

Formação Continuada em Matemática

Fundação CECIERJ/ CEDERJ

Matemática 9º ano – 3º bimestre/2013

Plano de Trabalho

Tarefa 2: Triângulo Retângulo, Circunferência e Círculo, Trigonometria no Triângulo Retângulo.

Cursista: Eli Carlos Cavalcante Rodrigues

Tutor: Analia Maria Ferreira Freitas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	03
TEORIA I (Teorema de Pitágoras)	04
TEORIA II (Circunferência e Círculo).....	05
TEORIA III (Trigonometria no triângulo retângulo).....	06
PARTE I (DESENVOLVIMENTO).....	12
EXERCÍCIOS	12
PARTE II (DESENVOLVIMENTO).....	14
EXERCÍCIOS	14
PARTEIII(DESENVOLVIMENTO).....	16
EXERCÍCIOS.....	16
AVALIAÇÃO.....	20
EXERCÍCIOS	20
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	21

INTRODUÇÃO

Este plano de trabalho tem como objetivo trabalhar alguns dos tópicos do currículo mínimo: Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo, circunferência e Círculo. Desta maneira, o tema será abordado de forma que o aluno tenha ferramentas eficientes para conseguir desenvolver plenamente o conteúdo dado.

Visto que os alunos demonstram muita dificuldade na parte geométrica da Matemática, estes tópicos podem minimizar estes problemas. Com isso, os tópicos trabalhados são importantes para o bom andamento da vida escolar, visto que é um conteúdo rico em informações e seus desdobramentos permitem realizar um elo entre vários conteúdos

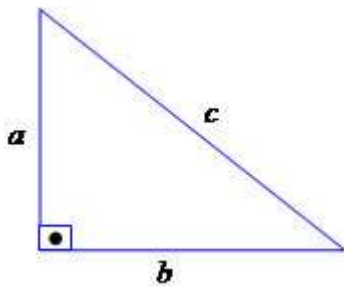
Com o objetivo de despertar o interesse no aluno, sempre que possível, trabalharemos questões contextualizadas, deste modo, o aluno entenderá a necessidade dessa aprendizagem. Na abordagem desse tema, serão necessários doze tempos de aula, distribuídos em 06 tempos de cinquenta minutos cada para a revisão e o desenvolvimento do conteúdo e 06 tempos de cinquenta minutos cada, para avaliação da aprendizagem.

Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras é considerado uma das principais descobertas da Matemática, ele descreve uma relação existente no triângulo retângulo. Vale lembrar que o triângulo retângulo pode ser identificado pela existência de um ângulo reto, isto é, medindo 90° . O triângulo retângulo é formado por dois catetos e a hipotenusa, que constitui o maior segmento do triângulo e é localizada oposta ao ângulo reto. Observe:

Catetos: a e b

Hipotenusa: c

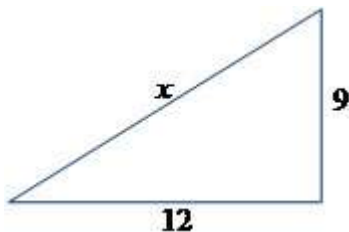


O Teorema diz que: “a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.”

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Exemplo 1

Calcule o valor do segmento desconhecido no triângulo retângulo a seguir.



$$x^2 = 9^2 + 12^2$$

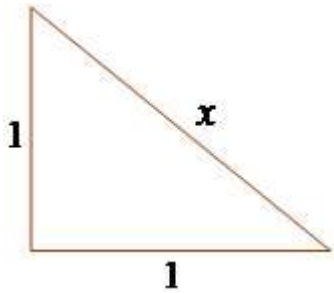
$$x^2 = 81 + 144$$

$$x^2 = 225$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{225}$$

$$x = 15$$

Foi através do Teorema de Pitágoras que os conceitos e as definições de números irracionais começaram a ser introduzidos na Matemática. O primeiro irracional a surgir foi $\sqrt{2}$, que apareceu ao ser calculada a hipotenusa de um triângulo retângulo com catetos medindo 1. Veja:



