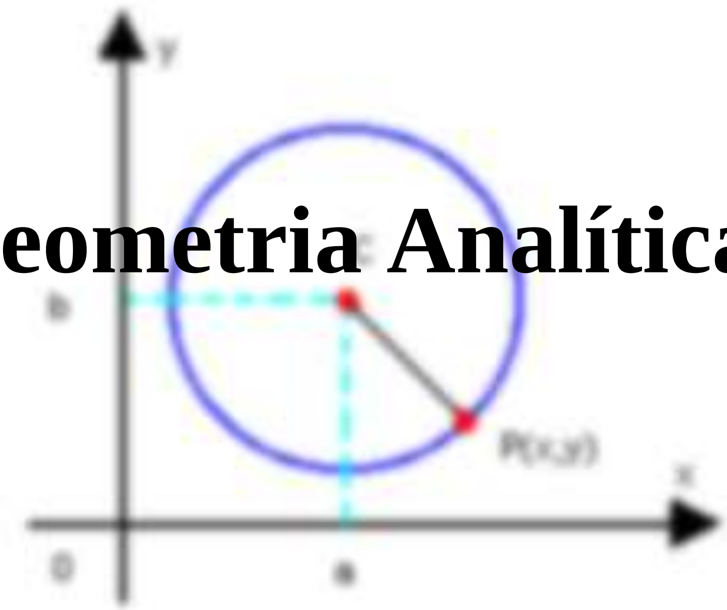
Formação continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 3º ano

Geometria Analítica



Tarefa 02

Cursista: Maria Amelia de Moraes Corrêa

Tutora: Maria Cláudia Padilha Tostes

S u m á r i o

Introdução

Este plano de trabalho visa organizar atividades para que os alunos consigam enxergar a eficácia da geometria analítica.

A ideia inicial é trabalhar a relação entre retas paralelas e suas equações. Dessa maneira, vislumbramos que os alunos sejam capazes de identificar o paralelismo entre retas, por meio da identificação de suas respectivas equações.

Este plano de trabalho apresenta atividades, que visam apresentar aos alunos o como identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações de maneira simples. Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral. Enriquecendo desta forma o aprendizado e a percepção dos alunos acerca das propriedades envolvidas.

É importante, que os discentes compreendam e fixem de forma simples e dinâmica o assunto aqui abordado.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1

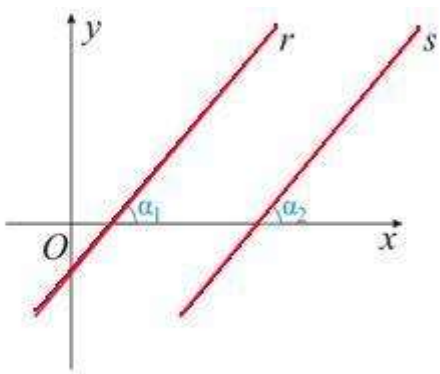
- **HABILIDADE RELACIONADA:**
  Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações
- **PRÉ-REQUISITOS: Marcação de pontos no plano cartesiano, identificação da equação de uma reta.**
- **TEMPO DE DURAÇÃO: 200 minutos**
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático.**
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.**
- **OBJETIVOS: Identificar padrões entre as equações de retas paralelas.**
- **METODOLOGIA ADOTADA:**

Geometria Analítica

- **Retas paralelas:**

Dadas duas ou mais retas do plano, elas podem ser paralelas, concorrentes, coincidentes ou concorrentes perpendiculares. Abordaremos aqui o paralelismo de retas, assunto que sempre intrigou matemáticos de todas as épocas. Sabemos que duas retas são paralelas quando são equidistantes durante toda sua extensão, não possuindo nenhum ponto em comum.

Dessa forma, considere duas retas, r e s, no plano cartesiano.



As retas r e s são paralelas se, e somente se, possuírem a mesma inclinação ou seus coeficientes angulares forem iguais.

Utilizando a linguagem matemática:

$$\boxed{r // s \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2}$$

Uma maneira mais simples de verificar se duas retas são paralelas é comparar seus coeficientes angulares: se forem iguais as retas são paralelas.

