FABIO DE ALMEIDA BENZAQUEM

ATIVIDADES COM POLINÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS
(TAREFA 1)

Trabalho apresentado ao curso de Formação Continuada da Fundação CICIERJ – Consórcio CEDERJ.

Orientadora:Maria Cláudia Palhares(Tutora)

Grupo : 1

Série : 3ªsérie do Ensino Médio

Rio de Janeiro, 04 de novembro de 2013.

1 – INTRODUÇÃO

O objetivo deste plano de estudo é apresentar para os alunos o conceito de Polinômios e Equações Algébricas, principalmente a utilização do Teorema do Resto para resolver problemas.

O Teorema do Resto refere-se ao resto da divisão de um polinômio por um binômio da forma x – a e tem consequências importantes para a resolução de equações algébricas. É um assunto didaticamente interessante, pois se trata de um resultado de verificação simples e com aplicações imediatas.

Embora o teorema se refira à divisão, a revisão aqui focalizada restringiu-se à multiplicação. O tempo de uma atividade não seria suficiente para incluir também a revisão da divisão. As atividades foram, então, propostas de forma a não exigir que o estudante faça divisões. Também os exemplos estudados se restringem a polinômios de uma só variável. Isso porque as aplicações serão feitas sobre as equações algébricas de uma variável.

2 – DESENVOLVIMENTO

2.1 -ATIVIDADE 1: “Uma divisão diferente”.

Habilidades Relacionadas : H16 – Resolver problemas envolvendo operações com polinômios.

Pré-Requisitos: Operações com números inteiros, algoritmo da divisão, propriedade distributiva da multiplicação, noções de polinômios (8ºano)

Tempo de Duração : meia hora/aula

Recursos : lápis ,borracha, encarte do aluno.

Organização da Turma : Grupos de 3 alunos.

Objetivos: Rever o produto de polinômios.

Metodologia : Após a breve revisão dos pré-requisitos descritos acima, os alunos formaram grupos de 3 alunos para fazerem as atividades propostas pelo professor.Terminada as atividades, o professor fará suas ponderações finais e promoverá um debate, dado ênfase no que foi abordado durante cada atividade.

Material necessário: Lápis, borracha, encarte do aluno

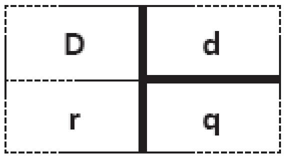
Avaliação : A avaliação será em grupo e se levará em conta a participação coletiva de cada grupo.

Descrição da atividade :

Explorando a analogia com a divisão de números naturais, é introduzida a expressão que une dois polinômios, o quociente e o resto da divisão do polinômio de grau mais alto pelo de grau mais baixo.

Questão 1 : (Desenvolvimento)

Quando você divide um número natural por outro, pode obter resto nulo ou não. No primeiro caso, a divisão é exata e garante que o dividendo é múltiplo do divisor. No segundo, a relação entre os quatro números envolvidos, dividendo (D), divisor(d), quociente(q) e resto(r), pode ser resumida num produto seguido de uma soma, observando que o resto é sempre menor que o divisor.



Como você indica, numa única expressão numérica, que a divisão de 20 por 3 tem quociente 6 e resto 2?

Operações análogas podem ser feitas com polinômios. Você se lembra de como operar com polinômios? Vamos relembrar? Calcule os valores de a e de b a fim de que a igualdade a seguir seja verdadeira :

$$x^4 - 3x^3 + 4x^2 = (x^2 - 5)\,(x^2 - 3x + 9) + (ax + b)$$

Nesse caso, do mesmo modo como se trata a divisão de números naturais com resto, pode-se dizer que a divisão de $x^4 - 3x^3 + 4x^2$ por $x^2 - 5$ tem quociente $x^2 - 3x + 9$**,** com resto ______________, ou seja :

$x^4 - 3x^3 + 4x^2 = (x^2 - 5)\,(x^2 - 3x + 9) + (\quad + \quad)$.

