FORMAÇÃO CONTINUADA EM MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ - Consórcio CEDERJ

Matemática 3º Ano – 4º Bimestre/2013

POLONÔMIOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Tarefa 1 - Plano de Trabalho 1

Cursista: Mara Cláudia Arêas da Silva
Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes

Sumário

INTRODUÇÃO

Este Plano de Trabalho tem por objetivo apresentar ao aluno a possibilidade de utilizar uma função polinomial para completar o contorno de uma imagem, mudando a visão de que a relação entre a Álgebra e a Geometria é muitas vezes ensinada de forma rápida, onde os conceitos são apresentados apenas como definições. Neste contexto pretende-se ensinar o aluno a utilizar o desenvolvimento, a simplificação e a expansão de polinômios para resolução de problemas matemáticos do cotidiano, despertando assim o interesse pela visão generalista da construção de resultados em matemática.

Uma das propostas deste Plano de Trabalho é propor aos alunos pensarem sobre a construção dos conhecimentos com polinômios em Matemática, explorando mais os polinômios e a contagem das raízes de uma equação polinomial de forma algébrica e geométrica. Considerar ainda os gráficos das funções polinomiais como forma de fornecer dicas na busca das raízes de polinômios.

As atividades deste Plano de trabalho foram elaboradas de modo a conduzir os alunos à percepção de que um polinômio poder utilizado para modelar problemas do nosso cotidiano. O objetivo é analisar a capacidade dos alunos de realizar operações com polinômios, calcular valor numérico e obter raízes de um polinômio a partir da resolução de problemas a eles apresentados.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1: Definição e Aplicação de Polinômios

- **OBJETIVOS:**
  Definir Polinômios de uma só variável e suas aplicações em resoluções de problemas;
  Ressaltar a importância da função Polinomial na geometria, quando se deseja calcular expressões que envolvem valores desconhecidos e na análise de gráficos.

- **TEMPO DE DURAÇÃO**: 100 minutos

- **PRÉ-REQUISITOS:**
  Saber resolver equações do 1º e 2º graus;
  Identificar um ponto no plano, através das suas coordenadas;
  Função do 1º e do 2º grau;
  Análise de gráficos;
  Conhecimento de área de figuras planas;
  Conhecimento de área e volume de figuras espaciais.

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:**
  Exposição com os recursos utilizados em sala de aula como o livro didático, quadro negro, giz, apagador, régua, esquadro, caderno, lápis, borracha, entre outros; Uso de papel quadriculado; Uso do Data Show.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Os alunos estarão dispostos individualmente.

- **METODOLOGIA ADOTADA:**

  O primeiro passo será relembrar junto ao aluno as funções do 1º grau cujas equações têm a forma $f(x) = ax + b$, e as funções quadráticas, cujas equações têm a forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ressaltando que estas funções são casos especiais de ***Funções Polinomiais***.

  - (Depois desta explanação no quadro será apresentada ao aluno a definição e as aplicações dos Polinômios. Para isto será usado o Data Show).

Apresentação no Data-show

Um polinômio (ou função polinomial) de grau *n* é uma função da forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Onde os coeficientes a_0, a_1,..., a_n são números reais conhecidos, $a_n \neq 0$ e *n* é um número natural. O valor de *n* determina o grau do polinômio. Cada uma das parcelas $a_i x^i$ de um polinômio é chamada de monômio de grau *i*.

O grau do polinômio informa o seu número de raízes (reais ou não). Se todos os coeficientes do polinômio forem nulos o polinômio é chamado polinômio nulo. O polinômio nulo não possui grau.

