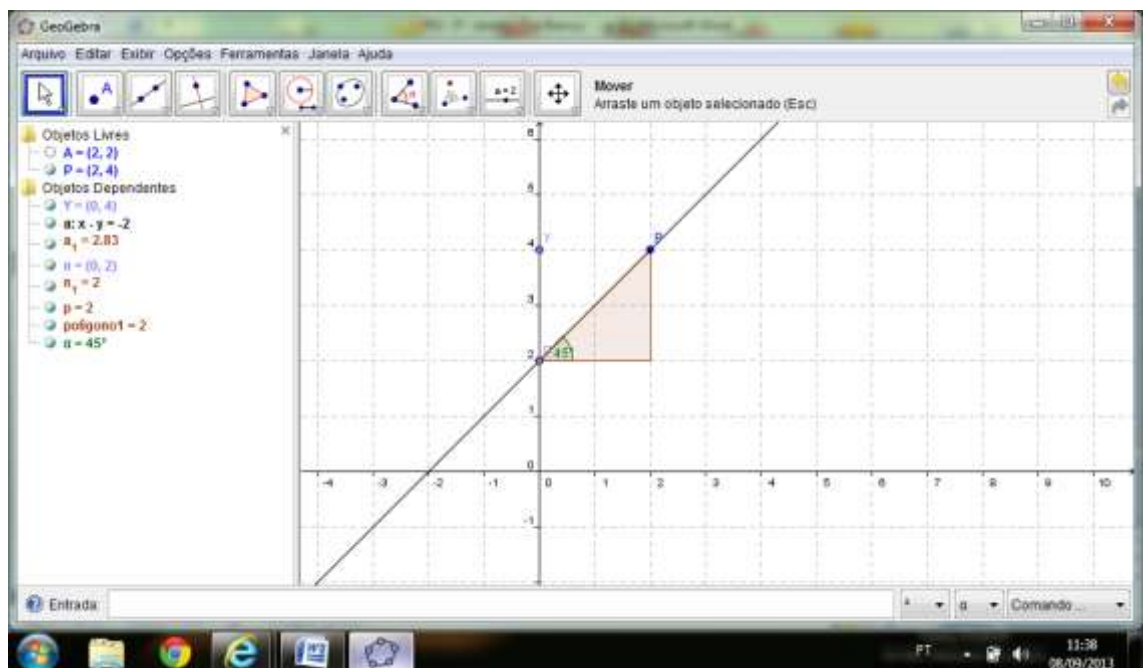
$$n = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$



9º- O professor então explica que conhecendo o ângulo de inclinação da reta é possível determinar o coeficiente angular (m), calculando a tangente desse ângulo. Ou ainda podemos obter o valor da tangente desse ângulo pela definição (a razão da medida do cateto oposto pela medida do cateto adjacente), isto é:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y-n}{x}$$



Exemplificando:

Sendo os pontos (0,2) e (2,4) pertencentes a reta que faz um ângulo de 45° com

o eixo x, determine a equação reduzida dessa reta. Observe que:

$$\operatorname{tg} 45^{\circ} = 1 \text{ ou } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4-2}{2} = 1$$

Logo, temos: $y = x + n$

Substituindo: $2 = 0 + n \rightarrow n = 2$

Então: $y = x + 2$

10º- Praticando o que aprendemos:

Numa cidade estão sendo construídas duas estradas retas para ligar bairros, na planta existem algumas moradias que estão situadas no caminho. A primeira estrada apresenta moradias que se encontram nas seguintes coordenadas: (1,2) e (2,5). A segunda estrada tem uma moradia na coordenada (3, -1) e tem um ângulo de inclinação de 45°. Determine as equações reduzidas dessas estradas:

(Resultado esperado: $y = 3x - 1$ e $y = x - 4$)

Comentários:

O Plano de Trabalho foi elaborado de acordo com o currículo mínimo, o nível da turma e o tempo disponível (tenho apenas mais 3 dias de aula nesse bimestre, pois o restante das aulas são para teste, recuperação paralela, Saerjinho e prova bimestral).

As questões propostas são do livro citado na referência, a questão do João foi retirada do fórum e a última questão, das estradas, foi criada por mim.

3. Avaliação

O professor poderá atribuir 2,0 pontos para os alunos que participaram de maneira plena das atividades, tendo como critério da avaliação os seguintes itens:

Atividade 1

1,0 – a dupla resolveu corretamente as questões e participou da aula (H16).

Atividade 2

1,0 – a dupla resolveu as questões corretamente e participou do desenvolvimento da

aula (H15 e H32).

4. Referências

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. *Matemática ciência e aplicações*. Volume 3. Ensino Médio. São Paulo: Saraiva, 2010. p. 9-69.

Roteiro de Ação 1: *Geometria Analítica – Como calcular a distância entre dois pontos*. 3º ano. 3º Bimestre. 2º Campo Conceitual. Fundação CECIERJ. Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2013.

Roteiro de Ação 2: *Geometria Analítica – Encontrando a equação de uma reta*. 3º ano. 3º Bimestre. 2º Campo Conceitual. Fundação CECIERJ. Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2013.

Roteiro de Ação 3: *Geometria Analítica – Estudando a equação da reta no GeoGebra*. 3º ano. 3º Bimestre. 2º Campo Conceitual. Fundação CECIERJ. Consórcio Cederj. Rio de Janeiro, 2013.