

**FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC-RJ**

**COLÉGIO ESTADUAL BALTAZAR BERNARDINO**

**FORMAÇÃO CONTINUADA PARA PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

## ESTUDO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

3ª. Série Ensino Médio

Tutora: Maria Claudia Padilha Tostes

Professor/Aluno: Sandra William Marques

*Email: [swmarquess@gmail.com](mailto:swmarquess@gmail.com)*

Matriculas: 0279706-6 e 0918915-0

*Novembro/2013*

### **Introdução:**

Este plano de trabalho consiste inicialmente explorar atividades que levem o aluno a compreender o conceito de paralelismo e perpendicularismo entre retas.

Utilizaremos as atividades sugeridas no **Roteiro de ação 1 - “A arte e o paralelismo”** com o objetivo principal de que os alunos sejam capazes de identificar o paralelismo entre retas, por meio da identificação de suas respectivas equações.

Em seguida trabalharemos as atividades **sugeridas no Roteiro de ação 2 - “Uma investigação sobre retas perpendiculares”** com o objetivo dos alunos deduzirem a relação entre os coeficientes angulares de retas perpendiculares ajudando os no entendimento da condição de perpendicularidade entre duas retas.

Utilizaremos as atividades sugeridas no **Roteiro de ação 5 – Geometria Analítica e Arte** para introduzir o conceito de circunferência através da construção de desenhos com o auxílio dos softwares Geogebra e Paintbrush explorando a criatividade dos alunos por meio da produção de formas artísticas envolvendo objetos da geometria analítica tais como pontos, retas e circunferência. Com isso o aluno interage de forma abstrata com a geometria analítica através das Artes.

Finalizaremos este plano desenvolvendo atividades em Geogebra com o objetivo de deduzir o conceito e a fórmula da equação da circunferência.

**Total de Aulas Previstas:** 8 aulas

### **Pré requisitos:**

- Marcação de pontos no plano cartesiano, identificação da equação de uma reta.
- Manuseio dos softwares Geogebra e Paintbrush (ou outro editor de desenhos).

**Recursos:** Sala de Aula, Laboratório de Informática, computadores com software Geogebra e Paintbrush (ou outro editor de desenhos) instalados, projetor multimídia, folhas de atividades, lápis ou caneta.

### **Habilidades a desenvolver:**

- Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.

- Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio.

### **Desenvolvimento:**

#### **1ª/ 2ª aulas: Aulas no laboratório de Informática**

Em sala de aula, dividindo a turma em grupo de quatro alunos, com o objetivo principal de que os alunos sejam capazes de identificar o paralelismo entre retas, por meio da identificação de suas respectivas equações, serão desenvolvidas as atividades sugeridas no **Roteiro de ação 1 - “A arte e o paralelismo”** descritas a seguir:

O quadro abaixo foi pintado por um grande artista holandês chamado Piet Mondrian (1872 - 1944). Em muitas de suas obras, Mondrian lança mão de uma forte caracterização geométrica e matemática.

Repare que nesse quadro existe a presença de linhas paralelas e perpendiculares. Para Mondrian, as linhas verticais representavam vitalidade, as horizontais representavam tranquilidade e o ponto de encontro entre as duas era o ponto de equilíbrio dinâmico.



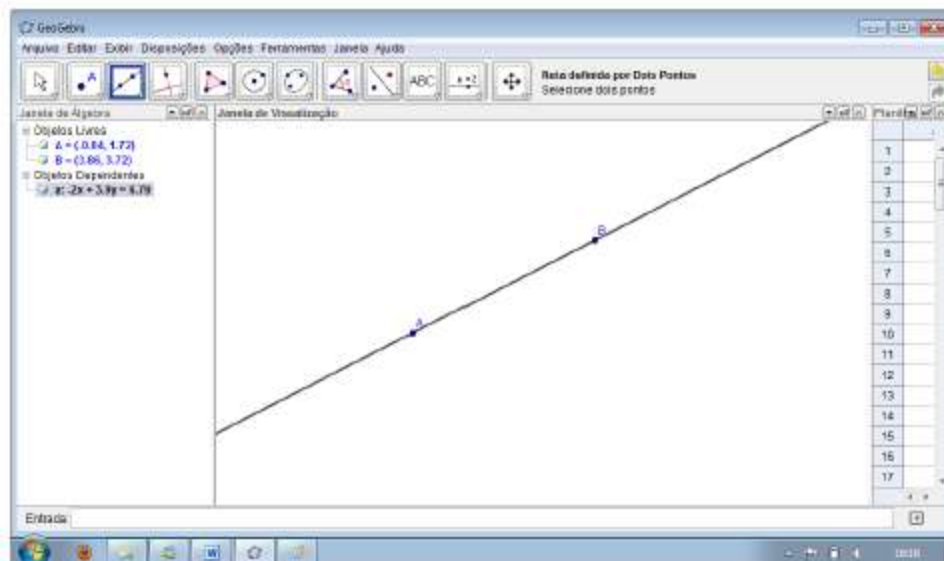
Composição com vermelho, amarelo e azul, 1921

Obra de [Pieter Cornelis Mondriaan](#) (1872-1944)

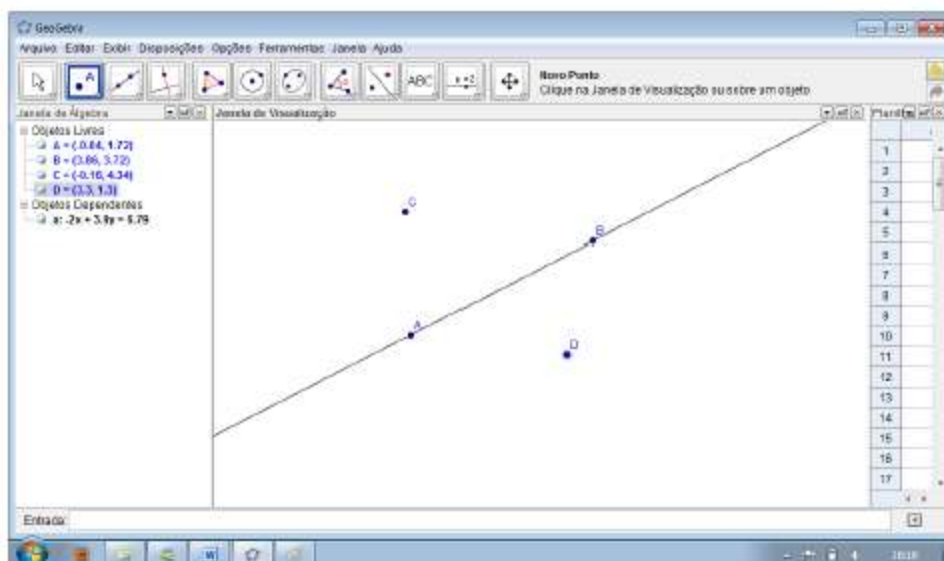
Na Geometria Analítica também podemos traçar “linhas” que se relacionam entre si como paralelas e perpendiculares. Em Matemática, podemos identificar essas “linhas” como retas. Mais especificamente, estudaremos a relação entre as retas paralelas, dentro do contexto da Geometria Analítica.