Exemplos:

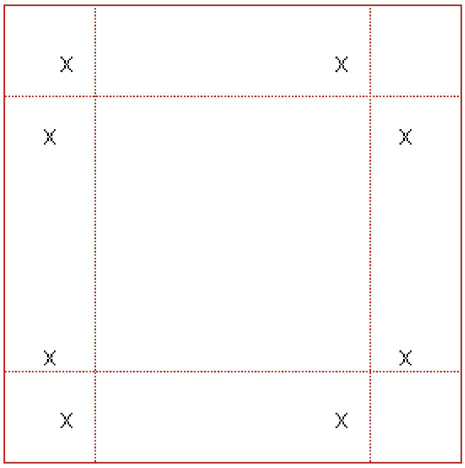
$P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 5x - 1$ tem grau 5;
$P(x) = 10x + 10$ tem grau 1;
$P(x) = 2$ tem grau zero;
$P(x) = 0x^2 + 0x + 0$ não possui grau.
(Conhecido como polinômio nulo)

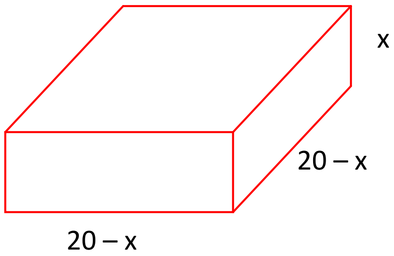
Os Polinômios aparecem na resolução de muitos problemas na vida prática, por isso é importante estudá-los com um pouco mais de cuidado. Vejamos então um problema prático de aplicação de polinômios.

O Problema da caixa:

Um pedaço de folha de plástico quadrada de lado igual a 20 cm deve ser transformada em uma caixa de água, sem tampa superior, cortando-se quadrados em seus quatros cantos e levantando-se os quatros retângulos resultantes para formar as laterais da caixa. O problema é descobrir como se deve cortar os cantos desta folha de modo a formar, quando completamente cheia, uma caixa de maior volume possível?

Para entender o problema, vamos imaginar que cortamos, nos quatros cantos da folha, quadrados de lados com distintos comprimentos *x*, como mostra a figura ao lado, e imagine a caixa que é possível construir levantando-se os quatro retângulos que sobram para formar as laterais.





Considerando a figura acima, o problema consiste em determinar o valor de *x*, a ser cortado, para obtermos a caixa de volume máximo. Observe que à medida que ***x*** varia, o volume também varia, isto é, o volume da caixa depende da variável ***x*** que, neste problema, representa o tamanho do corte que determinará a altura da caixa a ser montada. Dizemos, então, que o volume é uma função de ***x***.

Neste caso, a expressão matemática que fornece o volume da caixa, para cada valor particular de *x*, é dada por:

$$\mathbf{V = (20 - 2x)^2 . x}$$
$$\mathbf{V = x(400 - 80x + 4x^2)}$$
$$\mathbf{V = 4x^3 - 80x^2 + 400x}$$

Análise Numérica:

Repare ainda que ***x*** é o tamanho do corte a ser feito dos dois lados de um pedaço de papelão quadrado de 20 cm de lado), logo ***x só pode assumir valores*** entre zero e 10.

Para determinar o valor de ***x*** , a ser cortado, para que o valor V do volume atinja o seu máximo, podemos fazer uma tabela ou lista mostrando o valor do volume para vários valores de ***x***. Como ***x*** varia entre 0 e 10, iremos formar uma tabela com *n* +1 pontos, incluindo 0 e 10.

- (Esta tabela será construída pelos alunos).

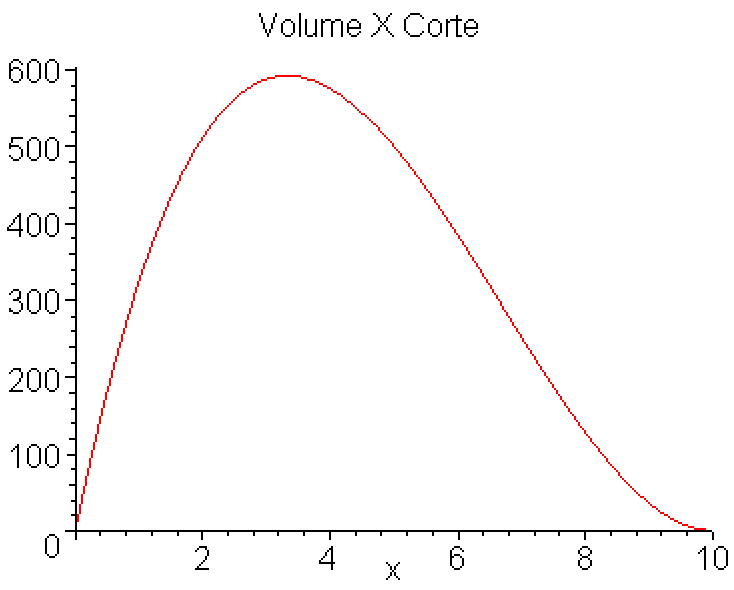
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V(*x*)	0	324	512	588	576	500	384	252	128	36	0

