Formação Continuada em MATEMÁTICA

Fundação CECIERJ/Consórcio CEDERJ

Matemática 3º Ano - 4º Bimestre/2013

Plano de Trabalho

Geometria Analítica

Tarefa 2

Cursista**: Rogério Galeazzi Galvagni**

Tutura**: Maria Cláudia Padilha Tostes**

Sumário

Introdução

A **Geometria Analítica**, também denominada de coordenadas geométricas, se baseia nos estudos da Geometria através da utilização da Álgebra. Os estudos iniciais estão ligados ao matemático francês René Descartes (1596 -1650), criador do sistema de coordenadas cartesianas.

Os estudos relacionados à Geometria Analítica datam seu início no século XVII, Descartes, ao relacionar a Álgebra com a Geometria, criou princípios matemáticos capazes de analisar por métodos geométricos as propriedades do ponto, da reta e da circunferência, determinando distâncias entre eles, localização e pontos de coordenadas.

Uma característica importante da G.A. se apresenta na definição de formas geométricas de modo numérico, extraindo dados informativos da representação. Com base nesses estudos, a Matemática passa a ser vista como uma disciplina moderna, capaz de explicar e demonstrar situações relacionadas ao espaço. As noções intuitivas de vetores começam a ser exploradas de forma contundente, na busca por resultados numéricos que expressem as ideias da união da Geometria com a Álgebra.

Os vetores constituem a base dos estudos do espaço vetorial, objetos que possuem as características relacionadas a tamanho, direção e sentido. Os vetores são muito utilizados na Física, como ferramenta auxiliar nos cálculos relacionados à Cinemática Vetorial, Dinâmica, Campo Elétrico entre outros conteúdos relacionados.
Os cientistas Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz concentraram estudos na Geometria Analítica, que serviu como base teórica e prática para o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, muito utilizado atualmente na Engenharia.

DESENVOLVIMENTO

Atividade 1: **Estudo da reta**
Pré-requisitos: **plano cartesiano e ângulos**
Tempo de duração: **04 aula com 50 minutos**
Recursos utilizados: **Quadro branco e pincel**.
Metodologia:

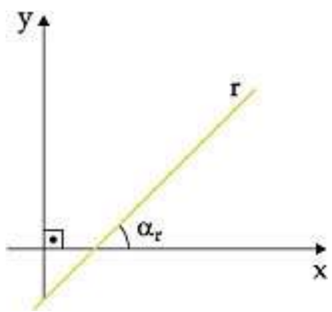
Estudo da Reta

1. Teoria Angular

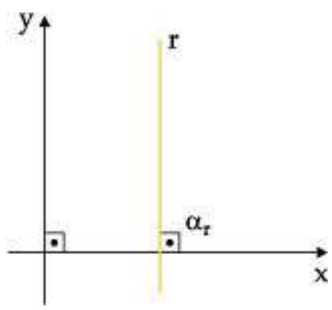
1.1. Inclinação de uma Reta

Dado um plano cartesiano e uma reta r concorrente com o eixo x, chamamos de **inclinação** de r a medida α do ângulo que r forma com o eixo x, ângulo esse medido a partir do eixo x até a reta r no sentido anti-horário.

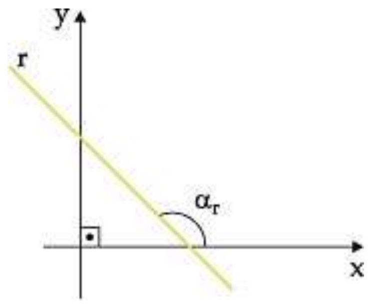
Então:



$0^o < \alpha_r < 90^o$



$\alpha_r = 90^o$

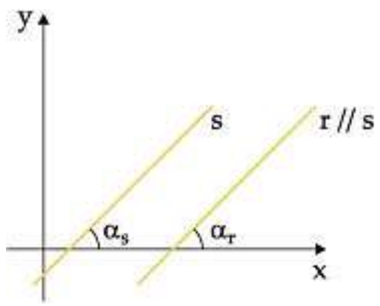


$90º < \alpha_r < 180º$

No caso em que r é paralela ao eixo x, a inclinação de r é definida como 0º.

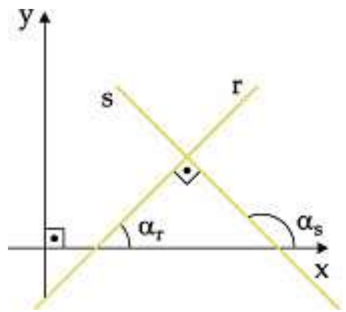
Propriedades importantes

P_1) Se duas retas de um plano cartesiano são paralelas, suas inclinações são iguais.



$$\boxed{r // s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s}$$

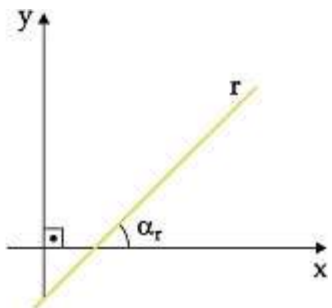
P_2) Se duas retas são perpendiculares, a diferença entre suas inclinações é 90º.



$$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow |\alpha_s - \alpha_r| = 90°}$$

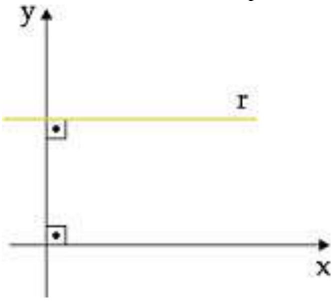
1.2. Coeficiente Angular de uma Reta

Sendo r uma reta não paralela ao eixo y, **coeficiente angular** ou **declividade** de r é a tangente da inclinação de r, que indicamos por $\mathbf{m_r}$. Assim:



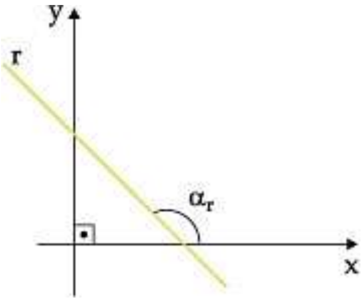
$m_r = \text{tg}\, \alpha_r$

$0^\circ < \alpha_r < 90^\circ \Leftrightarrow m_r > 0$



$m_r = \text{tg}\, \alpha_r$

$\alpha_r = 0^\circ \Leftrightarrow m_r = 0$



$m_r = \text{tg}\, \alpha_r$

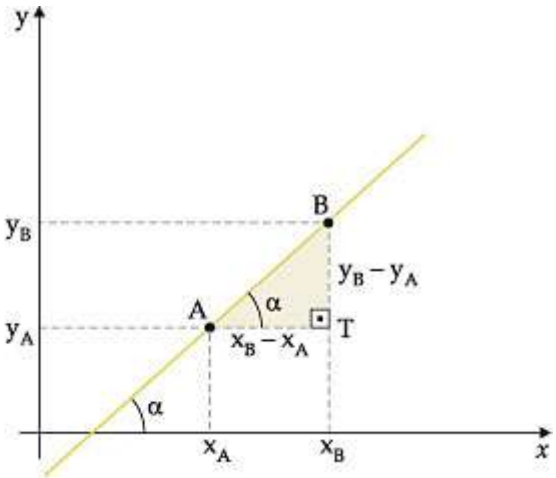
$90^\circ < \alpha_r < 180^\circ \Leftrightarrow m_r < 0$

No caso em que r é paralela ao eixo y, o **coeficiente angular** de r **não é definido**.

1.3. Como Calcular o Coeficiente Angular

Consideremos no plano cartesiano a reta não paralela ao eixo y, determinada por dois pontos A (x_A, y_A) e B (x_B, y_B) ($x_A \neq x_B$)

1º caso: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

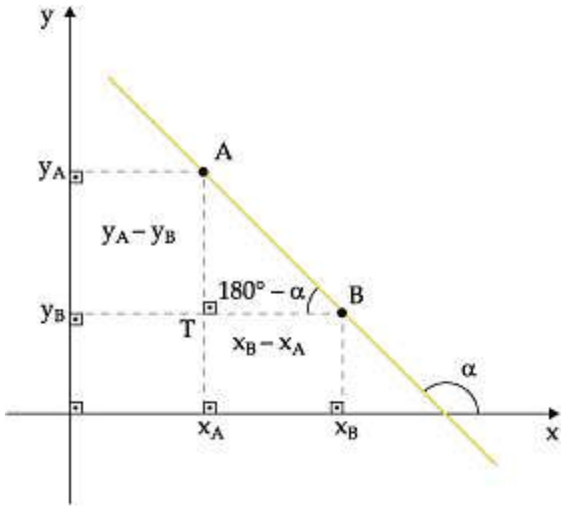


$$m_{AB} = \text{tg}\,\alpha = \frac{BT}{TA}$$

Assim:

$$\boxed{m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

2º caso: $90^o < \alpha < 180^o$



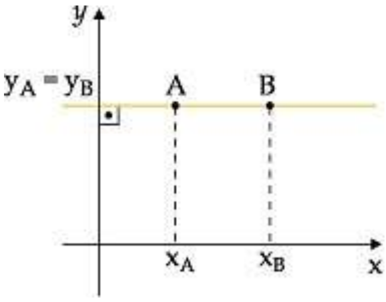
$$m_{AB} = \text{tg}\,\alpha = -\,\text{tg}\,(180^o - \alpha)$$

$$m_{AB} = -\frac{AT}{TB} = -\frac{y_A - y_B}{x_B - x_A}$$

Assim:

$$\boxed{m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

3º caso: $\alpha = 0^o$



$m_{AB} = 0$

Como $x_B \neq x_A$ e $y_B = y_A$,

podemos escrever:

$$\boxed{m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Conclusão

Em qualquer dos casos, o coeficiente angular da reta é dado pela razão entre a diferença (Δy) das ordenadas e a diferença Δx das abscissas.

