

Carlos Farina de Souza
Marcos Venicius Cougo Pinto
Paulo Carrilho Soares Filho

Física 1B





Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Física 1B

Volume 1 - Módulo 3

Carlos Farina de Souza

Marcus Venicius Cougo Pinto

Paulo Carrilho Soares Filho



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

**SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA**

**Ministério
da Educação**



Apoio:



FAPERJ

Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001

Tel.: (21) 2299-4565 Fax: (21) 2568-0725

Presidente

Masako Oya Masuda

Vice-presidente

Mirian Crapez

Coordenação do Curso de Física

Luiz Felipe Canto

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Carlos Farina de Souza

Marcus Venicius Cougo Pinto

Paulo Carrilho Soares Filho

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Ana Tereza de Andrade

Carmen Irene Correia de Oliveira

José Meyohas

Leonardo Villela

Departamento de Produção

EDITORA

Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Jane Castellani

REVISÃO TIPOGRÁFICA

Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

COORDENAÇÃO DE ILUSTRAÇÃO

Eduardo Bordoni

CAPA

Eduardo de Oliveira Bordoni

Fabio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA

Andréa Dias Fiães

Fábio Rapello Alencar

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

S729f

Souza, Carlos Farina de

Física 1B. v.1 / Carlos Farina de Souza. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2008.

228 p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-7648-047-6

1. Movimento retilíneo. 2. Movimento não-retilíneo. 3. Vetores. 4. Cinemática vetorial. I. Pinto, Marcus Venicius Cougo. II. Filho, Paulo Carrilho Soares. III. Título.

CDD: 530.1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralses

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO
DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

| | |
|---|------------|
| Aula 21 – Energia cinética e trabalho no movimento retilíneo _____ | 7 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 22 – Energia potencial e conservação da energia mecânica em movimentos retilíneos _____ | 31 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 23 – Aplicações da conservação da energia mecânica em movimentos retilíneos _____ | 51 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 24 – Energia cinética e trabalho _____ | 79 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 25 – Energia potencial e conservação da energia mecânica _____ | 115 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 26 – Aplicações da conservação da energia mecânica em movimentos não-retilíneos _____ | 143 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 27 – Medindo a energia mecânica de um sistema _____ | 167 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 28 – Momento linear de uma partícula e impulsão de uma força _____ | 175 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |
| Aula 29 – Momento angular de uma partícula e torque _____ | 195 |
| <i>Carlos Farina de Souza / Marcus Venicius Cougo Pinto / Paulo Carrilho Soares Filho</i> | |

Aula 21 – Energia Cinética e Trabalho no Movimento Retilíneo

Objetivos

- Aprender a definição de energia cinética de uma partícula em movimento retilíneo e entender o seu significado.
- Aprender o que é trabalho realizado por uma força durante um intervalo de tempo do movimento retilíneo de uma partícula.
- Demonstrar o Teorema da Energia Cinética no caso particular de movimentos retilíneos.
- Compreender o conceito de trabalho realizado por uma força num deslocamento de uma partícula cuja trajetória é retilínea.
- Aprender a definição de força conservativa no caso de movimentos retilíneos e entender seu significado.

Introdução

Vamos estudar o movimento de uma partícula de massa m na presença de corpos cujos movimentos são conhecidos. Nesse caso, como já foi discutido anteriormente, a força total \mathbf{F} é uma função da posição da partícula, da sua velocidade e do instante de tempo em que estamos considerando todas essas grandezas. Como de costume, representaremos a posição e a velocidade da partícula em estudo por \mathbf{r} e \mathbf{v} , respectivamente, e a função-força por \mathcal{F} . Desse modo, a situação considerada é descrita pela expressão:

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (21.1)$$

em que t é um instante genérico. A Segunda Lei de Newton determina a aceleração \mathbf{a} da partícula a partir dessa força e, portanto, estabelece uma relação entre sua posição, sua velocidade e sua aceleração no instante t :

$$m \mathbf{a} = \mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (21.2)$$

As definições precisas de energia cinética e força conservativa em movimentos unidimensionais serão dadas ao longo desta aula, enquanto as definições de energia potencial e energia mecânica serão fornecidas na próxima aula.

Como sempre, nosso problema primordial é determinar os movimentos que a partícula pode executar sob a ação da força \mathbf{F} . A ciência da Mecânica procura métodos que auxiliem na solução desse problema. Veremos, na próxima seção, que é possível utilizar a Segunda Lei de Newton (21.2) para obtermos uma relação importante envolvendo apenas a posição da partícula e a sua velocidade. Essa relação, chamada teorema da energia cinética, leva-nos aos conceitos de energia cinética e de trabalho realizado por uma força durante um movimento. Esse teorema dá informações úteis sobre o movimento em muitos casos de importância e, em alguns deles, pode mesmo possibilitar a solução completa do problema fundamental da Mecânica. Estamos particularmente interessados no caso em que as forças são de um tipo especial, chamadas forças conservativas. Nesse caso, somos levados ao conceito de energia potencial e ao teorema da conservação da chamada energia mecânica da partícula.

Para simplificar, consideraremos, nesta aula, apenas movimentos retilíneos. Com o eixo \mathcal{OX} ao longo do movimento, a posição, a velocidade e a aceleração da partícula são dadas, respectivamente, por suas componentes x , v_x e a_x . Nesse caso, a força total \mathbf{F} que atua sobre a partícula possui componente não-nula apenas ao longo de \mathcal{OX} , ou seja, $\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x$. Não há mais necessidade de vetores para estudar o movimento, e a equação (21.2) assume a forma mais simples

$$m a_x = F_x = \mathcal{F}_x(x, v_x, t), \quad (21.3)$$

onde denotamos por \mathcal{F}_x a função que dá a componente F_x da força em termos da posição x , da velocidade v_x e do tempo t . A Figura 21.1 ilustra uma partícula em movimento retilíneo no eixo \mathcal{OX} e sob a ação de uma força \mathbf{F} que tem componente apenas nesse eixo.

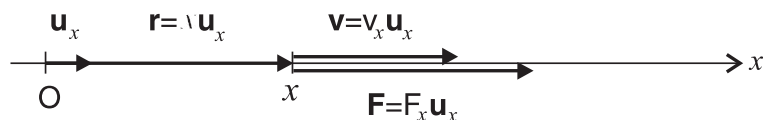


Figura 21.1: Uma partícula em movimento retilíneo no eixo \mathcal{OX} , no instante em que sua posição é $\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x$ e sua velocidade é $\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x$. Sobre a partícula age a força total $\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x$ (por motivos de clareza, os vetores \mathbf{v} e \mathbf{F} não foram desenhados sobre o eixo \mathcal{OX}).

Os conceitos e problemas tratados nesta aula e na próxima serão mais profundamente compreendidos nas Aulas 24 e 25, quando considerarmos movimentos não-retilíneos. Reciprocamente, o estudo dos movimentos espaciais considerados na Aulas 24 e 25 será facilitado pelo estudo dos movimentos retilíneos que faremos agora e na próxima aula. O assunto dessas duas aulas será ilustrado

com vários exemplos na Aula 23, antes de passarmos aos movimentos espaciais considerados nas Aulas 24 e 25.

Nesta aula, veremos os conceitos de energia cinética e de trabalho e demonstraremos o teorema da energia cinética. Na próxima aula, consideraremos os conceitos de energia potencial, de energia mecânica e demonstraremos o teorema da conservação da energia mecânica.

Teorema da energia cinética no movimento retilíneo

Podemos eliminar a aceleração da equação (21.3) simplesmente integrando no tempo ambos os membros desta equação. Contudo, a relação assim obtida não apresenta vantagens em relação à equação original (21.3), exceto nos casos particularíssimos em que a força depende apenas do tempo, como ocorreu no Exemplo 19.6, tratado na Aula 19.

Em lugar de integrar a equação (21.3) no tempo, eliminaremos a aceleração desta equação usando outro procedimento, de modo a chegarmos a uma relação muito fértil em resultados. Para isso, levaremos em conta a definição de aceleração, $a_x = dv_x/dt$, e a regra da cadeia para as derivadas. Temos, então:

$$\frac{d}{dt}(v_x^2) = 2v_x \frac{dv_x}{dt} = 2v_x a_x \implies a_x v_x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v_x^2). \quad (21.4)$$

Desse modo, multiplicando ambos os membros de (21.3) por v_x , obtemos:

$$m a_x v_x = \mathcal{F}_x(x, v_x, t) v_x \implies m \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(v_x^2) = \mathcal{F}_x(x, v_x, t) v_x. \quad (21.5)$$

Levando em conta que as constantes m e $1/2$ podem ser comutadas com a operação de derivação, podemos escrever a relação anterior na forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) = \mathcal{F}_x(x, v_x, t) v_x \quad (21.6)$$

ou, em notação mais sucinta,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) = F_x v_x. \quad (21.7)$$

Antes de prosseguirmos em nossa análise, atribuiremos nomes a duas grandezas importantes que surgiram de nossos cálculos. Uma é o semiproduto da massa da partícula pelo quadrado de sua velocidade, chamada **energia cinética da partícula** e representada por K :

$$K = \frac{1}{2} m v_x^2. \quad (21.8)$$

O nome cinética provém da transcrição latina *kinesis* para a palavra grega *κίνησις*, que significa movimento.

Com essa definição, o membro esquerdo da equação (21.7) é a derivada em relação ao tempo da energia cinética da partícula, isto é, a taxa instantânea de variação temporal da energia cinética. Vemos, também, que a energia cinética é diferente de zero se, e somente se, a velocidade da partícula não for nula, isto é, se houver movimento da partícula. Além disso, ela aumenta com o aumento da velocidade. Por esse motivo, é considerada como uma medida do movimento da partícula e é também chamada **energia de movimento**.

A outra grandeza importante é o produto da força total que age sobre a partícula pela sua velocidade. O produto de uma força que age sobre uma partícula por sua velocidade é chamado **potência fornecida por essa força à partícula**. Na equação (21.7), o lado direito é a potência fornecida à partícula pela força total. Usando essas definições, podemos expressar o conteúdo da equação (21.7) da seguinte forma:

a taxa instantânea de variação temporal da energia cinética de uma partícula é igual à potência fornecida à partícula pela força total que age sobre ela.

Voltemos à equação (21.6) para continuarmos a nossa discussão. O membro esquerdo de (21.6) é a taxa instantânea de variação temporal da energia cinética da partícula. Essa taxa de variação depende do movimento que a partícula está realizando. Consideremos um movimento possível qualquer da partícula, dado pela função-movimento f_x . Nesse caso, a cada instante t , a posição e a velocidade da partícula são dadas, respectivamente, por:

$$x = f_x(t) \quad \text{e} \quad v_x = \dot{f}_x(t). \quad (21.9)$$

Conseqüentemente, ambos os membros de (21.6) variam com o tempo, e de um modo bem especificado pelo movimento em consideração, dado por f_x .

Substituindo a expressão da velocidade da partícula em função do tempo, isto é, $v_x = \dot{f}_x(t)$, no lado esquerdo da equação (21.6), ele se torna uma função do tempo determinada pelo movimento f_x da partícula:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m [\dot{f}_x(t)]^2 \right), \quad (21.10)$$

que podemos integrar em um intervalo de tempo genérico, digamos $[t_1, t_2]$:

$$\int_{t_1(f_x)}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m [\dot{f}_x(t)]^2 \right) dt. \quad (21.11)$$

O símbolo (f_x) , escrito junto ao símbolo de integral, significa que o movimento considerado é descrito pela função-movimento f_x e, portanto, a maneira como

a velocidade da partícula depende do tempo é dada por $v_x = \dot{f}_x(t)$. A integral (21.11) tem resposta imediata, pois a integral da derivada de uma função é dada pela própria função. Temos, então,

$$\begin{aligned} \int_{t_1(f_x)}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m [\dot{f}_x(t)]^2 \right) dt \\ &= \frac{1}{2} m [\dot{f}_x(t_2)]^2 - \frac{1}{2} m [\dot{f}_x(t_1)]^2 \\ &= \frac{1}{2} m v_{x2}^2 - \frac{1}{2} m v_{x1}^2, \end{aligned} \quad (21.12)$$

onde v_{x1} é a velocidade da partícula no instante t_1 e v_{x2} , no instante t_2 :

$$v_{x1} = \dot{f}_x(t_1) \quad \text{e} \quad v_{x2} = \dot{f}_x(t_2). \quad (21.13)$$

Passemos, agora, ao membro direito da equação (21.6). Substituindo nele as expressões da posição e da velocidade da partícula em função do tempo, isto é, $x = f_x(t)$ e $v_x = \dot{f}_x(t)$, ele se torna uma função do tempo também determinada pelo movimento f_x da partícula:

$$\mathcal{F}_x(x, v_x, t) v_x = \mathcal{F}_x(f_x(t), \dot{f}_x(t), t) \dot{f}_x(t). \quad (21.14)$$

Vamos integrar essa função do tempo no intervalo $[t_1, t_2]$. Escrevemos

$$\int_{t_1(f_x)}^{t_2} \mathcal{F}_x(x, v_x, t) v_x dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}_x(f_x(t), \dot{f}_x(t), t) \dot{f}_x(t) dt, \quad (21.15)$$

onde o símbolo (f_x) foi novamente escrito junto ao símbolo de integral para indicar que o movimento considerado é dado pela função-movimento f_x e, portanto, os modos como x e v_x dependem do tempo são dados por (21.9). Denotaremos esse trabalho por $W(t_1, t_2; f_x)$. Temos, então,

$$W(t_1, t_2; f_x) = \int_{t_1(f_x)}^{t_2} \mathcal{F}_x(x, v_x, t) v_x dt. \quad (21.16)$$

O símbolo W , para trabalho, tem origem na palavra inglesa que designa esse conceito: *work*.

Note que no símbolo do trabalho está indicado que ele depende do movimento considerado e dos instantes de tempo que definem o intervalo durante o qual o trabalho é calculado.