Pela análise da lista acima, verificamos que o valor máximo do volume parece ocorrer para valores de ***x* *entre 2 e 4***. Este resultado não é preciso porque estamos usando apenas valores inteiros para o ***x***.

Análise Gráfica:

Outro modo de tentar calcular o valor máximo de V é fazer uma análise gráfica onde se explicite visualmente a relação existente entre as duas variáveis envolvidas no problema: V (volume da caixa) e *x* (tamanho do corte). Para isso, vamos usar as tabelas anteriores, marcar os pontos no plano cartesiano e unir estes pontos por uma curva suave. Observe o gráfico que acabamos de construir.

- (O gráfico também será construído pelos alunos em papel quadriculado).



Observando este gráfico, verificamos, mais uma vez, que à medida que ***x*** varia, os valores correspondentes para V, crescem até atingir um valor máximo e depois decrescem até zero.

Pela análise do gráfico podemos confirmar que para se obter um volume máximo teremos um valor de ***x* *entre 2 e 4***.

"Neste exemplo vimos que relações quantitativas, expressas por equações polinomiais, gráficos ou tabelas, podem ser usadas para modelar e resolver problemas."

Atividade 2: Valor Numérico e Raiz de um Polinômios

- **OBJETIVOS:**
  Calcular o valor numérico de Polinômios;
  Determinar quando um número é raiz de um Polinômio;
  Despertar o interesse pela visão generalista da construção de resultados em matemática.

- **TEMPO DE DURAÇÃO**: 100 minutos

- **PRÉ-REQUISITOS:**
  Saber trabalhar com as operações aritméticas entre números reais;
  Saber trabalhar com potências de números reais;
  Saber resolver equações de 1º e 2º grau.

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:**
  Exposição com os recursos utilizados em sala de aula como o livro didático, quadro negro, giz, apagador, régua, esquadro, caderno, lápis, borracha, entre outros; **Roteiro de Ação 5**; Uso do Data Show e do Geogebra.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Os alunos serão dispostos em duplas.

- **METODOLOGIA ADOTADA:**

A metodologia adotada para o Cálculo do Valor numérico de um polinômio P(x) para x = a será feita pela ***professora no quadro e com o acompanhamento do livro didático***. Da mesma forma será abordada a análise de determinado valor de ***x ser ou não uma raiz*** do Polinômio.

Após a explanação da Professora será aplicado o **Roteiro de Ação 5 – O Zero como raiz de um polinômio.** Devido a insuficiência tecnológica da escola, as construções dos gráficos pedido no item 4 serão feitos previamente pela professora com o Software Geogebra e mostradas aos alunos com a ajuda do Data Show e do Notebook.

Para finalizar a **Atividade 2** será proposto uma ***lista de exercícios extraclasses*** para serem realizados pelas mesmas duplas e entregues posteriormente a professora.

Lista de Exercícios

1- Qual o valor numérico do polinômio $P(x) = x^2 - 2x + 5$ para $x=2$.

2- Calcule o valor numérico do polinômio $P(x) = x^4 - x^3 + 3x + 1$ para $x=1$, $x=0$ e $x=-1$, e depois responda se algum destes valores são raízes deste polinômio.

