PLANO DE TRABALHO SOBRE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Camila Regina dos Santos Silva
camreg1904@hotmail.com

1. Introdução:

O Currículo Mínimo inicia o conteúdo do terceiro bimestre do nono ano do Ensino Fundamental com o conteúdo Funções e no mesmo bimestre inicia o conteúdo de Razões Trigonométricas no triângulo retângulo e Circunferência e círculo. A abordagem do conteúdo Funções no Ensino Fundamental é feita voltada para a resolução de problemas. Desenvolver o Tratamento da Informação não é algo simples, visto que os alunos são habituados à memorização e repetição metódica dos cálculos algébricos. Para elaborar esse Plano de Trabalho busquei livros e recursos que usassem a linguagem o mais simples possível e de maneira que possam ser adaptadas de acordo com o aprendizado da turma durante o bimestre, algumas questões do SAERJINHO e da Prova Brasil também foram utilizadas. Sabemos que o Plano de Trabalho dificilmente entra em ação em sua totalidade, pois durante o percurso algumas coisas podem ser adicionadas, retiradas ou adaptadas.

2. Estratégias adotadas no Plano de Trabalho:

O plano de trabalho está divido em aulas, cada dia com dois tempos de aula de cinquenta minutos cada aula. São lecionados quatro tempos de aula por semana e meu cronograma prevê durante os meses de agosto a outubro um total de 40 tempos de aula. Nesses tempos estão incluídas todas as ministrações de aulas e realização de avaliações internas e externas. As aulas são divididas em conceitos e resolução de exercícios de acordo com o aprendizado da turma.

Atividade 1: Desenvolvimento 1ªe 2ª aula

- **Habilidade relacionada: -** Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente, dos ângulos de 30°, 45° e 60°.
- **Pré-requisitos:** Semelhança de triângulos. Razão e proporção.
- **Tempo de Duração:** 150 minutos.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha com o texto "Um pouco de história".
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Conhecer a história da Trigonometria. Compreender as razões trigonométricas.
- **Metodologia adotada:** No início da aula os alunos realizarão a leitura do texto abaixo:

Um pouco de história

Como sabemos, a Trigonometria é um dos ramos mais importantes da Matemática, que estuda e analisa as relações entre os lados e ângulos dos triângulos, denominadas de razões trigonométricas. Ela possui uma infinidade de aplicações em diferentes áreas. Dentre elas, podemos destacar a necessidade de sua utilização na engenharia civil, naval, agronômica e na astronomia – áreas que impulsionaram, historicamente, a procura de conhecimentos sobre este assunto.

A origem das primeiras pesquisas sobre trigonometria é incerta. As primeiras evidências sobre estudos, realizados nesta área da Matemática, são atribuídas aos babilônios e aos egípcios por conta de manuscritos elaborados por esse povos entre 1900 e 1600 a.C, aproximadamente. Essas duas civilizações utilizaram empiricamente essas relações de medidas na agricultura e na construção civil como, por exemplo, na edificação das grandes pirâmides. Desenvolveram, também, estudos astronômicos, a partir de observações feitas sobre o posicionamento dos corpos celestes, os quais foram utilizados na elaboração de mapas de navegação e na fabricação de calendários para a previsão do tempo, extremamente úteis na agricultura. Na civilização egípcia, foi adotada a medida dos ângulos em graus, minutos e segundos, utilizando a base sexagesimal, herdada da cultura babilônica, a qual utilizamos até hoje.

Os estudos sobre trigonometria acentuaram-se na Grécia Antiga, conhecida por ser o berço de grandes sábios, como por exemplo, Tales de Mileto (625-546 a. C.) e Pitágoras de Samos (570-495 a. C.), seu discípulo. Tales de Mileto realizou pesquisas sobre a semelhança de triângulos, impulsionando ainda mais os estudos nesta área. Já Pitágoras, com a demonstração do conhecido teorema que leva seu nome, chegou ao que é considerada, hoje, como **a relação fundamental da Trigonometria.**