Agora temos todos os cálculos prontos para entender o significado da igualdade obtida integrando os dois membros de (21.6),

$$\int_{t_1(f_x)}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_x^2 \right) dt = \int_{t_1(f_x)}^{t_2} \mathcal{F}_x(x, v_x, t) v_x dt, \quad (21.17)$$

que, em virtude de (21.12), pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2} m v_{x2}^2 - \frac{1}{2} m v_{x1}^2 = \int_{t_1(f_x)}^{t_2} \mathcal{F}_x(x, v_x, t) v_x dt . \quad (21.18)$$

O membro esquerdo de (21.18) é a variação da energia cinética da partícula durante o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ do movimento considerado, isto é, do movimento dado por f_x . O membro direito é o trabalho realizado pela força total sobre a partícula no mesmo intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ do movimento dado por f_x . A igualdade escrita em (21.18) é chamada **teorema da energia cinética**. Podemos enunciá-lo, dizendo que

em um movimento retilíneo de uma partícula, a variação de sua energia cinética em qualquer intervalo de tempo é igual ao trabalho realizado pela força total que age sobre ela nesse mesmo intervalo, isto é,

$$K_2 - K_1 = W(t_1, t_2; f_x) , \quad (21.19)$$

onde f_x descreve o movimento seguido pela partícula entre os instantes t_1 e t_2 , K_2 é a sua energia cinética no instante t_2 e K_1 , a sua energia cinética no instante t_1 .

Ilustremos os conceitos aprendidos até o momento com um exemplo no qual verificaremos, em um caso particular, a validade desse teorema que acabamos de demonstrar, isto é, do teorema da energia cinética.

Exemplo 21.1

Suponhamos que a força total sobre uma partícula de massa m seja dada pela função-força

$$F_x = \mathcal{F}_x(x, v_x, t) = -m\omega^2 x - m\frac{10}{3}\omega v_x , \quad (21.20)$$

na qual ω é uma constante positiva conhecida. Essa força total é a soma de uma força elástica com uma força de viscosidade proporcional à velocidade da partícula. Podemos imaginar que a partícula é uma pequena esfera presa a uma mola e imersa em um fluido viscoso. Normalmente, a força elástica é escrita como $-kx$, mas preferimos escrevê-la na forma $-m\omega^2 x$, em termos de uma constante ω , para dar uma forma mais simples aos cálculos que realizaremos. Pelo mesmo motivo, a constante na força de viscosidade foi escolhida com o valor exato $-10m\omega/3$. Os movimentos possíveis da partícula são determinados pela Segunda Lei de Newton:

$$m a_x = -m\omega^2 x - m\frac{10}{3}\omega v_x . \quad (21.21)$$

Um movimento possível da partícula é dado pela função-movimento

$$x = f_x(t) = x_0 e^{-3\omega t}, \quad (21.22)$$

onde, obviamente, x_0 é a posição da partícula no instante $t = 0$. É simples verificar que (21.22) é um movimento possível da partícula. Dessa função-movimento, obtemos a função-velocidade

$$v_x = \dot{f}_x(t) = -3\omega x_0 e^{-3\omega t} \quad (21.23)$$

e a função-aceleração

$$a_x = \ddot{f}_x(t) = 9\omega^2 x_0 e^{-3\omega t}. \quad (21.24)$$

Substituindo as expressões dadas por essas três funções na Segunda Lei de Newton (21.21), você verificará com facilidade que ela se torna uma identidade, isto é, que (21.22) é, de fato, um movimento possível da partícula.

A variação da energia cinética da partícula em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é obtida facilmente a partir da função-velocidade (21.23):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_{x2}^2 - \frac{1}{2} m v_{x1}^2 &= \frac{1}{2} m [\dot{f}_x(t_2)]^2 - \frac{1}{2} m [\dot{f}_x(t_1)]^2 = \\ &= \frac{1}{2} m (-3\omega x_0 e^{-3\omega t_2})^2 - \frac{1}{2} m (-3\omega x_0 e^{-3\omega t_1})^2 = \\ &= \frac{9}{2} m \omega^2 x_0^2 (e^{-6\omega t_2} - e^{-6\omega t_1}). \end{aligned} \quad (21.25)$$

No entanto, desejamos calcular essa variação usando o trabalho realizado pela força (21.20) durante o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ do movimento (21.22). Usando (21.20), (21.22) e (21.23) na definição de trabalho dada por (21.15), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{t_1(f_x)}^{t_2} \mathcal{F}_x(x, v_x, t) v_x dt &= \int_{t_1(f_x)}^{t_2} \left\{ -m\omega^2 x - m\frac{10}{3}\omega v_x \right\} v_x dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -m\omega^2 (x_0 e^{-3\omega t}) - m\frac{10}{3}\omega (-3\omega x_0 e^{-3\omega t}) \right\} (-3\omega x_0 e^{-3\omega t}) dt. \end{aligned} \quad (21.26)$$

A integral resultante é calculada facilmente,

$$\begin{aligned} \int_{t_1(f_x)}^{t_2} \mathcal{F}_x(x, v_x, t) v_x dt &= \int_{t_1}^{t_2} (-27 m \omega^3 x_0^2 e^{-6\omega t}) dt \\ &= -27 m \omega^3 x_0^2 \int_{t_1}^{t_2} (e^{-6\omega t}) dt \\ &= \frac{9}{2} m \omega^2 x_0^2 (e^{-6\omega t_2} - e^{-6\omega t_1}), \end{aligned} \quad (21.27)$$

resultado que coincide com o obtido em (21.25), de acordo com o teorema da energia cinética (21.18).

Na expressão (21.27), é evidente que o trabalho depende do instante inicial t_1 e do instante final t_2 ; depende, também, do movimento seguido pela partícula entre esses dois instantes. No problema proposto 4, você terá a oportunidade de constatar esse fato considerando um outro movimento possível dessa partícula, entre os mesmos instantes t_1 e t_2 . Seria bom que você resolvesse agora esse problema.

O teorema da energia cinética se torna uma ferramenta poderosa para analisar movimentos e resolver problemas, no caso em que as forças são as chamadas forças conservativas. Tal tipo de força será o tema de nossa próxima seção.

Força conservativa no movimento retilíneo

Continuemos a considerar a situação da seção anterior, na qual o movimento da partícula é retilíneo, ao longo do eixo \mathcal{OX} , e a força tem somente a componente ao longo desse eixo. No entanto, iremos nos restringir aos casos em que a força não depende da velocidade da partícula e tampouco do tempo, mas apenas de sua posição. Temos, então,

$$F_x = \mathcal{F}_x(x) . \quad (21.28)$$

Obviamente, continua sendo válido o teorema da energia cinética (21.18) que, nesse caso particular, toma a forma

$$\frac{1}{2} m v_{x2}^2 - \frac{1}{2} m v_{x1}^2 = \int_{t_1(f_x)}^{t_2} \mathcal{F}_x(x) v_x dt , \quad (21.29)$$

onde f_x é um movimento possível da partícula. No membro direito da última equação, temos o trabalho realizado pela força total sobre a partícula, força que, agora, depende apenas de sua posição. De acordo com a nossa definição de trabalho durante um movimento dado por f_x , temos para o membro direito de (21.29):

$$\int_{t_1(f_x)}^{t_2} \mathcal{F}_x(x) v_x dt = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}_x(f_x(t)) \dot{f}_x(t) dt . \quad (21.30)$$

Nesse caso, em que a força depende apenas da posição, é possível usar a própria função-movimento f_x para fazer a mudança da variável de integração t para a variável de integração x , na integral no membro direito de (21.30). Fazemos, no integrando, as substituições

$$x = f_x(t) \quad \text{e} \quad dx = \frac{df_x(t)}{dt} dt = \dot{f}_x(t) dt , \quad (21.31)$$

e a troca de limites de integração

$$x_1 = f_x(t_1) \quad \text{e} \quad x_2 = f_x(t_2) . \quad (21.32)$$

Com isso, temos para (21.30):

$$\int_{t_1(f_x)}^{t_2} \mathcal{F}_x(x) v_x dt = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}_x(x) dx . \quad (21.33)$$

O trabalho no membro esquerdo da equação (21.33), denotado anteriormente por $W(t_1, t_2; f_x)$ na equação (21.16), é uma integral no tempo, isto é, uma integral cuja variável de integração é o tempo. Para usar essa variável na integração, é necessário que o integrando $\mathcal{F}_x(x) v_x$ seja escrito como função do tempo. Para isso, devemos usar a função-movimento, $x = f_x(t)$, que expressa a posição em função do tempo, e a função velocidade, $v_x = \dot{f}_x(t)$, que expressa a velocidade em função do tempo. Fazendo isso, temos o integrando $\mathcal{F}_x(f_x(t)) \dot{f}_x(t)$ e a integral no membro esquerdo de (21.33) pode ser realizada.

Já no membro direito, o trabalho é dado por uma integral cuja variável de integração é a posição, de modo que não se faz necessário o uso da função-movimento. Na verdade, a função-movimento foi eliminada do cálculo do trabalho por uma mudança da variável de integração. Portanto, a integral no membro direito de (21.30) é uma integral simples na variável x , do limite de integração inferior x_1 até o limite de integração superior x_2 . Para uma dada força, ela depende apenas dos limites de integração, de acordo com a própria definição de integral simples. Sendo assim, o trabalho (21.33) depende, de fato, apenas dos limites de integração x_1 e x_2 . Vamos, então, representar esse trabalho pelo símbolo $W(x_1, x_2)$, de modo que possamos escrever para o membro direito de (21.16):

$$W(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}_x(x) dx . \quad (21.34)$$

Como nessa expressão não se faz menção a um intervalo de tempo durante o qual a força realiza o trabalho, mas sim às duas posições x_1 e x_2 que definem um deslocamento da partícula, o trabalho $W(x_1, x_2)$, que foi definido em (21.34), é chamado **trabalho realizado pela força no deslocamento** $[x_1, x_2]$.

Note que no integrando da equação (21.34) temos o valor da força na posição x , dado por $F_x = \mathcal{F}_x(x)$, multiplicado por um deslocamento infinitesimal dx , ao longo da trajetória retilínea do movimento. Essa quantidade é chamada **trabalho no deslocamento infinitesimal** dx , ou, equivalentemente, **trabalho infinitesimal**, e é representado por

$$dW = F_x dx . \quad (21.35)$$

Obviamente, o trabalho no deslocamento $[x_1, x_2]$ é a integral do trabalho infinitesimal, desde x_1 até x_2 , de modo que temos a seguinte notação simplificada para o trabalho no deslocamento $[x_1, x_2]$:

$$W(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx, \quad (21.36)$$

na qual fica subentendido que o valor F_x da força é dado em função da variável de integração x . Quando for importante explicitar que o valor da força depende apenas de x , escreveremos $\mathcal{F}_x(x)$ no lugar de F_x .

Pelas propriedades das integrais simples, sabemos que o trabalho (21.36) é a área algébrica sob a curva da função-força \mathcal{F}_x , de $x = x_1$ até $x = x_2$, tal como exemplificado na Figura 21.2

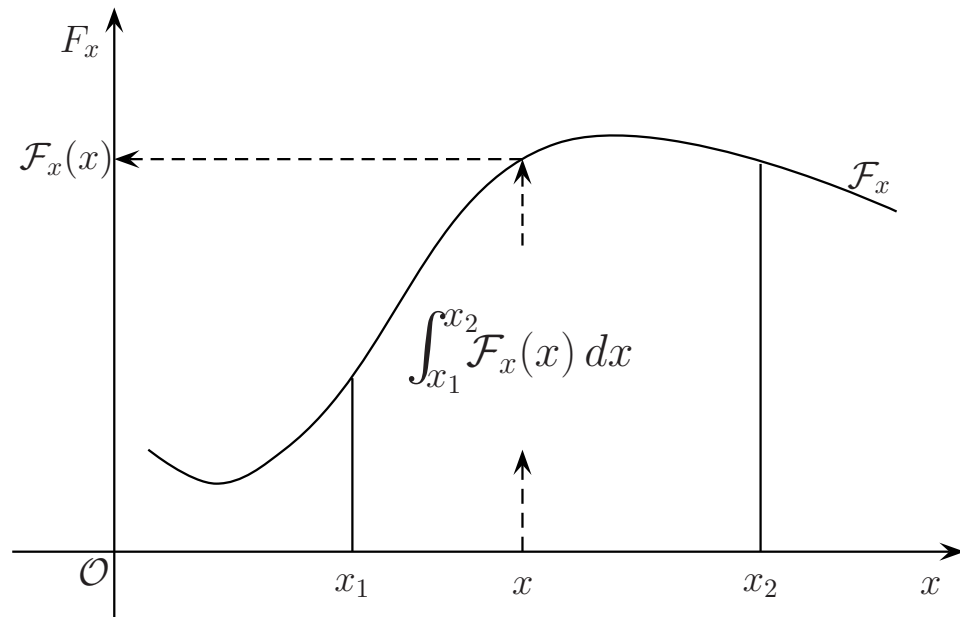


Figura 21.2: O trabalho realizado por uma força no deslocamento da partícula é a área algébrica sob o gráfico da função-força, desde o início até o fim do deslocamento, como ilustrado nesta figura.

Quando a força depende também da velocidade ou do tempo, o trabalho é calculado como uma integral no tempo, durante algum movimento f_x , como definido em (21.16). No integrando dessa definição, temos o produto $v_x dt$, que tem o significado de um deslocamento infinitesimal dx . Nesse caso, temos no integrando de (21.16) $\mathcal{F}_x(x, v_x, t)$, que é o valor F_x da força no instante t . Ainda assim, evitamos escrever o integrando na forma $F_x dx$. Essa forma poderia dar a

impressão de que podemos sempre obter o trabalho como uma integral em x , o que é falso, já que, em geral, não dispomos das variáveis v_x e t em $\mathcal{F}_x(x, v_x, t)$ como funções da variável x . De fato, essas funções nem mesmo existem no caso geral, como fica evidente nos casos em que a partícula passa mais de uma vez pelo mesmo ponto.