3- Dada a $f(x) = x^2 - ax + 5$ calcule **a** para que $f(-3) = 8$

4- Sabendo que 2 é raiz de $p(x)= x2 - mx+6$, calcule o valor de m.

5- Num polinômio P(x), do 3º grau, o coeficiente de x^3 é 1. Se $P(1)=P(2)=0$ e $P(3)=30$, calcule o valor de $P(-1)$.

6- Calcular $m \in IR$ para que o polinômio $P(x)=(m^2-1)x^3+(m+1)x^2-x+4$ seja:

a) do 3ºgrau b) do 2º grau c) do 1º grau

7- O lucro de uma mercadoria é calculado através da subtração entre a receita e o custo. No caso de uma mercadoria em que no momento da fabricação verifica-se um custo fixo de R$ 20,00 mais R$ 2,00 de custo variável e que o preço de venda seja igual a R$ 8,00 a unidade, determine a função lucro e o lucro obtido com a venda de 450 peças dessa mercadoria.

8- O lucro de determinado produto vendido por uma empresa é dado pela expressão algébrica $x^2 + 10x + 4\,000$. Caso sejam vendidos 200 unidades do produto qual deverá ser o lucro?

9- UFPB/2007) A função $L(x)= 100x^2+1200x-2700$ representa o lucro de uma empresa, em milhões de reais, onde x é a quantidade de unidades vendidas. Nesse contexto, considere as seguintes afirmações:

I. Se vender apenas 2 unidades, a empresa terá lucro.
II. Se vender exatamente 6 unidades, a empresa terá lucro máximo.
III. Se vender 15 unidades, a empresa terá prejuízo.

Está(ão) correta(s) apenas:

a) I b) II b) III d) I e II e) II e III

10- O custo de fabricação de uma calculadora numa determinada fábrica é dado por: $C(x) = 3x + 50$, pede-se:
a) o custo de produção de 10 unidades;
b) a quantidade produzida para um custo de R$ 200,00.

Atividade 3: Operações com Polinômios

- **OBJETIVOS:**
  Saber calcular a Adição e Subtração de Polinômios;
  Saber calcular a multiplicação e a divisão de Polinômios.

- **TEMPO DE DURAÇÃO**: 100 minutos

- **PRÉ-REQUISITOS:**
  Saber trabalhar com as operações aritméticas entre números reais;
  Saber multiplicar e dividir potências de mesma;
  Saber multiplicar e dividir monômios;
  Saber efetuar termos semelhantes.

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:**
  Exposição com os recursos utilizados em sala de aula como o livro didático, quadro negro, giz, apagador, régua, esquadro, caderno, lápis, borracha, entre outros; Uso das atividades contidas no **Roteiro de Ação 2**; Estudo Dirigido.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Os alunos serão dispostos em duplas, porém as atividades serão individuais.

- **METODOLOGIA ADOTADA:**

O primeiro passo será a aplicação das atividades 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, e 9 do ***Roteiro de Ação 2*** que faz os ***algoritmos de soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios*** por uma analogia aos ***algoritmos das operações com números inteiros.***

Após a realização destas atividades, se dará maior ênfase ao algoritmo da ***Divisão de Polinômios através de um Estudo Dirigido distribuído pela professora***.

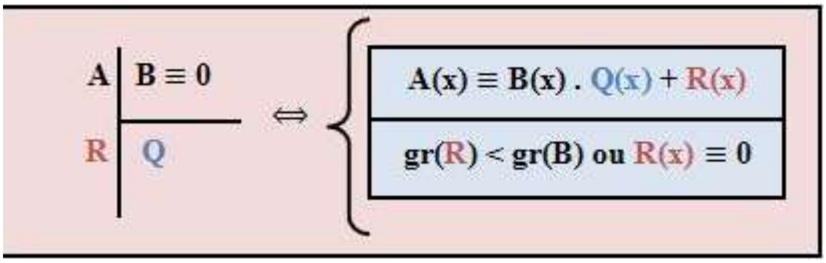
Divisão de Polinômios – Estudo Dirigido

Definição:

Considere dois polinômios: **A(x)** denominado dividendo e **B(x)** denominado divisor, com $B(x) \neq 0$.