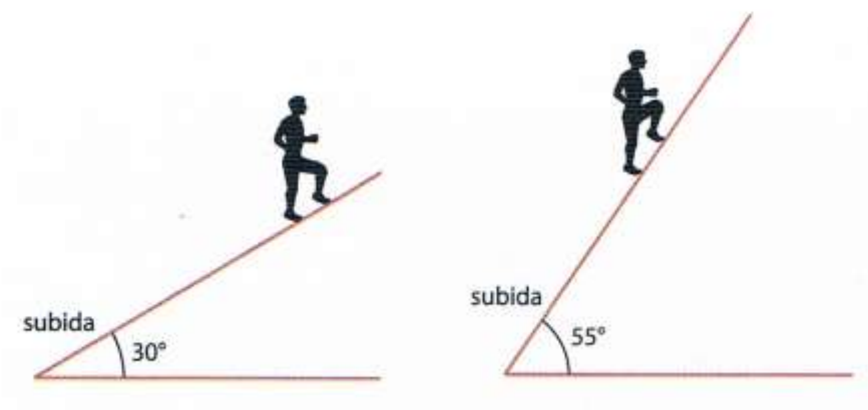
Há uma parábola sobre Tales de Mileto que narra uma de suas visitas ao Egito, na qual se ofereceu a calcular a altura da pirâmide de Quéops sem a necessidade de escalá-la. Usando seus conhecimentos de semelhança de triângulos, surpreendeu o faraó Amasis com tamanha proeza. Para executar essa missão, ordenou que se fincasse uma estaca aprumada (de altura *h*) na extremidade da sombra projetada pela grande pirâmide e, em seguida, ordenou que se medisse a sombra da estaca (de medida *l*), a sombra da pirâmide (de comprimento *d*) e a medida de sua base (de comprimento *c*). De posse desses valores e fazendo uso dos conceitos de proporção e semelhança, existentes entre as medidas do tamanho dos objetos e as suas respectivas sombras, expressou a seguinte relação:

Com esta equação, conseguiu determinar a altura da pirâmide (*H*).

$$\frac{h}{i} = \frac{H}{d + \frac{c}{2}}$$

Após a leitura do texto, abordaremos um problema:

Observe uma pessoa que sobe dois tipos de rampa:



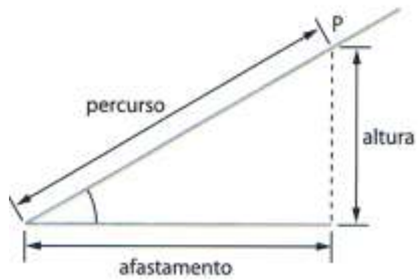
Dizemos que a segunda rampa é mais íngreme ou tem aclive maior, pois seu ângulo de subida é maior (55° > 30°).

Vejamos agora a seguinte situação-problema: Sem conhecer os ângulos de subida, como saber qual das duas rampas abaixo é a mais íngreme?

Situações como essa, que envolvem os ângulos de um triângulo podem ser resolvidos com o estudo da Trigonometria.

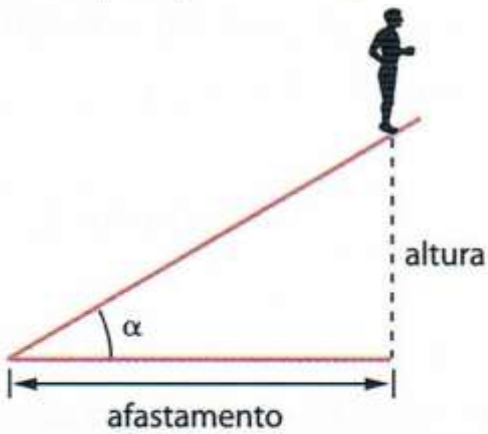
- **<u>Índice de subida:</u>**

Em uma subida, para cada ponto P alcançado na subida, temos um percurso, um afastamento e uma altura. Observe:



A ideia de tangente

Usaremos a palavra *tangente* para associar a medida do ângulo de subida e o índice na mesma subida. A tangente do ângulo de subida é igual ao índice de subida associado, e ela será indicada por $\mathbf{k_1}$.

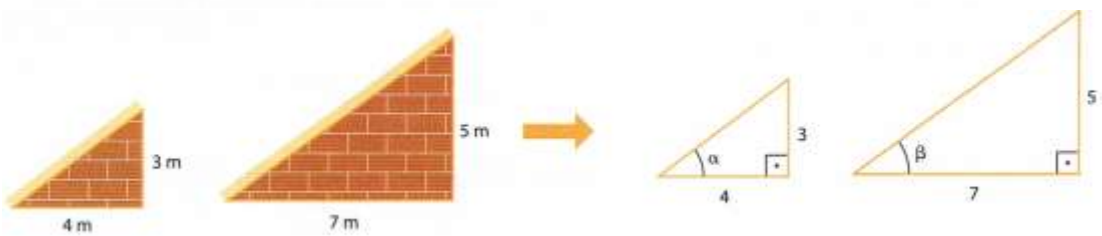


Tangente de um ângulo de subida = k_1

$\text{tg}\ \alpha = k_1$

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\text{altura}}{\text{afastamento}} = \text{índice de subida}$$

Vamos retomar as duas figuras e depois construir seus modelos matemáticos, que são dois triângulos retângulos.



Índice de subida da primeira ou $\text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4}$.

