CÍNTIA TEIXEIRA DIAS

NÚMEROS COMPLEXOS

Trabalho apresentado ao curso de Formação Continuada
Fundação CECIERJ/ Consórcio Cederj

Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes
Grupo 2
Curso: Matemática – 3ª série do ensino Médio

RIO DE JANEIRO
2013

INTRODUÇÃO

O objetivo deste plano de estudo é apresentar para os alunos o conceito de Números Complexos, fazendo primeiramente uma abordagem histórica, para que os alunos compreendam o contexto histórico que envolve o surgimento e o reconhecimento dos números complexos na Matemática, pela necessidade de um novo campo para a resolução de equações que não apresentam soluções no universo dos Números Reais.

Dessa forma, os alunos entenderão a importância dos números complexos nos mais diversos ramos da Matemática e, através destes, em muitas aplicações a outras áreas do conhecimento.

Depois de identificar os números complexos em sua forma algébrica, os alunos deverão ser capazes de fazer as operações básicas com os números complexos na forma algébrica.

NÚMEROS COMPLEXOS

Pré-requesitos: As quatro operações elementares (adição, subtração, multiplicação e divisão) e potenciação

Tempo de duração: 10 aulas (450 minutos)

Recursos: Computador com datashow, quadro branco, caneta para quadro branco, apagador, folhas de atividade e livro didático.

Conteúdos Específicos:

- A história dos Números Complexos
- O número i
- Conjunto dos Números Complexos
- Forma algébrica de um Número Complexo
- Operações elementares com Números Complexos na forma algébrica
- Potências de i

Objetivos:

- Conceituar número complexo.
- Representar um número complexo na forma algébrica.
- Operar com números complexos na forma algébrica.
- Calcular potências de expoente inteiro de i.

Metodologia:

Aula 1 (90 minutos)

Para iniciar a aula o professor propõe aos alunos a resolução da seguinte equação do 2º grau: $x^2 + 2x + 5 = 0$.

Depois, o professor apresenta o vídeo disponível em http://www.youtube.com/watch?v=UG0xVI_NNNA, que traz uma abordagem histórica dos números complexos e também a sua aplicabilidade. O vídeo é bem interessante, com uma linguagem bem contextualizada para a idade dos alunos e mostra exatamente as dúvidas e os questionamentos dos alunos, fazendo com que eles se identifiquem com a personagem do vídeo.

Depois da apresentação do vídeo, o professor propõe uma discussão sobre o assunto e no final, retorna ao problema proposto inicialmente e o resolve juntamente com a turma, mostrando aos alunos que agora, com os números complexos, todos os problemas que recaem em resolução de raiz quadrada negativa, têm solução.

Finalmente, o professor propõe a seguinte atividade, que deve ser feita com os alunos dispostos em dupla com duração máxima de 20 minutos.

Atividade 01:

1 – Escrevam um breve texto destacando a insuficiência dos números reais que motivou a criação dos números complexos.

2 – “Todos números reais são números complexos”. Escreva um texto explicando por que essa afirmação é verdadeira.

Aula 2 (90 minutos)

Utilizando o livro didático, o professor apresenta o Conjunto dos Números Complexos e a sua forma algébrica e depois de fixar o conteúdo, ele traz a seguinte lista de exercícios para ser feita em sala de aula individualmente:

Folha de Exercícios – Números Complexos – 3º bimestre – 3º ano do Ensino Médio

1 – Identifique a parte real e a parte imaginária de cada um dos seguintes números complexos:

a) $4 + 5i$
b) $3i + 3$
c) $-7 - i$

d) $\frac{-2+5i}{3}$

e) $-i\sqrt{3}$

2 – Em cada caso, determine o número real m de modo que:

a) $Z = (m - 3) + 4i$ seja imaginário puro.

b) $Z = -3 + (m + 3)i$ seja real.