Na atividade que segue, utilizaremos o Geogebra para investigarmos as propriedades das retas paralelas.

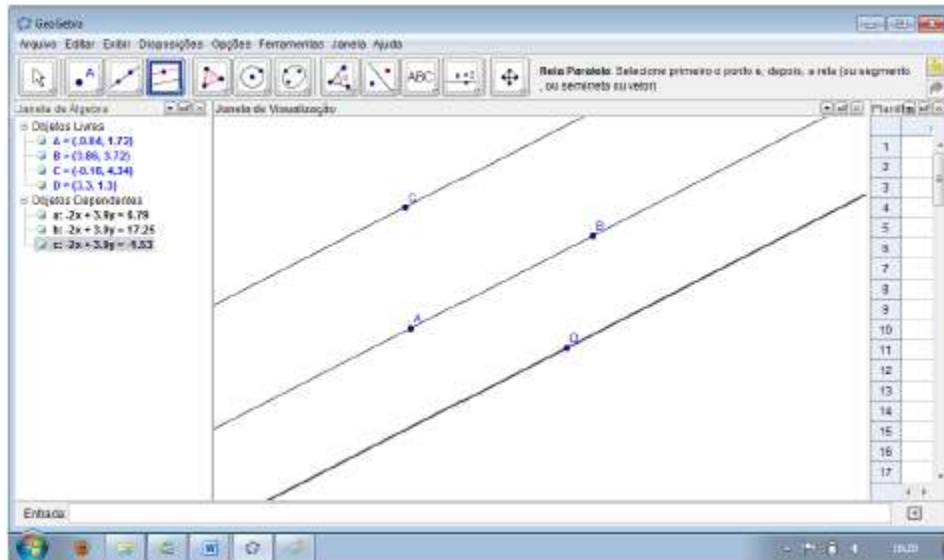
- 1) Abra o Geogebra e trace uma reta qualquer. Para isso, na terceira janela você irá escolher a opção *Reta Definida por dois pontos*. Após isso, clique em dois pontos quaisquer do plano, gerando uma reta.



- 2) Vamos criar duas retas paralelas a essa. Para isso, marque dois pontos quaisquer do plano que não estejam contidos na reta, clicando na segunda janela e escolhendo a opção *Novo Ponto*.



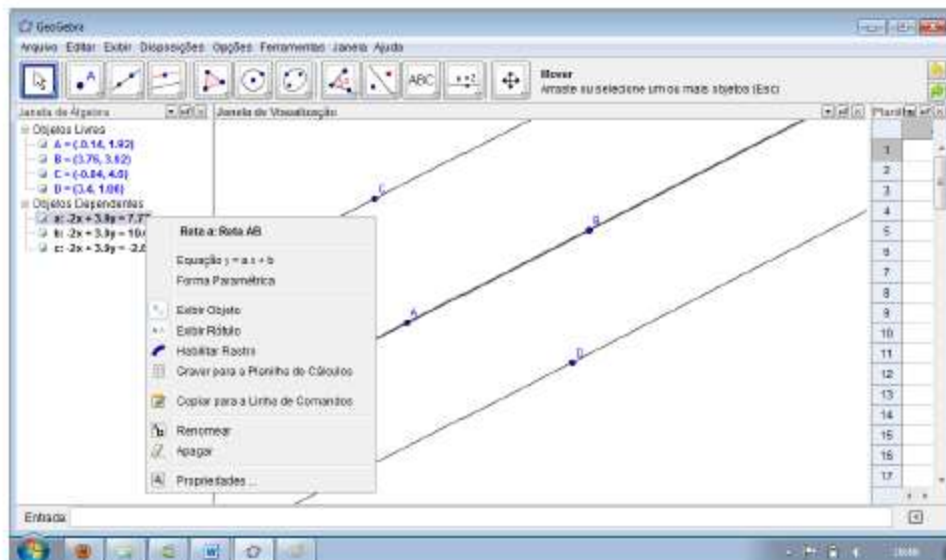
- 3) Clique abaixo da quarta janela e marque a opção *Reta Paralela*. Selecione o ponto pelo qual a nova reta passará e logo após clique sobre a reta que você criou no item 1). Repita o procedimento com o outro ponto, gerando outra reta paralela.



- 4) Observe as equações das três retas na Janela Álgebra, que fica no canto esquerdo da tela do Geogebra e verifique se existe algum padrão entre elas. O que você percebeu? Troque uma idéia com seu colega!
- 5) Agora movimente a reta que contém os pontos A e B, selecionando a opção Mover e clicando sobre ela. Verifique se o padrão que você observou anteriormente continua a ser satisfeito.
- 6) Para movimentar as retas que contém os pontos C e D basta clicar sobre os pontos. Não se esqueça de selecionar a opção Mover para fazer a movimentação. O que você percebeu em relação ao coeficiente angular? Houve alguma alteração?
- 7) Em sua opinião, se uma determinada reta tem como equação  $ax + by = c$ , qual seria a equação de uma reta paralela a essa?

Continuemos nossa investigação sobre as equações de retas paralelas tratando, a partir de agora, das equações reduzidas.

- 8) Clique com o botão direito do mouse sobre a equação da reta a e, logo após, clique novamente em "Equação  $y=kx+d$ ". Faça o mesmo com as outras equações.



9) Observe as equações reduzidas e perceba se existe algum padrão entre elas. O que você notou em relação a essas equações?