Exemplo 1: **Verifique se as retas r: 2x + 3y – 7 = 0 e s: – 10x – 15y + 45 = 0 são paralelas.**

Solução**: Vamos determinar o coeficiente angular de cada uma das retas.**

$$\boldsymbol{Reta\ r: 2x + 3y - 7 = 0}$$

Para encontrar o coeficiente angular precisamos isolar y na equação geral da reta.

$$3y = -2x + 7$$

$$y = \frac{-2x}{3} + \frac{7}{3}$$

$$m_r = \frac{-2}{3}$$

Faremos o mesmo processo para a reta s.

$$\boldsymbol{Reta\ s: -10x - 15y + 45 = 0}$$

$$-15y = 10x - 45$$

$$15y = -10x + 45$$

$$y = \frac{-10x}{15} + \frac{45}{15} = \frac{-2x}{3} + 3$$

$$m_s = \frac{-2}{3}$$

Como $m_r = m_s = \frac{-2}{3}$, podemos afirmar que r // s.

Exemplo 2**: Determine a equação geral da reta t que passa pelo ponto P(1, 2) e é paralela à reta r de equação 8x – 2y + 9 = 0.**

Solução**: para determinar a equação de uma reta basta conhecermos um ponto dessa reta e seu coeficiente angular. Já conhecemos o ponto P(1, 2) da reta procurada, agora resta encontrar o seu coeficiente angular. Como a reta t é paralela à reta s, elas possuem o mesmo coeficiente angular. Assim, utilizando a equação da reta r iremos determinar o coeficiente angular. Segue que:**

$$8x - 2y + 9 = 0$$

$$-2y = -8x - 9$$

$$2y = 8x + 9$$

$$y = \frac{8x}{2} + \frac{9}{2}$$

$$y = 4x + \frac{9}{2}$$

$$m_r = 4$$

Podemos afirmar que $mt = 4$. Conhecendo um ponto da reta e seu coeficiente angular, utilizamos a fórmula abaixo para determinar sua equação.

$y - y_0 = m(x - x_0)$

Onde x_0 e y_0 são as coordenadas do ponto pertencente à reta. Teremos:

$y - 2 = 4(x - 1)$

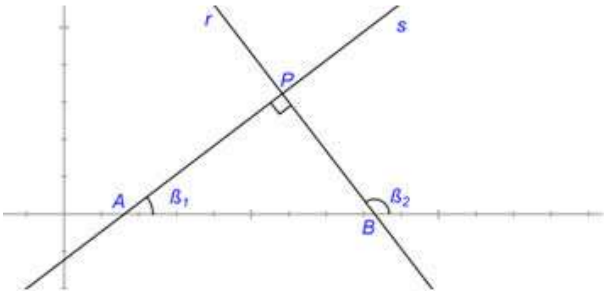
$y - 2 = 4x - 4$

$4x - y - 4 + 2 = 0$

$4x - y - 2 = 0$ → Equação geral da reta t.

- ## Retas perpendiculares:

Duas retas são ditas perpendiculares se e somente se elas formarem entre si um ângulo reto (90°). Contudo, na geometria analítica podemos determinar essa perpendicularidade relacionando o coeficiente angular das duas retas. Na geometria analítica é possível obter esse coeficiente angular analisando apenas a equação da reta.



Como dito anteriormente, podemos obter os coeficientes angulares analisando a equação da reta, portanto, vejamos:

$$\begin{gathered} \text{equação da reta } r\text{:} \quad r\text{:}\, y = m_r x + c \\ \text{equação da reta } s\text{:} \quad s\text{:}\, y = m_s x + d \\ \text{Em que:} \\ m_r = tg\,\beta_2 \\ m_s = tg\,\beta_1 \\ r \perp s \iff m_r . m_s = -1 \end{gathered}$$

Diante disso, podemos determinar a equação da reta tangente a uma reta, desde que conheçamos a equação que determina essa reta.

***<u>Exemplo</u> 1)* Determine a equação geral da reta s que passa pelo ponto (3,2) e é perpendicular à reta r: y=x+2**

***<u>Resolução</u>*: Temos que o coeficiente angular da reta r é igual a 1.**

$m_r = 1$

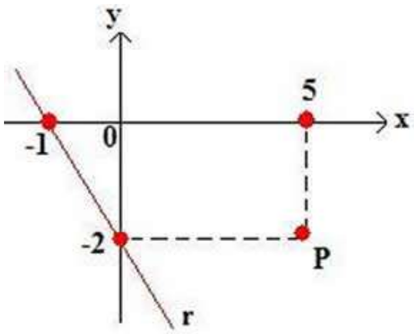
Sabemos que a reta s é perpendicular à reta r, portanto, temos que:

$m_r . m_s = -1 \implies 1 . m_s = -1 \rightarrow m_s = -1$

Pela equação geral da reta temos:

$$\begin{gathered}
Equação\ da\ reta\ s: \\
y - y_o = m_s(x - x_o) \quad no\ ponto\ (3,2) \\
y - 2 = -1(x - 3) \\
y - 2 = -x + 3 \\
y = -x + 5 \ (equação\ reduzida) \\
y + x - 5 = 0 \ (equação\ geral)
\end{gathered}$$

<u>Exemplo</u> 2) **Considerando o gráfico abaixo, determine a reta tangente em relação à reta r que passa pelo ponto P (5,-2).**

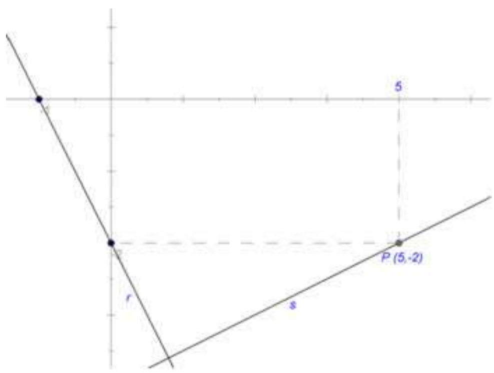


Primeiramente devemos obter a equação da reta r.

$$\begin{gathered}
m_r = -2 \\
y - y_o = m_r(x - x_o) \ (Pelo\ ponto\ (-1,0) \\
y - 0 = -2(x + 1) \\
y = -2x - 2
\end{gathered}$$

Para determinar a equação da reta s (reta perpendicular à reta r), é necessário obter apenas o coeficiente angular desta reta, pois a coordenada do ponto já é conhecida.

$$\begin{gathered}
s \perp r \iff m_s m_r = -1 \\
m_s.(-2) = -1 \\
m_s = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \\
Equação\ da\ reta\ s, pelo\ ponto\ (5,-2) \\
y - (-2) = \frac{1}{2}(x - 5) \\
y + 2 = \frac{x}{2} - \frac{5}{2} \\
y = \frac{x}{2} - \frac{9}{2} \ (equação\ reduzida) \\
2y - x + 9 = 0 \ \ (equação\ geral)
\end{gathered}$$



Atividade 2

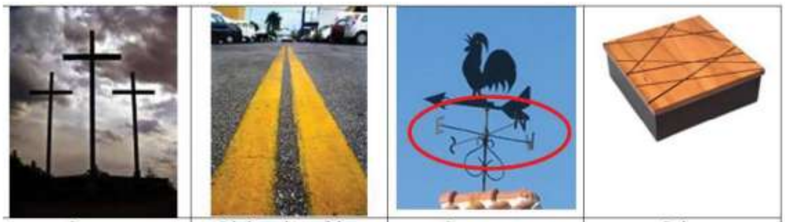
- **HABILIDADE RELACIONADA:**

  Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações
- **PRÉ-REQUISITOS: Marcação de pontos no plano cartesiano, identificação da equação de uma reta.**
- **TEMPO DE DURAÇÃO: 20 minutos**
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático.**
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.**
- **OBJETIVOS: Identificar padrões entre as equações de retas paralelas.**
- **METODOLOGIA ADOTADA:**

  Uma lista de exercícios extra para a melhor fixação da atividade 01.

<u>Lista de exercícios de fixação</u>

1 – Lucas saiu para passear com seu pai. Ao longo do caminho, eles se depararam com as seguintes imagens:



Cruzes | Linhas do asfalto | Cata-vento | Caixa

Para qual das imagens acima Lucas apontou quando perguntou ao pai: "isso é um exemplo de linhas paralelas?"

a) Cruzes
b) Linhas do asfalto
c) Cata-vento
d) Caixas

2 – Qual das figuras abaixo possui pelo menos duas linhas paralelas?

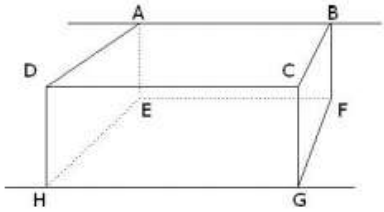
Triângulo | Arco | Pentágono | Paralelogramo

a) Triângulo
b) Arco
c) Pentágono
d) Paralelogramo

3 – Como são chamadas as retas concorrentes cuja interseção forma um ângulo reto?

a) Retas perpendiculares
b) Retas curvilíneas
c) Retas paralelas
d) Retas assistentes

4 – A professora de Laís mostrou a seguinte imagem para a turma:



Bloco retangular

Em seguida, a professora perguntou a Laís quais das retas acima não são paralelas. O que Laís respondeu?