3 – Dado o número complexo $z = (3 - x) + (x + 1)i$, em cada caso, determine os valores reais de x para que se tenha:

a) $Re(z) = 2$

b) $Im(z) = -4$

c) $Re(z) > Im(z)$

4 – Em cada caso, determine os números reais m e n para que a igualdade seja verdadeira:

a) $m + (n - 1)i = -4 + 3i$

b) $(m - 3) + (n - 2)i = 5i$

c) $(m - n + 1) + (2m + n - 4)i = 0$

5 – Sendo o complexo $z = (m^2 - 25) + (m + 5)i$ um imaginário puro:

a) Qual é o valor do número real m?

b) Determine z.

6 – Resolva, em $\mathbb{C}$, as equações:

a) $x^2 - 6x + 10 = 0$

b) $-x^2 + 4x - 29 = 0$

c) $x^2 + 100 = 0$

d) $x^2 - 2x + 4 = 0$

Aula 3 (180 minutos)

Utilizando o Roteiro de Ação, que segue abaixo, e um computador com datashow, o professor apresenta as operações elementares com números complexos na forma algébrica e as potências de i, e faz as atividades proposta pelo roteiro com os alunos dispostos em pequenos grupos de dois ou três alunos. Esta aula têm duração prevista de 180 minutos (4 aulas). No final da aula, o professor ainda utiliza o livro didático onde estão propostos mais exercícios para a fixação do conteúdo aprendido para ser realizado em casa.

ROTEIRO DE AÇÃO

Operações com números complexos

Caro Professor, as atividades a seguir foram elaboradas para que os alunos tenham total compreensão sobre como efetuar as operações básicas entre números complexos.

Para tal, às vezes eles poderão fazer uso da compreensão que obtiveram sobre as representações geométricas dos números complexos, bem como do processo de relacionar as formas retangular e polar.

Este roteiro foi concebido para ser executado através de projeção utilizando o notebook e um Datashow.

Atividade 01

Soma e Subtração de Números Complexos

Nesta atividade, você terá contato com as operações de soma e subtração envolvendo números complexos. Na verdade, você descobrirá que elas muito se assemelham a outros conceitos já estudados anteriormente. Preparado?

Por exemplo, como faríamos a soma dos números complexos $z = 2$ e $w = 4$?

Uma vez que todo número real é um número complexo, tanto faz somarmos complexos que possuam apenas a parte real, apenas a parte imaginária, ou ambas.

Um cuidado deve ser tomado: a unidade imaginária i distingue a parte real da parte imaginária e, sendo cada parte de natureza distinta, não podemos simplesmente uní-las. Assim, o procedimento de soma de dois números complexos se assemelha ao de soma de expressões algébricas da forma $ax + b$.

Sob esta ótica, temos, por exemplo:

$z = 2 + 3i$; $w = 5 + 2i$

$z + w = 2 + 3i + 5 + 2i = (2 + 5) + (3 + 2)i = 7 + 5i$

1. Agora efetue as somas $z + w$ abaixo:

   a. $z = 3$; $w = 5$

   b. $z = 2i$; $w = 4i$

   c. $z = 5$; $w = 3i$

   d. $z = 2 + 3i$; $w = 3$

   e. $z = 3 + 5i$; $w = 3 + 2i$

As respostas esperadas são: a) 8; b) 6i; c) 5 + 3i; d) 5 + 3i; e) 6 + 7i

Como você pôde perceber, somar números complexos pode ser tratado de modo semelhante à soma de expressões algébricas. Na verdade, descobriremos mais à frente que a relação entre estes dois assuntos é ainda mais estreita.

Para o caso da subtração de números complexos, mantendo a relação citada acima, basta a troca de sinal da parte real e da parte imaginária, seguindo com o agrupamento e soma dos termos semelhantes como anteriormente.

Por exemplo:

$z = 5 + 2i$; $w = 2 + i$

$z - w = (5 + 2i) - (2 + i) = 5 + 2i - 2 - i = (5 - 2) + (2 - 1)i = 3 + i$

2. Agora, efetue $z – w$ nos casos abaixo:

a. $z = 6 + 3i$; $w = 2 – 4i$

b. $z = -2 + 4i$; $w = 3 – 5i$

c. $z = 3 – 5i$; $w = -2 + 4i$

As respostas esperadas são: a) 4 + 7i; b) -5 + 9i; c) 5 – 9i.