Índice de subida da segunda ou $\text{tg}\ \beta = \frac{5}{7}$.

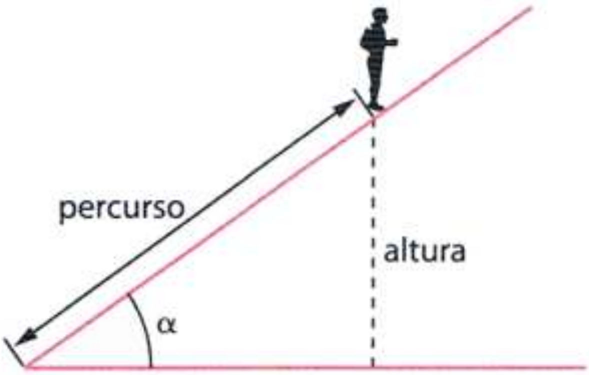
Como $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$, a primeira subida é a mais íngreme.

A ideia de seno

Em qualquer subida podemos determinar a razão entre a altura e o percurso, que será um número indicado por $\mathbf{k_2}$, ao qual chamaremos de seno de $\widehat{\alpha}$.

$$\frac{\text{altura}}{\text{percurso}} = \text{número } \mathbf{k_2}$$

O número $\mathbf{k_2}$, da mesma forma que a medida do ângulo de subida, pode nos indicar quanto a subida é íngreme.



Seno de um ângulo de subida $= k_2$

$\text{sen } \alpha = k_2$

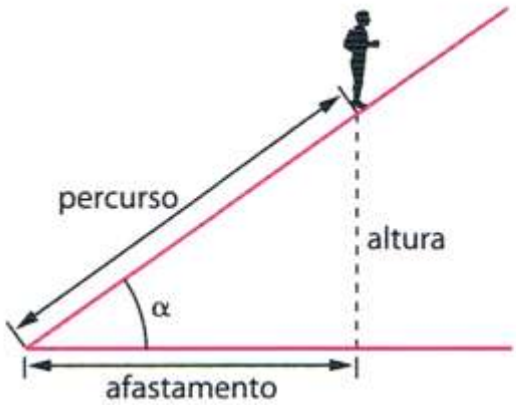
$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{altura}}{\text{percurso}}$$

A ideia de cosseno

Em qualquer subida podemos determinar a razão entre o afastamento e o percurso, número que indicaremos por $\mathbf{k_3}$, ao qual chamaremos de cosseno de $\hat{\alpha}$.

$$\frac{\text{afastamento}}{\text{percurso}} = \text{número } \mathbf{k_3}$$

O número $\mathbf{k_3}$, da mesma forma que a medida do ângulo de subida, indica-nos quanto a subida é íngreme.



Cosseno de um ângulo de subida $= k_3$

$\cos \alpha = k_3$

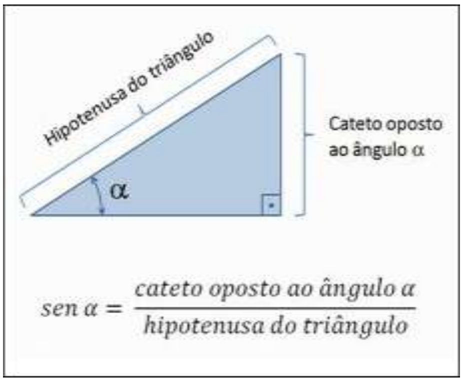
$$\cos \alpha = \frac{\text{afastamento}}{\text{percurso}}$$

Atividade 2: Desenvolvimento 3ª e 4ª aula.

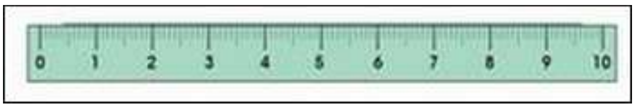
- **Habilidade relacionada: -** Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente, dos ângulos de 30°, 45° e 60°.
- **Pré-requisitos:** Manuseio dos instrumentos de desenho geométrico.
- **Tempo de Duração:** 150 minutos.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** Folha de papel A4; Régua milimetrada (25 cm); Transferidor de ângulos.
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Construir e compreender as razões trigonométricas com os instrumentos de desenho geométrico.
- **Metodologia adotada:** Os alunos deverão desenvolver passo a passo as atividades proposto abaixo:

  1ª Atividade: Construção do seno:

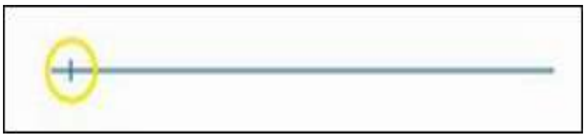
  Como sabemos:



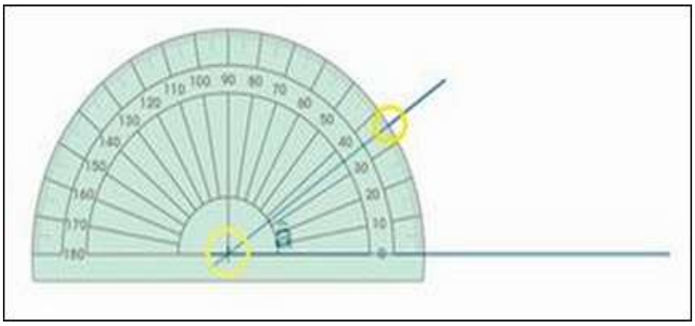
a) Desenhe uma linha horizontal (entre 7 e 12 cm, aproximadamente);



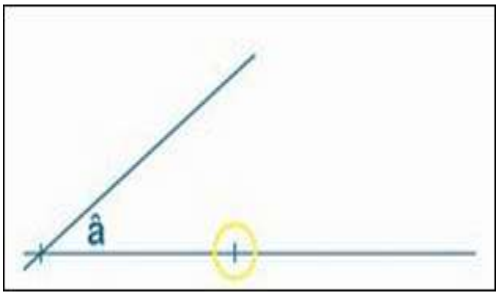
b) Marque na extremidade esquerda o vértice onde construiremos o ângulo â;



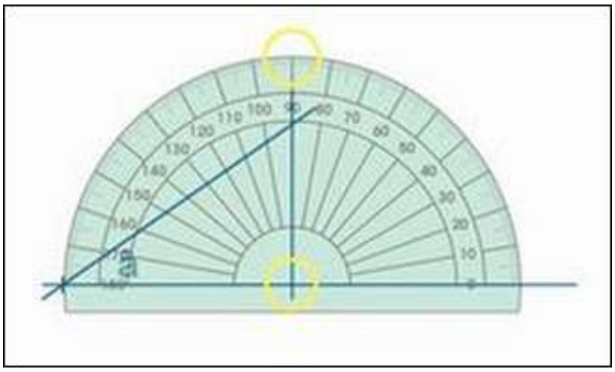
c) Com o auxílio de um transferidor de ângulos, marque 35° e trace o segmento;



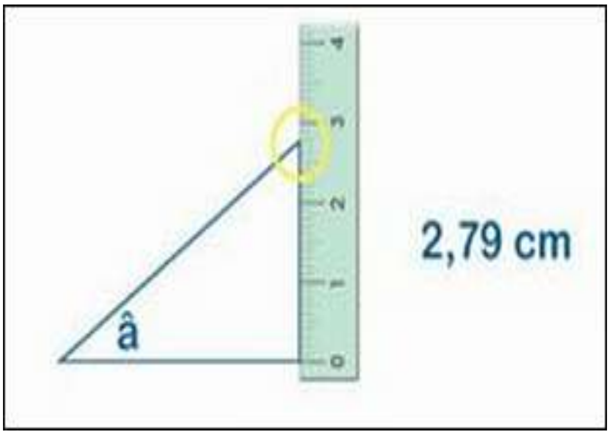
d) Marque o segundo vértice do triângulo;



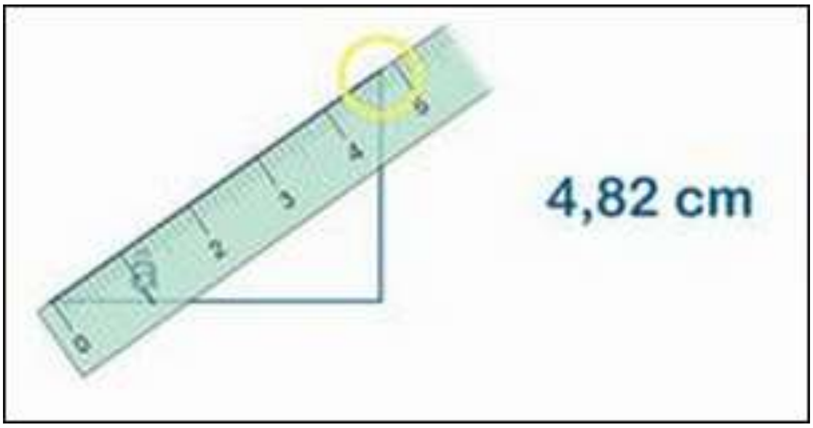
e) Novamente com a ajuda de um transferidor, marque agora 90° e trace o segmento. (Discuta com os alunos outras formas de desenhar um ângulo reto. Podemos usar os esquadros ou um compasso).



f) Com o triângulo retângulo desenhado, use uma régua para medir o cateto oposto ao ângulo â;



g) Meça também a hipotenusa do triângulo;



h) Calcule a razão entre o cateto oposto ao ângulo â e a hipotenusa do triângulo e compare o resultado obtido com o valor do seno de 35° numa tabela trigonométrica ou numa calculadora científica.