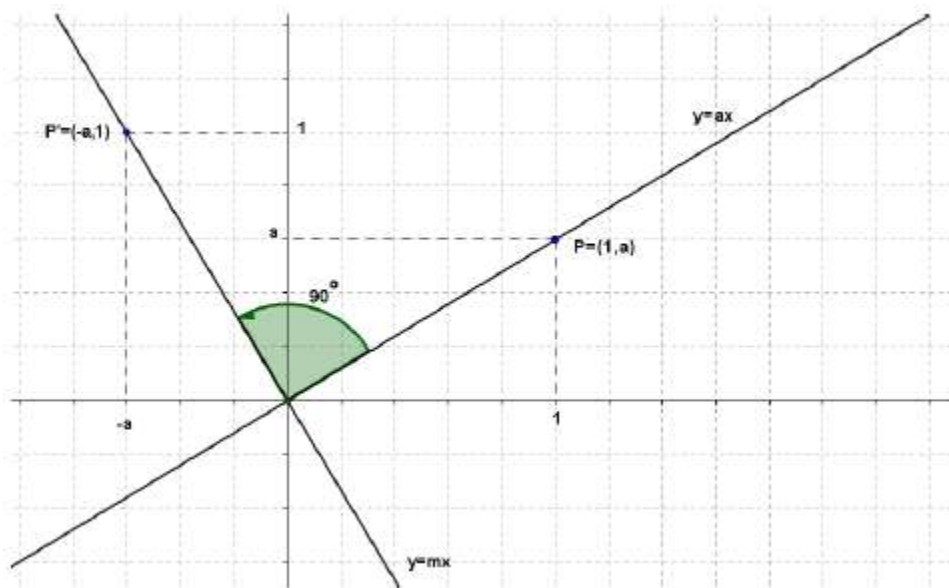
10) Movimente todas as retas e note se o padrão que você percebeu anteriormente continua válido. Houve alguma alteração nesse padrão?

11) Em sua opinião, se uma determinada reta tem como equação  $y=ax+b$ , qual seria a equação de uma reta paralela a essa?

### 3ª/ 4ª aulas: Aulas em Sala de Aula

Em sala de aula, dividindo a turma em grupo de quatro alunos, com o objetivo de deduzir a relação entre os coeficientes angulares de retas perpendiculares ajudando os alunos a entenderem a condição de perpendicularidade entre duas retas, serão desenvolvidas as atividades sugeridas no **Roteiro de ação 2 - “Uma investigação sobre retas perpendiculares”** descritas a seguir:

Vamos considerar duas retas perpendiculares passando pela origem com equações  $y=ax$  e  $y=mx$  respectivamente.



Repare que após uma rotação positiva (sentido anti-horário) de  $90^\circ$  em torno da origem, o ponto  $P = (1,a)$  irá cair sobre o ponto  $P'=(-a,1)$

1) Observando que o ponto  $P'=(-a,1)$  pertence a reta de equação  $y=mx$ , substitua as coordenadas de  $P'$  na equação da reta e estabeleça uma relação entre os coeficientes angulares  $a$  e  $m$ .

2) Agora, substitua o ponto  $P=(1,a)$  na equação  $y=mx$ . Que relação podemos estabelecer entre os coeficientes angulares  $a$  e  $m$ ?

3) De acordo com o que você descobriu nos itens anteriores, se uma reta que passa pela origem tem equação  $y=ax$ , qual será a equação da reta que também contém a origem e é perpendicular a esta?

Já vimos que duas retas de equação  $y=a_1x+b_1$  e  $y=a_2x+b_2$  são paralelas se possuem o mesmo coeficiente angular e cortam o eixo  $y$  em locais diferentes, ou seja, se  $a_1=a_2$  e  $b_1 \neq b_2$ .

4) Considere duas retas perpendiculares de equação  $y=ax$  e  $y=mx$ . Qual será a relação entre as retas de equação  $y=ax+b$  e  $y=mx+c$ ? Discuta com seus colegas.

Duas retas de equação  $y=ax+b$  e  $y=mx+c$  são perpendiculares, se, e somente se,  $a.m = -1$

5) Na sua opinião, dadas as retas de equações  $ax+by=c$  e  $a_1x+b_1y=c_1$ , quais devem ser as condições dos coeficientes de  $x$  e  $y$  para garantir que as retas sejam perpendiculares? Converse com seus colegas.

6) Escreva as equações do item 5) na forma reduzida e encontre o coeficiente angular de cada uma das retas.

7) Lembrando que o coeficiente angular de uma reta é o oposto do inverso da outra, encontre uma condição algébrica para que as retas sejam perpendiculares.

Você deve ter percebido que para que as retas sejam perpendiculares a relação  $a \cdot a_1 + b \cdot b_1 = 0$  deve ser satisfeita.

8) Verifique se as retas  $3x + 7y = 9$  e  $7x + 3y = 2$  são perpendiculares.

### **5ª/6ª aulas: Aulas no Laboratório de Informática**

Com a turma em sala de aula, dividida em grupos de 2 alunos essas aulas tem o objetivo de introduzir o conceito de circunferência através da construção de desenhos utilizando o software Geogebra e o Paintbrush para desenvolver as atividades sugeridas no **Roteiro de ação 5 – “Geometria Analítica e Arte”**, descritas a seguir:

Temos estudado nesse bimestre alguns conceitos de Geometria Analítica. Podemos perceber a presença de vários objetos presentes na Geometria Analítica em obras artísticas, como mostram as imagens a seguir.





<http://www.downloadwallpapers.com/papel-de-parede/textura-circulos-rosa-3563.htm>



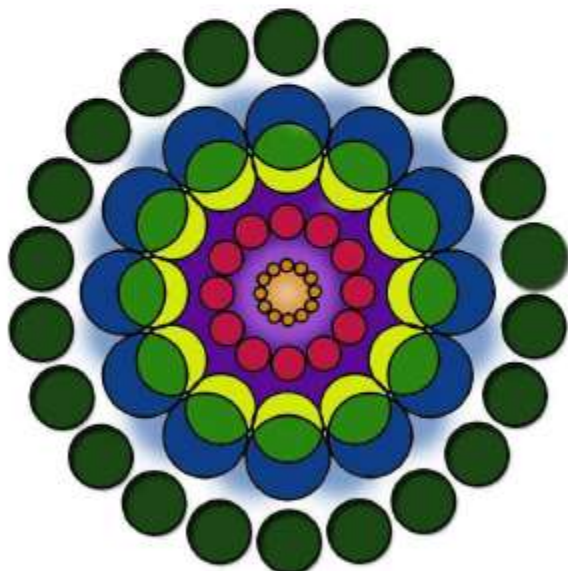
<http://complexavidasimples.blogspot.com.br/2010/04/circulos.html>



<http://www.publicdomainpictures.net/view-image.php?image=430&picture=circulos-vermelhos&jazyk=PT>



<http://circulodemulheresgerarenutrir.blogspot.com.br/2011/08/formando-novos-circulos.html>