Neste ponto, é necessária atenção para possíveis equívocos na troca de sinal. Os itens b e c estão com z e w invertidos. Isto nos mostra que, assim como acontece com os números reais, a subtração não é comutativa, isto é, a ordem dos fatores altera a diferença. É importante comentar isso com a turma.

Como vimos, o procedimento para soma e subtração de números complexos pode ser resumido a operar com a parte real e com a parte imaginária separadamente e, em seguida, juntar as partes para formar um novo número complexo.

As atividades que você acabou de realizar levaram em conta apenas valores inteiros para as partes real e imaginária dos números complexos. Mas os números complexos são muito mais que isso!

Na realidade, os valores podem ser quaisquer números reais e, para realizar a soma/subtração em cada caso, basta seguir o mesmo procedimento que você realizou anteriormente, só que agora com quaisquer complexos.

3. Tente agora efetuar as seguintes operações:

a. $z = 1{,}5 + 5{,}4i$; $w = -3{,}1 - 1{,}2i$. Sendo assim, determine $z + w$.

b. $z = -\pi + 5{,}17i$; $w = 8{,}9 + 3{,}6i$. Sendo assim, determine $w - z$.

Dica: Tente fazer usando $\pi = 3{,}14$. Depois, calcule usando a representação π, sem aproximações.

c. $z = 44{,}3 - 1{,}8i$; $w = 4{,}2 + 2{,}7i$; $v = -i$. Sendo assim, determine $z - w + v$.

Pronto! Agora você já é capaz de realizar somas e subtrações entre números complexos quaisquer!

O resultado esperado é: a) $z + w = -1{,}6 + 4{,}2\,i$; b) $w - z = 12{,}04 - 1{,}57i$ ou $w - z = 8{,}9 + \pi - 1{,}57i$; c) $z - w + v = 40{,}1 - 5{,}5i$.

Nesse caso, esperamos que os alunos percebam que as partes reais e imaginárias podem ser compostas por quaisquer números reais, inclusive, os irracionais!

Atividade 02

Multiplicação e Divisão

Assim como fizemos na soma/subtração, podemos considerar a multiplicação e a divisão como uma operação envolvendo a forma algébrica, da mesma forma que fazemos com as expressões algébricas.

E mais: você lembra da “racionalização do denominador de uma fração”? Esse é um procedimento bastante efetuado no estudo de frações envolvendo expressões algébricas e números irracionais. Será utilizado aqui também!

Inicialmente, tente efetuar a operação z * w, com z = 3 + 2i e w = 4.

Resposta esperada: 12 + 8i.

Atenção para possíveis equívocos na operação, como multiplicar apenas a parte real e não a parte imaginária.

Agora vamos complicar um pouco. Efetue a operação z * w, com z = 2 + 4i e w = 3i. Não se esqueça que, como i = 1−, podemos considerar que $i^2 = -1$.

Resposta esperada: -12 + 6i.

Certifique-se se os alunos compreendem que 4i * 3i = 4*3*i*i = 4*3*i2 = 12*(-1) = -12.

Efetue z * w, com z = 2 – 3i e w = 5 – i.

O resultado esperado é 7 – 16i.

A partir deste ponto, você já deve estar em condições de efetuar o produto entre dois complexos na forma algébrica. Mas, e a divisão?

Bom tente efetuar a seguinte divisão: z : w, com z = 6 – 4i e w = 2.

Resposta esperada: 3 – 2i.

Atenção para possíveis equívocos na operação, como dividir apenas a parte real, e não a parte imaginária.

Na divisão onde o divisor é um número real puro, basta dividir cada termo do dividendo pelo divisor. Agora efetue:

a. z : w, com z = -9i e w = 3i.

b. z : w, com z = 6 – 4i e w = 2i.

No item a, eles provavelmente farão a “simplificação” de i, obtendo -9/3 = -3.

Já no item b, provavelmente o aluno terá algumas dúvidas. Quanto é 6 dividido por 2i? É permitido separar os termos quando a divisão envolve números complexos?