Observação – De acordo com o cálculo exposto, $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$;

no entanto, podemos multiplicar o antecedente e o conseqüente da razão por – 1 e ela não se alterará, e obteremos:

$$\boxed{m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Exemplos

1º) O coeficiente angular da reta que passa por A (1, 5) e B (3, 8) é:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-5}{3-1} = \frac{3}{2}$$

2º) O coeficiente angular da reta que passa por C (7, 2) e D (6, 2) é:

$$m_{CD} = \frac{2-2}{6-7} = 0$$

3º) O coeficiente angular da reta que passa por E(5, 3) e F (5, 7) não é definido, pois $x_E = x_F$, e a reta $\overleftrightarrow{EF}$ é paralela ao eixo y.

1.4. Condição de Alinhamento para Três Pontos

Conforme vimos nos módulos anteriores, para sabermos se os pontos $A(X_A, Y_A)$, $B(X_B, Y_B)$ e $C(X_C, Y_C)$ estão alinhados, calculamos o determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_A & Y_A & 1 \\ X_B & Y_B & 1 \\ X_C & Y_C & 1 \end{vmatrix}$$

e verificamos se o valor desse determinante é zero. (Caso contrário formam um triângulo cuja área é $A = \frac{1}{2}|\Delta|$.

Agora, porém, podemos verificar se três pontos distintos estão alinhados utilizando o conceito de coeficiente angular.

Observe as figuras:

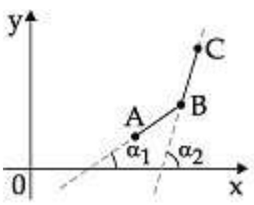


Figura 1

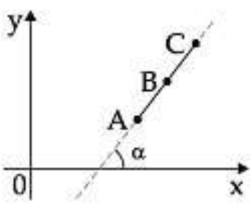


Figura 2

Na figura 1 as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ têm inclinação diferentes ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), pois A, B e C não estão alinhados. Assim, tg $\alpha_1 \neq$ tg α_2, ou seja, $m_{AB} \neq m_{BC}$.

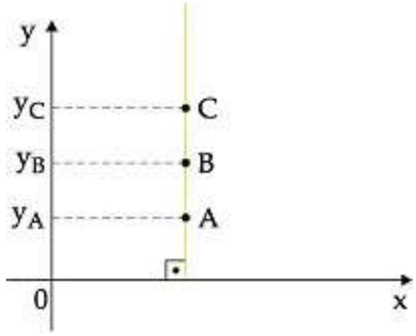
Na figura 2, observamos que A,B e C estão alinhados e, portanto,

$m_{AB} = m_{BC} =$ tg α

Podemos afirmar que:

três pontos A, B e C estão alinhados numa reta não vertical quando $m_{AB} = m_{BC}$.

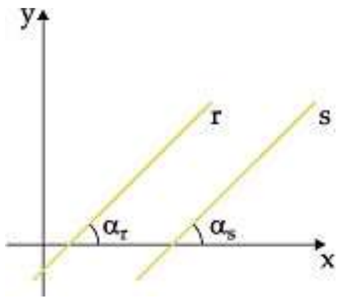
Se A, B e C estiverem em uma reta paralela ao eixo Y não poderemos calcular o coeficiente angular. Todavia, nesse caso será fácil notar que $X_A = X_B = X_C$.

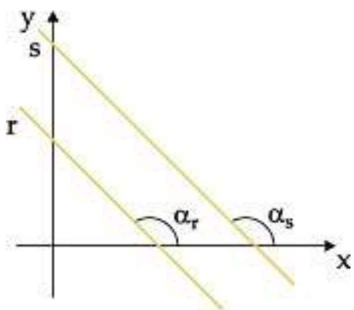


$X_A = X_B = X_C$

1.5. Condição de Paralelismo de Retas

Duas retas r e s **não paralelas ao eixo y são paralelas** entre si quando tiverem os coeficientes angulares iguais.





r // s $\Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s$

Assim: r // s $\Leftrightarrow$ tg $\alpha_r =$ tg α_s

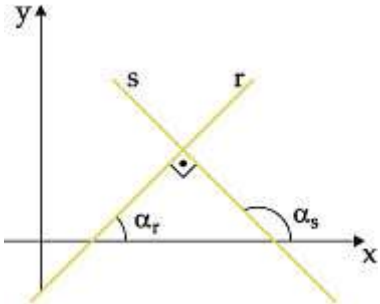
ou seja:

$$r // s \Leftrightarrow m_r = m_s$$

Observação – Se $m_r \neq m_s$, as retas r e s não são paralelas, isto é, são **concorrentes**.

1.6. Condição de Perpendicularismo de Retas

Duas retas r e s **não paralelas ao eixo y são perpendiculares** entre si quando tiverem os coeficientes angulares com produto – 1.



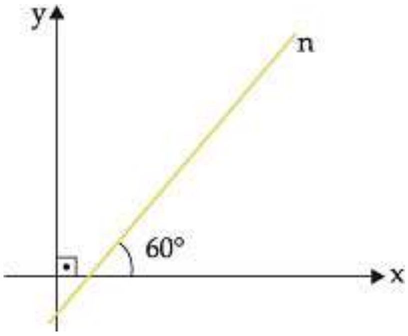
$$r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1.$$

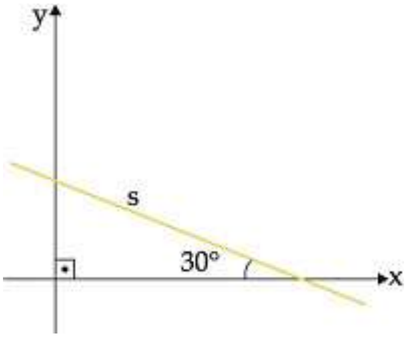
(Essa propriedade será demonstrada quando estudarmos posições relativas de duas retas).

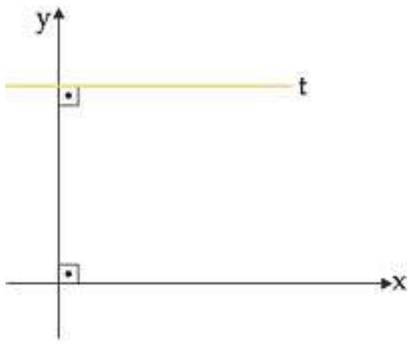
Importante – Se duas retas são perpendiculares, e nenhuma delas é paralela ao eixo y, o coeficiente angular de uma delas é o **oposto do inverso** do coeficiente angular da outra.

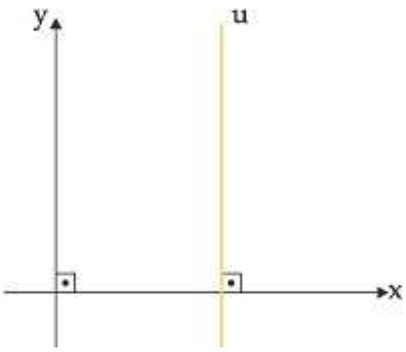
Exercícios Resolvidos

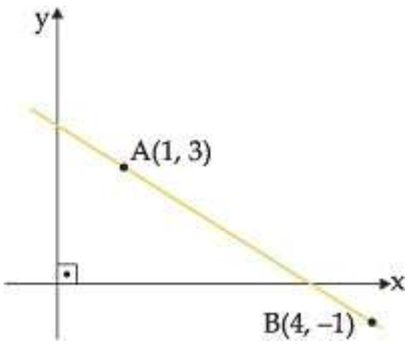
01. Determine o coeficiente angular de cada reta abaixo.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

Resolução

a) $m_r = tg\ 60° = \sqrt{3}$

b) $m_s = tg\ 120° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ *(lembre-se de que a inclina- ção deve ser medida no sentido anti-horário)*

c) $m_t = tg\ 0° = 0$

d) $m_u = tg\ 90° \Rightarrow \nexists m_u$

e) $m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-3}{4-1} = -\frac{4}{3}$