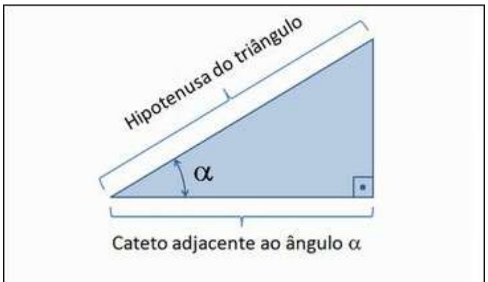
$$sen\ \hat{a} = \frac{cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \hat{a}}{hipotenusa\ do\ tri\hat{a}ngulo}$$

$$sen\ 35° = \frac{2{,}79}{4{,}82}$$

$$\boxed{sen\ 35° \cong 0{,}58}$$

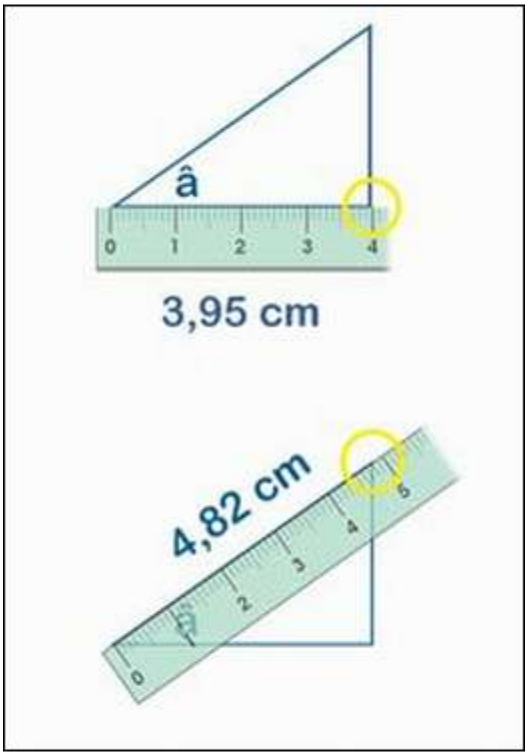
2ª Atividade: Construção do cosseno:

Como sabemos:



$$\cos \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{hipotenusa\ do\ tri\hat{a}ngulo}$$

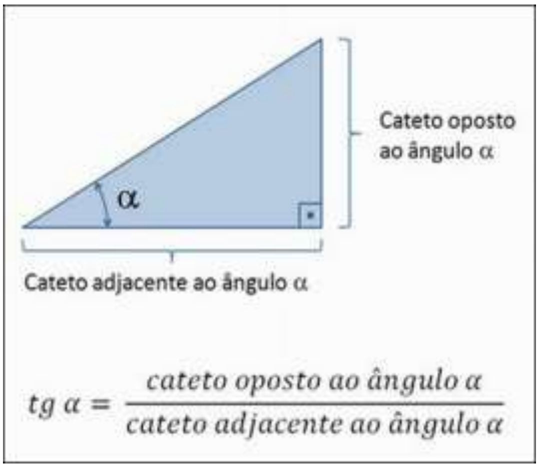
a) Usando o mesmo triângulo retângulo construído na atividade anterior, meça agora o cateto adjacente ao ângulo â e a hipotenusa do triângulo:



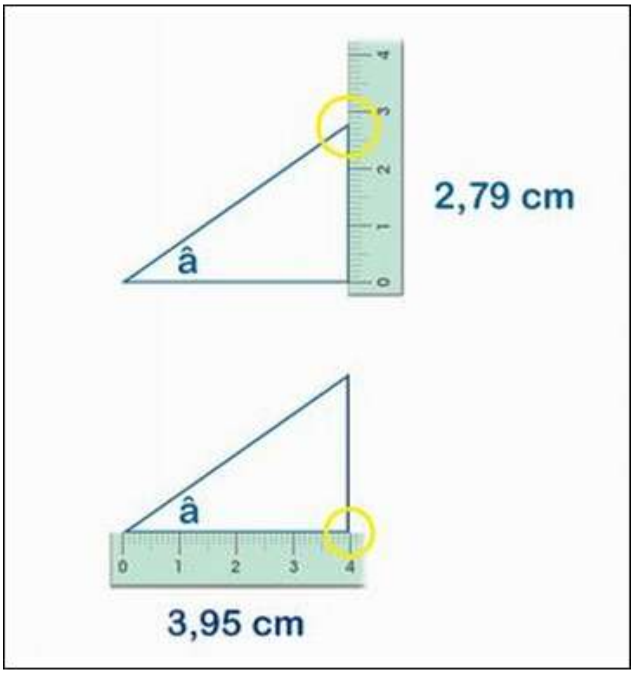
b) Faça a razão entre o cateto adjacente ao ângulo â e a hipotenusa do triângulo. O valor obtido neste caso é, aproximadamente, 0,82. (Os questionamentos feitos na atividade anterior podem ser revistos.).