Explique a eles que sim, eles poderiam separar neste caso os termos 6 e -4i, mas que isto não vai ajudá-los quando houver uma soma também no denominador.

Oriente-os para multiplicar em cima e em baixo por i, assim como fazemos com as raízes reais. O resultado esperado é -2-3i.

Para efetuar uma divisão onde o divisor possui parte imaginária, faremos uso de um artifício que você conheceu durante o estudo de números irracionais: a racionalização do denominador.

A divisão de números complexos na forma a + bi pode ser vista do mesmo modo que uma divisão de números irracionais na forma de radicais. Neste caso, quem executa a tarefa de eliminar a parte imaginária é o conjugado do número complexo.

Procure efetuar a seguinte divisão, utilizando esta idéia:

$z : w$, com $z = 4 – 3i$ e $w = 2 + i$

Com isto você já tem condições de trabalhar com as 4 operações básicas dentro do conjunto dos números complexos.

Uma nota final ainda cabe. Quando você aprendeu sobre a potenciação, provavelmente ouviu falar nela como “multiplicar repetidas vezes”. Na verdade, você pode notar que elevar um número complexo qualquer a uma dada potência pode ser entendido como resolver um caso de Binômio de Newton.

Mas antes, você deve saber como trabalhar com as potências da unidade imaginária.

Responda a sequência abaixo:

a. Qual o valor de i^2?

b. Você pode, a partir do valor de i^2, obter o valor de i^3? Como?

c. Agora que você tem o valor de i^3, é capaz de calcular i^4? Como?

d.O que aconteceu no momento em que calculou o valor de i^4? Você consegue explicar o motivo?

e. Obtenha os valores de i^5, i^6, i^7 e i^8.

Respostas esperadas: a) -1; b) Sim, pois i3 = i2 * i = -1 * i = -i; 1c) Sim, pois i4 = i3 * i = -i * i = - i2 = - (-1) = 1; d) i4 é igual a i0 = 1. Ver comentário a seguir. e) i5 = i, i6 = -1, i7 = -i, i8 = 1.

Neste ponto, o aluno terá notado que ao elevar i á quarta potência, o resultado é 1, um número real, e elemento neutro da multiplicação. Enfatize isto, e mostre ainda a eles que, como $i^4 = 1$, então só resta a $i^5 = i^4 * i$ ser igual a i. Ao obter os valores de i^6, i^7 e i8, o aluno começará a perceber que o resultado das potências de i é cíclico, isto é, de tempos em tempos ele “volta ao início”, e a sequência de resultados se repete.

Notou algo “estranho”? Acontece que as potências de i formam uma sequência que percorre um ciclo de valores: i, -1, -i, 1. Com isto, para saber o valor de qualquer potência de i, basta verificar em que ponto da sequência a potência desejada se encontra.

Vamos verificar?

f. Calcule i^{10}.

Você já viu que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, etc. Se continuarmos com a sequência, logo notamos que i10 deve ser igual a -1. Mas e se quiséssemos o valor de i^{135}? É necessário encontrar um modo de não precisar escrever a sequência completa todas as vezes... E há um modo!!

Verificando os resultados das potências de i, podemos notar uma relação entre os expoentes e os valores dos resultados.

Você consegue visualizar qual é esta relação? Explique a seguir.

Uma dica: esta relação refere-se ao “tempo” que leva até que um valor seja repetido.

O aluno deve compreender aqui que, de quatro em quatro expoentes os valores voltam a se repetir. Assim, $i^5 = i$; $i^6 = i^2 = -1$; $i^7 = i^3 = -i$; $i^8 = i^4 = 1$; etc.

Leve os alunos a perceberem que a menor potência de i à qual uma potência maior é equivalente é aquela dada pelo resto da divisão do expoente por 4. Ou seja:

$i^k = i^r$, onde r é o resto da divisão de k por 4.

Logicamente, $r \in \{0,1,2,3\}$

Encontre o valor das seguintes potências de i:

a) i^{21}

b) i^{87}

c) i^{221}

d) i^{1024}

Respostas esperadas: i; -i; i; 1.