$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$x^2 = 1 + 1$$

$$x^2 = 2$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{2}$$

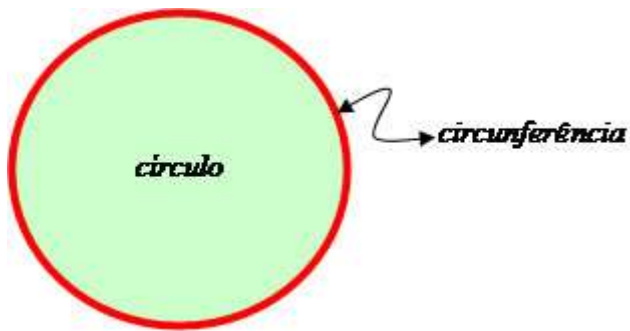
$$x = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = 1,414213562373....$$

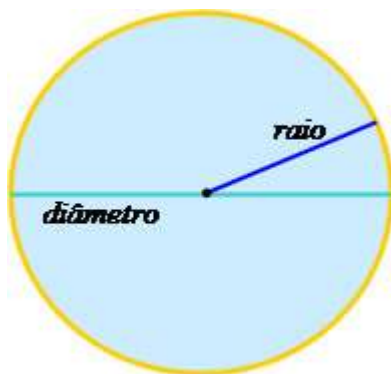
Círculo ou Circunferência?

Os estudos relacionados à Geometria são responsáveis pela análise das formas encontradas na natureza. Tais estudos formulam expressões matemáticas capazes de calcular o perímetro, a área, o volume e outras partes dos objetos. Duas figuras importantes são o círculo e a circunferência. Mas qual a diferença entre as duas formas?

De acordo com a Geometria Euclidiana, circunferência é o espaço geométrico de uma região circular que compreende todos os pontos de um plano, localizados a uma determinada distância, denominada raio, de um ponto chamado centro. Podemos definir o círculo como a região interna da circunferência. A circunferência limita o círculo, observe a ilustração a seguir:



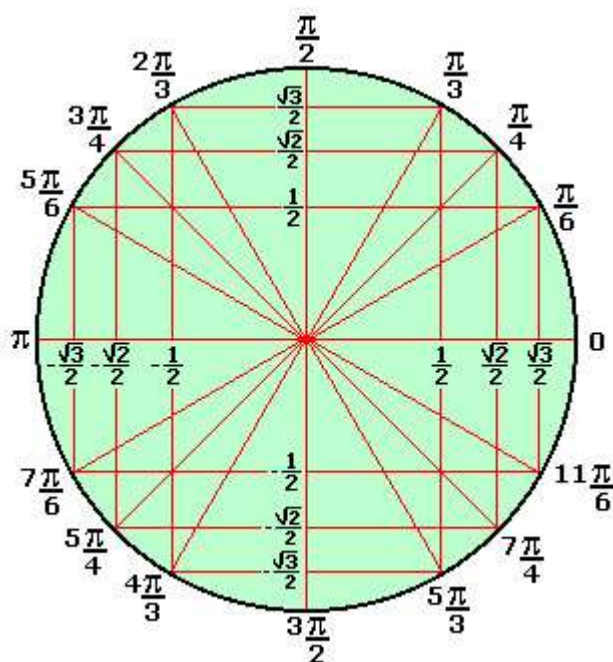
A circunferência e o círculo possuem um elemento denominado diâmetro, que constitui em um segmento que passa pelo centro da figura. Outro segmento importante pertencente às duas figuras é o raio, que corresponde à metade do diâmetro. Observe a figura:



Podemos dizer que as duas figuras possuem área, pois elas têm a propriedade de determinar uma região. A área de uma região circular é calculada de acordo com o valor de pi (aproximadamente 3,14) sendo expressada pela seguinte fórmula matemática:

$$A = \pi \times r^2$$

Trigonometria



Estudos relacionados à Trigonometria.

A Trigonometria (trigono: triângulo e metria: medidas) é o estudo da Matemática responsável pela relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo. Nos triângulos retângulos (possuem um ângulo de 90°), as relações constituem os chamados ângulos notáveis, 30° , 45° e 60° , que possuem valores constantes representados pelas relações seno, cosseno e tangente. Nos triângulos que não possuem ângulo reto, as condições são adaptadas na busca pela relação entre os ângulos e os lados.

Os estudos iniciais estão relacionados aos povos babilônicos e egípcios, sendo desenvolvidos pelos gregos e indianos. Através da prática, conseguiram criar situações de medição de distâncias inacessíveis. Hiparco de Niceia (190 a.C – 125 a.C) foi um astrônomo grego que introduziu a Trigonometria como ciência, por meio de estudos ele implantou as relações existentes entre os elementos do triângulo. O Teorema de Pitágoras possui papel importante no desenvolvimento dos estudos trigonométricos, pois é através dele que desenvolvemos fórmulas teóricas comumente usadas nos cálculos relacionados a situações práticas cotidianas.