02. Obter a para que os pontos A, B e C sejam colineares:

a) A(1, 3), B(2, 5) e C(4, a)

b) A(4, –3), B(4, 0) e C(a, 7)

Resolução

a) $m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{5-3}{2-1} = \frac{a-5}{4-2}$

$\frac{2}{1} = \frac{a-5}{2} \Rightarrow 4 = a-5 \Rightarrow \boxed{a = 9}$

b) $X_A = X_B = 4 \Rightarrow$ *A e B estão na mesma vertical. Então, para que estejam alinhados devemos ter* $X_C = X_A = X_B \Rightarrow \boxed{a = 4}$

03. (PUC-SP) Os pontos A(k, 0), B(1, –2) e C(3, 2) são vértices de um triângulo. Então, necessariamente:

a) k = –1

b) k = –2

c) k = 2

d) k ≠–2

e) K ≠2

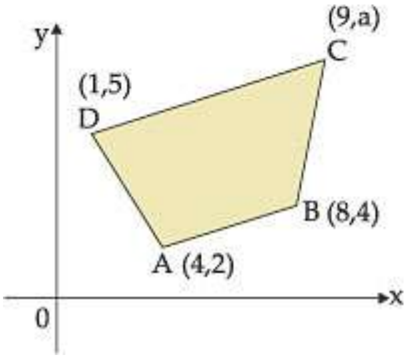
Resolução

Para termos um triângulo, os pontos A, B e C não são colineares, ou seja, $m_{AB} \neq m_{BC}$.

$\frac{0+2}{k-1} \neq \frac{-2-2}{1-3} \Rightarrow k \neq 2$

Resposta: *E*

04. No quadrilátero ABCD da figura, os lados AB e CD são paralelos. Determine o valor de a.



Resolução

$\overline{AB} // \overline{CD} \Rightarrow m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow$

$\frac{4-2}{8-4} = \frac{a-5}{9-1}$

$\frac{2}{4} = \frac{a-5}{8} \Rightarrow 4 = a-5 \Rightarrow \boxed{a = 9}$

05. ABCD é um losango com A(1, 5) e C(4, –2). Determine o coeficiente angular da reta suporte da diagonal BD.

Resolução

Num losango as diagonais são perpendiculares. Então:

$\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{BD} \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{BD} = -1$

$m_{AC} = \frac{-2-5}{4-1} = -\frac{7}{3} \therefore$

$-\frac{7}{3} \cdot m_{BD} = -1 \Rightarrow m_{BD} = \frac{3}{7}$

Atividade 2: **Equação da reta**
Pré-requisitos: **plano cartesiano**
Tempo de duração: **04 aulas com 50 minutos cada**
Recursos utilizados: **Quadro branco e pincel**.
Metodologia:

2. Equação Fundamental de uma Reta

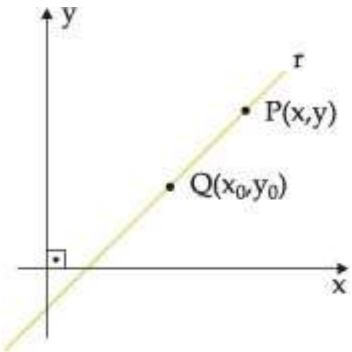
Vamos determinar a equação de uma reta conhe-cendo um dos seus pontos e a sua direção.

Existem dois casos que devemos considerar:

• 1º caso

A reta tem coeficiente angular.

Seja **r** uma reta do plano cartesiano que passa pelo ponto Q (x_0 , y_0) e tem coeficiente angular **m**. Para determinarmos a equação desta reta, consideramos um ponto P (x, y) e fazemos com que ele tenha a propriedade característica de **r**. Assim:



$P(x, y) \in r \Leftrightarrow m_{PQ} = m_r$

Então: $\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$

ou $\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$

Essa equação obtida é chamada **equação funda-mental** de **r**.

Exemplo

Obter uma equação da reta que passa pelo ponto A (3, 2) e tem coeficiente angular – 2.
Resolução

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 2 = -2(x - 3) \Rightarrow y - 2 = -2x + 6$

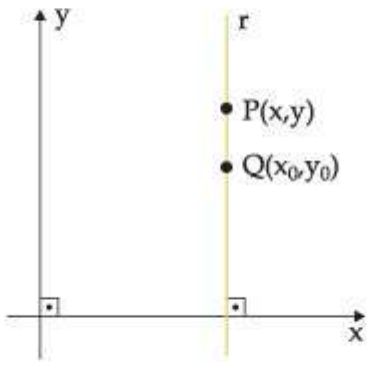
Assim, uma equação de **r** é:

$\boxed{2x + y - 8 = 0}$

• **2º caso**

A reta não tem coeficiente angular.

Seja **r** uma reta do plano cartesiano que passa pelo ponto Q (x_0 , y_0) e tem inclinação 90°. Para deter-minarmos a equação desta reta, consideramos um ponto P (x,y) e fazemos com que ele tenha a propriedade característica de **r**. Assim:



$P\ (x\ ,\ y) \in r \Leftrightarrow X_P = X_Q$

Então: $\boxed{x = x_0}$

Essa equação obtida é a equação de **r**.

Exemplo

Obter uma equação da reta que passa pelo ponto A (3, 2) e é paralela ao eixo **y**.

Resolução

$x = x_0$, isto é, $x = 3$ é a equação da reta.

Exercícios Resolvidos

01. (Ufes-ES) A equação da reta que passa pelo ponto (3, – 2), com inclinação de 60°, é:

a) $\sqrt{3}x - y - 2 - 3\sqrt{3} = 0$

b) $\sqrt{3}x - 3y - 6 - 3\sqrt{3} = 0$

c) $\sqrt{3}x + y + 3 - 2\sqrt{3} = 0$

d) $\sqrt{3}x - y - 2 + 2\sqrt{3} = 0$

e) $\sqrt{3}x - y - 5\sqrt{3} = 0$

Resolução

$m = tg\ 60° = \sqrt{3}$

Logo, $y - y_0 = m\ (x - x_0)$

$y + 2 = \sqrt{3}(x-3) \Rightarrow y + 2 = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}x - y - 2 - 3\sqrt{3} = 0$

02. Dar a equação da reta que passa pelos pontos A (2, 5) e B (3, 4).

Resolução

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{5-4}{2-3} = -1$$

$y - y_0 = m\ (x - x_0)$

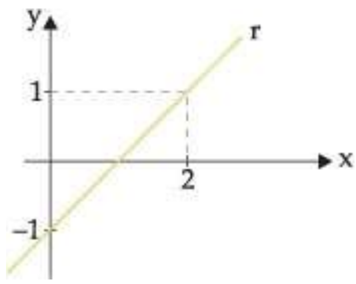
$y - 5 = -1\ (x - 2)$

$y - 5 = -x + 2$

Resposta: $x + y - 7 = 0$

Observação *– Utilizamos as coordenadas do ponto A para obtermos a equação da reta, mas o resultado seria o mesmo se utilizássemos as coordenadas do ponto B.*

03. Qual é a equação da reta **r** da figura abaixo?



a) $y = x + 1$ d) $y = x - 1$

b) $x + y - 1 = 0$ e) $y = -x + 1$

c) $x + y + 1 = 0$

Resolução

A reta r passa pelos pontos A (2, 1) e B (0, –1).

Assim:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1-1}{0-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$

$y - 1 = 1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y - 1 = x - 2$

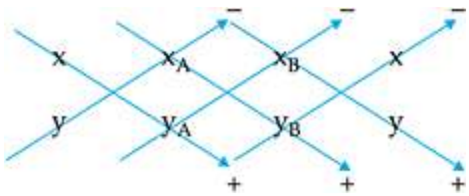
$y = x - 1$

Resposta: *D*

3. Equação Geral da Reta

Toda reta do plano cartesiano tem equação que pode ser escrita na forma: **ax + by + c = 0,** em que a, b e c são conhecidos e a ≠ 0 e b ≠0. Essa forma de equação é denominada **equação geral** da reta.

De fato, supondo que A (x_A , y_A) e B (x_B , y_B) são dois pontos distintos de uma reta r qualquer, uma equação de r é:



$xy_A + x_Ay_B + x_By - x_Ay - x_By_A - xy_B = 0$

$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (x_Ay_B - x_By_A) = 0$

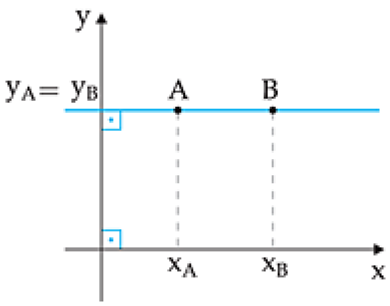
Fazendo $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $x_Ay_B - x_By_A = c$, temos:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

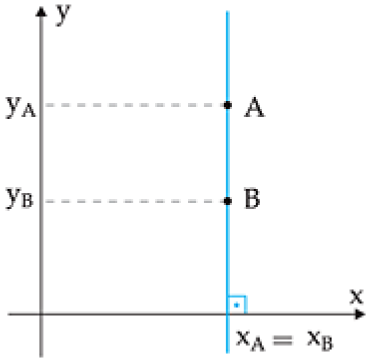
onde não podemos ter simultaneamente a = 0 e b = 0, pois, neste caso, $y_A = y_B$ e $x_B = x_A$ e teríamos A e B coincidentes; logo a ≠0 ou b ≠0.