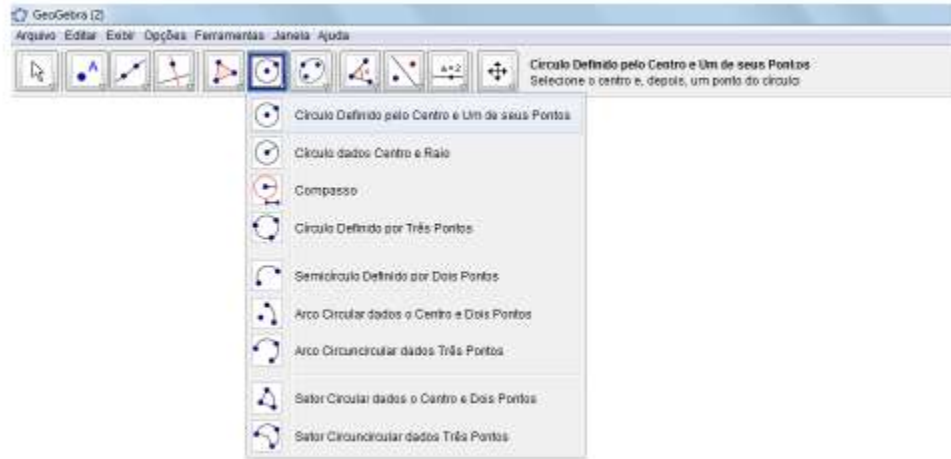
<http://fontesdeluz.blogspot.com.br/2012/02/circulo-de-doze.html>

1) Que figura geométrica plana estas obras tem em comum?

Gostaríamos de encorajá-lo a produzir sua própria obra artística também usando a circunferência como padrão principal. Vamos produzir um desenho a partir do traçado de várias circunferências no software Geogebra?

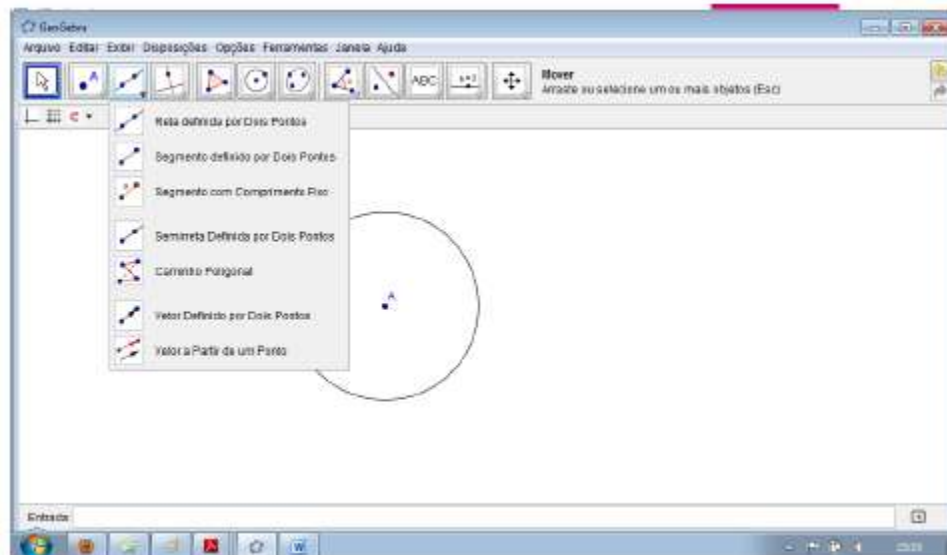
2) Abra o software Geogebra.

Vamos traçar uma circunferência qualquer clicando na 6ª janela e marcando a opção “Círculo”, definido pelo centro e de um de seus pontos”.

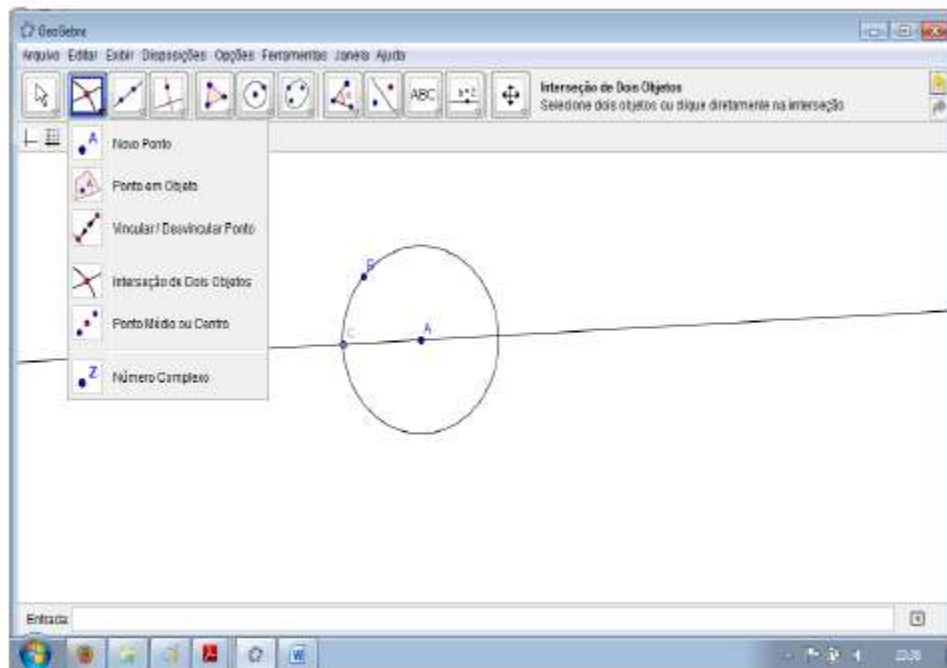


3) Marque um ponto qualquer sobre a circunferência, usando a ferramenta “Novo Ponto”.

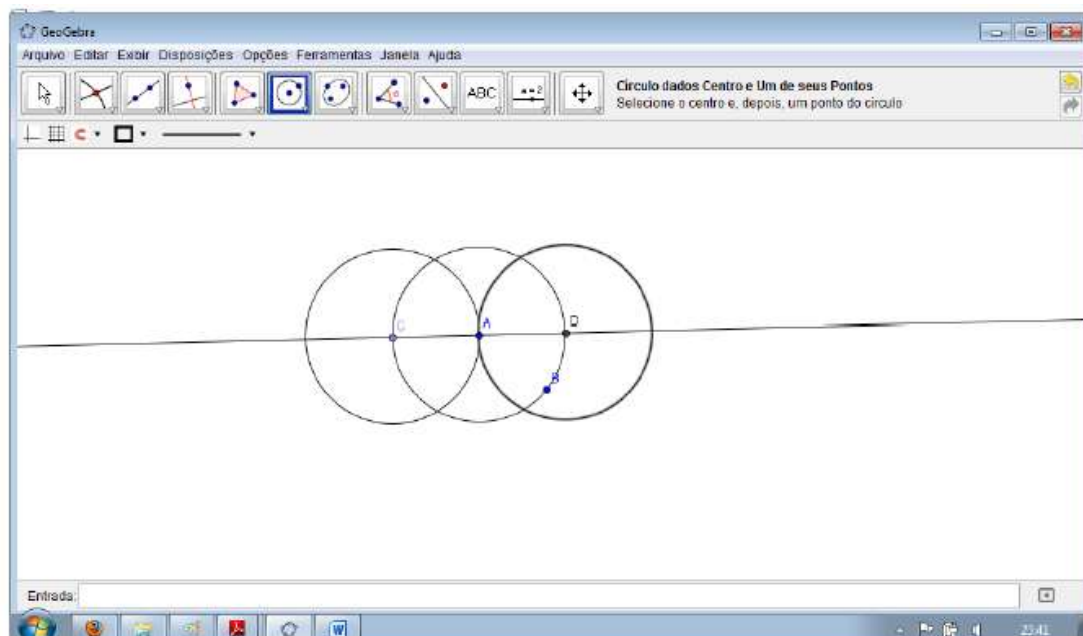
4) Trace uma reta que passe pelo centro da circunferência e o ponto que você marcou no item 3). Para isso, basta selecionar a opção “Reta definida por dois pontos”.