Devemos ressaltar que a Trigonometria objetivou a elaboração dos

estudos das funções trigonométricas, relacionadas aos ângulos e aos fenômenos periódicos. A partir do século XV, a modernidade dos cálculos criou novas situações teóricas e práticas relacionadas aos estudos dos ângulos e das medidas. Com a criação do Cálculo Diferencial e Integral, pelos cientistas Isaac Newton e Leibniz, a Trigonometria ganhou moldes definitivos no cenário da Matemática, sendo constantemente empregada em outras ciências, como Medicina, Engenharia, Física (ondulatória, óptica), Química, Geografia, Astronomia, Biologia, Cartografia, Navegação entre outras.

O estudo da trigonometria é fundamentado nas relações existentes entre ângulos e medidas. No triângulo retângulo, essas relações são constantemente trabalhadas e alguns ângulos presentes nesse tipo de triângulo são usados com maior frequência, eles recebem o nome de ângulos notáveis e seus valores são de 30° , 45° e 60° .

Vamos relembrar as relações trigonométricas existentes no triângulo retângulo: seno, cosseno e tangente.

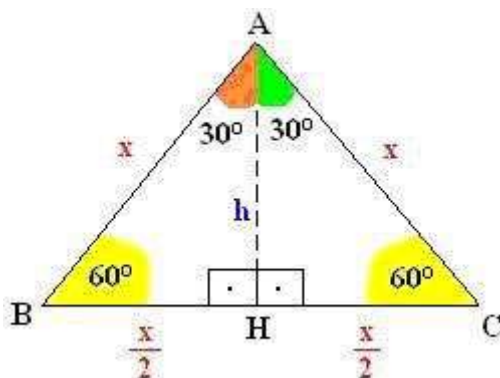
$$\text{sen} = \frac{\text{cateto_oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos} = \frac{\text{cateto_adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg} = \frac{\text{cateto_oposto}}{\text{cateto_adjacente}}$$

Para demonstrarmos as relações trigonométricas no triângulo retângulo dos ângulos 30° e 60° , é preciso obter um triângulo que tenha esses dois ângulos.

Observe o triângulo equilátero (todos os ângulos internos são iguais a 60°) ABC de lado igual a x, é preciso calcular o valor da sua altura. Traçar sua altura é o mesmo que traçar a bissetriz do ângulo A e a mediatriz da base BC.



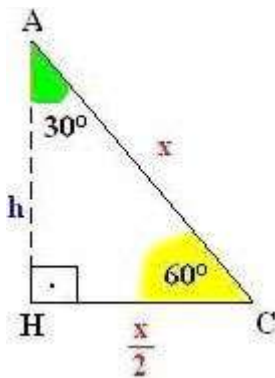
Para calcular a sua altura, basta aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo AHC:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \rightarrow x^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 \rightarrow \frac{4x^2}{4} = \frac{x^2 + 4h^2}{4}$$

$$4h^2 = 4x^2 - x^2 \rightarrow 4h^2 = 3x^2 \rightarrow h^2 = \frac{3x^2}{4} \rightarrow \sqrt{h^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}}$$

$$h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Com o valor da altura em função de x e utilizando o triângulo retângulo AHC, podemos determinar as relações trigonométricas dos ângulos de 30° e de 60° no triângulo AHC.



$$\text{sen} 60^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} \rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2x}$$

$$\text{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen} 30^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{x} \rightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x}{2x}$$

$$\text{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{x}{2}}{x} \rightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x} \rightarrow \frac{x}{2x}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

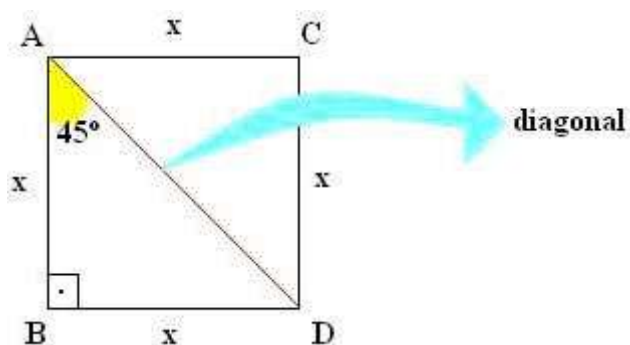
$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} \rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