As equações (21.35) e (21.36) dão origem à expressão: “trabalho é força vezes deslocamento”. Note que, no caso em que a função-força \mathcal{F}_x é a função constante, isto é, $F_x = \mathcal{F}_x(x)$ é uma constante para qualquer valor da posição x , a equação (21.36) se reduz a

$$W(x_1, x_2) = F_x (x_2 - x_1) , \quad (21.37)$$

ou seja, o trabalho é igual ao valor (constante) da força vezes o deslocamento total. Observe que esse trabalho pode ser positivo ou negativo, conforme a componente F_x tenha ou não o mesmo sinal que o deslocamento $x_2 - x_1$.

Quando a força depende apenas da posição da partícula em um movimento retilíneo, podemos usar a equação (21.33) para substituir, no teorema da energia cinética (21.29), o trabalho que está expresso como uma integral no tempo pelo trabalho expresso como uma integral na coordenada. Seguindo esse procedimento, obtemos:

$$\frac{1}{2} m v_{x2}^2 - \frac{1}{2} m v_{x1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}_x(x) dx . \quad (21.38)$$

Se usarmos as definições (21.34) e (21.8), podemos escrever esse mesmo teorema na forma abreviada

$$K_2 - K_1 = W(x_1, x_2) , \quad (21.39)$$

onde K_1 e K_2 são as energias cinéticas da partícula nos instantes em que ela se encontra nas posições x_1 e x_2 , respectivamente. Resumindo, temos:

em um movimento retilíneo de uma partícula que está sob a ação de uma força total dependente apenas de sua posição, a variação de sua energia cinética em qualquer deslocamento é igual ao trabalho realizado pela força total nesse deslocamento.

Para uma dada força, o trabalho escrito em (21.34) depende apenas das posições inicial e final da partícula. Isso tem conseqüências importantes. No membro esquerdo da equação (21.33), o trabalho é calculado usando uma função-movimento da partícula, mas o membro direito da equação mostra que não é necessário usar uma função-movimento para calcular o trabalho, e que ele, de fato, não depende do movimento realizado pela partícula desde a posição x_1 até a

posição x_2 . O trabalho depende apenas dessas duas posições. Isso significa que, ao calcularmos o trabalho usando a integral no tempo no membro esquerdo da equação (21.33), obtemos o mesmo valor para qualquer função-movimento que usarmos, desde que seja um movimento de x_1 até x_2 . Podemos mesmo usar uma função f_x que nem sequer represente um movimento possível da partícula. Em outras palavras: se f_x representa um movimento imaginário que a partícula não pode realizar sob a ação da força total F_x , ainda assim o trabalho calculado pelo lado esquerdo de (21.33) continuará dando o mesmo valor que o obtido no caso de um movimento real da partícula, desde que o movimento imaginário seja, como o movimento real, de x_1 a x_2 . O próximo exemplo ilustra esses fatos.

Exemplo 21.2

Consideremos que a força total sobre a partícula seja a força elástica

$$F_x = -kx . \quad (21.40)$$

Os movimentos possíveis da partícula satisfazem à Segunda Lei de Newton:

$$m a_x = -kx . \quad (21.41)$$

Consideremos dois movimentos, cujas funções-movimento serão denotadas por f_x e \tilde{f}_x . O primeiro é dado por

$$x = f_x(t) = A \text{sen}(\omega t) , \quad (21.42)$$

onde $\omega = \sqrt{k/m}$. O segundo é o MRU

$$x = \tilde{f}_x(t) = vt , \quad (21.43)$$

no qual a velocidade v é diferente de zero. O movimento dado por f_x é oscilatório e é um dos movimentos possíveis da partícula, como você pode verificar facilmente usando as equações (21.42) e (21.41). Em contrapartida, substituindo (21.43) em (21.41), obtemos $0 = -kvt$, que é uma igualdade falsa para todo instante diferente de zero. Isso significa que a função-movimento \tilde{f}_x não satisfaz à Segunda Lei de Newton e, portanto, não é um dos movimentos possíveis da partícula. Certamente, você já sabia que uma partícula sujeita à força total exercida por uma mola jamais se move em MRU.

Calculemos, por exemplo, o trabalho exercido pela força elástica (21.40) quando a partícula vai da origem até atingir, pela primeira vez, a posição dada por A , que representa a amplitude do movimento oscilatório (21.42). Primeiramente,

calculemos o trabalho usando esse movimento oscilatório, descrito pela função-movimento f_x e realizando uma integral no tempo. Nesse movimento, a partícula está na origem em $t_1 = 0$ s e atinge a posição $x = A$ pela primeira vez no instante $t_2 = \pi/(2\omega)$. Sendo assim, o trabalho é dado pelo membro esquerdo de (21.33), de modo que, no presente caso, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1(f_x)}^{t_2} \mathcal{F}_x(x) v_x dt &= \int_{0(f_x)}^{\pi/(2\omega)} -k x v_x dt \\
 &= \int_0^{\pi/(2\omega)} -k [A \sin(\omega t)] [\omega A \cos(\omega t)] dt \\
 &= -k \omega A^2 \int_0^{\pi/(2\omega)} \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \\
 &= -\frac{1}{2} k \omega A^2 \int_0^{\pi/(2\omega)} \sin(2\omega t) dt \\
 &= +\frac{1}{2} k \omega A^2 \frac{\cos(2\omega t)}{2\omega} \Big|_0^{\pi/(2\omega)} \\
 &= -\frac{1}{2} k A^2, \tag{21.44}
 \end{aligned}$$

onde usamos a identidade trigonométrica $\sin(2\theta) = 2 \sin\theta \cos\theta$.

Calculemos, agora, o trabalho da mesma força, no mesmo deslocamento (isto é, de $x_1 = 0$ até $x_2 = A$), porém usando $\tilde{f}_x(t)$ dada em (21.43) para realizar a integral no tempo, de acordo com a fórmula no membro esquerdo de (21.33). Sabemos que esse é um movimento que estamos imaginando para a partícula, mas que ela não pode realizar, se estiver sob a ação apenas da força elástica dada por (21.40). Nesse movimento imaginário, a partícula sai de $x_1 = 0$ no instante $t_1 = 0$ e chega a $x_2 = A$ no instante $\tilde{t}_2 = A/v$. Temos, então, com $\tilde{f}_x(t) = vt$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\tilde{t}_1(\tilde{f}_x)}^{\tilde{t}_2} \mathcal{F}_x(x) v_x dt &= \int_{0(\tilde{f}_x)}^{A/v} -k x v_x dt = \int_0^{A/v} -k (vt) v dt \\
 &= -k v^2 \int_0^{A/v} t dt = -k v^2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^{A/v} \\
 &= -\frac{1}{2} k A^2, \tag{21.45}
 \end{aligned}$$

resultado que coincide com o anterior, como já havíamos antecipado. Nesse exemplo, vemos, inclusive, que o cálculo do trabalho, utilizando um movimento impossível, é até mais simples do que o cálculo utilizando um movimento oscilatório possível. Na verdade, sabemos que para calcular o trabalho em um movimento retilíneo, realizado por uma força que depende apenas da posição x da partícula, não há necessidade alguma de especificar o movimento da partícula. Nesse caso,

de acordo com nosso resultado (21.33), o trabalho realizado pela força de uma posição inicial até uma posição final depende apenas dessas posições, e não do movimento seguido pela partícula entre essas posições, desde que, como já enfatizamos, a força dependa apenas da posição x da partícula.

Usando, então, o membro direito de (21.33), podemos calcular o trabalho realizado de $x_1 = 0$ até $x_2 = A$, diretamente, como uma integral na posição, sem a necessidade de considerar o movimento descrito pela partícula entre as posições inicial e final. Dessa forma, obtemos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}_x(x) dx = \int_0^A -k x dx = -k \frac{x^2}{2} \Big|_0^A = -\frac{1}{2} k A^2. \quad (21.46)$$

Como uma observação final neste exemplo, note que, mesmo sendo desnecessário considerar um movimento entre as posições inicial e final para calcular o trabalho, pode ser útil, dependendo das circunstâncias, considerar algum movimento imaginário bem simples para se analisar o trabalho realizado pela força.

Uma força cujo trabalho, em qualquer deslocamento, depende apenas dos pontos inicial e final do deslocamento é chamada **força conservativa** (a razão desse nome ficará clara logo adiante). Portanto, de acordo com a discussão que acabamos de fazer, podemos escrever:

se uma força tem componente apenas ao longo de um dado eixo, ela será uma força conservativa se depender apenas da coordenada desse eixo.

No exemplo anterior, vimos que a força elástica $F_x = -k x$ é conservativa, pois, como é evidente, depende apenas da posição ao longo do eixo \mathcal{OX} . O trabalho realizado por tal força em um deslocamento de uma posição qualquer x_1 até uma posição qualquer x_2 é dado por

$$\int_{x_1}^{x_2} -k x dx = -\frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2} k x_1^2, \quad (21.47)$$

que, obviamente, depende apenas da posição inicial x_1 e da posição final x_2 .

Anteriormente, vimos o mais simples exemplo de força conservativa: a força constante. Nesse caso, a função-força \mathcal{F}_x é a função constante, isto é, $F_x = \mathcal{F}_x(x)$ é uma constante para qualquer valor da posição x , e o trabalho realizado por essa força em qualquer deslocamento $[x_1, x_2]$ é dado pela expressão (21.37) que, evidentemente, depende apenas da posição inicial x_1 e da posição final x_2 .

Em contraste com o que ocorre em movimentos retilíneos, veremos, na Aula 25, que no caso geral não basta a força depender apenas da posição da partícula para que seja conservativa.

Exemplo 21.3

Apresentaremos, nesse exemplo, uma outra força conservativa muito importante em Física. Considere uma partícula de massa M fixa na origem do eixo \mathcal{OX} e uma partícula de massa m que pode ocupar qualquer posição no semi-eixo positivo, com exceção da própria origem. A força gravitacional exercida sobre ela pela partícula de massa M é dada por

$$F_x = -\frac{GMm}{x^2} . \quad (21.48)$$

O trabalho realizado por essa força no deslocamento $[x_1, x_2]$ é dado por

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} F_x dx &= - \int_{x_1}^{x_2} \frac{GMm}{x^2} dx = \left(\frac{GMm}{x} \right) \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= GMm \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) . \end{aligned} \quad (21.49)$$

Note que, se $x_2 > x_1$, o trabalho realizado pela força gravitacional sobre a partícula de massa m é negativo. Já para $x_2 < x_1$, esse trabalho é positivo. Poderíamos ter antecipado o sinal do trabalho simplesmente analisando a área algébrica no gráfico de $\mathcal{F}_x(x)$ versus x , como indica a Figura 21.3. Por ser a força gravitacional um exemplo muito importante de força conservativa, não deixe de fazer o problema proposto 7, para se certificar de que realmente compreendeu os cálculos anteriores.

Vamos encerrar esta seção listando três propriedades do trabalho de uma força conservativa. Usando a definição (21.36), é fácil mostrar que

$$W(x_1, x_2) + W(x_2, x_3) = W(x_1, x_3) , \quad (21.50)$$

$$W(x_1, x_1) = 0 \quad (21.51)$$

e

$$W(x_1, x_2) = -W(x_2, x_1) . \quad (21.52)$$

As forças que não são conservativas violam essas propriedades, como você pode verificar no caso particular apresentado no problema proposto 10, no qual se tem um trabalho não-nulo para uma partícula que sai de uma certa posição e volta a ela num instante posterior. Se a força fosse conservativa, o trabalho seria nulo, como estabelecido em (21.51). A definição e as propriedades das forças conservativas nos levarão aos conceitos de energia potencial e energia mecânica, assuntos a serem tratados na próxima aula.

O caso em que a partícula de massa m pode ocupar qualquer posição do semi-eixo negativo é totalmente análogo, havendo apenas uma troca de sinal na expressão de F_x em (21.48).

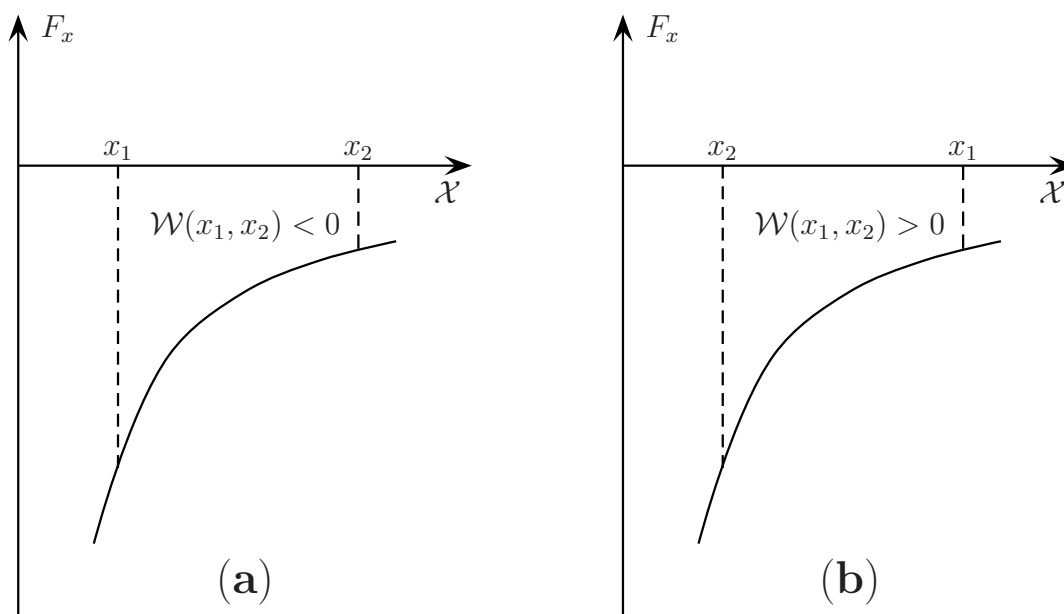


Figura 21.3: A parte (a) ilustra o caso em que $x_2 > x_1$, no qual a área algébrica sob a gráfico é negativa; a parte (b) ilustra o caso em que $x_2 < x_1$, no qual a área algébrica sob o gráfico é positiva.