Isso pode ser feito entre dois polinômios P(x) e S(x), desde que o grau de P(x) (dividendo) seja maior do que ou igual ao grau de S(x) (divisor). O resto R(x) deverá ter grau menor do que o de S(x). Isto é, se o grau de P(x) é maior que ou igual ao grau de S(x), é possível determinar polinômios Q(x) e R(x) tais que:

P(x) = S(x) × Q(x) + R(x), sendo o grau de R menor que o grau de S.

Como na divisão entre números inteiros, Q(x) diz-se o quociente de P(x) por S(x) e R(x) será resto da divisão.

Questão 2 : (Desenvolvimento)

Seja $P(x) = x^3 – 3x^2 + x + 8$ e $S(x) = x – 2$. Sabendo que o quociente de P por S é $Q(x) = x^2 – x – 1$, encontre o resto dessa divisão. Antes de fazer o cálculo, analise qual deve ser o seu grau.

____

____

____

____

____

Questão 3 : (Desenvolvimento)

Seja $P(x) = x^3 – 3x^2 + x + 2$ e $S(x) = x – 2$, sabendo que o quociente de P por S é $Q(x) = x^2 – x – 1$, encontre o resto dessa divisão.

____

____

____

____

____

2.2- ATIVIDADE 2 : É fácil provar...

Duração prevista: meia hora/aula

Habilidades Relacionadas : H16 – Resolver problemas envolvendo operações com polinômios.

Objetivos: Enunciar e provar o Teorema do Resto.

Pré-requisitos: Cálculo com polinômios.

Metodologia : Após a breve revisão dos pré-requisitos descritos acima, os alunos formaram grupos de 3 alunos para fazerem as atividades propostas pelo professor.Terminada as atividades, o professor fará suas ponderações finais e promoverá um debate, dado ênfase no que foi abordado durante cada atividade.

Material necessário: Lápis, borracha, encarte do aluno

Organização da classe: Turma organizada em grupos de três alunos.

Avaliação : A avaliação será em grupo e se levará em conta a participação coletiva de cada grupo.

Descrição da atividade :

Esta atividade utilizará os cálculos feitos anteriormente para ilustrar o Teorema do Resto e sua demonstração, que é muito simples. Irá também evidenciar para o aluno como um resultado tão simples pode ser tão poderoso!

Questão 1: (Desenvolvimento)

Calcule os valores de $P_1(2)$ e $P_2(2)$ diretamente por substituição nos polinômios : $P_1(x) = x^3 – 3x^2 + x + 8$ e $P_2(x) = x^3 – 3x^2 + x + 2$.

____

____

____

____

____

Questão 2: (Desenvolvimento)

Compare esses resultados com os restos da divisão de P_1 e de P_2 por (x – 2) e veja como justificar esse resultado a partir das identidades :

$P_1(x) = Q(x) \times (x – 2) + 6$ e $P_2(x) = Q(x) \times (x – 2)$.

____

____

____

____

____

Questão 3 : (Desenvolvimento)

Numa situação geral, em que você divida um polinômio de qualquer grau $n \geq 1$ pelo binômio do 1º grau, (x – a), analise as seguintes situações:

a**.** Se a divisão de P por (x – a) tem quociente Q(x) e resto R(x), qual é o grau de R(x)?

____

____

b**.** Sabendo, então, que P(x) = Q(x) (x – a) + R, qual será o valor de P para x = a, isto é, quanto vale P(a)?

____

____

Parabéns! Você acaba de provar o Teorema do Resto, que diz:
Dado um polinômio P(x), de grau $n \geq 1$ que dividido por (x – a) tem quociente Q(x) e resto R, tem-se que R é constante e P(a) = R.

2.3- ATIVIDADE 3 : É fácil provar...

Duração prevista: meia hora/aula

Habilidades Relacionadas : H16 – Resolver problemas envolvendo operações com polinômios.

Objetivos: Aplicar o Teorema do Resto.

Pré-requisitos: Cálculo com polinômios.