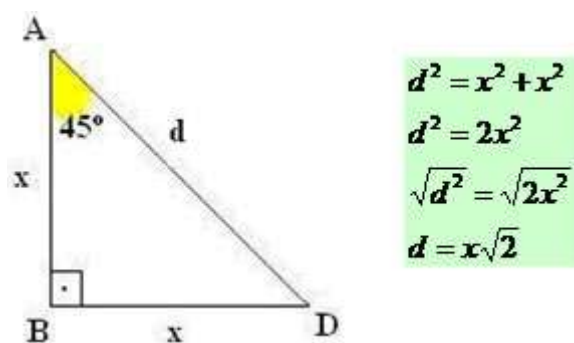
$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{2}{x\sqrt{3}} \rightarrow \frac{2x}{2x\sqrt{3}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}} \rightarrow \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{x} \rightarrow \frac{2x\sqrt{3}}{2x} \\ \operatorname{tg} 60^\circ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Como o triângulo equilátero não possui ângulo de 45° , precisamos traçar a diagonal do quadrado formando dois triângulos retângulos, a diagonal é uma bissetriz, ou seja, divide o ângulo de 90° em dois de 45° . Veja como:

Dado o quadrado ABCD de lado x e diagonal d .



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABD, iremos descobrir um valor para a diagonal (d) em função de x .



Assim, com o valor da diagonal é possível calcular o valor das relações trigonométricas do triângulo retângulo ABD com o ângulo de 45° .

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} \rightarrow x \cdot \frac{1}{x\sqrt{2}} \rightarrow \frac{x}{x\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2x} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{x}{x\sqrt{2}} \rightarrow x \cdot \frac{1}{x\sqrt{2}} \rightarrow \frac{x}{x\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2x} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Com base em algumas deduções geométricas e cálculos matemáticos, conseguimos calcular as relações trigonométricas seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60° do triângulo retângulo. A partir dos cálculos efetuados construímos a seguinte tabela de relações trigonométricas:

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

PARTE I

DESENVOLVIMENTO

HABILIDADE RELACIONADA: Saber localizar catetos e hipotenusa em um triângulo retângulo.

TEMPO DE DURAÇÃO: 50 minutos.

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Lousa.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

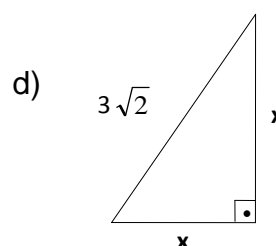
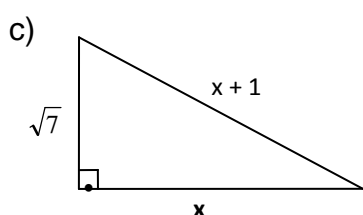
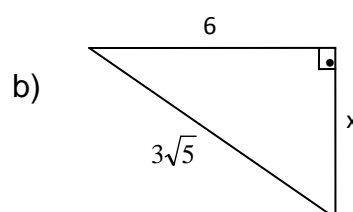
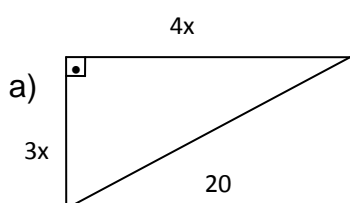
OBJETIVOS: Fazer com que os alunos relembrem os conceitos básicos envolvendo a hipotenusa e catetos. Servindo assim, como ponto de partida para efetuar os cálculos que futuramente serão aplicados no estudo da trigonometria.

METODOLOGIA ADOTADA: Aula expositiva

EXERCÍCIOS

Questão 01

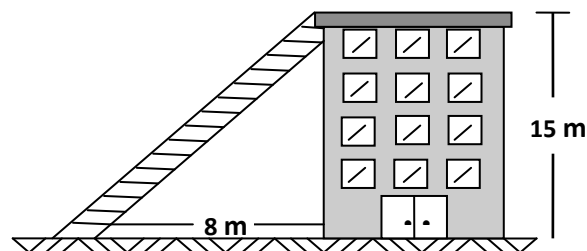
Utilizando o Teorema de Pitágoras, determine o valor de x nos triângulos retângulos:



Questão 02

A figura mostra um edifício que tem 15 m de altura, com uma escada colocada a 8 m de sua base ligada ao topo do edifício. O comprimento dessa escada é de:

- a) 12 m.
- b) 30 m.
- c) 15 m.
- d) 17 m.
- e) 20 m.