Denominamos **força não-conservativa** a força que não é conservativa e dizemos que ela é **dissipativa** no caso em que é negativo o trabalho que realiza em caminhos fechados ou em qualquer caminho relevante no movimento em tela.

Para evitar demasiadas repetições, convencionemos que só estaremos considerando movimentos retilíneos no resumo, no questionário e nos problemas propostos desta aula, que vêm a seguir.

Resumo

Energia cinética de uma partícula é o semi-produto de sua massa pelo quadrado de sua velocidade. O produto de uma força que atua sobre uma partícula pela velocidade da partícula é chamado potência fornecida pela força à partícula. Em consequência da Segunda Lei de Newton, a taxa instantânea de variação temporal da energia cinética de uma partícula é igual à potência fornecida à partícula pela força total que age sobre ela. Esse resultado pode ser considerado como uma versão preliminar do teorema da energia cinética.

O trabalho realizado por uma força que age sobre uma partícula durante um intervalo de tempo de seu movimento é a integral no tempo do produto da força

pela velocidade, desde o início até o final do intervalo. A partir da Segunda Lei de Newton, pode-se mostrar que a variação da energia cinética de uma partícula durante um intervalo de tempo de seu movimento é igual ao trabalho realizado pela força total sobre a partícula nesse intervalo. Esse é o chamado teorema da energia cinética. No caso de uma força que dependa apenas da posição da partícula em movimento retilíneo, o trabalho realizado pela força em um certo intervalo de tempo do movimento da partícula depende apenas do deslocamento da partícula nesse intervalo; dizemos, então, que ele é o trabalho realizado pela força no deslocamento da partícula. Portanto esse trabalho é dado pela integral da força na posição da partícula, isto é, uma integral cuja variável de integração é a coordenada da partícula na reta de seu movimento. No caso de um deslocamento infinitesimal da partícula, o trabalho da força é o produto da força por esse deslocamento infinitesimal. Esse é o chamado trabalho infinitesimal. Integrando a expressão do trabalho infinitesimal, podemos obter o trabalho em um deslocamento finito qualquer. No caso de força dependente apenas da posição da partícula, podemos enunciar o teorema da energia cinética dizendo que a variação da energia cinética, de uma partícula durante um deslocamento é igual ao trabalho realizado pela força total sobre a partícula nesse deslocamento.

No caso de uma força que dependa apenas da posição da partícula em movimento retilíneo, o trabalho no deslocamento da partícula depende, na verdade, apenas das posições inicial e final do deslocamento em consideração. Uma força cujo trabalho em qualquer deslocamento dependa apenas das posições inicial e final do deslocamento é chamada força conservativa. Portanto, no caso de uma partícula em movimento retilíneo, é conservativa qualquer força que dependa apenas da posição da partícula.

Questionário

1. Defina energia cinética de uma partícula.
2. Em que sentido deve-se entender o adjetivo usado na expressão “energia cinética”?
3. O que é potência fornecida por uma força a uma partícula?
4. Defina trabalho realizado por uma força que atua sobre uma partícula durante um intervalo de tempo de seu movimento.

5. O trabalho realizado sobre uma partícula por uma certa força $\mathcal{F}_x(x, v_x, t)$ no intervalo $[t_1, t_2]$ depende apenas dos instantes t_1 e t_2 ?
6. Sob que condição é possível definir trabalho de uma força em um deslocamento da partícula? Suponha que esta condição seja satisfeita e dê, nesse caso, a definição de trabalho num deslocamento de x_1 até x_2 .
7. Enuncie o teorema da energia cinética em sua versão mais geral.
8. Enuncie o teorema da energia cinética no caso particular em que a força total depende apenas da posição da partícula.
9. Defina força conservativa no caso de um movimento retilíneo.
10. Toda força constante é conservativa?
11. Considere um pequeno bloco em movimento unidimensional sobre uma superfície. Suponha que exista atrito entre o bloco e a superfície e, ainda, que a reação normal sobre o bloco permaneça constante durante o seu movimento. A força de atrito cinético exercida pela superfície sobre o bloco é conservativa?
12. Ao considerarmos uma partícula sob a ação da força gravitacional (21.48), fizemos a hipótese de que a partícula jamais ocupasse a posição $x = 0$. Qual o motivo dessa hipótese?

Problemas propostos

1. Considere os movimentos retilíneos de uma partícula de massa m sob a ação da força constante $\mathcal{F}_x(x, v_x, t) = F_0$, $F_0 > 0$. Como você já sabe, os movimentos possíveis dessa partícula são dados por

$$f_x(t) = A + Bt + \frac{F_0}{2m}t^2,$$

onde A e B são constantes arbitrárias. Considere dois instantes de tempo, t_1 e $t_2 > t_1$.

- (a) Utilizando a função-movimento escrita anteriormente, calcule a variação da energia cinética da partícula sofrida no intervalo $[t_1, t_2]$.
- (b) Calcule, utilizando a mesma função-movimento, o trabalho realizado sobre a partícula no mesmo intervalo de tempo, isto é, calcule

$W(t_1, t_2; f_x) = \int_{t_1(f_x)}^{t_2} \mathcal{F}_x(x, v_x, t) v_x dt$ e verifique a validade do teorema da energia cinética.

Obs.: a solução do item (b) deste problema torna evidente o fato de que o trabalho realizado por \mathcal{F}_x no intervalo $[t_1, t_2]$ depende do movimento seguido pela partícula, pois a resposta depende explicitamente de B e diferentes valores de B significam diferentes funções-movimento da partícula.

2. A função-movimento de uma partícula que se move ao longo do eixo \mathcal{OX} é dada por $f_x(t) = A \sin(\omega t)$, onde A é uma constante positiva.
 - (a) Determine a variação da energia cinética da partícula sofrida no intervalo $[t_1, t_2]$.
 - (b) Calcule, utilizando essa mesma função-movimento, o trabalho realizado pela força total sobre a partícula no mesmo intervalo de tempo, isto é, calcule $W(t_1, t_2; f_x)$ e verifique a validade do teorema da energia cinética.
3. Uma partícula é lançada verticalmente de uma certa altura do solo com velocidade de módulo igual a v_0 . Há, obviamente, duas possibilidades: numa delas, a partícula é lançada para cima e, na outra, para baixo. Demonstre que o trabalho realizado sobre a partícula pelo peso no intervalo de tempo $[0, t]$, quando ela é lançada para cima, nunca é igual ao trabalho realizado pelo peso, nesse mesmo intervalo, quando ela é lançada para baixo, qualquer que seja o valor de v_0 (novamente, aqui, vemos que o trabalho realizado por uma força num certo intervalo depende da função-movimento da partícula nesse intervalo).
4. Reconsidere o problema discutido no Exemplo 21.1.
 - (a) Verifique que $x = x_0 e^{-(\omega/3)t}$ também é um movimento possível da partícula sob a ação da força total dada por (21.20).
 - (b) Considere, agora, a combinação linear dos movimentos possíveis apresentados no Exemplo 21.1 e no item anterior, isto é,

$$x = a e^{-3\omega t} + b e^{-(\omega/3)t},$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Sem fazer conta alguma, isto é, sem substituir essa expressão na equação diferencial dada por (21.21), você saberia dizer se ela também é um movimento possível da partícula?

- (c) Substitua, agora, a expressão escrita no item anterior em (21.21) e verifique que ela é, de fato, um movimento possível da partícula.
- (d) Escolhendo a função-movimento escrita no item (a), calcule a variação da energia cinética da partícula e o trabalho realizado sobre ela no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ e verifique a validade do teorema da energia cinética. Observe que os valores encontrados nesse item são diferentes daqueles obtidos no exemplo 21.1, o que ilustra, mais uma vez, o fato de que o trabalho realizado por uma força entre dois instantes depende, em geral, do movimento seguido pela partícula entre esses instantes.
5. Uma partícula que se move ao longo do eixo \mathcal{OX} está sujeita à ação de uma força total elástica, dada por $\mathcal{F}_x(x) = -kx$, onde k é uma constante positiva. O gráfico desta força *versus* a posição x da partícula está mostrado na Figura 21.4. Nele, estão marcadas as posições x_1 , x_2 , x_3 e x_4 .

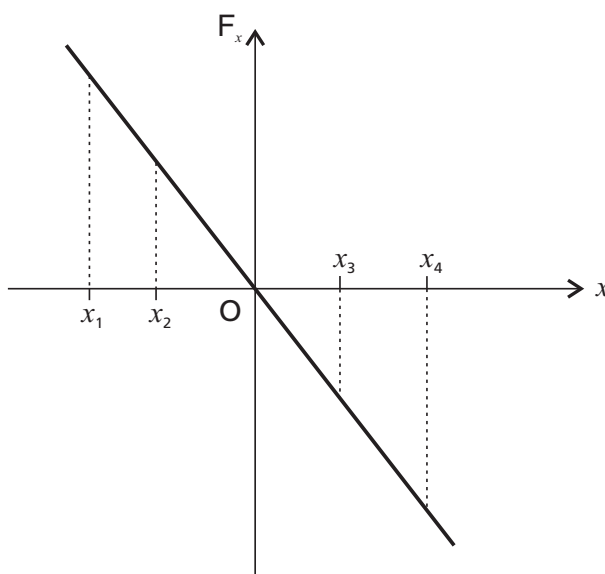


Figura 21.4: Força elástica sobre uma partícula em função de sua posição.

- (a) Determine, a partir das áreas algébricas correspondentes do gráfico, o trabalho dessa força nos deslocamentos $[x_1, x_2]$ e $[x_3, x_4]$.
- (b) Calcule, novamente, esses mesmos trabalhos por meio de integrações da força na posição e confira os resultados.
6. Uma partícula se move ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação de uma força total dependente apenas da posição e cujo gráfico está mostrado na Figura 21.5.

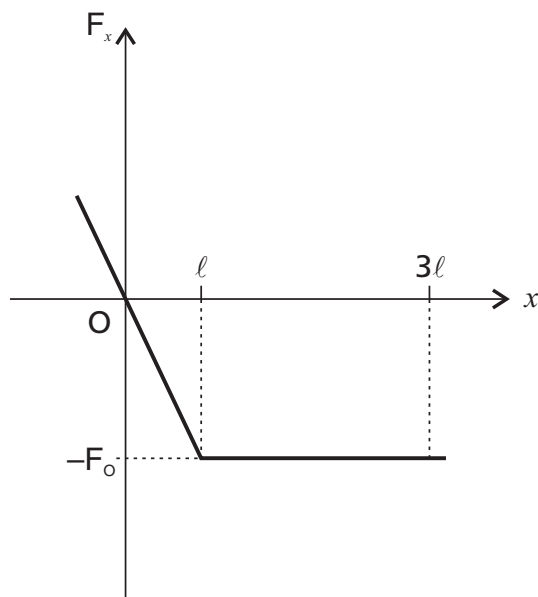


Figura 21.5: Gráfico da força total que atua sobre a partícula do problema 6, em função da posição.

Em $t_0 = 0$, a partícula está na origem e tem velocidade $v_{x0} > 0$. Ao atingir a posição $x = 3\ell$, ela tem velocidade nula. Determine v_{x0} em termos de F_0 , ℓ e da massa m da partícula.

7. Considere a Terra como uma esfera de raio R e suponha que a sua massa M esteja distribuída uniformemente. Nesse caso, a força gravitacional exercida pela Terra sobre uma partícula de massa m é a mesma que essa partícula sofreria caso toda a massa da Terra estivesse concentrada em seu centro. Considere, agora, movimentos retilíneos desta partícula ao longo de um eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$ que, por hipótese, tem sua origem no centro da Terra, como ilustra a Figura 21.6.

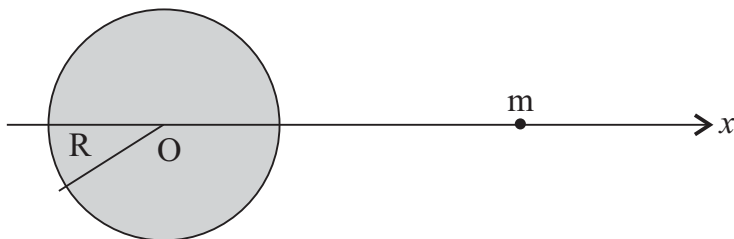


Figura 21.6: Partícula de massa m sob a ação da força gravitacional da Terra.

- (a) Calcule o trabalho da força gravitacional sobre a partícula quando ela se desloca de $x_1 = R$ até $x_2 = 2R$.

- (b) Usando apenas argumentos qualitativos, responda se o módulo do trabalho da força gravitacional sobre a partícula, quando esta se desloca de $x_2 = 2R$ até $x_3 = 3R$, é maior, menor ou igual ao módulo do trabalho encontrado no item anterior. Nesse caso, lembre-se de que o trabalho será igual à área algébrica sob o gráfico de F_x versus x .
- (c) Calcule, explicitamente, o trabalho da força gravitacional sobre a partícula no deslocamento $[2R, 3R]$ e verifique se o resultado encontrado está compatível com a sua resposta ao item anterior.
- (d) Calcule o trabalho da força gravitacional sobre a partícula quando ela se desloca da superfície da Terra até o infinito, isto é, no deslocamento $[R, \infty)$.
8. Uma partícula é abandonada em repouso a uma distância do centro da Terra igual a dez vezes o raio terrestre. Utilizando o Teorema da Energia Cinética, determine o módulo da velocidade com que esta partícula atinge a superfície da Terra.
9. Demonstre os resultados escritos nas equações (21.50), (21.51) e (21.52).
10. Considere um pequeno bloco de massa m em movimento unidimensional sobre uma superfície plana. Seja μ_c o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície e suponha que, nos movimentos a serem considerados, a reação normal exercida pela superfície sobre o bloco mantenha sempre o mesmo módulo. Escolha os eixos de modo que o movimento do bloco ocorra ao longo do eixo \mathcal{OX} .
- (a) Mostre, inicialmente, que, se não houver inversão de sentido no movimento do bloco, o trabalho realizado pelo atrito entre os instantes t_1 e t_2 , nos quais o bloco ocupa as posições x_1 e x_2 , é dado por $W(t_1, t_2; f_x) = -\mu_c mg |x_2 - x_1|$.
- (b) Utilizando o resultado do item anterior, mostre que o trabalho realizado pelo atrito cinético sobre o bloco entre um instante t e um instante posterior t' , no qual o bloco esteja na mesma posição que ocupava em t , nunca é nulo. Dessa forma, fica evidente que a propriedade (21.51) não é satisfeita por essa força. Portanto, já podemos afirmar que a força de atrito cinético é uma força não-conservativa.
- (c) Utilizando, novamente, o resultado do item (a), dê um exemplo de movimento do bloco no qual a condição (21.50) é satisfeita e um outro no qual ela não é satisfeita.