Na divisão de A por B obtemos a função polinomial Q, denominada quociente, e a função polinomial R denominada resto, onde **A(x) = B(x) . Q(x) + R(x)** e o grau do resto R(x) é menor que o grau do divisor B(x).

<u>Veja a representação</u>:



:

Cálculo de Q e R

A existência e a unicidade do quociente (Q) e do resto (R) da divisão de **A** por **B**, sendo **B ≠ 0**, é garantida. Ambos podem ser calculados através do Método da Chave.

<u>Método da chave</u>

Considerando os polinômios A e B já reduzidos e ordenados, podemos dizer que o Método da Chave é mecanismo prático que tem a função de obter o quociente (Q) e o resto (R), em diversas etapas, de uma forma semelhante a que fazemos na divisão euclidiana de números naturais.

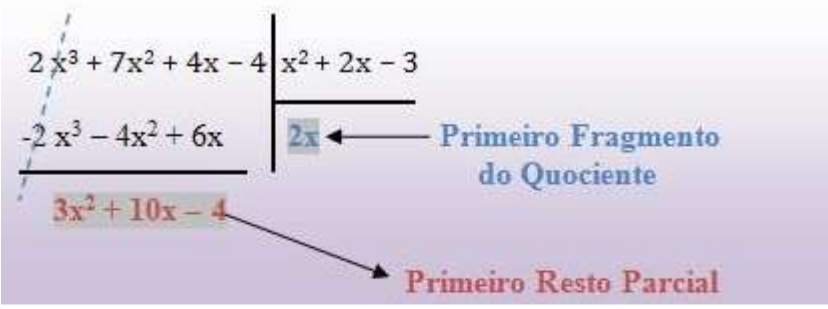
Exemplo:

Na divisão $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x – 4$ por $B(x) = x^2 + 2x – 3$ através do Método da Chave, temos:

1) <u>Primeiro grupo de operações</u>:

Dividimos o primeiro fragmento do dividendo pelo primeiro fragmento do divisor, obtendo assim a primeira parcela do quociente, e logo depois o primeiro resto parcial.

Lembre-se que: ***R = A – B . Q***



Como o grau do resto parcial não é menor que o grau do divisor, podemos dizer que a divisão ainda não foi concluída.

2) <u>Segundo grupo de operações</u>

Dividimos o primeiro fragmento do primeiro resto parcial pelo primeiro fragmento do divisor, obtendo assim o próximo fragmento do quociente, e logo depois o segundo resto parcial.

***Lembre-se que**: R = A – B . Q*

Como o grau do divisor é maior do que o grau do segundo resto parcial, podemos dizer que a divisão foi concluída.

Portanto da divisão $2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$ por $x^2 + 2x - 3$ obtemos:
$Q(x) = 2x + 3$ e $R(x) = 4x + 5$

Ou ainda:

$2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 = (x^2 + 2x - 3) . (2x + 3) + (4x + 5)$

A(x) = B(x) . Q(x) + R(x)

Atividade 4: Dispositivo Prático de Briot-Ruffini

- **OBJETIVOS:**
  Utilizar o Algoritmo de Briot-ruffini como ferramenta na busca por raízes de um Polinômio.

- **TEMPO DE DURAÇÃO**: 100 minutos

- **PRÉ-REQUISITOS:**
  Saber Trabalhar com números complexos;
  Saber determinar as raízes de equações do 1º e 2º graus;
  Reconhecer raízes de polinômios.

- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS:**
  Exposição com os recursos utilizados em sala de aula como o livro didático, quadro negro, giz, apagador, régua, esquadro, caderno, lápis, borracha, entre outros; Uso do Data Show.

- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA:** Os alunos serão dispostos individualmente

- **METODOLOGIA ADOTADA:**

A explicação deste processo prático do cálculo da divisão entre dois Polinômios será desenvolvida pela professora em sala de aula e apresentada no Data Show.