Observações

1ª) Se a = 0, temos que $y_A = y_B$ e a reta é paralela ao eixo x.



2ª) Se b = 0, temos que $x_A = x_B$ e a reta é paralela ao eixo y.



3ª) Se c = 0, a reta passa pela origem, pois (0, 0) é uma solução de ax + by = 0.

4. Equação Reduzida da Reta

Consideremos uma reta r no plano cartesiano que corta o eixo y no ponto Q (0, q) e tem coeficiente angular m. A equação de r é dada por:

$y - q = m\,(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = mx + q}$

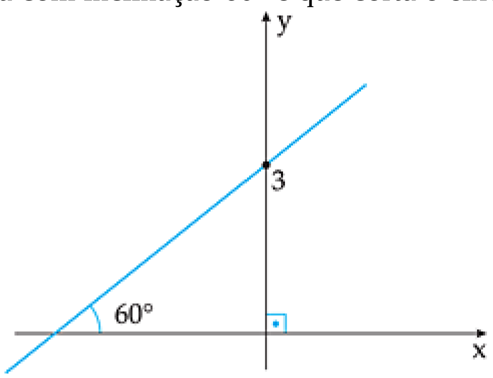
Esta forma de apresentar a equação de r é chamada de **forma reduzida**, e seus coeficientes são:

m = coeficiente angular de r

q = coeficiente linear de r

Exemplos

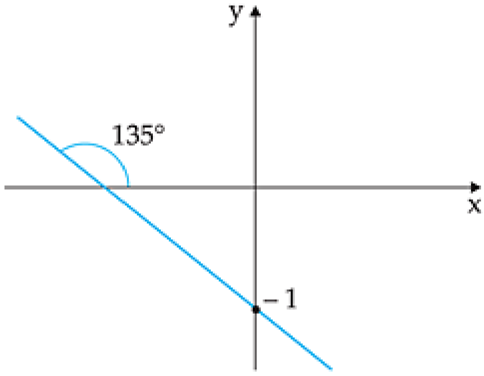
1º) A equação reduzida da reta com inclinação 60° e que corta o eixo y no ponto Q (0, 3) é:



$m = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$ e $q = 3$

$y = \sqrt{3}x + 3$

2º) A reta com equação reduzida y = – x – 1 tem m = – 1 e q = – 1, então a sua representação no plano cartesiano é:



Observações

1ª) A equação reduzida de uma reta fornece diretamente o coeficiente angular (m) e a ordenada (q) do ponto onde a reta intercepta o eixo y. Dessa forma, a reta (r) ax + bx + c = 0 tem equação reduzida

$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, desde que b $\neq 0$, e seus coeficientes são:

$-\frac{a}{b}$ = m = coeficiente angular

$-\frac{c}{b}$ = q = coeficiente linear

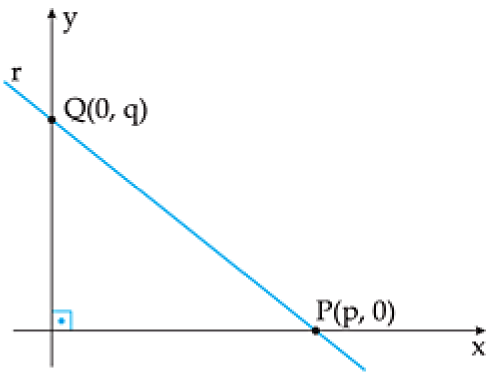
Exemplo

A reta da equação 2x – 3y + 6 = 0 tem forma reduzida $y = \frac{2}{3}x + 2$ com $m = \frac{2}{3}$ e q = 2.

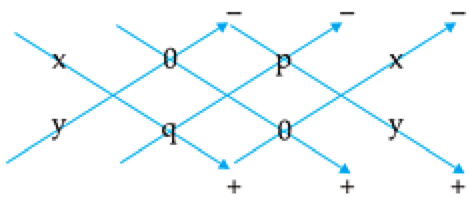
2ª) As retas de inclinação 90° (paralelas ao eixo y), não têm equação na forma reduzida.

5. Equação Segmentária da Reta

Consideremos uma reta r que intercepta os eixos cartesianos nos pontos P(p, 0) e Q(0, q), com **p · q ≠ 0:**



A equação de r será:



$qx + py - pq = 0 \Rightarrow qx + py = pq$

Dividindo os dois membros por pq, temos:

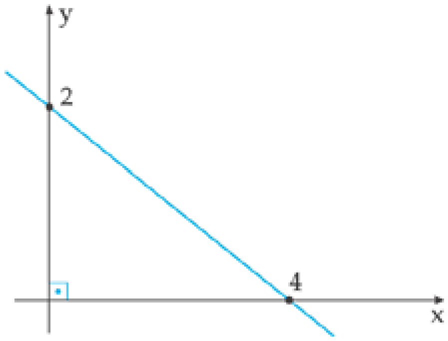
$$\frac{qx}{pq} + \frac{py}{pq} = \frac{pq}{pq} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

Dizemos que esta equação é a **equação segmentária** da reta r.

Observação – Os denominadores de x e y, na equação segmentária, são, respectivamente, a abscissa do ponto onde r intercepta o eixo x e a ordenada do ponto onde r intercepta o eixo y.

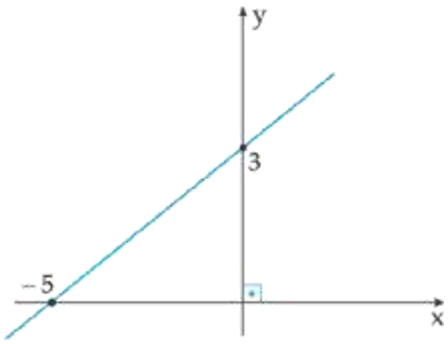
Exemplos

1º) A equação segmentária da reta r da figura é:



$$\boxed{\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1}$$

2º) A equação segmentária da reta s da figura é:



$$\boxed{\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1}$$

6. Equações Paramétricas da Reta

Consideremos uma reta r não paralela a algum dos eixos cartesianos, que passa pelos pontos A (x_A , y_A) e B (x_B , y_B).

O coeficiente angular de r é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

A equação fundamental de r é:

$$y - y_A = \left(\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}\right)(x - x_A)$$

Ou então:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{x_B - x_A}$$

Igualando os dois membros da equação a um número real t, temos:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = t \Rightarrow x = x_A + t(x_B - x_A)$$

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = t \Rightarrow y = y_A + t(y_B - y_A)$$

Então, para cada valor t $\in \mathbb{R}$, obtemos um ponto da reta.

Chamamos de **forma paramétrica** ou de **equações paramétricas da reta** as equações:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}$$

Um ponto da reta

t é chamado **parâmetro** das equações.

Exemplo

As equações paramétricas da reta que passa pelos pontos A (5, 2) e B (7, 1) podem ser:

$x = x_A + t\ (x_B - x_A) = 5 + t\ (7 - 5) = 2t + 5$

$y = y_A + t\ (y_B - y_A) = 2 + t\ (1 - 2) = -t + 2$

Isto é: $\begin{cases} x = 2t + 5 \\ y = -t + 2 \end{cases}$

Observação – É fácil percebermos que, para cada par de pontos que tomarmos em r, teremos equações diferentes.