3ª Atividade: Construção da tangente:

Como sabemos:



a) Usando ainda o mesmo triângulo retângulo construído na primeira atividade, meça os catetos do triângulo:



b) Faça a razão entre o cateto oposto ao ângulo â e o cateto adjacente ao ângulo â. O valor obtido neste caso é, aproximadamente, 0,7.

Atividade 3: Desenvolvimento 5ª e 6ª aula.

- **Habilidade relacionada:** Resolver problemas do cotidiano envolvendo as razões trigonométricas.
- **Pré-requisitos:** Razão e proporção. Razões trigonométricas.
- **Tempo de Duração:** 150 minutos.
- **Recursos Educacionais Utilizados:** nenhum
- **Organização da turma:** Individual.
- **Objetivos:** Resolver problemas usando as propriedades trigonométricas do triângulo retângulo.
- **Metodologia adotada:** Durante as aulas os alunos deverão resolver as seguintes atividades propostas.

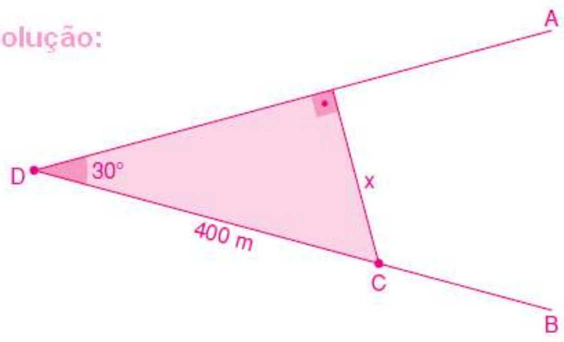
Tabela de razões trigonométricas:

(ângulos notáveis 30º, 45º e 60º)

	30º	45º	60º
Sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

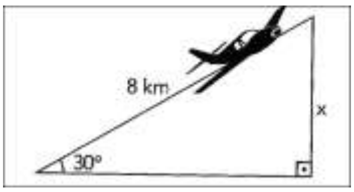
1. (UEPB) Duas avenidas retilíneas *A* e *B* se cruzam segundo um ângulo de 30º. Um posto de gasolina *C* situado na avenida *B* a 400 m do ponto de encontro das avenidas se encontra a que distância da avenida *A*?

Solução:



$$\text{sen } 30° = \frac{x}{400} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{400} \rightarrow x = 200 \text{ m}$$

2) Um avião levanta voo sob um ângulo de 30°.



Depois de percorrer 8 km, o avião se encontra a uma altura de:

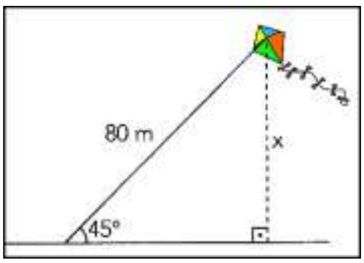
( ) $2km$

( ) $3km$

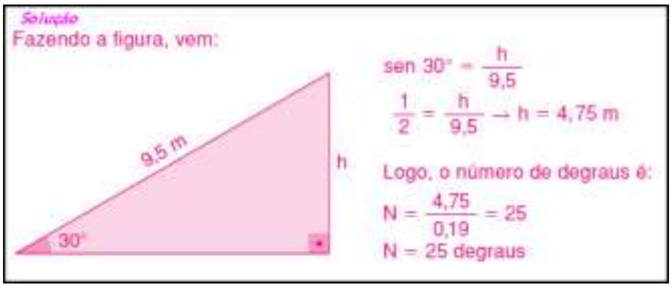
( ) $4km$

( ) $5km$

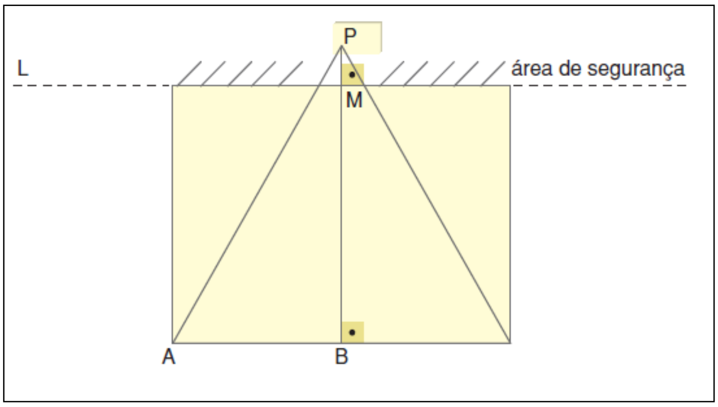
3) Uma pipa é presa a um fio esticado que forma um ângulo de 45° com o solo. O comprimento do fio é de 80 m. Determine a altura da pipa em relação ao solo.