a) Retas AB e DC
b) Retas DC e HG
c) Retas DH e CG
d) Retas DC e BF

5 – Ainda sobre a imagem acima, as retas DC e DH são exemplos de retas:

a) Retas curvilíneas
b) Retas paralelas
c) Retas assistentes
d) Retas perpendiculares

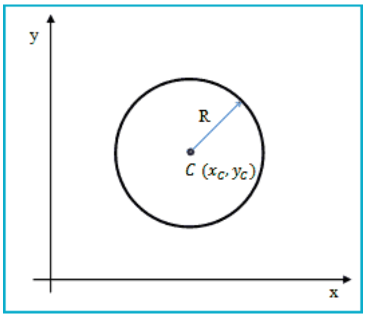
Atividade 3

- **HABILIDADE RELACIONADA: Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio.**
- **PRÉ-REQUISITOS: Marcação de pontos no plano cartesiano, identificação da equação de uma reta.**
- **TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos**
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático.**
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.**
- **OBJETIVOS:**
- **METODOLOGIA ADOTADA:**

Geometria Analítica

- ### Equação reduzida da circunferência:

Circunferência é lugar geométrico dos pontos de um plano que distam igualmente, ou seja, de uma mesma medida – chamada raio, de um ponto fixo denominado centro. Obs.: A circunferência é uma linha, enquanto o círculo é a figura plana delimitada pela circunferência.



A dedução da equação da circunferência segue a definição, o lugar geométrico dos pontos (x,y) equidistantes do centro $C(x_c, y_c$ da medida R.

Então:

$\boxed{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2}$ **→ esta é a chamada equação reduzida da circunferência.**

Por exemplo: A equação reduzida de uma circunferência de raio 8 e centro (5,-7) será: $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 8^2$

Ou: $\boxed{(x-5)^2 + (y+7)^2 = 64}$

• Equação geral da circunferência:

A equação geral de uma circunferência é definida quando se desenvolve a equação reduzida. Assim:

$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2$

$(x^2 - 2x_c x + x^2_c) + (y^2 - 2y_c y + y^2_c) = R^2$

Reagrupando: $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x_c x - 2y_c y + x^2_c + y^2_c - R^2 = 0}$

Ou de uma maneira generalizada:

$\boxed{x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0}$ → está é a **equação geral** da circunferência.

Onde:

$$\left.\begin{array}{l} m = -2x_C \\ n = -2y_C \\ p = x_C^2 + y_C^2 - R^2 \end{array}\right\} \text{(I)}$$

Por exemplo, para uma circunferência de raio 8 e centro (5,-7):

$\mathbf{x^2 + y^2 - 2 \,.\, 5 \,.\, x - 2 \,.\, (-7)y + 5^2 + (-7)^2 - 8^2 = 0}$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 10x + 14y + 10 = 0}$$

• Determinação de centro e raio:

Para se determinar o centro e o raio de uma circunferência a partir da equação geral $x^2y^2 + mx + nx + p = 0$ utilizam-se as equações (I), deduzindo-se que:

$$x_C = \frac{-m}{2}$$

$$y_C = \frac{-n}{2}$$

$$R = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - p}$$

Por exemplo, para a circunferência exemplificada,

$$x^2 + y^2 - 10x + 14y + 10 = 0$$

$$x_C = \frac{-m}{2} = \frac{-(-10)}{2} = 5$$

$$y_C = \frac{-n}{2} = \frac{-14}{2} = -7$$

$$R = \sqrt{x_C^2 + y_C^2 - p} = \sqrt{5^2 + (-7)^2 - 10} = \sqrt{25 + 49 - 10} = \sqrt{64} = 8$$

Logo:

C(5,-7) e o raio R=8.

Atividade 4

- **HABILIDADE RELACIONADA: Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio.**
- **PRÉ-REQUISITOS: Marcação de pontos no plano cartesiano, identificação da equação de uma reta.**
- **TEMPO DE DURAÇÃO: 150 minutos**
- **RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Livro didático.**
- **ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.**
- **OBJETIVOS:**
- **METODOLOGIA ADOTADA:**

Uma lista de exercícios para a melhor fixação da atividade 03.

1) Determine a equação da circunferência cujo centro coincide com a origem do sistema cartesiano e cujo raio mede 5 unidades.