Metodologia : Após a breve revisão dos pré-requisitos descritos acima, os alunos formaram grupos de 3 alunos para fazerem as atividades propostas pelo professor.Terminada as atividades, o professor fará suas ponderações finais e promoverá um debate, dado ênfase no que foi abordado durante cada atividade.

Material necessário: Lápis, borracha, encarte do aluno.

Organização da classe: Turma organizada em grupos de três alunos.

Avaliação : A avaliação será em grupo e se levará em conta a participação coletiva de cada grupo.

Descrição da atividade :

A partir de alguns exemplos, o aluno vai entrar em contato com resultados importantes, consequências do Teorema do Resto, ligados a fatoração e zeros de polinômios. Tais resultados são importantes na resolução de equações algébricas de grau maior que 2.

E, então: Qual o poder deste teorema?

Questão 1: (Desenvolvimento)

Na etapa anterior, você viu que o resto na divisão de $P_2(x)$ por $(x – 2)$ foi 0. Você concluiu, então, que $P_2(2) = 0$, mas concluiu também que $P_2(x)$ era o produto do quociente $Q(x)$ por $(x – 2)$. Isto é, você viu também que $(x – 2)$ é um fator de $P_2(x)$. Você se lembra do que é "fatorar"?

Fatorar é escrever como um produto. Como o resto da divisão era 0, você pôde escrever: $P2(x) = (x^2 – x – 1) (x – 2)$.

Da mesma forma, será que $(x – 5)$ é um fator de $P(x) = x^4 – 5x^2 – 500$?

____

____

____

____

Questão 2: (Desenvolvimento)

E qual será o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^4 – 5x^2 – 500$ por $(x + 5)$?

____

____

____

Questão 3: (Desenvolvimento)

Nas questões anteriores, você viu que o polinômio P(x) = x4 – 5x2 – 500 é divisível por (x + 5) e por (x – 5). Então, como acontece com os números naturais, P(x) será divisível pelo produto (x + 5)(x – 5) = x2 – 5.

A equação $P(x) = 0$ é $x^4 – 5x^2 – 500 = 0$. Como $P(5) = P(– 5) = 0$, então 5 e – 5 são suas raízes. Será que existem outras raízes dessa equação?

Observe a divisão a seguir e dê a resposta.

x^4	$-5x^2$	-500	$x^2 - 25$

Encarte do aluno

Questão 4 (Desenvolvimento)

a. Observe a divisão de $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ por $(x - 1)$ e responda se 1 é, ou não, raiz da equação $P(x) = 0$.

x^3	$-3x^2$	$-x$	$+3$	$x - 1$

Encarte do aluno

b**.** Observe a divisão de x2 – 2x – 3 por (x + 1) e dê uma fatoração de $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ em binômios do 1º grau.

c**.** Quais são, então, as raízes da equação $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$?

Deu para perceber o poder do Teorema do Resto?

Ele pode fatorar polinômios e resolver equações algébricas!

Estes exemplos são exemplos particulares, mas você pode verificar que esses fatos são gerais:

Se o quociente da divisão de P(x) por (x – a) é Q(x) com resto 0, então P(x) = Q(x) (x – a) e P(a) = 0. Isto é, (x – a) é um fator de P e a é uma raiz da equação algébrica P(x) = 0.

3- AVALIAÇÃO

A avaliação será em grupo , levando-se em conta a participação coletiva do aluno no grupo.

Através das atividades realizadas espera-se que seja possível avaliar o conhecimento dos alunos em relação:

- À utilização do Teorema do Resto para resolver problemas.

- Cálculos com polinômios.

4 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFORÇO ESCOLAR.Rio de Janeiro : FUNDAÇÃO CECIERJ : 2013

Endereços eletrônicos acessados de 29/10/2013 à 04/11/2013, citados ao longo do trabalho:

http://ww.projetoseeduc.cecierj.edu.br/
http: //www.google.com
http://www.brasilescola.com/matematica/teorema-dalembert.htm