Exercícios Resolvidos

01. Dados os pontos A (1, 3) e B (5, 7), considere a reta r determinada por A e B. Obtenha o que se pede:

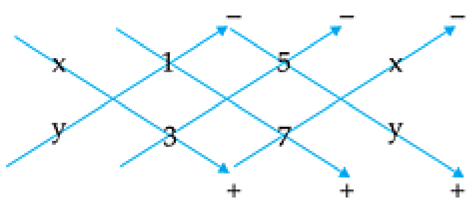
a) o ponto C de r com abscissa 2.

b) o ponto D de r com ordenada – 1.

c) o ponto E de r que está na bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução

Equação de r:



$3x + 7 + 5y - y - 15 - 7x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4x + 4y - 8 = 0\ (\div -4)$

Assim: $(r)\ x - y + 2 = 0$

a) $C\ (2, y_C) \in r$*, então:*

$2 - y_C + 2 = 0 \Rightarrow y_C = 4 \therefore C\,(2, 4)$

b) $D\,(x_D\,, -1) \in r$*, então:*

$x_D - (-1) + 2 = 0 \Rightarrow x_D = -3$

$\therefore D\,(-3, -1)$

c) $E\,(x_E\,, x_E) \in r$*, então:*

$x_E - x_E + 2 = 0 \Rightarrow \nexists E \in r$

Resposta:

a) $C\,(2, 4)$

b) $D\,(-3, -1)$

c) $\nexists E \in r$

02. Obtenha os pontos onde a reta de equação geral (r) $3x + y - 6 = 0$ intercepta os eixos coordenados.

Resolução

Sendo $P\,(x_P\,, 0)$ *e* $Q\,(0, y_Q\,)$ *os pontos procurados, temos:*

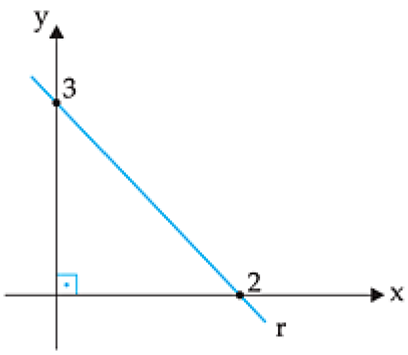
$3x_P + 0 - 6 = 0 \Rightarrow x_P = 2 \therefore P\,(2, 0)$

$3 \cdot 0 + y_Q - 6 = 0 \Rightarrow y_Q = 6 \therefore Q\,(0, 6)$

Resposta:

$P\,(2, 0)$ *e* $Q\,(0, 6)$

03. Obtenha a equação reduzida da reta r da figura:



Resolução

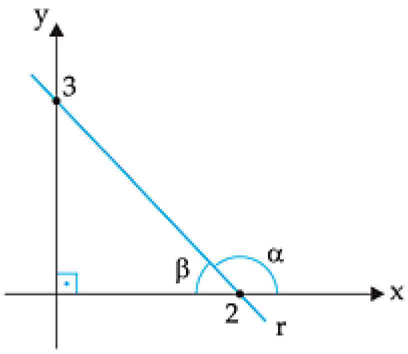
1º modo

Conhecemos dois pontos de r (2, 0) e (0, 3), então:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-0}{0-2} = -\frac{3}{2}$$

Como q = 3, a equação é: $\boxed{y = -\frac{3}{2}x + 3}$

2º modo



$m = tg\ \alpha = -tg\ \beta$

Como $tg\ \beta = \frac{3}{2}$ *então* $m = -\frac{3}{2}$

Assim: $\boxed{y = -\frac{3}{2}x + 3}$

3º modo

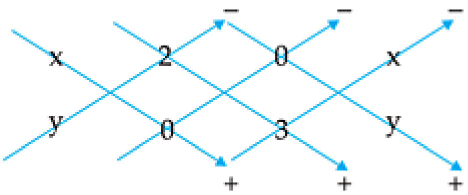
A equação segmentária de r é:

$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow 3x + 2y = 6 \Rightarrow 2y = -3x + 6$

Assim: $\boxed{y = \frac{-3}{2}x + 3}$

4º modo

Temos dois pontos (2, 0) e (0, 3) de r, então:



$6 - 2y - 3x = 0 \Rightarrow -3x + 6 = 2y$

$\therefore\ y = \frac{-3}{2}x + 3$

Assim: $\boxed{y = -\frac{3}{2}x + 3}$

04. Obtenha a equação reduzida da reta que passa pelo ponto Q(0, –3) e é paralela à reta (r) $3x - y + 7 = 0$.

Resolução

(r) $3x - y + 7 = 0 \Rightarrow y = 3x + 7$

$\therefore\ m_r = 3$

Como t // r, $m_t = m_r = 3$.

Logo, a equação reduzida de t é: $y = 3x - 3$

Resposta: *y = 3x – 3*

05. Obtenha uma equação da reta t que passa pelo ponto P (1,2) e é perpendicular à reta (r) x – 3y + 2 = 0.

Resolução

(r) x – 3y + 2 = 0 $\Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow m_r = \frac{1}{3}$

Como t $\perp$ *r,* $m_t = -\frac{1}{m_r}$ *= –3*

A equação fundamental de t é:

y – 2 = – 3 (x – 1) $\Rightarrow$ *y = – 3x + 5*

Resposta: *y = – 3x + 5*

06. Determine a equação segmentária da reta cuja equação geral é 5x + 6y – 30 = 0.

Resolução

1º modo

Vamos determinar os pontos onde a reta intercepta os eixos:

- *para x = 0: 5 · 0 + 6y – 30 = 0* $\Rightarrow$ *y = 5*
- *para y = 0: 5x + 6 · 0 – 30 = 0* $\Rightarrow$ *x = 6*

Assim, a reta intercepta os eixos nos pontos Q (0, 5) e P (6, 0).

Logo, a equação segmentária é: $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$

2º modo

5x + 6y – 30 = 0 $\Rightarrow$ *5x + 6y = 30* $\Rightarrow$ *(dividindo os dois membros por 30)*

$\Rightarrow \frac{5x}{30} + \frac{6y}{30} = \frac{30}{30}$

Assim, a equação é $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$*.*

Resposta: $\frac{x}{6} + \frac{y}{5} = 1$*.*

07. Dada a reta r de equação x + 2y – 4 = 0, obter um par de equações paramétricas de r.

Resolução

Vamos obter dois pontos quaisquer de r:

- *para x = 2: 2 + 2y – 4 = 0* $\Rightarrow$ *y = 1*
- *para x = 0: 0 + 2y – 4 = 0* $\Rightarrow$ *y = 2*

Assim A (2, 1) e B (0,2) pertencem a r, e a equação reduzida por:

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) = 2 + t(0-2) = 2 - 2t \\ y = y_A + A(y_B - y_A) = 1 + t(2-1) = 1 + t \end{cases}$$

Resposta: $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$

08. Obter a equação geral da reta com equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 3t + 2 \end{cases}$$

Resolução

$x = t - 1 \Rightarrow t = x + 1$. Substituindo na outra equação, temos: $y = 3(x + 1) + 2 \Rightarrow y = 3x + 5$.

Então, a equação geral é: $\boxed{3x - y + 5 = 0}$

Resposta: *$3x - y + 5 = 0$*

09. No plano Oxy, um ponto P (x, y) em movimento tem a sua posição em cada instante dada pelas equações:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \end{cases}, \ t \in R_+$$

em que t é o tempo em segundos, e as distâncias, medidas em cm.

a) Mostrar graficamente a trajetória do ponto.

b) Qual a posição do ponto no início da contagem do tempo? (t = 0)

c) Qual a posição do ponto quando t = 1?

d) Depois de quanto tempo (a partir do início) se tem y = 5? Qual a posição do ponto nesse instante? A que distância se encontra da posição inicial?

Resolução

a) As equações dadas podem ser escritas assim:

$$\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 2 + t \end{cases}, \ t \in R_+$$

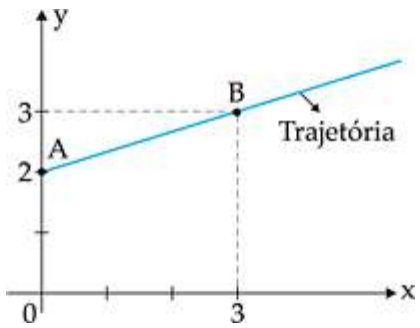
(t é o parâmetro)

A trajetória do ponto é retilínea, pois as equações apresentadas representam uma semi-reta ($t \geq 0$).

O ponto inicial ocorre para t = 0, em A (0,2).

Um outro ponto da trajetória é, por exemplo, B (3,3), que obtemos fazendo t = 1.

Graficamente, temos:



b) Quando t = 0, temos:

$x = 0 + 3$ e $y = 2 + 0 = 2$; assim, no início o ponto está em A (0, 2).

c) Quando t = 1, temos:

$x = 0 + 3 \cdot 1 = 3$ e $y = 2 + 1 = 3$, então, após um segundo o ponto está em B (3, 3).

d) Quando $y = 5$, temos: $5 = 2 + t \Rightarrow t = 3$

Então $y = 5$, após três segundos do início, e

$x = 0 + 3 \cdot 3 = 9$

Logo, a posição do ponto nesse instante é C (9, 5).

$$d_{AC} = \sqrt{(9-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}\ cm$$

Então, a distância procurada é $3\sqrt{10}\ cm$.

7. Posições Relativas de Duas Retas

Consideremos duas retas do plano cartesiano com equações:

(r) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e

(s) $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

Consideremos ainda que $a_1b_1a_2b_2 \neq 0$, isto é, as retas não são paralelas a algum dos eixos cartesianos.