Apresentação no Data-show

O Dispositivo Prático de Briot-Ruffini é um método de resolução de divisão entre dois polinômios. Criado por Charles Auguste Briot e Paolo Ruffini.

Esse método consiste em efetuar a divisão fazendo cálculos apenas com coeficientes e só serve para divisões de um polinômio de grau acima ou igual a 1 por um binômio da forma $x-\alpha$.

Para efetuar a divisão de $P(x)$ por $(x-\alpha)$ devemos organizar o polinômio $P(x)$ na sua forma completa de modo que as potências da variável x fiquem em ordem decrescente.

Por exemplo, $P(x)=2x^4-3x^3+x^5+3$ precisa ser escrito como

$$P(x)=x^5+2x^4-3x^3+0x^2+0x+3.$$

1ª Etapa — organizar os coeficientes de $P(x)$ no dispositivo

No método dispomos apenas os coeficiente de $P(x)$ numa espécia de tabela, um 'mostruário' ou, simplesmente, em um dispositivo. Nesse dispositivo os coeficientes das potências ocupam uma posição exclusiva para eles, em uma coluna específica.

Por exemplo, para $P(x)=x^2-6x+9$ o dispositivo fica assim (TI é o *Termo Independente*):

coeficientes de

	x^2	x	TI
	1	−6	9

Depois da "maior potência" (aquela que tem o maior expoente) todas as potências de x tem uma coluna especialmente designada para ela. Mesmo que no polinômio uma potência não compareça, deveremos indicar uma coluna para ela e completar com o coeficiente 0 na posição apropriada.

O primeiro coeficiente deve ser copiado na linha inferior, na mesma coluna:

	1	−6	9
	1		

2ª Etapa — registrar a raiz do divisor de $P(x)$ no dispositivo

Vamos exemplificar essa etapa usando $x+2$ como um divisor de $P(x)$. O valor de x que é raiz de $x+2$ é o número que o anula, ou seja, que faz com que $x+2=0$. Logo, a raiz de $x+2$ é -2.

A raiz é colocada na parte destacada, em primeiríssimo lugar:

−2	1	−6	9
	1		

3ª Etapa — calcular os coeficientes do quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $x+2$ no dispositivo

O procedimento agora é repetitivo e segue o mesmo princípio até esgotar as posições vagas da segunda linha e que estão abaixo dos coeficientes de $P(x)$.

Multiplicar o último número desta linha pela raiz do divisor e somar com o coeficiente de $P(x)$ que está acima da posição vaga.

Em destaque os números que serão objetos do cálculo descrito acima:

$$\begin{array}{r|ccc} -2 & 1 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & \text{vaga} & \end{array}$$

Na posição ***vaga*** devemos colocar $1\times(-2)+(-6)=-8$.

$$\begin{array}{r|ccc} -2 & 1 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & -8 & \end{array}$$

Como ainda temos uma posição disponível abaixo do 9, devemos repetir o procedimento, mas com estes números destacados:

$$\begin{array}{r|ccc} -2 & 1 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & -8 & \text{vaga} \end{array}$$

Na posição vaga devemos colocar $(-8)\times(-2)+(9)=25$.

$$\begin{array}{r|ccc} -2 & 1 & -6 & 9 \\ \hline & 1 & -8 & 25 \end{array}$$

No final do processo, sempre o último número corresponde ao resto, ou seja, $R(x)=25$.No dispositivo, da esquerda para a direita temos os coeficientes do quociente, ou seja, $Q(x) = x - 8$.

Exemplo:

'Obter o quociente Q(x) e o resto R(x) da divisão de $P(x)=2\cdot(x^4-1)$ por $d(x)=x-1$.'

A primeira tarefa é expandir $P(x)=2\cdot(x^4-1)$, assim, $P(x)=2x^4-2$. Repare que GrP=4 e isso acarreta que GrQ=3 .