Questão 03

Uma escada de 12 metros de comprimento está apoiada sob um muro. A base da escada está distante do muro cerca de 8 metros. Determine a altura do muro.

Questão 04

Um avião percorreu a distância de 5 000 metros na posição inclinada, e em relação ao solo, percorreu 3 000 metros. Determine a altura do avião.

Questão 05

Calcule a metragem de arame utilizado para cercar um terreno triangular com as medidas perpendiculares de 60 e 80 metros, considerando que a cerca de arame terá 4 fios.

PARTE II

DESENVOLVIMENTO

HABILIDADE RELACIONADA: Saber determinar o comprimento da circunferência. Calcular a área do círculo.

TEMPO DE DURAÇÃO: 50 minutos.

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Lousa.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

OBJETIVOS: Fazer com que os alunos relembrem os conceitos básicos circunferência e círculo. Servindo assim, como conteúdo de apoio para introdução do conceito de ciclo trigonométrico.

METODOLOGIA ADOTADA: Aula expositiva.

Descritores associados:

H09 – Reconhecer o círculo ou a circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

EXERCÍCIOS

Questão 01

Calcule o valor aproximado da área de uma praça circular com 8 metros de raio. Utilize $\pi=3,14$.

Questão 02

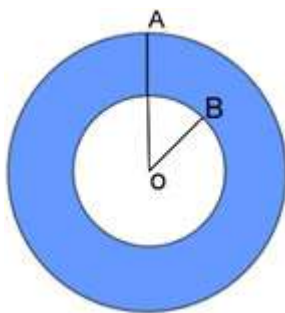
Sabendo que o diâmetro de uma bola de futebol oficial é aproximadamente 22 cm, calcule o comprimento aproximado da circunferência dessas bolas. Utilize $\pi=3,14$.

Questão 03

O comitê olímpico brasileiro dispõe de uma pista circular utilizada para a prática de treinamentos e competições de ciclismo e patinação. Sabendo que essa pista tem 250 metros de comprimento, calcule o raio da circunferência da pista. Utilize $\pi=3,14$.

Questão04

Na figura abaixo, sabendo que o segmento mede 9 cm e o segmento mede 4 cm, calcule a área da coroa circular apresentada em azul. Utilize $\pi=3,14$.



Questão 05

Uma pessoa dá 6 voltas de bicicleta em torno de uma pista circular de raio 20 m. Encontre a distância percorrida adotando $\pi = 3$.

PARTE III

DESENVOLVIMENTO

HABILIDADE RELACIONADA: Aplicação dos conceitos de seno, cosseno e tangente.

TEMPO DE DURAÇÃO: 100 minutos.

RECURSOS EDUCACIONAIS UTILIZADOS: Lousa.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual.

OBJETIVOS: Fazer com que os alunos utilizem as teorias revisadas e o novo conteúdo ministrado.

METODOLOGIA ADOTADA: Aula expositiva

Descritores associados:

H11 – Utilizar relações métricas no triângulo retângulo para resolver problemas significativos.

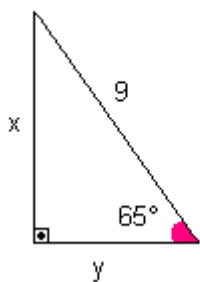
H12 – Resolver problemas envolvendo as razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente dos ângulos de 30° , 45° e 60°).

H52 – Efetuar cálculos que envolvam operações com números reais (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação)

EXECÍCIOS

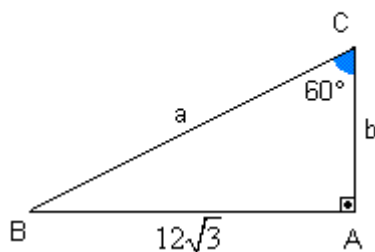
Questão 01

No triângulo retângulo da figura abaixo, determine as medidas de x e y indicadas (Use: $\sin 65^\circ = 0,91$; $\cos 65^\circ = 0,42$; $\tan 65^\circ = 2,14$)



Questão 02

Considerando o triângulo retângulo ABC da figura, determine as medidas a e b indicadas. ($\text{Sen } 60^\circ = 0,866$)