Auto-avaliação

Como de costume, você deve ser capaz de responder ao questionário inteiro, pois ele abrange todos os conceitos fundamentais introduzidos nesta aula. Você também não deve ter dificuldade para resolver os problemas propostos, excetuando-se, talvez, os itens dos problemas que exigirem integrações matemáticas como por exemplo, itens dos problemas 2 e 4. Pode ser que você ainda não tenha adquirido toda a habilidade necessária para fazer esses cálculos matemáticos com a rapidez que gostaria. Nesse caso, continue exercitando e encarando os problemas que lhe parecem mais difíceis, pois é dessa forma que você se tornará cada vez mais familiarizado com eles. Os problemas 1, 2, 3, 4 e 8 exigem a compreensão do Teorema da Energia Cinética. Tente resolver, pelo menos, três deles. Os problemas 5, 6 e 7 envolvem o cálculo do trabalho de uma força conservativa, incluindo uma análise desse trabalho a partir do gráfico da força. Resolva todos eles. Finalmente, os problemas 9 e 10 envolvem pequenas demonstrações a respeito de forças não-conservativas. Embora as contas sejam extremamente simples, esses problemas devem ser resolvidos, pois, certamente, irão ajudá-lo a compreender melhor os conceitos de forças conservativas e não-conservativas.

Aula 22 – Energia Potencial e Conservação da Energia Mecânica em Movimentos Retilíneos

Objetivos

- Aprender a definição de energia potencial de uma partícula, no caso de movimentos retilíneos, e entender o seu significado.
- Aprender a definição de energia mecânica de uma partícula, compreender o seu significado e demonstrar o Teorema da Conservação da Energia Mecânica, no caso de movimentos retilíneos.

Introdução

Na aula anterior, vimos os conceitos de energia cinética e de trabalho, e demonstramos o Teorema da Energia Cinética. Vimos, também, o conceito de força conservativa, aquela cujo trabalho, em qualquer deslocamento, depende apenas dos seus pontos inicial e final. Nesta aula, mostraremos que a cada força conservativa pode ser associada uma função chamada energia potencial. Se a força total sobre a partícula é conservativa, concluímos, do Teorema da Energia Cinética, que a soma da energia potencial com a energia cinética é constante em cada movimento possível da partícula. Essa constante é chamada energia mecânica da partícula e é de fundamental importância no estudo da Mecânica. Embora estejamos agora considerando uma única partícula em movimento retilíneo, o conceito de energia, em suas diversas formas, cinética, potencial e mecânica, estende-se a sistemas físicos mais complexos e movimentos mais gerais. De fato, o conceito de energia permeia toda a Física de diversas outras formas.

Energia potencial no movimento retilíneo

Como na aula anterior, consideremos uma força que tenha componente apenas ao longo de um dado eixo, e que essa componente dependa apenas da coordenada desse eixo. Digamos que a força tenha apenas a componente F_x e que dependa somente da coordenada x , isto é, $F_x = \mathcal{F}_x(x)$. Nesse caso, o trabalho realizado por essa força em um deslocamento $[x_1, x_2]$ depende, apenas, da posição inicial x_1 e da posição final x_2 :

$$W(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}_x(x) dx . \quad (22.1)$$

Na aula anterior, chamamos conservativa a força cujo trabalho em um deslocamento depende, apenas, dos seus pontos inicial e final. Matematicamente, esse trabalho é uma função de duas variáveis, a saber, as posições x_1 e x_2 . Fixando uma delas e deixando a outra livre para assumir os diversos valores possíveis, o trabalho se torna função da posição que não foi fixada, isto é, torna-se uma função dessa única variável. Fixaremos a posição final no intervalo de integração de (22.1); vamos chamá-la **posição-padrão** e representá-la como x_p , isto é, $x_2 = x_p$. Deixaremos a posição inicial livre para assumir qualquer valor possível e mudar o seu símbolo de x_1 para x . Com isso, obtemos um trabalho $W(x, x_p)$ que é função de uma única variável, a saber, a variável x . Representaremos essa função por U , de modo que

$$U(x) = W(x, x_p) = \int_x^{x_p} \mathcal{F}_x(x') dx', \quad (22.2)$$

onde passamos a denotar a variável de integração por x' , para diferenciá-la do limite superior de integração, denotado por x . A quantidade $U(x)$, definida em (22.2), é chamada **energia potencial** da partícula na posição x . A função U que dá a energia potencial $U(x)$ na posição x não tem nome especial. Vamos chamá-la, simplesmente, **função energia potencial**. A posição-padrão x_p , usada para definir a energia potencial, é chamada **posição-padrão da energia potencial**. Ela é totalmente arbitrária. Diferentes escolhas podem ser feitas mas, uma vez escolhida uma posição-padrão x_p , ela tem de ser mantida fixa, pois a energia potencial da partícula é função de uma única posição. Devido à propriedade (21.51), o valor da energia potencial na posição-padrão é nula.

Note que toda energia potencial é definida a partir de uma força conservativa. De fato, a energia potencial é simplesmente uma integral de uma força conservativa. Uma energia potencial, definida a partir de uma certa força conservativa, é dita **energia pontencial associada à força conservativa** em questão. Podemos, então, enunciar a definição de energia potencial da seguinte maneira:

energia potencial de uma partícula em uma dada posição é o trabalho que seria realizado pela força conservativa, se a partícula fosse dessa posição até uma posição fixa escolhida como padrão.

Observe que usamos a expressão condicional “se a partícula fosse”, pois a partícula não precisa ir, de fato, de uma posição a outra para que a energia potencial fique definida. Essa conclusão fica mais evidente se nos lembrarmos de que o trabalho de uma força conservativa não depende da existência de um movimento real da partícula entre as posições consideradas. Vejamos alguns exemplos de energia potencial.

Exemplo 22.1

De acordo com a definição de força conservativa, o exemplo mais simples que podemos apresentar é aquele no qual a força F_x que atua sobre a partícula é constante, isto é, independente de sua posição. Com isso, usando a definição de energia potencial, dada pela equação (22.2), obtemos:

$$U(x) = \int_x^{x_p} F_x dx' = F_x (x_p - x) . \quad (22.3)$$

Tomando a posição-padrão na origem do sistema de eixos, temos $x_p = 0$ e, conseqüentemente, obtemos para a energia potencial da força constante F_x :

$$U(x) = -F_x x . \quad (22.4)$$

Esse tipo de energia potencial está presente em diversas situações de nosso cotidiano. A mais comum, sem dúvida, é no movimento de queda livre. Quando uma partícula de massa m permanece próxima à superfície da Terra, a força gravitacional que age sobre ela é, aproximadamente, constante e dada por $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, que nada mais é do que o peso da partícula. Tomando um eixo \mathcal{OY} vertical apontando para cima, a força-peso tem somente a componente ao longo de \mathcal{OY} , isto é, $P_y = -mg$. Sendo constante, o peso é uma força conservativa e, conseqüentemente, podemos definir uma energia potencial associada a ele. Ela é obtida renomeando o eixo usado na equação (22.4), o que nos leva à expressão:

$$U(y) = mgy . \quad (22.5)$$

Esta é a energia potencial gravitacional de uma partícula de massa m que se mantém próxima à superfície da Terra, para a qual escolhemos a posição padrão $y_p = 0$. Com isso, essa energia potencial é nula na origem do eixo \mathcal{OY} . Muitas vezes, por conveniência, essa origem é escolhida na superfície da Terra e a coordenada y é chamada altura. Diz-se, então, que a energia potencial da partícula é o produto de seu peso pela altura em que a partícula se encontra.

Em movimentos retilíneos de partículas carregadas na presença de campos eletrostáticos constantes e uniformes, a energia potencial eletrostática da carga também terá uma expressão desse tipo.

Exemplo 22.2

Depois da função constante, uma das funções mais simples é a função linear. Consideremos, então, a força $F_x = -kx$, onde k é uma constante positiva. Encontramos exemplos desse tipo nas forças elásticas exercidas por molas (que satisfaçam à lei de Hooke) sobre partículas presas em suas extremidades. Para que essa expressão de F_x seja exatamente a força elástica sobre a partícula na posição x , em seu movimento ao longo do eixo \mathcal{OX} , a origem desse eixo deve ser escolhida de modo que x seja a elongação da mola. Pelo fato de F_x depender apenas da posição da partícula no eixo \mathcal{OX} , esta é, obviamente, uma força conservativa. A energia potencial associada a ela é facilmente obtida: basta usar o resultado (21.47) na definição (22.2) de energia potencial. Temos, assim,

$$U(x) = \int_x^{x_p} (-kx') dx' = \frac{1}{2} k (x^2 - x_p^2) . \quad (22.6)$$

Já que a posição-padrão da energia potencial pode ser escolhida arbitrariamente, faremos uma escolha que simplifique a expressão de $U(x)$. No caso de (22.6), tomaremos a posição padrão como $x_p = 0$, isto é, a posição na qual a força elástica é nula. Com isso, a equação (22.6) se reduz a

$$U(x) = \frac{1}{2} k x^2 . \quad (22.7)$$

Essa é a energia potencial associada à força elástica e com posição-padrão $x_p = 0$. Ela é chamada **energia potencial elástica**.

Exemplo 22.3

Consideremos, novamente, a força gravitacional sobre uma partícula, sem fazermos a restrição de que, em seu movimento, a partícula permaneça sempre próxima à superfície terrestre. Nesse caso, a força gravitacional sobre ela não poderá ser aproximada por uma força constante. Para sermos mais específicos, consideremos uma partícula de massa M fixa na origem do eixo \mathcal{OX} e uma partícula de massa m que pode ocupar qualquer posição do semi-eixo positivo \mathcal{OX} . Não há perda de generalidade alguma com essa escolha, pois, se a partícula estivesse no semi-eixo negativo, poderíamos redefinir o eixo, invertendo seu sentido (veja, ainda, a questão 8 do questionário). Nesse caso, a força gravitacional exercida sobre ela pela partícula fixa na origem é dada pela equação (21.48), que repetimos aqui, por conveniência:

$$F_x = -\frac{GMm}{x^2} . \quad (22.8)$$

Pelo fato de F_x depender apenas da posição da partícula no eixo \mathcal{OX} , essa força é conservativa. Usando a definição de energia potencial, dada por (22.2),

Obviamente, pela Terceira Lei de Newton, a partícula de massa m também exerce uma força sobre a de massa M , mas isso não nos interessa, pois esta última está fixa na origem, por hipótese.

obtemos:

$$\begin{aligned} U(x) &= - \int_x^{x_p} \frac{GMm}{x'^2} dx' \\ &= GMm \left(\frac{1}{x_p} - \frac{1}{x} \right). \end{aligned} \quad (22.9)$$

Escolheremos como posição-padrão um ponto infinitamente afastado da partícula de massa M , que exerce a força gravitacional F_x sobre a partícula de massa m . Devemos, então, tomar o limite da expressão (22.9), quando $x_p \rightarrow \infty$. Obtemos, dessa forma:

$$U(x) = -\frac{GMm}{x}. \quad (22.10)$$

Essa é a chamada **energia potencial gravitacional** da partícula de massa m localizada em x , energia associada à força gravitacional exercida sobre ela pela massa M que está, por hipótese, fixa na origem.

Consideremos, agora, algumas propriedades importantes da energia potencial. Primeiramente, podemos usar as propriedades (21.50) e (21.52), e a definição (22.2) de energia potencial, para obter:

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &= W(x_1, x_p) + W(x_p, x_2) \\ &= W(x_1, x_p) - W(x_2, x_p) \\ &= U(x_1) - U(x_2), \end{aligned} \quad (22.11)$$

ou seja,

o trabalho realizado por uma força conservativa sobre uma partícula, quando ela sofre um certo deslocamento, é menos a variação da energia potencial nesse deslocamento:

$$W(x_1, x_2) = -[U(x_2) - U(x_1)]. \quad (22.12)$$

Agora vamos nos lembrar de uma propriedade das integrais simples: “se o limite superior de uma integral simples é variável, a derivada da integral em relação a esse limite é igual ao valor da função do integrando nesse limite”. Na definição (22.2) de energia potencial, o limite de integração variável é o inferior, mas podemos inverter os limites de integração e escrever

$$U(x) = - \int_{x_p}^x \mathcal{F}_x(x') dx'. \quad (22.13)$$

Podemos, então, derivar ambos os lados da equação anterior e obter (no problema 8 você verá como demonstrar esse resultado)

$$\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d}{dx} \int_{x_p}^x \mathcal{F}_x(x') dx' = -\mathcal{F}_x(x), \quad (22.14)$$

isto é,

se uma força tem componente apenas ao longo de um dado eixo e é conservativa, então sua componente é o negativo da derivada da energia potencial em relação à coordenada desse eixo:

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx} . \quad (22.15)$$

É comum dizer, de modo abreviado, que a força é menos a derivada da energia potencial. Gostaríamos de enfatizar, nesse momento, que, utilizando a equação (22.2), obtemos a energia potencial a partir da força conservativa e de uma escolha de uma posição-padrão; já a equação (22.15) nos dá o caminho inverso, ou seja, ela nos permite obter a força conservativa a partir da energia potencial. A interpretação gráfica da fórmula (22.2) será vista no próximo exemplo, enquanto a interpretação gráfica da relação $F_x = -dU/dx$ será discutida, detalhadamente, na Aula 23.