Parte das arrumações dos coeficientes no dispositivo:

coeficientes de

	x^4	x^3	x^2	x	TI
	2	0	0	0	−2

O primeiro coeficiente deve ser copiado na linha inferior, na mesma coluna:

	2	0	0	0	−2
	2				

A raiz de $d(x)=x-1$ é 1.

1	2	0	0	0	−2
	2				

Parte dos cálculos no dispositivo:

[2]×(1)+{0}=2:

(1)	2	{0}	0	0	−2
	[2]	2			

$[2]\times(1)+\{0\}=2$:

(1)	2	0	{0}	0	−2
	2	[2]	2		

$[2]\times(1)+\{0\}=2$:

(1)	2	0	0	{0}	−2
	2	2	[2]	2	

$[2]\times(1)+\{-2\}=0$:

(1)	2	0	0	0	{−2}
	2	2	2	[2]	0

Assim, $R(x)=0$ e $Q(x)=2x^3+2x^2+2x+2$.

AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados. Neste Contexto este Plano de Trabalho vem propor situações de avaliação que não se restrinjam ao produto final, mas atendam essencialmente ao processo de aprendizagem e permitam que o estudante seja um elemento ativo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem.

Com este pensamento estamos propondo Avaliações que serão realizadas na sala de aula com a observância da resolução das atividades propostas no **Roteiro de Ação 2**, que tem por objetivo levar os alunos a reconhecerem e calcularem ***os algoritmos de operações como soma, subtração, multiplicação e divisão de polinômios***, a partir dos algoritmos que eles conhecem para estas mesmas operações com números naturais.

Apresentamos ainda uma lista de exercícios extraclasses a serem realizados em dupla, citada na página 09, onde os alunos estarão aplicando seus conhecimentos adquiridos sobre ***o grau de um polinômio***, ***o cálculo de seu valor numérico e análise de suas raízes***. Estes exercícios têm ainda a intenção é diagnosticar a capacidade do aluno em refletir sobre a importância de conhecerem as fórmulas de resolução para as equações polinomiais, ou seja, avaliar o que os estudantes são capazes de fazer perante um problema concreto ou mediante uma proposta de investigação.

Ao término do bimestre o aluno terá sua última avaliação bimestral participando do simulado, onde também constarão questões relacionadas ao ***Dispositivo de Briot-Ruffini***, dando assim a oportunidade ao aluno de demonstrar seus conhecimentos na determinação do ***quociente Q(x) e do resto R(x) da divisão de um Polinômio P(x) pelo binômio (x – a).***

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: Livro do Professor*. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2004, v.3.

IEZZI, Gelson. DOLCE, Osvaldo. DEGENSZAJN, David. PERIGO, Roberto. ALMEIDA, Nilze de. *Matemática: Ciência e Aplicação*. São Paulo: Atual, 2001, v.1.

RIO DE JANEIRO, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Departamento de Métodos Matemáticos. *Introdução às Funções Reais*. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap51.html>. Acessado em: 16 out. 2013.

ALUNOS ONLINE, *Valor Numérico dos Polinômios*. Disponível em: <http://www.alunosonline.com.br/matematica/valor-numerico-dos-polinomios.html>. Acessado em: 16 out. 2013.

COLÉGIO WEB. *Divisão de Polinômios*. Disponível em: <http://www.colegioweb.com.br/trabalhos-escolares/matematica/polinomios/divisao-de-polinomios.html> Acessado em: 18 out. 2013.

BAPTISTA, Marcelo Renato M., *Polinômios Equações Polinomiais*. Disponível em: <http://marcelorenato.com.br/central_marcelo_renato/marcelo_renato_especial/resumos_teoria_testes_questoes_pdf/08_polinomios_objetivas_2010.pdf>. Acessado em 21 out. 2013.

BANCO DE CONCURSOS. *Matemática para Concursos*. Disponível em: <http://www.bancodeconcursos.com/matematica/valor-numerico-expressoes-algebricas/3181.html>. Acessado em: 28 out. 2013.