Agora que você já sabe como efetuar multiplicações, divisões, efetue as operações solicitadas:

a) $z * w$, sendo que $z = -1 + i$; $w = 3 + 5i$

b) $z : w$, sendo que $z = 5 + 4i$; $w = -i$

c) $w : z$, sendo que $z = 2 - 2i$; $w = 5 + 2i$

d) $z * w$, sendo que $z = 2 + 2i$; $w = 2 - 2i$

e) $w : z$, sendo que $z = 4$; $w = 4 + 3i$

AVALIAÇÃO

Com a avaliação é um instrumento fundamental para se obter informações sobre o andamento do processo de ensino-aprendizagem, ela será feita em três momentos distintos:

1. Atividade 01 , que será em dupla, realizada na aula 1, onde os alunos terão a oportunidade de organizar suas ideias a respeito do conceito e a importância dos números complexos e o professor terá a oportunidade de observar se o conceito foi bem assimilado. (Pontuação: 1,0 ponto). Segue abaixo o modelo.

Atividade 01:

1 – Escrevam um breve texto destacando a insuficiência dos números reais que motivou a criação dos números complexos.

2 – “Todos números reais são números complexos”. Escreva um texto explicando por que essa afirmação é verdadeira.

2. Participação e envolvimento do aluno em todo o desenvolvimento das atividades propostas durante as aulas e na resolução dos exercícios. (Pontuação: 3,0 pontos)

3. Avaliação individual, sem consulta ao material de estudo, com duração máxima de 90 minutos, que será aplicada no fim do curso, onde os alunos terão a oportunidade de desenvolver as competências e as habilidades estudadas (Pontuação: 6,0 pontos). Segue o modelo abaixo:

Avaliação de Matemática – 3º Série do Ensino Médio - Números Complexos

Nome: ____ Nº ______ Turma: _______

1 – Classifique como verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações:

a) Todo número real também é um número complexo.

b) Todo número complexo também é um número real.

c) $\mathbb{C} \cap \mathbb{R} = \varnothing$

d) $\mathbb{C} - \mathbb{R} = \{ z / z = a + bi, \text{ com } \{a, b\} \subset \mathbb{R} \text{ e } b \neq 0\}$

e) O conjugado do número $3 + 4i$ é $-3 - 4i$.

f) Se $a + 3i = 6 + bi$, com $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, então, $a + b = 9$.

2 – Determine os valores reais de x para que o número complexo $(x^2 - 9) + (x - 3)i$ seja:

a) real

b) imaginário

c) imaginário puro

3 – Resolva, em $\mathbb{C}$, a seguinte equação $x^2 - 6x + 10 = 0$.

4 – Calcule:

a) $(-1 + 2i) + (3 - 5i) =$

b) $(5 - 4i) - (-7 + 6i) =$

c) $(2 + 5i) . (-2 + 3i) =$

d) $(4 + 2i) \div (1 + i) =$

5 – Dados $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 -2i$ e $z3 = 5i$, calcule:

a) $3z_1 + 4z2 - 2z_3$

b) $z_1 . z_3$

c) $\frac{z_1}{z_2} =$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1 – PAIVA, Manoel. **Matemática – Paiva/ Manoela Paiva**. **–** 1.ed. – São Paulo: Moderna, 2009.

2 – IEZZI, Gelson. **DOLCE,** Osvaldo. **DEGENSZAJN,** David. **PÉRIGO,** Roberto. **ALMEIDA,** Nilze de. **Matemática: ciência e aplicações, 3: ensino médio –** 6.ed. – São Paulo: Saraiva, 2010.

3 – SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática aula por aula/** Cláudio Xavier da Silva, Benigno Barreto Filho. – 2e. renov. – São Paulo: FTD, 2005.

4 – **ROTEIROS DE AÇÃO –** Números Complexos, Roteiro de ação 3 – Curso de Formação Continuada oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 3º bimestre / 2013.

5 – Números Complexos, Argand-Gauss e Plano Complexo de Preparaçao Digital. Disponível em: < http://www.youtube.com/watch?v=UG0xVI_NNNA.>. Acesso em: 23 de agosto de 2013.