Exemplo 22.4

Considerando a definição de energia potencial, dada pela equação (22.2), percebemos que a energia potencial da partícula em uma posição genérica x é igual ao trabalho da força conservativa associada a ela no deslocamento $[x, x_p]$ ou, de modo equivalente, a menos o trabalho dessa força no deslocamento $[x_p, x]$, ou seja,

$$U(x) = - \int_{x_p}^x \mathcal{F}_x(x') dx' = -W(x_p, x) . \quad (22.16)$$

Como já havíamos interpretado $W(x_1, x_2)$ como sendo numericamente igual à área algébrica no gráfico de F_x versus x , o mesmo vale para $U(x)$, exceto pelo sinal trocado. Desse modo, podemos afirmar que

no gráfico da força conservativa versus posição da partícula, a energia potencial $U(x)$ é igual, numericamente, a menos a área algébrica no intervalo $[x_p, x]$.

Apenas para ilustrar esse fato, a Figura 22.1 mostra o gráfico da força $\mathcal{F}_x(x) = -kx$, com $k > 0$, versus x . Escolhendo, como fizemos no Exemplo 22.2, a posição-padrão na origem, ou seja, tomando $x_p = 0$, a energia potencial $U(x)$ corresponde a menos a área algébrica do triângulo hachurado nesta figura. Nela, escolhemos $x > 0$, de modo que a área algébrica vale menos a área do triângulo, isto é, $-(1/2)kx^2$ e, portanto, $U(x)$ é positiva e dada por $U(x) = (1/2)kx^2$, de acordo com a equação (22.7).

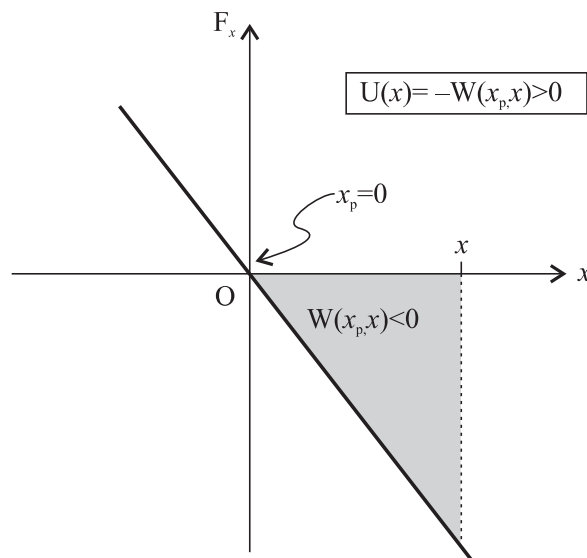


Figura 22.1: Interpretação gráfica da energia potencial $U(x)$ como menos a área algébrica, no gráfico da força conservativa, no intervalo $[x_p, x]$.

Energia mecânica de uma partícula e sua conservação no movimento retilíneo

Consideremos, agora, a propriedade (22.12) da energia potencial no caso em que a força conservativa é a força total que age sobre uma partícula. Nesse caso, vale o Teorema da Energia Cinética, como escrito em (21.38) ou (21.39). Usando esse teorema e a propriedade (22.12), obtemos:

$$\frac{1}{2} m v_{x2}^2 - \frac{1}{2} m v_{x1}^2 = -[U(x_2) - U(x_1)] , \quad (22.17)$$

isto é,

$$\frac{1}{2} m v_{x1}^2 + U(x_1) = \frac{1}{2} m v_{x2}^2 + U(x_2) . \quad (22.18)$$

Essa igualdade afirma que, durante um movimento qualquer de uma partícula sob uma força total conservativa, a soma das energias cinética e potencial da partícula em uma posição qualquer é igual à mesma soma em outra posição qualquer. Dito de modo mais simples:

se a força total que age sobre uma partícula é conservativa, é constante a soma das energias cinética e potencial da partícula durante cada um de seus movimentos possíveis:

$$\frac{1}{2} m v_x^2 + U(x) = \text{constante} . \quad (22.19)$$

Devemos enfatizar que esse resultado afirma que, em cada movimento possível da partícula, a soma de suas energias cinética e potencial é constante, mas não afirma que essa constante é a mesma para todos os seus movimentos possíveis. Para um certo movimento, temos uma constante e, para outro movimento, podemos obter uma constante diferente.

Devemos chamar a atenção também para o fato de que a expressão (22.19) é válida somente ao longo de movimentos possíveis da partícula, uma vez que a Segunda Lei de Newton foi utilizada na demonstração do Teorema da Energia Cinética, na dedução de (22.19). Em outras palavras, num movimento possível da partícula, sua energia cinética e sua energia potencial mudam, em geral, quando ela muda sua posição, mas isso ocorre de tal modo que a soma dessas duas energias se mantém constante durante todo o movimento. Uma quantidade como essa, que depende da posição e da velocidade de uma partícula, mas que permanece constante, quando a posição e a velocidade são as de um movimento possível da partícula, é chamada **constante de movimento**. Podemos, então, dizer que, no caso em que a força total sobre uma partícula é conservativa, a soma das energias cinética e potencial é uma constante de movimento. Uma tal constante de movimento mostra que, durante qualquer movimento real da partícula, a energia potencial sempre aumenta ou diminui quando a energia cinética diminui ou aumenta, de modo que a soma das duas energias se mantém constante.

Se uma quantidade é constante de movimento, também dizemos que é uma **grandeza conservada** ou, simplesmente, que **se conserva**. Essas expressões significam que o valor da grandeza se conserva, isto é, não se modifica durante cada movimento possível da partícula. Desse modo, temos ainda essa maneira de descrever o resultado (22.19):

a soma da energia cinética e potencial é uma grandeza conservada durante cada movimento possível de uma partícula sujeita a uma força total conservativa.

Chamamos **energia mecânica** de uma partícula a soma de suas energias cinética e potencial. A energia mecânica é denotada por E :

$$E = \frac{1}{2} m v_x^2 + U(x) . \quad (22.20)$$

Usando essa definição, podemos escrever o resultado (22.19) de um modo extremamente abreviado:

$$E = \text{constante} , \quad (22.21)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad (22.22)$$

isto é,

se a força total que age sobre uma partícula é conservativa, sua energia mecânica se conserva.

Esse resultado é conhecido como **Teorema da Conservação da Energia Mecânica**. No final desta aula, apresentaremos dois exemplos simples, nos quais ficará bastante clara a utilidade do Teorema da Conservação da Energia Mecânica no estudo de movimentos retilíneos de uma partícula. Na próxima aula, veremos, com bastante detalhe, como esse teorema pode nos ajudar, e muito, a encontrar as soluções possíveis de uma partícula sob a ação de uma força total conservativa. Note que o Teorema da Conservação da Energia Mecânica é obtido substituindo o trabalho (que aparece no Teorema da Energia Cinética) por uma variação de energia potencial. Essa energia potencial, por sua vez, existe porque o trabalho em questão é o de uma força conservativa. Portanto, a conservação da energia mecânica é uma consequência direta do fato de a força total sobre a partícula ser conservativa. Esse é o motivo pelo qual tais forças (forças cujos trabalhos num deslocamento só dependem dos pontos inicial e final desse deslocamento) são chamadas forças “conservativas”. Com essa escolha de nome, podemos afirmar que: *a energia mecânica se conserva se a força total é conservativa*. Embora essa afirmativa esteja correta, ela não traduz, como veremos na Aula 25, a condição mais geral para que haja conservação da energia mecânica de uma partícula num movimento qualquer.

Já dissemos que a energia cinética também é chamada energia de movimento. A razão para isso é simples: deve-se ao fato de que ela existe somente quando há movimento, isto é, velocidade, e aumenta quando o módulo da velocidade aumenta. Em contrapartida, a energia potencial não depende da velocidade da partícula, mas apenas de sua posição. Por esse motivo, a energia potencial é também chamada energia de posição. A conservação da energia faz com que uma diminuição da energia potencial provoque aumento da energia de movimento. Esse fato é descrito dizendo-se que a energia potencial mede a possibilidade de gerar movimento, possibilidade essa que ocorre quando ela diminui, gerando o aumento da energia de movimento. Esse balanço entre energia cinética e potencial deu origem ao adjetivo “potencial”, que qualifica esta última e significa “que tem possibilidade”.

Exemplo 22.5

Neste exemplo, vamos considerar o movimento vertical de uma partícula de massa m sob a ação de uma força total dada pela soma de duas forças conservativas, a saber, uma força elástica e a força gravitacional exercida pela Terra, isto é, seu peso. Nesse caso, teremos duas energias potenciais, uma elástica, denotada por U_e e outra gravitacional, denotada por U_g . Consideremos uma mola, cujo extremo superior está fixo ao teto e no extremo inferior tem presa uma partícula que pode se movimentar apenas na direção vertical. Escolheremos o eixo \mathcal{OY} como vertical, apontando para baixo, por conveniência, e cuja origem está a uma distância ℓ_0 abaixo do teto, sendo ℓ_0 o comprimento natural da mola. Suponha que, no instante inicial, a partícula esteja na origem com velocidade $v_{y0} > 0$, ou seja, para baixo, de acordo com a nossa escolha (veja a parte (a) da Figura 22.2).

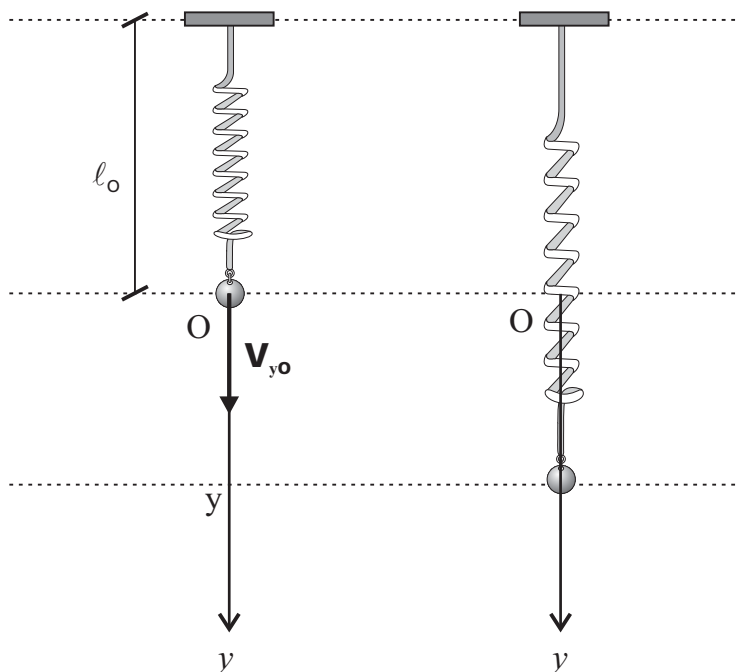


Figura 22.2: (a) Instante inicial do movimento, no qual a mola não está distendida ou comprimida; (b) situação na qual a partícula está na posição genérica $y > 0$.

Calculemos, inicialmente, as expressões das energias potenciais, elástica e gravitacional. Para isso, devemos escolher os padrões. Por conveniência, escolheremos ambos na origem, de modo que, pela definição de energia potencial, dada por (22.2), temos

$$\begin{aligned} U_e(y) &= \int_y^0 (-ky') dy' = \frac{1}{2}ky^2 \\ U_g(y) &= \int_y^0 mg dy' = -mgy. \end{aligned} \quad (22.23)$$

O sinal negativo nesta última equação é consequência direta de termos escolhido para baixo o sentido positivo do eixo \mathcal{OY} e, com isso, a componente do peso ao longo desse eixo vale $+mg$ e não $-mg$, como acontece quando escolhemos o sentido positivo para cima.

Do Teorema da Conservação da Energia Mecânica, sabemos que, ao longo de um movimento possível da partícula, é constante a soma de sua energia cinética com as energias potenciais existentes (o fato de existirem duas energias potenciais no problema não tira a validade do teorema, como fica claro durante a solução do problema proposto 2). Ou seja, temos

$$\frac{1}{2}mv_y^2 + U_e(y) + U_g(y) = E = \frac{1}{2}mv_{y0}^2 ,$$

onde escrevemos a energia mecânica E como a soma de suas energias potenciais e sua energia cinética no instante inicial, uma vez que é uma grandeza conservada. Substituindo na última equação as expressões de $U_e(y)$ e $U_g(y)$, obtemos

$$\frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}ky^2 - mgy = \frac{1}{2}mv_{y0}^2 . \quad (22.24)$$

A última equação já nos permite obter, por exemplo, a energia cinética da partícula quando ela se encontra numa altura genérica, isto é, numa posição genérica de \mathcal{OY} . Com isso, temos o módulo de sua velocidade para qualquer valor de y , dentre as posições ocupadas pela partícula. Note que a partícula passa várias vezes pela mesma posição, ora com velocidade positiva, isto é, para baixo, ora com velocidade negativa, isto é, para cima. Rearranjando os termos de (22.24), obtemos para o módulo de v_y :

$$|v_y| = \sqrt{v_{y0}^2 + 2gy - \frac{k}{m}y^2} . \quad (22.25)$$

Podemos, ainda, obter informações muito relevantes sobre o movimento da partícula, analisando a última equação. Por exemplo, devido à presença da raiz quadrada, a partícula só pode estar em posições y tais que o radicando seja não-negativo, isto é:

$$v_{y0}^2 + 2gy - \frac{k}{m}y^2 \geq 0 .$$

Como se trata de um polinômio do segundo grau, em que o termo quadrático tem coeficiente negativo, esta desigualdade é satisfeita apenas entre as raízes de tal polinômio e também nas raízes. Pode-se mostrar, então, que o movimento em questão se passa no intervalo do eixo \mathcal{OY} dado por

$$\frac{mg}{k} \left\{ 1 - \sqrt{1 + \frac{kv_{y0}^2}{mg^2}} \right\} \leq y \leq \frac{mg}{k} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{kv_{y0}^2}{mg^2}} \right\} . \quad (22.26)$$

Antes de prosseguir, que tal tentar demonstrar esse resultado? Essa demonstração é justamente o que está pedido no problema proposto 6.