Colocando as equações na forma reduzida, temos:

(r) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$$\therefore\ y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$$

(s) $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

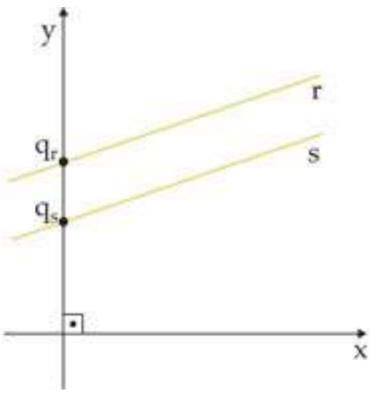
$$\therefore\ y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}$$

Então, os coeficientes angular e linear das retas são:

$$m_r = -\frac{a_1}{b_1}; m_s = -\frac{a_2}{b_2};\ q_r = -\frac{c_1}{b_1} \text{ e } q_s = -\frac{c_2}{b_2}$$

Vamos discutir, com os elementos obtidos, as posi-ções possíveis de r e s no plano cartesiano.

7.1. Retas Paralelas Distintas



Devemos ter: **$m_r = m_s$ e $q_r \neq q_s$**

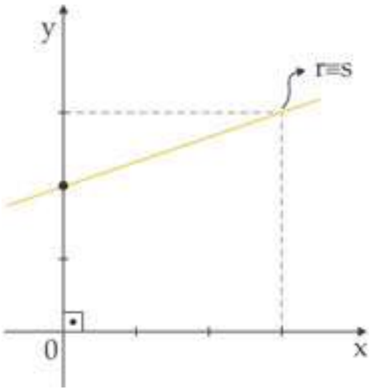
Assim,

$$\frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{e} \quad -\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Reunindo as duas condições, temos:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$$

7.2. Retas Paralelas Coincidentes



Devemos ter: $\mathbf{m_r = m_s}$ **e** $\mathbf{q_r = q_s}$

Assim,

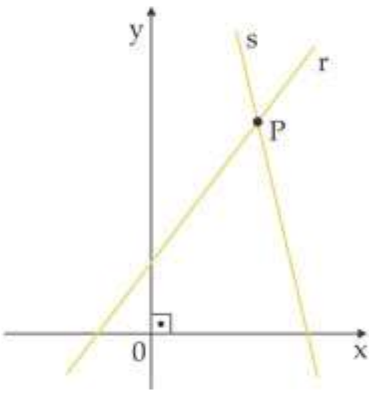
$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{e}$$

$$-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Reunindo as duas condições, temos:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

7.3. Retas Concorrentes



Devemos ter: $\mathbf{m_r \neq m_s}$

Assim, $-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$$

Observações

1º) Se alguma das retas for paralela a algum dos eixos coordenados, o problema tornar-se-á imediato.

2º) Se as retas forem concorrentes num ponto P, para obter esse ponto P basta resolver o sistema formado pelas equações de r e s.

Exemplo

Qual o ponto de intersecção das retas

(r) $2x + y - 5 = 0$ e

(s) $4x - y - 1 = 0$

$$(+)\begin{cases} 2x + \cancel{y} - 5 = 0 \\ 4x - \cancel{y} - 1 = 0 \end{cases}$$
$$6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Substituindo na equação de r, temos:

$2 \cdot 1 + y - 5 = 0 \Rightarrow y = 3$

Assim, as retas r e s se interceptam no ponto (1, 3).

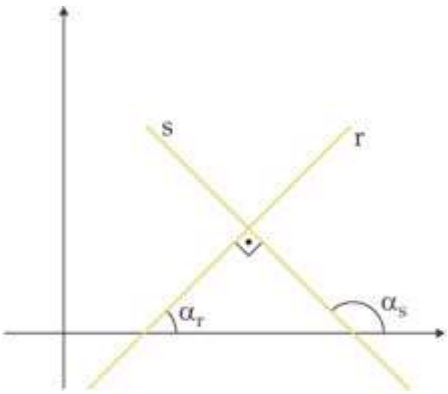
Dentre as retas concorrentes, as perpendiculares são as que mais são solicitadas nas avaliações e nos vestibulares, portanto vamos recordar a condição de perpendicularismo.

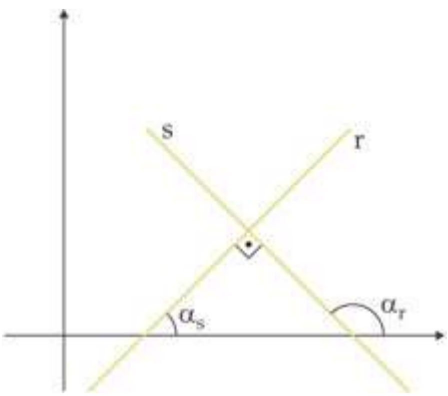
8. Condição de Perpendicularismo de Retas: Demonstração

Duas retas r e s não paralelas ao eixo y são per-pendiculares entre si quando tiverem os coeficientes angulares com produto –1.

Demonstração

1ª parte: $r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$





$r \perp s \Rightarrow \alpha_r - \alpha_s = 90°$ **ou**

$\alpha_s - \alpha_r = 90° \Rightarrow tg\,\alpha_s = -\dfrac{1}{tg\,\alpha_r}$

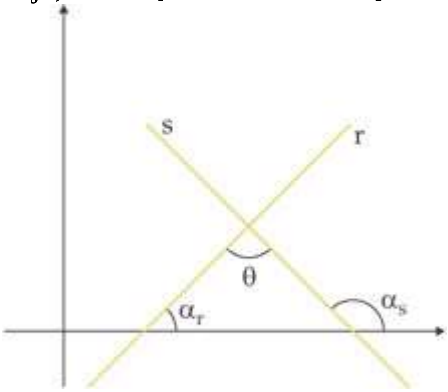
Assim, $r \perp s \Rightarrow m_s = -\dfrac{1}{m_r}$

ou seja: $\boxed{r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1}$

2ª parte: $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s$

a) $m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_r = -\dfrac{1}{m_s}$

Como $m_r \neq m_s$, as retas r e s são concorrentes. Sendo θ a medida do ângulo formado por r e s e considerando $m_r > 0$ e $m_s < 0$, ou seja, $0° < \alpha_r < 90°$ e $90° < \alpha_s < 180°$



$\alpha_s = \alpha_r + \theta$, ou seja:

$\boxed{\alpha_s - \alpha_r = \theta}$ (I)

b) $m_r = -\dfrac{1}{m_s} \Rightarrow tg\,\alpha_r = -\dfrac{1}{tg\,\alpha_s}$

Como $0° < \alpha_r < 90°$ e $90° < \alpha_s < 180°$,

$\boxed{\alpha_s - \alpha_r = 90°}$ (II)

Comparando (I) e (II), temos que $\theta = 90°$.

Assim, $\boxed{m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow r \perp s}$

Logo, a partir das demonstrações, concluímos:

$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1}$

Importante: Se duas retas são perpendiculares, e nenhuma delas é paralela ao eixo y, o coeficiente angular de uma delas é o **oposto do inverso** do coeficiente angular da outra.

Exercícios Resolvidos

01. Dar a posição relativa das retas r e s em cada item abaixo:

a) (r) $4x + 2y - 7 = 0$ e
(s) $2x + y + 1 = 0$

b) (r) $3x - y + 2 = 0$ e
(s) $-6x + 2y - 4 = 0$

c) (r) $3x - 2y + 1 = 0$ e
(s) $x - 2y + 3 = 0$

d) (r) $x - 2 = 0$ e
(s) $3x + 2y + 1 = 0$

Resolução

a) $\frac{4}{2} = \frac{2}{1} \neq \frac{-7}{1}$ *, então r e s são paralelas distintas.*

b) $\frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4}$ *, então r e s são paralelas coinci-dentes.*

c) $\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{-2}$*, então r e s são concorrentes.*

d) r é paralela ao eixo y e s não, então r e s são concorrentes.

Resposta

a) Paralelas distintas

b) Paralelas coincidentes

c) Concorrentes

d) Concorrentes

02. Discutir, em função de k, a posição relativa das retas:

(r) $kx - 2y + 3k = 0$

(s) $3x + y + k + 2 = 0$

Resolução

(r) $-2y = -kx - 3k$

$$y = \frac{kx}{2} + \frac{3k}{2} \rightarrow m_r = \frac{k}{2}$$

(s) $y = -3x - k - 2 \rightarrow m_s = -3$

$$\frac{k}{2} = -3 \rightarrow k = -6 \begin{cases} (r)\ y = -3x - 9 \\ (s)\ y = -3x + 4 \end{cases}$$

Resposta

Se $k \neq -6$*, temos (r) e (s) concorrentes.*

Se $k = -6$*, temos* $m_r = m_s$ *e* $q_r \neq q_s$*, logo, r e s são paralelas distintas.*

03. Dada a reta r de equação $4x + 2y + 5 = 0$ e o ponto $P = (2, -1)$, determine:

a) o coeficiente angular de r;

b) a equação da reta s que é perpendicular a r e passa pelo ponto P.

Resolução

a) $4x + 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - \frac{5}{2}$*. Logo, o coeficiente angular de r é* $m_r = -2$.