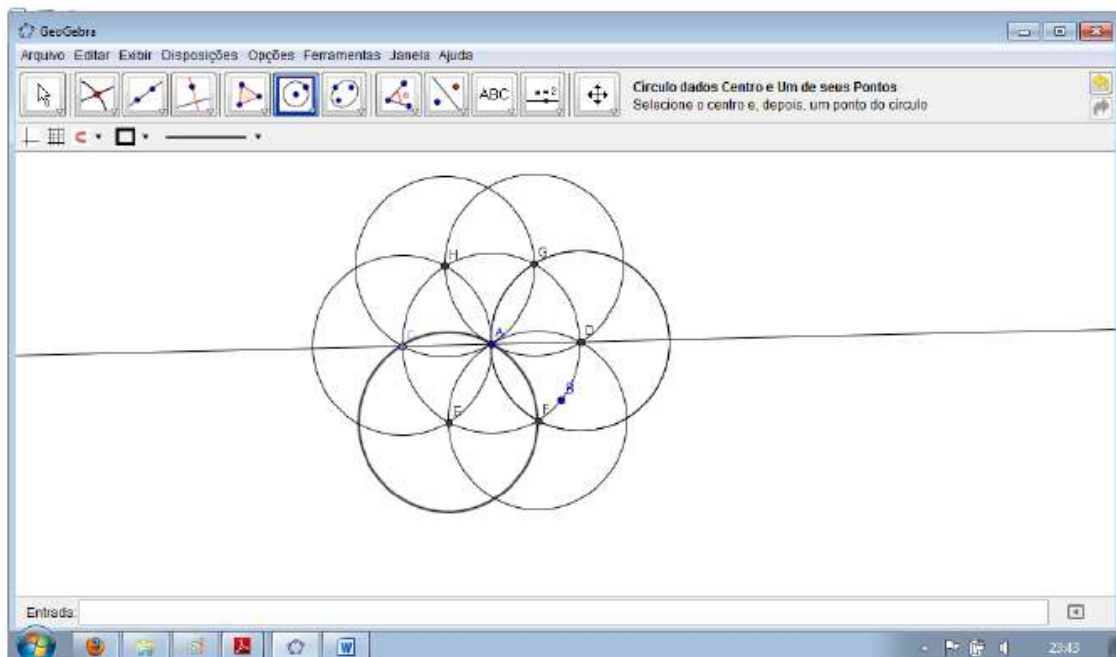
5) Selecione a opção “Interseção de Dois Objetos” e marque as interseções da reta com a circunferência.



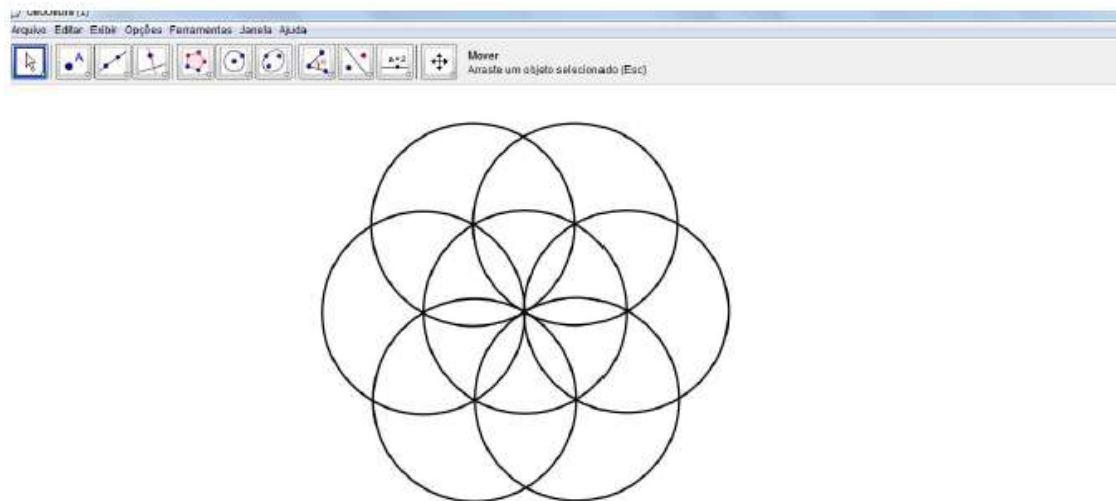
6) Trace duas circunferências, uma com centro em C passando por A e outra com centro em D também passando por A e, em seguida, marque os pontos de interseção entre as circunferências.



7) Agora, trace quatro circunferências passando por A com centros nos pontos de interseção que você já marcou, ou seja, em G, E, F e H.



8) Clicando com o botão direito do mouse sobre os pontos e sobre a reta, aparecerá um menu onde você irá selecionar “Exibir Objeto”. Desta forma, ocultaremos estes objetos.



9) Podemos copiar a figura e colar em um editor de desenho para concluirmos nossa obra.

10) Utilizando o software Paintbrush e utilizando as teclas e você pode colorir regiões, apagar linhas e retocar com o pincel seu desenho.