2) Determine as coordenadas de centro e raio da circunferência de equação $2x^2 + 2y^2 - 8x - 16y + 38 = 0$

3) Determine nos casos abaixo, a equação reduzida da circunferência:

a) centro C(0, -2) e raio r = 4

b) centro C(-1, -4) e raio r = $\sqrt{7}$

c) centro C(0, 0) e raio r = 1

d) centro C(-3, 6) e diâmetro 8

4) Em cada caso, encontre o centro e o raio de cada equação:

a) $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 0$

b) $4x^2 + 4y^2 - 8x + 8y - 28 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$

d) $4x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$

5) Determine a equação geral das circunferências:

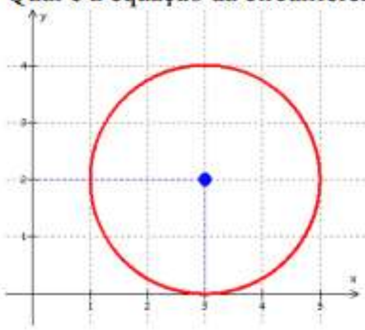
a) $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 3$

b) $(x+4)^2 + y^2 = 6$

6) Represente graficamente a equação da circunferência $x^2 + y^2 = 16$

7) Represente graficamente a equação $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$

8) Qual é a equação da circunferência do gráfico abaixo:



9) (PUCRS) A medida do diâmetro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 7x + 5y + 14 = 0$ é:

a) $\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{2}$

d) $4\sqrt{2}$

e) $5\sqrt{2}$

CESD

Professora: Maria Amelia **Data: __/__/__** **Turma: 3001**

Aluno(a):____ **Nº: __________**

Avaliação de Matemática

QUESTÃO 01

Encontre a equação da reta s, perpendicular à reta t: $2x + 3y - 4 = 0$, sabendo que ela passa pelo ponto P(3,4).

QUESTÃO 02

Considere no plano cartesiano uma reta r de equação $3x + 5y + 1 = 0$ e um ponto Q de coordenadas (5,5). Determine a equação da resta s perpendicular a r passando por Q.

QUESTÃO 03

Prove que as retas s: $x + 2y - 1 = 0$ e r: $4x - 2y + 12 = 0$ são perpendiculares.

QUESTÃO 04

O ponto P(3, b) pertence à circunferência de centro no ponto C(0, 3) e raio 5. Calcule o valor da coordenada b.

QUESTÃO 05

Determine a equação da circunferência com centro no ponto C (2, 1) e que passa pelo ponto A (1, 1).

AVALIAÇÃO

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados. As tarefas feitas nas atividades 2 e 4, feitas individualmente com consulta em 50 minutos, servirão para o docente observar se os alunos entenderam o assunto.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porem, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas no assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados no bimestre anterior.

Aplicação de uma avaliação escrita individual, teste sem consulta (100 minutos), para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos para a resolução das questões envolvendo a geometria analítica aqui estudada.

Neste plano de trabalho procurei utilizar os novos conhecimentos que obtive com os planos de ação da formação continuada. Queria poder explorar os roteiros de ação, mas infelizmente a escola não poderá disponibilizar o laboratório a tempo.

Mais uma vez, apesar de não ter a possibilidade de apresentá-los o Geogebra, pedi para aqueles que tivessem a curiosidade em aprender pesquisar mais sobre o programa e tirarem as dúvidas comigo.

- ***OBSERVAÇÕES IMPORTANTES SOBRE ESTE PLANO DE TRABALHO***

Ele foi preparado levando em consideração o tempo disponível de aulas para a turma 3001 do Colégio Estadual Santos Dias no ano letivo em curso (2013) e o grau de conhecimento dos alunos. Há detalhes e atividades interessantes que poderão ser acrescentados caso o tempo permita, que podem prender a atenção dos alunos e mostrar ainda mais a aplicabilidade do tema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Iezzi, Gelson. Matemática: Ciências e Aplicações. 6ª edição. São Paulo: Saraiva, 2010.

Paiva, Manoel. Matemática: volume único. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2005.

ROTEIROS DE ACÃO – Geometria Analítica– Curso de Aperfeiçoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2013 http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 15/11/2013.

Endereços eletrônicos acessados de 15/11/2013 a 18/11/2013, utilizados ao longo do trabalho:

http://www.exatas.net/lista2a.pdf

http://educacao.uol.com.br/matematica/equacao-da-circunferencia-geral-e-reduzida-determinacao-de-centro-e-raio.jhtm

http://exercicios.brasilescola.com/matematica/exercicios-sobre-retas-perpendiculares.htm

http://www.mundoeducacao.com/matematica/como-obter-equacao-geral-retas-perpendiculares.htm