Para o caso particular em que $v_{y0} = 0$, a equação anterior se reduz a

$$0 \leq y \leq \frac{2mg}{k} . \quad (22.27)$$

Nesse caso, a partícula oscila entre as posições $y = 0$ e $y = 2mg/k$. Como vimos em aulas anteriores, essa partícula descreve um movimento harmônico simples em torno da posição de equilíbrio $y_e = mg/k$. O peso, por ser uma força constante, apenas desloca a posição de equilíbrio da origem (situação em que a mola tem seu comprimento natural) para $y_e = mg/k$.

Antes de encerrarmos esta seção, examinaremos a questão da escolha da posição-padrão na definição de energia potencial. Na função energia potencial U , definida pela equação (22.2), a posição-padrão escolhida é x_p . Se escolhermos uma outra posição x'_p como padrão, estaremos definindo uma outra função energia potencial, isto é, uma função U' dada por:

$$U'(x) = W(x, x'_p) = \int_x^{x'_p} F_x dx . \quad (22.28)$$

Surge, então, uma pergunta natural: qual é a relação entre a função energia potencial U , definida em (22.2), e a função energia potencial U' , definida em (22.28)? Para responder a essa questão, basta usar as definições de U e U' e a propriedade (21.50), e escrever:

$$\begin{aligned} U'(x) &= W(x, x'_p) \\ &= W(x, x_p) + W(x_p, x'_p) \\ &= U(x) + W(x_p, x'_p) , \end{aligned} \quad (22.29)$$

ou seja,

$$U'(x) = U(x) + W(x_p, x'_p) . \quad (22.30)$$

Nesse resultado, vemos que o trabalho $W(x_p, x'_p)$ é dado em termos de dois pontos fixos x_p e x'_p , isto é, $W(x_p, x'_p)$ é uma constante. Desse modo, temos:

energias potenciais associadas a uma mesma força conservativa, definidas com posições-padrão distintas, diferem entre si por uma constante aditiva.

A posição-padrão usada na definição da energia potencial é escolhida arbitrariamente, não podendo ter influência no movimento da partícula e, de modo

geral, em qualquer fenômeno físico. Podemos fazer escolhas distintas para a posição-padrão e, com isso, gerar energias potenciais com valores distintos em uma mesma posição. Essas diferentes energias potenciais devem ser totalmente equivalentes na descrição dos movimentos de uma partícula. De fato, esses movimentos são determinados pela força total que age sobre a partícula e, no caso de ser conservativa, tal força é dada pelo negativo da derivada da energia potencial com relação à posição, como vimos em (22.15). Como duas funções que diferem por uma constante têm a mesma derivada, as diferentes energias potenciais, que diferem apenas pela escolha da posição-padrão, dão origem a uma mesma força e, portanto, a uma mesma descrição dos movimentos da partícula.

Também é fácil verificar que a substituição da energia potencial U pela energia potencial U' muda o valor da constante que aparece em (22.19), no Teorema da Conservação da Energia Mecânica, mas não afeta o conteúdo desse teorema: a soma da energia cinética com a energia potencial U' continua a ser uma constante de movimento. Dito de outro modo, a mudança da posição-padrão da energia potencial muda, por uma constante aditiva, o valor da energia potencial e da energia mecânica, e essa continua sendo uma constante de movimento, embora com um novo valor constante. Você poderá verificar, em todas as situações que examinarmos, que não são os valores da energia potencial e da energia mecânica que têm conteúdo físico, mas sim as variações desses valores e as derivadas dessas energias.

Para facilitar os comentários e enunciados, no resumo, no questionário e nos problemas propostos dessa aula, fica subentendido que os movimentos considerados são retilíneos.

Resumo

Se uma força é conservativa, podemos associar a ela, e à partícula sobre a qual ela age, uma quantidade que depende da posição em que se encontra a partícula, que é chamada energia potencial da partícula. Energia potencial da partícula em uma certa posição, submetida a uma força conservativa, é o trabalho que seria realizado por essa força se a partícula fosse da posição considerada até uma posição fixada como padrão. Diferentes escolhas da posição-padrão dão origem a energias potenciais que diferem entre si por uma constante aditiva sem importância no estudo do movimento da partícula. Portanto, o valor da energia potencial não é importante. Na verdade, são diferenças entre os valores da energia potencial entre dois pontos que têm significado físico.

A força gravitacional que age sobre uma partícula próxima à superfície da Terra, que chamamos usualmente peso da partícula, é constante e, portanto, conservativa. Considerando um ponto-padrão na superfície da Terra, o trabalho realizado sobre a partícula, pelo seu peso, se ela for da posição em que se encontra até a posição padrão, é igual ao produto do módulo do peso pela altura da partícula em relação à superfície da Terra. Esse trabalho é chamado energia potencial gravitacional da partícula (próxima à superfície da Terra). Dada uma energia potencial, quantidade que depende da posição da partícula, podemos obter a força conservativa que lhe deu origem. A componente da força na reta do movimento é menos a derivada de tal energia em relação à coordenada da posição.

Se a força total que age sobre uma partícula é conservativa, a soma das energias potencial e cinética da partícula é uma constante para cada escolha de condições iniciais do movimento. Essa soma é chamada energia mecânica da partícula. Qualquer quantidade que dependa da posição e da velocidade da partícula, e que permaneça constante durante todo o seu movimento, é chamada constante de movimento da partícula, no problema em consideração. Constantes de movimento também são chamadas grandezas conservadas. A energia mecânica é uma constante de movimento, no caso em que a força total sobre a partícula é conservativa. Esse resultado, deduzido a partir da Segunda Lei de Newton, é conhecido como Teorema da Conservação da Energia Mecânica de uma partícula. Sendo constante a energia mecânica, a energia cinética, que é a energia de movimento da partícula, cresce sempre que a energia potencial diminui. Desse modo, entendemos que a energia potencial pode se transformar em energia de movimento, e essa possibilidade é descrita pelo adjetivo “potencial”, usado na denominação dessa energia.

Questionário

1. Defina energia potencial de uma partícula. Dê exemplos.
2. Como se obtém a força a partir da energia potencial a ela associada?
3. O que é constante de movimento?
4. Defina energia mecânica de uma partícula.
5. Enuncie o Teorema da Conservação da Energia Mecânica de uma partícula.
6. Em que sentido se deve entender o adjetivo utilizado na expressão “energia potencial”?

7. Como diferem energias potenciais de uma mesma força conservativa definidas com diferentes posições-padrão?
8. Qual seria a expressão da força exercida sobre a partícula de massa m do exemplo 22.3, caso ela estivesse no semi-eixo negativo \mathcal{OX} ?

Problemas propostos

1. A partir da definição de energia potencial, dada por (22.2), mostre que

$$U(x_1) - U(x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{F}_x(x') dx' .$$

2. Considere uma partícula de massa m que se movimenta ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação de uma força total dada pela soma de duas forças conservativas, $\mathcal{F}_x^{(1)}$ e $\mathcal{F}_x^{(2)}$. Sejam $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$ as respectivas energias potenciais. Mostre que, ao longo de um movimento possível da partícula, é constante a soma de sua energia cinética com essas duas energias potenciais, ou seja,

$$\frac{1}{2}mv_x^2 + U^{(1)}(x) + U^{(2)}(x) = \text{constante} ,$$

onde

$$U^{(1)}(x) = \int_x^{x_{p1}} \mathcal{F}_x^{(1)}(x') dx' \quad \text{e} \quad U^{(2)}(x) = \int_x^{x_{p2}} \mathcal{F}_x^{(2)}(x') dx' .$$

Vale a pena comentar que as posições x_{p1} e x_{p2} , tomadas como padrão para as energias potenciais $U^{(1)}$ e $U^{(2)}$, respectivamente, não têm de ser, necessariamente, as mesmas.

3. Considere os movimentos retilíneos de um elétron ao longo do eixo \mathcal{OX} . Sobre ele atua uma força eletrostática dada por $\mathbf{F} = -eE_0\mathbf{u}_x$, onde $-e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ é a carga do elétron e $E_0 = 5,0 \times 10^7 \text{ V/m}$ é a magnitude do campo eletrostático. Suponha, ainda, que o campo não varie com o tempo, e despreze todas as outras forças, de modo que a força eletrostática seja a força total sobre o elétron.

- (a) Escolhendo $x_p = 0$ como a posição-padrão para a energia potencial eletrostática, escreva uma expressão para a energia mecânica do elétron em termos de sua posição nesse eixo, x , e de sua velocidade v_x .

- (b) Supondo que o elétron esteja, inicialmente, em repouso na origem, calcule, utilizando o Teorema da Conservação da Energia, a sua energia cinética após percorrer uma distância de 1,0 m (situações como as descritas nesse problema ocorrem, por exemplo, em tubos de microscópios eletrônicos, de alto vácuo).
4. Uma pequena esfera é lançada verticalmente para cima de uma altura h_0 do solo com velocidade inicial de módulo v_0 . Utilizando, diretamente, o Teorema da Conservação da Energia, calcule:
- (a) o módulo da velocidade da partícula quando ela estiver a uma altura genérica h do solo;
 - (b) a altura máxima atingida pela partícula;
 - (c) o módulo da velocidade da partícula quando ela atingir o solo.

Confira os resultados obtidos neste problema com aqueles encontrados por meio de cálculos elementares com as equações válidas para um MRUV.

5. Uma partícula de massa m se move ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação de uma força total dada por $F_x = -kx$, onde $k > 0$. No instante inicial, ela se encontra na posição x_0 com velocidade v_{x0} .
- (a) Utilizando o Teorema da Conservação da Energia, determine o módulo da velocidade da partícula quando ela estiver numa posição genérica no eixo \mathcal{OX} .
 - (b) Utilizando um raciocínio análogo ao feito no exemplo 22.5, mostre, a partir do resultado do item anterior, que a partícula pode se movimentar, apenas, no intervalo

$$-A \leq x \leq A ; \quad \text{onde} \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{mv_{x0}^2}{k}}.$$

- (c) Interprete a quantidade A .
6. Demonstre a equação (22.26) e interprete o resultado.
7. O objetivo deste problema é entender a relação existente entre os resultados, aparentemente contraditórios, obtidos para a energia potencial gravitacional nos exemplos 22.1 e 22.3 (veja, por exemplo, as equações (22.5) e (22.10)). Para isso, consideremos uma situação análoga à descrita no exemplo 22.3, ou seja, consideremos a Terra como uma esfera de raio R , massa M , cujo centro está fixo na origem do eixo \mathcal{OX} e uma partícula de massa m que pode

ocupar qualquer posição $x \geq R$ desse eixo. Como mencionamos em aulas anteriores, para $x \geq R$, é como se toda a massa da Terra estivesse concentrada na origem. Com a escolha $x_p = \infty$, a energia potencial gravitacional é dada, nesse caso, por $U(x) = -GMm/x$, com $(x \geq R)$.

- (a) Seja $U'(x)$ a energia potencial correspondente à escolha $x'_p = R$. Determine a expressão de $U'(x)$.
- (b) A fim de analisar como fica a expressão obtida no item anterior, para posições da partícula próximas à superfície terrestre, substitua, nessa expressão, $x = R + h$, onde $h \ll R$. Usando, então, a aproximação $(1 + \delta)^{-1} \approx 1 - \delta$, válida para $|\delta| \ll 1$, mostre que

$$U'(x = R + h) \approx mgh; \quad \text{onde} \quad g = \frac{GM}{R^2}.$$

Vemos, portanto, que não há contradição alguma entre as fórmulas (22.5) e (22.10). Simplesmente, a equação (22.5) está associada a uma escolha de posição-padrão diferente para a energia potencial gravitacional ($x'_p = R$ em lugar de $x_p = \infty$), além de considerar uma aproximação válida sempre que a partícula não se afastar muito da superfície terrestre.

8. Demonstre a relação $F_x = -dU/dx$ seguindo o procedimento: escreva, a partir da definição de energia potencial dada pela equação (22.2), expressões para $U(x + \Delta x)$ e $U(x)$; subtraia essas expressões, isto é, calcule $\Delta U(x) = U(x + \Delta x) - U(x)$ e, utilizando as propriedades de integração apropriadas, mostre que $\Delta U(x) \approx -F_x \Delta x$. Tomando o limite $\Delta x \rightarrow 0$ obtenha, finalmente, $F_x = -dU/dx$.
9. Considere o movimento de uma partícula de massa m ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação de uma força total dada por $F_x^{(c)} + F_x^{(nc)}$, onde $F_x^{(c)}$ é uma força conservativa e $F_x^{(nc)}$ é a soma de todas as forças não-conservativas que atuam sobre a partícula. Devido à presença das forças não-conservativas, a energia mecânica da partícula não mais se conserva ao longo do tempo. Demonstre, então, que

$$E_2 - E_1 = W^{(nc)}(t_1, t_2; f_x),$$

onde E_2 é a energia mecânica no instante t_2 , E_1 é a energia mecânica no instante t_1 e $W^{(nc)}(t_1, t_2; f_x)$ é o trabalho realizado pelas forças não-conservativas, ao longo do movimento f_x , no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$. Numa forma mais explícita, a equação anterior é reescrita como

$$\left\{ \frac{1}{2}mv_{x2}^2 + U(x_2) \right\} - \left\{ \frac{1}{2}mv_{x1}^2 + U(x_1) \right\} = \int_{t_1(f_x)}^{t_2} F_x^{(nc)} v_x dt,$$

onde x_2 e x_1 são as posições ocupadas pela partícula nos instantes t_2 e t_1 , respectivamente, e v_{x2} e v_{x1} , as respectivas velocidades da partícula nesses mesmos instantes.