## 7ª/8ª aulas: Aulas no Laboratório de Informática

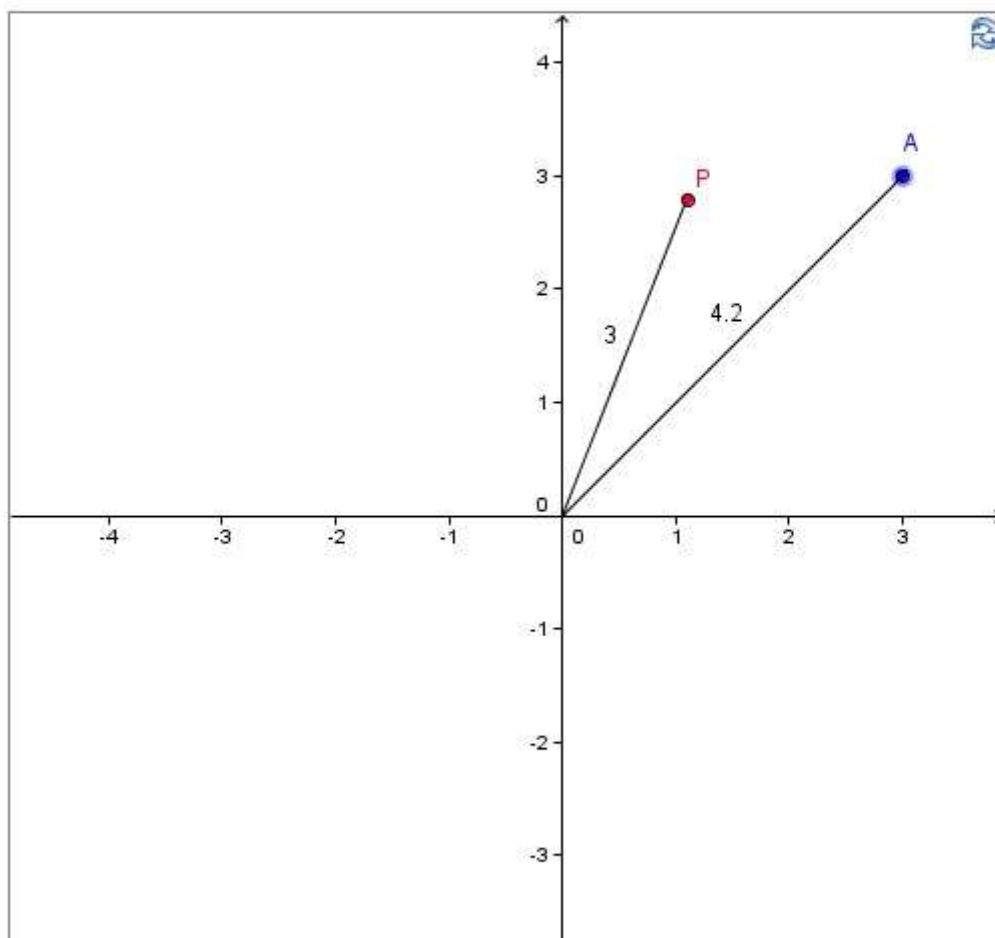
Com a turma em sala de aula, dividida em grupo de 2 alunos, estas aulas tem como objetivo deixar o aluno deduzir o conceito e a fórmula da equação da circunferência serão desenvolvidas atividades, com o auxílio do software Geogebra, descritas a seguir:

### Atividade 1 Pontos equidistantes da origem

O ponto P dista três unidades da origem.

Quais outros pontos do plano possuem esta mesma propriedade?

Clique no ponto A e arraste-o pelo plano para marcar outros pontos que distem três unidades da origem.



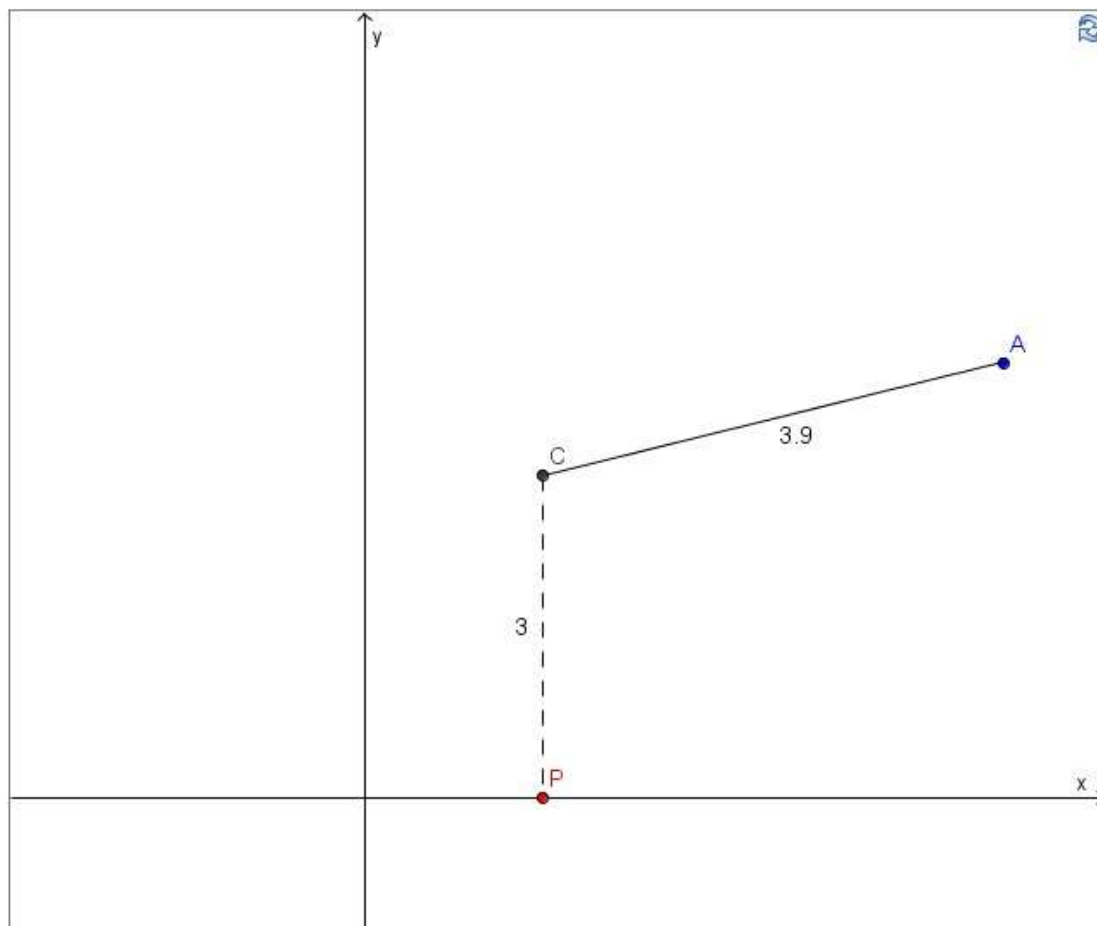
Que figura geométrica contém todos os pontos que estão a três unidades da origem?