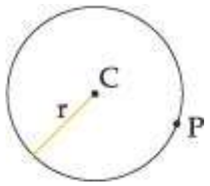
b) Temos que r e s são perpendiculares. Assim, o coeficiente angular de s é $\frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$*. Como a reta s passa pelo ponto P (2; 1), uma equação dessa reta é:*

$y - (-1) = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) \Leftrightarrow x - 2y - 4 = 0$

Atividade 3: **Equações da Circunferência**
Pré-requisitos: **função quadrática, produtos notáveis, potência**
Tempo de duração: **04 aulas com 50 minutos cada**
Recursos utilizados: **Quadro branco e pincel**.
Metodologia:

Equações da Circunferência

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixo (C) é uma constante positiva r.

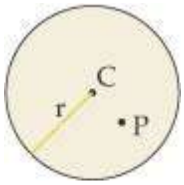


$P \in \text{circunf.} \Rightarrow PC = r$

C: centro da circunferência

r: raio da circunferência

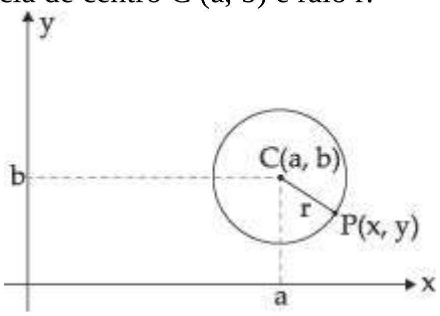
Círculo é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a um ponto fixo (C) é menor ou igual a uma constante positiva r.



$P \in \text{círculo} \Rightarrow PC \leq r$

1. Equação Reduzida

Consideremos uma circunferência de centro C (a, b) e raio r.



Para obtermos a equação da circunferência, tomamos um ponto P(x, y) genérico, pertencente à circunferência, e impomos a condição:

$$\boxed{d_{PC} = \text{raio}}$$

Assim: $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2}$$

A equação acima destacada é a equação reduzida da circunferência.

Observações

1ª) Consideremos a equação:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$

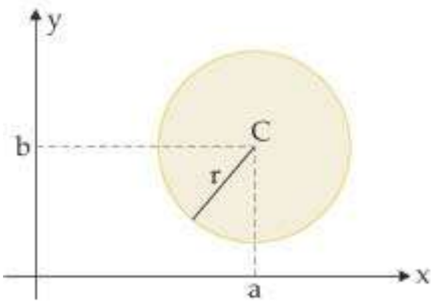
Então temos:

a) Se $k > 0$, a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa uma circunferência de centro (a, b) e raio $\sqrt{k}$.

b) Se $k = 0$, a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa o ponto P(a, b), pois $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0 \rightarrow x = a$ e $y = b$

c) Se $k < 0$, a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa um conjunto vazio, pois a soma dos quadrados de dois números reais nunca pode resultar em um número negativo.

2º) O gráfico da relação $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2$ é um círculo de centro C (a, b) e raio r, pois é uma relação que é satisfeita pelos pontos P tais que $d_{PC} \leq r$.



Exemplos

1º) Dar a equação reduzida da circunferência de centro C e raio r:

a) C (1, 3) e $r = \sqrt{3}$

b) C (2, –3) e r = 2

c) C (0, 2) e r = 1

d) C (–1, 0) e $r = \frac{1}{2}$

Resolução

a) $(x-1)^2+(y-3)^2=(\sqrt{3})^2 \rightarrow$

$\rightarrow (x-1)^2+(y-3)^2=3$

b) $(x-2)^2+(y-(-3))^2=2^2 \rightarrow$

$\rightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=4$

c) $(x-0)^2+(y-2)^2=1^2 \rightarrow x^2+(y-2)^2=1$

d) $(x-(-1))^2+(y-0)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow$

$\rightarrow (x+1)^2+y^2=\frac{1}{4}$

2º) Obter o centro C e o raio r das circunferências com equações:

a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

b) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

c) $x^2 + (y - 3)^2 = 2$

d) $x^2 + y^2 = 7$

Resolução

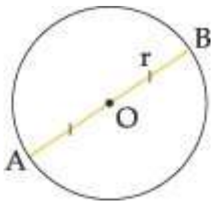
a) C (2, –1) e r = 2

b) C (–1, –1) e r = 1

c) C (0, 3)2 e r = $\sqrt{2}$

d) C (0, 0) e r = $\sqrt{7}$

3º) Achar a equação da circunferência que tem diâmetro com extremos A (–1, –3) e B (5, 7).
Resolução



O é o ponto médio de $\overline{AB}$

$$x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$$
$$y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2$$

Assim: O = (2, 2)

$$r = d_{OA} = \sqrt{(2+1)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{34}$$

Então a equação da circunferência é:

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 34}$$

2. Equação Geral

Consideremos a equação reduzida de uma circunferência de centro C(a, b) e raio = r:

$(x – a)^2 + (y – b)^2 = r^2$.

Desenvolvendo os quadrados e isolando os termos da equação no primeiro membro, temos:

$x^2 – 2ax + a^2 + y^2 – 2by + b^2 = r^2$

$x^2 + y^2 – 2ax – 2by + a^2 + b^2 – r^2 = 0$

Fazendo $– 2a = d$, $– 2b = e$ e $a^2 + b^2 – r^2 = f$,
encontramos:

$$\boxed{x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0}$$

que denominamos equação geral da circunferência.

Notemos que:

$$-2a = d \rightarrow 2a = -d \rightarrow a = \frac{-d}{2}$$

$$-2b = e \rightarrow 2b = -e \rightarrow b = \frac{-e}{2}$$

$$a^2 + b^2 - r^2 = f \rightarrow r^2 = a^2 + b^2 - f$$

$$\therefore r = \sqrt{a^2 + b^2 - f}$$

Então, as coordenadas (a, b) do centro e o raio r da circunferência são obtidos com as fórmulas:

$$\boxed{a = \frac{-d}{2}, b = \frac{-e}{2} \text{ e } r = \sqrt{a^2 + b^2 - f}}$$

Exemplos

1º) Obter uma equação geral da circunferência de centro C(2, –3) e raio = $\sqrt{3}$.

Resolução

A equação reduzida é:

$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = (\sqrt{3})^2$

Então:
$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 3$

ou seja:

$$\boxed{x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0}$$

que é uma equação na forma geral.

2º) Obter o centro e o raio da circunferência de equação geral:

$x^2 + y^2 - 8x + 6y - 2 = 0$

Resolução
Sendo C(a, b) o centro e r a medida do raio, temos:

$$a = \frac{-d}{2} = \frac{8}{2} = 4$$
$$b = \frac{-e}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$
$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - f} = \sqrt{4^2 + (-3)^2 - (-2)} =$$
$$= \sqrt{16 + 9 + 2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Assim, o centro é C = (4, – 3) e o raio é r = $3\sqrt{3}$

Observações
1ª) Se $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ é a equação de uma circunferência, então $kx^2 + ky^2 + kdx + kdy + kf = 0$, $k \neq 0$, é uma outra equação da mesma circunferência. Para determinarmos o centro e o raio partindo dessa
última equação, devemos primeiramente dividi-la por k, para depois aplicarmos as fórmulas.

Exemplo

Obter o centro e o raio da circunferência com equação:

$2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y - 3 = 0$

Resolução

Primeiramente, devemos dividir a equação por 2.

Assim:

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - \frac{3}{2} = 0$

Então, centro C = (a, b) e raio r é:

$$a = \frac{-d}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$b = \frac{-e}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - f} = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 - \left(\frac{-3}{2}\right)} =$$
$$= \sqrt{4 + 9 + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{29}{2}}$$

Então: $C = (2, -3)$ e $r = \sqrt{\frac{29}{2}}$

2ª) Dada a equação $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, em que **d**, **e** e **f** são números reais conhecidos, a equação na forma reduzida é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - f$, onde $a = \frac{-d}{2}, b = \frac{-e}{2}$

Então concluímos:

• Se $a^2 + b^2 - f > 0$, a equação representa uma circunferência de centro (a, b) e raio r.

• Se $a^2 + b^2 - f = 0$, a equação representa um único ponto (apenas (a, b) satisfaz a equação).

• Se $a^2 + b^2 - f < 0$, a equação representa um conjunto vazio.

Exemplo

Dada a equação $x^2 + y^2 + 2x + 8y + k = 0$, obter k para que ela represente:

a) uma circunferência;

b) um único ponto;

c) um conjunto vazio.

Resolução

$$a = \frac{-d}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$b = \frac{-e}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$a^2 + b^2 - f = (-1)^2 + (-4)^2 - k = 17 - k$$

Assim:

a) $17 - k > 0 \Rightarrow -k > -17 \Rightarrow k < 17$

b) $17 - k = 0 \Rightarrow \quad k = 17$

c) $17 - k < 0 \Rightarrow -k < -17 \Rightarrow k > 17$

3ª) Toda circunferência do plano cartesiano apre-senta equação na forma geral $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$, então a equação $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ (equação geral do 2º grau) para poder representar uma circunferência deve ter:

$$\boxed{A = B \neq 0 \text{ e } C = 0}$$

No entanto, se a equação:

$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ tiver $A = B \neq 0$ e $C = 0$, isso não significa que ela representa uma cir-cunferência, pois poderá representar um único ponto ou mesmo um conjunto vazio.