4)(EEM-SP) Quantos degraus de 19 cm de altura são necessários para substituir uma rampa de 9,5 m de extensão com inclinação de 30?



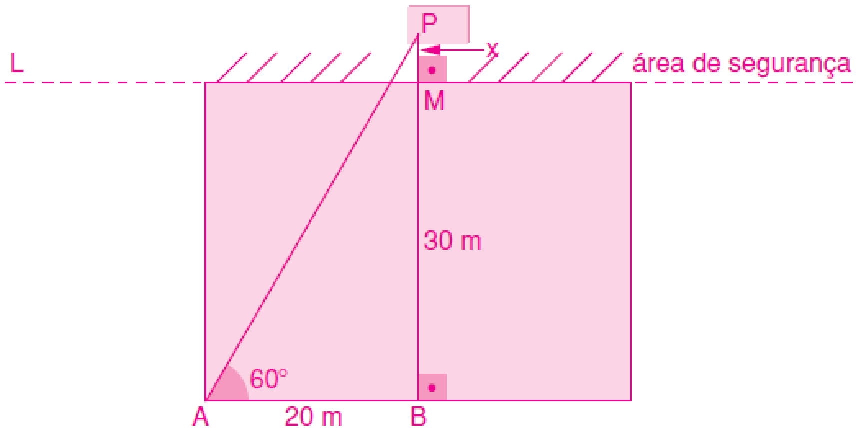
5) (UFJF-MG) Na preparação de um *show* de música popular, os técnicos escolheram o melhor ponto *P*, do palco, onde, em caso de emergência, o cantor deveria ficar. Para localizar a linha *L* onde se colocariam os seguranças do cantor, foram feitas as seguintes medidas (ver figura abaixo):



AB = 20 m, BM = 30 m e o ângulo BhP = 60°. (Use 3 = 1,7.) Na emergência, a distância aproximada dos seguranças situados em M ao ponto P será:

a) 2 m b) 10 m c) 8 m d) 6 m e) 4 m

Do enunciado, temos: *Solução*



Do triângulo ABP, temos:

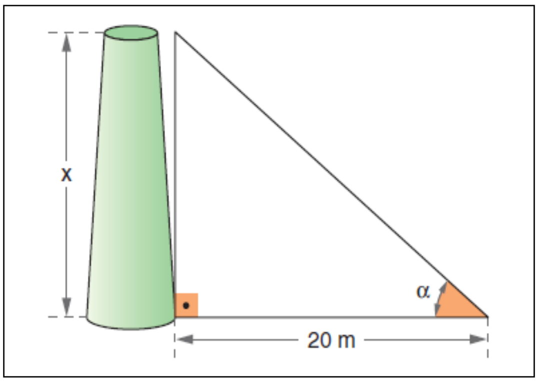
$$\text{tg } 60° = \frac{x + 30}{20}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x + 30}{20}$$

$$1{,}7 = \frac{x + 30}{20}$$

$x = 4$ m

6) (UCSal-BA) A autora alegrava-se em conseguir estimar o comprimento de objetos inacessíveis como, por exemplo, a altura *x* da torre mostrada na figura abaixo.



A partir do conhecimento de relações trigonométricas e sabendo que sen α = 0,6428 e cos α = 0,7660, ela podia encontrar que x, em metros, era aproximadamente igual a:

a) 16 b) 17 c) 18 d) 19 e) 20

Observando a figura, temos:

$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{x}{20}$ ①

Mas:

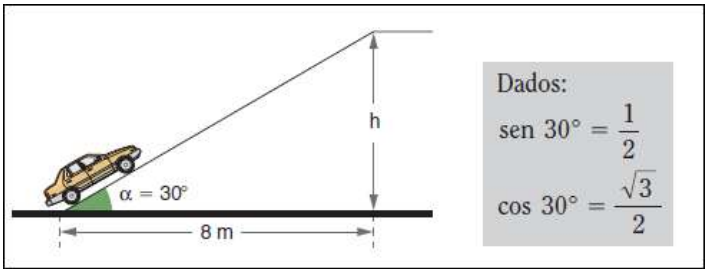
$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} \rightarrow \text{tg}\ \alpha = \dfrac{0{,}6428}{0{,}7660} \simeq 0{,}84$ ②

Substituindo ② em ①, vem:

$\dfrac{x}{20} = 0{,}84 \rightarrow x = 16{,}8\ \text{m}$

Portanto, a altura da torre era aproximadamente 17 m.