## Atividade 2 Pontos equidistantes de um ponto fixo dado

O ponto P dista três unidades do ponto C.

Quais outros pontos do plano possuem esta mesma propriedade?

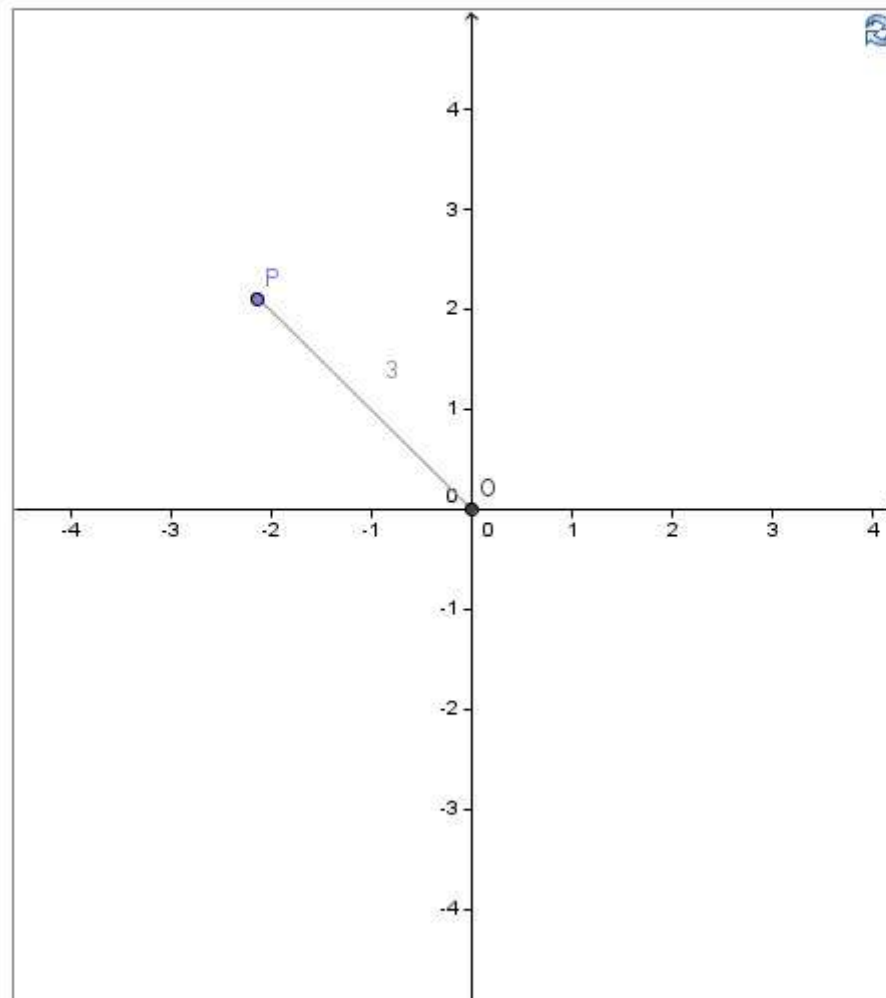
Clique no ponto A e arraste-o pelo plano para marcar outros pontos que distem três unidades da origem.



Que figura geométrica contém todos os pontos que estão a três unidades do ponto C? Podemos afirmar que será também uma circunferência?

## Atividade 3 Pontos equidistantes

Na figura abaixo, a distância do ponto P ao ponto O é igual a três unidades. Clique no ponto P e arraste-o.



Qual figura geométrica representa a trajetória do ponto P?

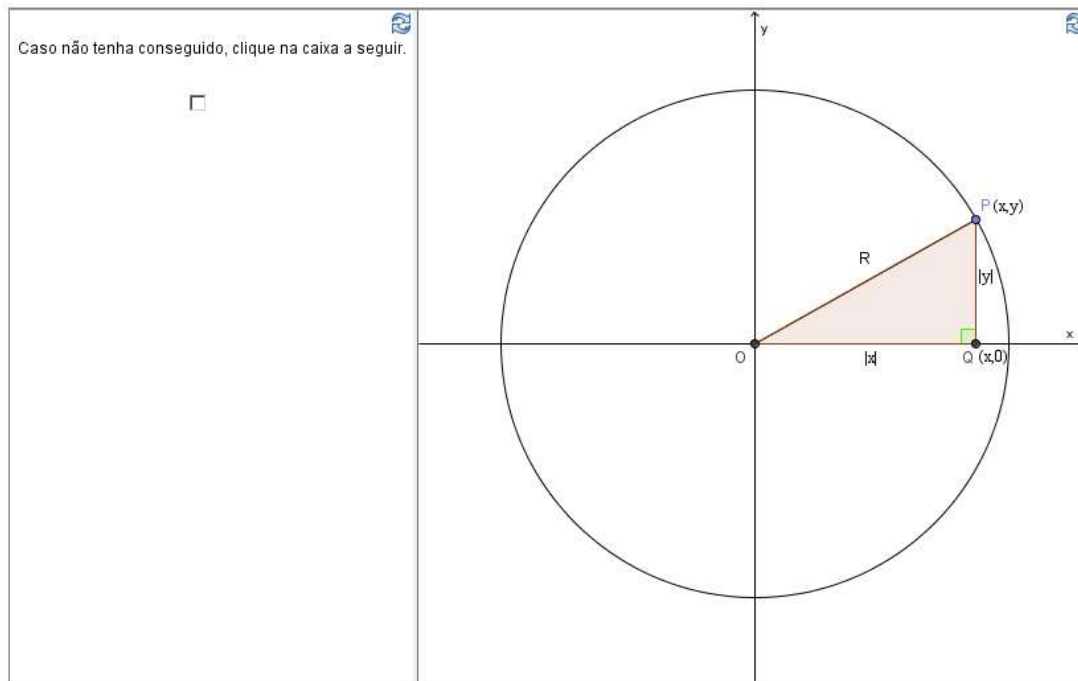


#### Atividade 4 Dedução da equação da circunferência

Na janela abaixo, clique e arraste o ponto P.

Observe o triângulo retângulo OQP de hipotenusa R e catetos  $|x|$  e  $|y|$ .

Como podemos montar uma equação para esta circunferência que associe  $x$ ,  $y$  e  $R$ ?