Exemplo

Qual das equações abaixo representa uma circunfe-rência?

a) $2x^2 + y^2 - 3x + 4y - 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 6y - 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$

d) $x^2 - y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$

e) nda.

Resolução

As equações das **alternativas a** e **d** não representam uma circunferência, pois os coeficientes de x^2 e y^2 são diferentes ($A \neq B$).

A equação da **alternativa b** também não representa uma circunferência, pois o coeficiente de xy não é nulo ($C \neq 0$).

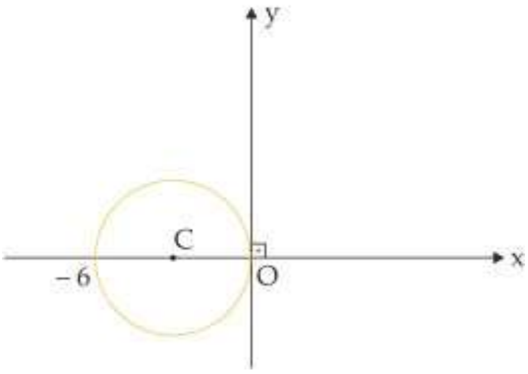
A equação da **alternativa c**, embora pareça representar uma circunferência, não representa, pois, se representasse, o centro da mesma seria C = (1, 1) e $a^2 + b^2 - f = 1^2 + 1^2 - 5 = -3 < 0$.

Assim, a resposta é **alternativa e**.

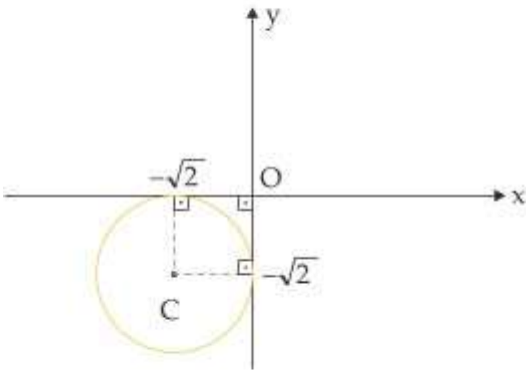
Exercícios Resolvidos

01. Achar a equação das circunferências:

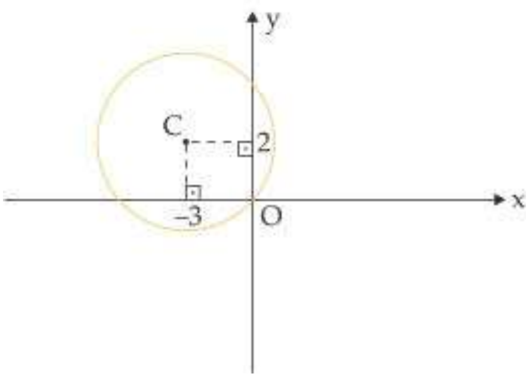
a)



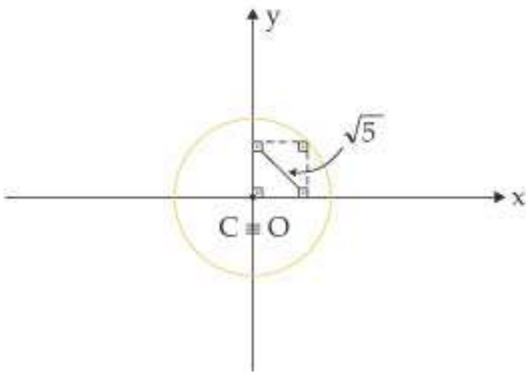
b)



c)



d)



Resolução

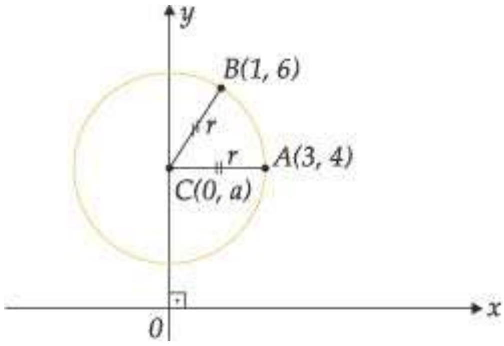
a) *Centro* = C (–3, 0) *e raio* = 3
Assim: $(x + 3)^2 + y^2 = 9$

b) *Centro* = C $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2};)$ *e raio* = $\sqrt{2}$
Assim: $(x + \sqrt{2})^2 + (y + \sqrt{2})^2 = 2$

c) *Centro* = C (–3, 2) *e raio* = d_{OC}
Então:
$$raio = \sqrt{(0+3)^2+(0-2)^2} = \sqrt{13}$$
Assim: $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 13$

d) *Centro* = C (0, 0) *e raio* = $\sqrt{5}$
Assim: $x^2 + y^2 = 5$

02. Achar a equação reduzida da circunferência com centro no eixo y e que passa pelos pontos A (3, 4) e B (1, 6).
Resolução



Como o centro C pertence ao eixo y, podemos escrever suas coordenadas assim: C = (0, a).

Como A(3,4) e B(1,6) são pontos da circunferência, temos:

$$\boxed{d_{AC} = d_{BC}}$$
$$\sqrt{(3-0)^2+(4-a)^2} = \sqrt{(1-0)^2+(6-a)^2}$$

Elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$9 + 16 - 8a + a^2 = 1 + 36 - 12a + a^2 \rightarrow a = 3$

O centro é o ponto C = (0, 3), e o raio r é:

$$r = d_{AC} = \sqrt{(3-0)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$$

Então, a equação reduzida da circunferência é:

$(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2$

ou seja: $x^2 + (y - 3)^2 = 10$

03. O raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ é:
a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Resolução

$A = B \neq 0$

$$a = \frac{-D}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$$

$$b = \frac{-E}{2A} = \frac{-(6)}{2} = -3$$

$r^2 = a^2 + b^2 - F \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4 + 9 + 12 = 25$

$r = 5$

Resposta: *E*

04. Sob que condições a equação: $2x^2 + my^2 + 2kxy + 2x + 2y + p = 0$ representa uma circunferência?

Resolução

Os coeficientes de x^2 e y^2 devem ser iguais, então:

$$\boxed{m = 2}$$

O termo em xy deve ter coeficiente nulo, então k = 0. Nessas condições, temos:

$2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y + p = 0$

Dividindo por 2 a equação, temos:

$x^2 + y^2 + x + y + \frac{p}{2} = 0$

Assim:

$$a = \frac{-d}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$b = \frac{-e}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$r^2 = a^2 + b^2 - f = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2 - \frac{p}{2} > 0$$

$$\frac{2-2p}{4} > 0 \rightarrow p < 1$$

Assim, a equação representa uma circunferência se $m = 2$, $k = 0$ e $p < 1$.

Avaliação

A avaliação envolve aluno e professor e deve ser realizada de maneira que ambos possam avaliar o quanto se desenvolveu cada uma das competências relacionadas aos temas estudados.
Aplicação de avaliação escrita individual (100 minutos) para investigação da capacidade de utilização de conhecimentos adquiridos para resolver problemas envolvendo:

1) Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações.
2) Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral,conhecidos o centro e o raio.

É apropriado verificar os acertos dos alunos nas questões relacionadas com o tema que constarão no SAERJINHO. Este será outro método de avaliação. Porem, nele o professor poderá verificar a aprendizagem não apenas no assunto que norteou este plano de trabalho, mas também em conteúdos estudados no bimestre anterior.

Referências Bibliográficas

ROTEIROS DE ACAO – Geometria Analítica **– Curso de Aperfeicoamento oferecido por CECIERJ referente ao 3º ano do Ensino Médio – 4º bimestre/2013 –http://projetoseeduc.cecierj.edu.br/ acessado em 10/11/2013.**

MATEMÁTICA PAIVA - 3º ANO, Paiva Manuel – Ed. Moderna – São Paulo, 2009

Matemática Contexto e Aplicações 3, Dante, Luiz Roberto; Dante, Luiz Roberto – Ed. Atica – São Paulo, 2011

Endereços eletrônicos acessados de 15/09/2013 a 15/10/2013:
http://www.brasilescola.com/matematica/geometria-analitica.htm
http://www.infoescola.com/matematica/introducao-a-geometria-analitica-bissetriz-plano-cartesiano/
http://www.descomplica.com.br/matematica/geometria-analitica/geometria-analitica-introducao
http://www.algosobre.com.br/matematica/geometria-analitica.html
http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/ganalitica/ganalitica.htm