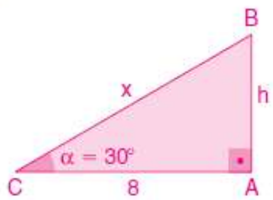
7) (Unemat-MT) A rampa de acesso a um estacionamento de automóveis faz um ângulo de 30) com o solo e, ao subi-la, um carro desloca-se horizontalmente 8 m de distância, conforme o desenho.



Sobre os dados, julgue os itens:

1. A altura da rampa, representada por *h*, no desenho, é de $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}m$

Do enunciado, temos:



1. Verdadeiro

No triângulo retângulo ABC, temos:

$\text{tg}\ 30° = \dfrac{h}{8}$

$\dfrac{\text{sen}\ 30°}{\cos\ 30°} = \dfrac{h}{8}$

$\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{h}{8}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{8}$

$h = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\ \text{m}$

2. O comprimento da rampa inclinada, por onde sobem os carros, é o dobro da altura *h*.

2. Verdadeiro

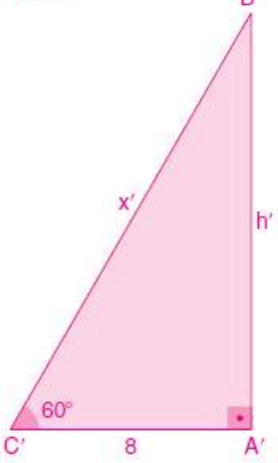
No triângulo retângulo ABC, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{h}{x} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{x}$$

$x = 2h$

3. Na mesma rampa, se o ângulo formado com o solo fosse de 60º, ou seja, o dobro de α, então a altura *h* também seria o dobro.

3. Falso



No triângulo retângulo A′B′C′, temos:

$$\text{tg } 60° = \frac{h'}{8}$$

$$\sqrt{3} = \frac{h'}{8}$$

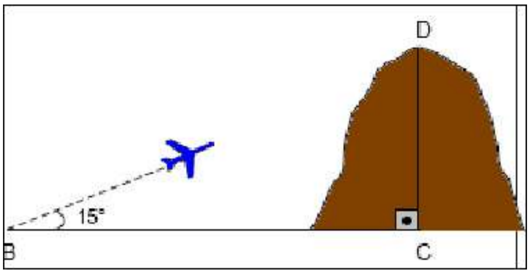
$h' = 8\sqrt{3}$ m

$$\text{sen } 60° = \frac{h'}{x'}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{x'}$$

$x' = 16$ m

8) Um avião decola de um ponto B sob inclinação constante de 15° com a horizontal. A 2 km de B se encontra a projeção vertical C do ponto mais alto D de uma serra de 600 m de altura, conforme figura.



Dados: cos 15º ≅ 0,97 sen 15º ≅ 0,26 tg 15º ≅ 0,27

É correto afirmar que

a) não haverá colisão do avião com a serra.

b) haverá colisão do avião com a serra antes de alcançar 540 m de altura.

c) haverá colisão do avião com a serra em D.

d) se o avião decolar 220 m antes de B, mantendo a mesma inclinação, não haverá colisão do avião com a serra.

- **Avaliação:**

Sobre o conteúdo do 3° bimestre o aluno passará por quatro avaliações que serão divididas da seguinte maneira:

1. Tarefa no laboratório - pontuação máxima de 2,0 pontos.
2. Tarefas de participação e exercícios para realizar em casa- pontuação máxima de 3,0 pontos.
3. Prova - pontuação máxima de 4,0 pontos.
4. SAERJINHO - pontuação máxima de 1,0 pontos.

O aluno que faltar a qualquer avaliação sem justificativa não terá direito a realizar uma segunda chamada.

- **Referências:**

CADERNO de atividades FTD Terceirão 1. São Paulo: Editora FTD, 20XX.

DANTE, LUIZ ROBERTO. **Contexto e aplicações**, Volume Único, 3. ed. São Paulo: Ática, 2010.

NERY, CHICO. **Matemática para o Ensino Médio**, Volume Único, 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2001.

PACCOLA, HERVAL; BIANCHINI, EDWALDO. **Curso de Matemática**, Volume Único, 2. Ed. São Paulo: Moderna, 1998.

PAIVA, MANOEL. **Matemática Paiva**, Volume 1: ensino médio, 1.ed. São Paulo: Moderna, 2009.