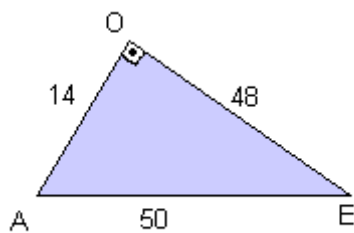


Questão 03

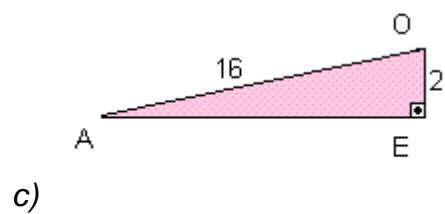
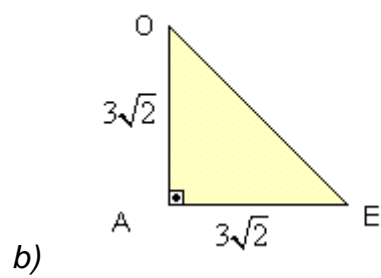
Sabe-se que, em um triângulo retângulo isósceles, cada lado congruente mede 30 cm. Determine a medida da hipotenusa desse triângulo.

Questão 04

Nos triângulos das figuras abaixo, calcule $\text{tg } \hat{A}$, $\text{tg } \hat{E}$, $\text{tg } \hat{O}$:

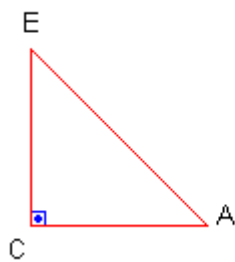


a)



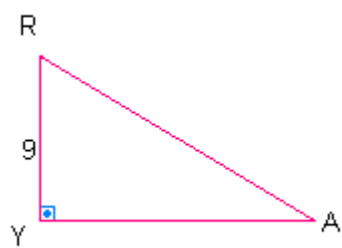
Questão 05

Sabendo que o triângulo retângulo da figura abaixo é isósceles, quais são os valores de $\text{tg } \hat{A}$ e $\text{tg } \hat{E}$?



Questão 06

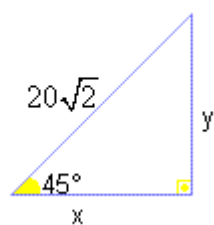
Encontre a medida RA sabendo que $\text{tg } \hat{A} = 3$.



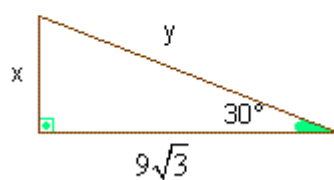
Questão 07

Encontre **x** e **y**:

a)



b)



AVALIAÇÃO

OBJETIVO: Verificar o nível de aprendizagem do aluno referente aos conteúdos trabalhados.

TEMPO DE DURAÇÃO: 50 minutos.

ORGANIZAÇÃO DA TURMA: Individual

Questão 01

Do topo de uma torre, três cabos de aço estão ligados à superfície por meio de ganchos, dando sustentabilidade à torre. Sabendo que a medida de cada cabo é de 30 metros e que a distância dos ganchos até à base da torre é de 15 metros, determine a medida de sua altura.

Questão 02

As rodas de um automóvel têm 70 cm de diâmetro. Determine o número de voltas efetuadas pelas rodas quando o automóvel percorre 9,891 km.

Questão 03

Um avião levanta voo sob um ângulo constante de 20° . Após percorrer 2 000 metros em linha reta, qual será a altura atingida pelo avião, aproximadamente? (Utilize: $\sin 20^\circ = 0,342$; $\cos 20^\circ = 0,94$ e $\tan 20^\circ = 0,364$)

Questão 04

Um avião decola, percorrendo uma trajetória retilínea, formando com o solo, um ângulo de 30° (suponha que a região sobrevoada pelo avião seja plana). Depois de percorrer 1 000 metros, qual a altura atingida pelo avião?

Referências bibliográficas:

<http://www.brasilecola.com/matematica/teorema-pitagoras.htm>

<http://www.brasilecola.com/matematica/circulo-ou-circunferencia.htm>

<http://exercicios.brasilecola.com/matematica/exercicios-sobre-comprimento-area-circunferencia.htm>

<http://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php>

<http://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php>

<http://www.brasilecola.com/matematica/trigonometria.htm>

<http://www.brasilecola.com/matematica/angulos-notaveis.htm>