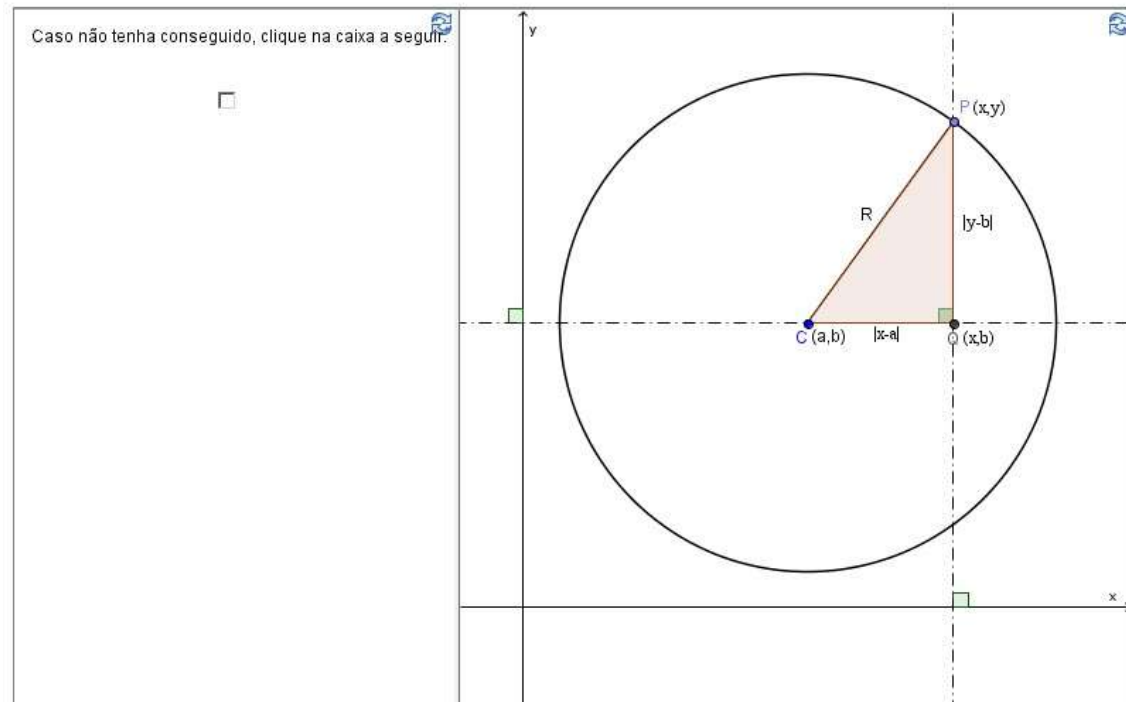


## Atividade 5 Generalização da equação da circunferência

Na janela abaixo, clique e arraste o ponto P.

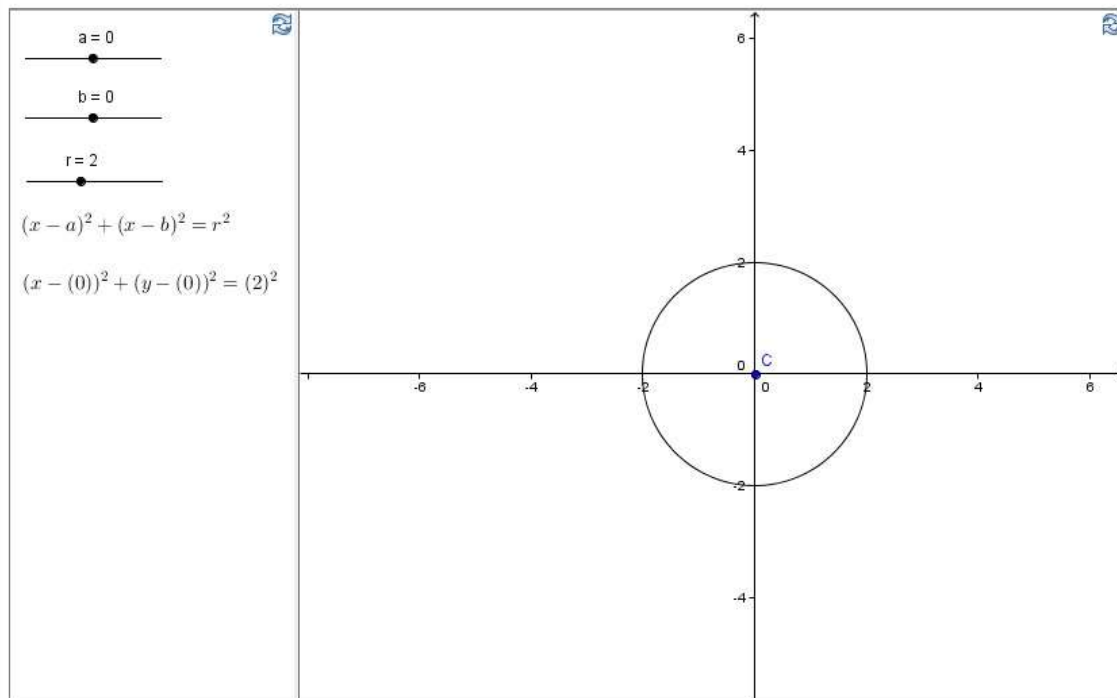
Observe o triângulo retângulo CQP de hipotenusa R e catetos  $|x-a|$  e  $|y-b|$ .

Como podemos montar uma equação para esta circunferência que associe  $(x-a)$ ,  $(y-b)$  e R?



### Atividade 6 Compreendendo os parâmetros da equação da circunferência

Na janela a seguir, deslize os controles  $r$ ,  $a$  e  $b$ , um de cada vez, e observe o que acontece com a circunferência dada pela equação  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ .



Agora responda as seguintes questões:

- 1) Qual o significado do parâmetro  $r$  na equação?
- 2) Qual o significado dos parâmetros  $a$  e  $b$ ? A qual elemento da circunferência eles estão associados?

### Avaliação:

A avaliação do aluno será dada através de:

- Participação dos alunos em sala e durante todo o desenvolvimento do plano de trabalho (descritores 1 e 2 do currículo mínimo descritos abaixo)
- Avaliação da apresentação do resultado das atividades de construções realizadas nos grupos de trabalho utilizando o Geogebra abordando o entendimento do assunto (descriptor 1 e 2 do currículo mínimo descritos abaixo)

### Descritores do Currículo Mínimo abordados:

- Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.
- Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio.

### Referências:

-FUNDAÇÃO CECIERJ / SEEDUC RJ- Curso Formação Continuada Matemática, Ano: 2013 – Módulo 2 – Estudo da Geometria Analítica - Roteiros de Ação 1,2,3,4,5

- Paiva, Manoel – Matemática – Editora Moderna – Volume 3 Edição 2009

Sites Pesquisados:

<http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap41s4.html> acessado em 03/11/2013 as 20:10h

<http://educacao.uol.com.br/matematica/equacao-da-circunferencia-geral-e-reduzida-determinacao-de-centro-e-raio.jhtm> acessado em 03/11/2013 as 20:15h