Por distensão de uma mola queremos dizer a diferença entre seu comprimento quando está esticada e seu comprimento natural. De modo análogo, compressão de uma mola significa a diferença entre seu comprimento natural e seu comprimento quando está comprimida.

10. Considere uma mola ideal de constante elástica k e um pequeno bloco de massa m preso a uma das extremidades da mola. A sua outra extremidade está presa a uma parede e o sistema massa-mola está sobre uma mesa áspera, de modo que existe atrito entre a sua superfície e o bloco. Puxa-se o bloco, distendendo-se a mola até que sua distensão atinja o valor a . Nesse instante, tomado como t_1 , abandona-se o bloco, a partir do repouso, dessa posição. Após mover-se em linha reta sobre a mesa, o bloco volta a ficar em repouso no instante t_2 , quando a distensão da mola tem um valor $b < a$.
 - (a) Determine o trabalho da força total sobre o bloco entre o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$.
 - (b) Determine os trabalhos da força elástica e da força de atrito cinético sobre o bloco nesse mesmo intervalo de tempo.
 - (c) Calcule o coeficiente de atrito cinético relacionado às superfícies do bloco e da mesa.
11. Consideraremos, aqui, um movimento análogo ao descrito no exemplo 22.5, mas levando em consideração a resistência do ar. Suponha, então, que uma pequena esfera de massa m , presa ao extremo inferior de uma mola ideal de constante elástica k , cujo extremo superior está preso ao teto, é abandonada, a partir do repouso, de uma posição tal que, nesse instante, a mola não está distendida nem comprimida. Designemos por t_1 esse instante inicial. Após oscilar verticalmente durante algum tempo, devido aos efeitos dissipativos da resistência do ar, a esfera volta a ficar em repouso a partir do instante t_2 , numa posição na qual, obviamente, a força total sobre ela é nula (pois, do contrário, não permaneceria em repouso nessa posição).
 - (a) Determine o trabalho realizado pela força total sobre a esfera no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$.
 - (b) Determine os trabalhos realizados sobre a esfera pela força elástica, pelo seu peso e pela força de resistência do ar nesse mesmo intervalo de tempo.
12. Considere um movimento de queda livre de uma esfera, que é lançada do solo com uma certa velocidade inicial. Não despreze, neste problema, o

trabalho dissipativo realizado pela resistência do ar sobre a esfera. Nesse caso, o tempo de subida é maior, menor ou igual ao tempo de descida?

Sugestão: note que, excetuando-se o ponto mais alto de sua trajetória, a esfera passa duas vezes por cada ponto de sua trajetória. Compare as energias mecânicas da partícula em dois instantes diferentes, mas tais que ela esteja a uma mesma altura do solo (num deles ela está subindo, e no outro, descendo). O que você pode concluir sobre os módulos de sua velocidade de subida e de sua velocidade de descida nesse ponto?

13. Considere um bloco deslizando sem atrito sobre uma rampa inclinada que faz um ângulo θ com o plano horizontal. Seja \mathcal{OY} um eixo vertical e apontando para cima. Suponha que no instante t_1 o bloco esteja num ponto sobre a rampa cuja coordenada ao longo do eixo \mathcal{OY} seja y_1 e tenha velocidade paralela à rampa para baixo e de módulo v_1 . Num instante $t_2 > t_1$ o bloco tem coordenada y_2 e velocidade de módulo v_2 . Demonstre, a partir do Teorema da Conservação da Energia, que vale a equação de Torricelli para o movimento do bloco, ou seja, mostre que

$$v_2^2 - v_1^2 = 2g \sin\theta \Delta s,$$

onde $g \sin\theta$ é o módulo da aceleração do bloco durante seu movimento e Δs é o módulo de seu deslocamento entre os instantes t_1 e t_2 . Esse é um resultado interessante, pois a equação de Torricelli foi originalmente obtida para corpos em queda livre. No entanto, isso não deve ser motivo de espanto. Como a aceleração de um bloco deslizando sobre uma rampa inclinada é constante, esse tipo de movimento simula o movimento de queda livre, mas com a vantagem de podermos escolher a “aceleração da queda livre” do bloco que quisermos, bastando, para isso, alterar apropriadamente a inclinação da rampa inclinada.

14. Considere, novamente, o movimento descrito no problema anterior.
- (a) Utilizando um mesmo sistema de eixos, faça os gráficos das energias cinética, potencial e mecânica do bloco *versus* a coordenada y do bloco. Considere, apenas, o intervalo $[y_1, y_2]$.
 - (b) Utilizando um mesmo sistema de eixos, faça os gráficos das energias cinética, potencial e mecânica do bloco *versus* o tempo, considerando, apenas, o intervalo $[t_1, t_2]$.

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de responder a todo o questionário e de resolver a maioria dos problemas propostos. No entanto, você pode encontrar alguma dificuldade nos problemas 7, 8 e 9, por serem os mais difíceis e exigirem, em alguns casos, manipulações matemáticas envolvendo integrações ou expansões binomiais. O problema 12, embora não envolva muitos cálculos, exige um raciocínio muito sofisticado, razão pela qual incluímos uma sugestão que deve ser seguida: caso você não consiga resolver esses quatro problemas numa primeira tentativa, não se assuste. Se tiver feito a maioria dos outros sem muita dificuldade, pode passar para a próxima aula e retornar a esses problemas quando dispuser de mais tempo.

Obviamente, também sugerimos que você discuta estes e quaisquer outros problemas com os tutores locais e a distância; se for preciso, até mesmo com o professor responsável pelo curso.

Aula 23 – Aplicações da conservação da energia mecânica em movimentos retilíneos

Objetivos

- Aprender a traçar o gráfico de força *versus* posição a partir do gráfico de energia potencial *versus* posição e, nele, saber identificar as posições de equilíbrio estável, instável e indiferente.
- Analisar, qualitativamente, os movimentos unidimensionais de uma partícula sob a ação de uma força total conservativa a partir do gráfico da função energia potencial e da conservação da energia mecânica. Entender, a partir dessa discussão, o que são pontos de retorno.
- Obter uma fórmula para o período de movimentos oscilatórios em termos da função energia potencial e da energia mecânica da partícula.
- Determinar a função-movimento de uma partícula sob a ação de uma força total conservativa diretamente a partir da conservação da energia.

Introdução

Como já deve estar claro para você, um dos objetivos principais da Mecânica é a obtenção dos possíveis movimentos de um sistema, uma vez conhecidas todas as forças relevantes para o problema, isto é, as forças de interação entre as próprias partículas do sistema e, no caso de o sistema não ser isolado, também as forças exercidas sobre as partículas do sistema por partículas que não pertencem a ele. Cumprir esta tarefa significa, como vimos, encontrar as soluções de equações diferenciais de segunda ordem (lembre-se de que a Segunda Lei de Newton aplicada ao movimento de uma dada partícula envolve a aceleração dessa partícula e esta, por sua vez, é definida como a segunda derivada, em relação ao tempo, da posição da partícula). Como fizemos até o momento, vamos nos restringir ao estudo do movimento de uma única partícula. A análise do movimento de um sistema de partículas será feita no Módulo 4, deste curso.

Dessa forma, encontrar as funções-movimento possíveis de uma única partícula num movimento retilíneo significa resolver uma única equação diferencial de

segunda ordem. Isso é equivalente a fazer duas integrações embora, em muitos casos, tais integrações não apareçam explicitamente, pois há diversas técnicas para se resolver equações diferenciais, dependendo do tipo da equação em questão. Mas para fixar as idéias, pois este é um ponto importante, lembre-se do caso em que a força total sobre a partícula é uma constante F_0 . Nesse caso, temos $\ddot{x} = F_0/m$, onde m é a massa da partícula. Integramos uma vez no tempo para obtermos a função-velocidade $v_x = (F_0/m)t + v_{x0}$ e uma vez mais para obtermos a função-movimento $x = (F_0/2m)t^2 + v_{x0}t + x_0$.

Agora que você está convencido de que o esforço a ser feito para determinar o movimento de uma partícula consiste em fazer duas integrações, o que você diria se, para certos tipos de forças, existisse um método que fornecesse as funções-movimento desejadas com apenas uma única integração? Pois esse método existe! Como veremos, no caso em que a força total sobre a partícula é conservativa e, conseqüentemente, a energia mecânica da partícula é uma constante de movimento, basta fazer uma única integração para obtermos as funções-movimento desejadas. O ponto de partida é a própria expressão matemática da lei da conservação da energia mecânica da partícula, isto é, $E = K + U$. Note que esta expressão não mais envolve a aceleração da partícula, mas apenas sua velocidade e sua posição. É como se uma integral já tivesse sido feita (de fato, uma integração foi feita para se chegar a essa lei de conservação, como mostrado na aula anterior). Em outras palavras, podemos afirmar que

partir da lei da conservação da energia mecânica, quando permitido, significa já estar com “meio caminho andado” na tarefa de determinar os movimentos possíveis de uma partícula.

Obviamente, existem aplicações mais diretas da lei da conservação da energia mecânica. Para mencionar uma, imagine que sejam conhecidos o módulo da velocidade da partícula numa certa posição e a função energia potencial U . Suponha, ainda, que a força total sobre a partícula seja $F_x = -dU/dx$. Nesse caso, podemos determinar o módulo de sua velocidade em qualquer outra posição igualando, simplesmente, as expressões de $K + U$ nas duas posições. Dependendo da situação, o sentido da velocidade se torna óbvio. Por exemplo, se abandonarmos uma partícula com velocidade nula de uma altura h_1 do solo, o módulo de sua velocidade, quando ela se encontra a uma altura $h_2 < h_1$ do solo, v_2 , é obtido da conservação da energia mecânica, como segue:

$$0 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \quad \longrightarrow \quad v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}.$$

Não há dúvida de que a direção da velocidade, quando a partícula está a uma altura h_2 do solo, é vertical e seu sentido é para baixo (embora essas informações não venham da conservação da energia).

No entanto, não devemos esquecer que a importância da lei da conservação da energia mecânica vai muito além de simples aplicações como a que acabamos de apresentar. Na verdade, tal lei de conservação nos permite reduzir o problema de encontrar as possíveis funções-movimento de uma partícula a uma única integração (diz-se, também, que o problema foi reduzido a uma única quadratura).

Antes, porém, de utilizar a lei da conservação da energia para obter, por meio de uma integração, a função-movimento de uma partícula, mostraremos como se pode obter informações relevantes sobre o movimento de uma partícula sob a ação de uma força total conservativa a partir do gráfico de $U(x)$ versus x . Essa discussão qualitativa será bastante instrutiva pois nos permitirá introduzir alguns ingredientes importantes na compreensão dos movimentos possíveis de uma partícula, como os conceitos de movimentos limitado e ilimitado, os conceitos de posições de equilíbrio estável, instável e indiferente e a definição de ponto de retorno.

Análise qualitativa do movimento retilíneo sob a ação de uma força total conservativa

Considere uma partícula de massa m , que se move ao longo do eixo \mathcal{OX} , sob a ação de uma força total conservativa F_x , associada a uma energia potencial U . Aprendemos, na aula anterior, que a relação entre F_x e U é dada por

$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \quad (23.1)$$

Além disso, por ser conservativa a força total sobre a partícula, a sua energia mecânica é uma constante de movimento, isto é, a soma de sua energia cinética com sua energia potencial em qualquer instante tem o mesmo valor durante todo o movimento:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + U = \text{cte}. \quad (23.2)$$

A partir das duas últimas equações e do gráfico de $U(x)$ versus x pode-se fazer uma discussão qualitativa do movimento da partícula, qualquer que seja a forma desse gráfico. Mesmo nos casos em que a expressão explícita de $U(x)$ torne a solução analítica do problema muito complicada, as duas equações anteriores nos permitirão fazer uma análise qualitativa e obter informações importantes a respeito dos movimentos possíveis da partícula.

Gráficos de U e F_x e pontos de equilíbrio

É conveniente, no entanto, aprendermos inicialmente como traçar o gráfico de F_x versus x a partir do gráfico de $U(x)$ versus x . Para tornar a discussão o mais genérica possível, não vamos considerar nenhuma função energia potencial específica, mas sim uma função cujo gráfico exiba todas as características importantes presentes na maioria dos problemas. Nesse sentido, na parte superior da Figura 23.1 está desenhado o gráfico de uma energia potencial genérica. Deliberadamente, pusemos o gráfico de F_x versus x logo abaixo do gráfico de $U(x)$ versus x e, em ambos os gráficos, marcamos os mesmos pontos ao longo do eixo \mathcal{OX} , para que possamos interpretar, graficamente, a relação $F_x = -dU/dx$ numa posição qualquer da partícula.

Como dU/dx é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $U(x)$ ou, numa linguagem mais simples, é a inclinação do gráfico num dado ponto, concluímos que a força sobre a partícula é positiva, isto é, para a direita, sempre que a inclinação do gráfico de $U(x)$ for negativa; é negativa, isto é, para a esquerda, sempre que a inclinação do gráfico de $U(x)$ for positiva e, finalmente, é nula, sempre que a inclinação do gráfico de $U(x)$ for nula. Esses resultados podem ser expressos de forma mais compacta e interessante, como mostraremos a seguir.

Considere dois pontos do eixo \mathcal{OX} muito próximos entre si, x e $x' > x$, de modo que, a partir da equação (23.1), possamos escrever

$$\Delta U \approx -F_x \Delta x$$

e, conseqüentemente,

$$U(x') \approx U(x) - F_x(x' - x),$$

onde F_x é a força sobre a partícula na posição x . Se $F_x > 0$, temos, então, $U(x') < U(x)$ e, como $x' > x$, vemos, nesse caso, que F_x aponta no sentido de decréscimo de $U(x)$. Se $F_x < 0$, temos, agora, $U(x) < U(x')$ e, como $x < x'$, vemos, também nesse caso, que F_x aponta no sentido de decréscimo de $U(x)$. Podemos afirmar, portanto, que,

em decorrência da relação $F_x = -dU/dx$, a força F_x aponta sempre no sentido de decréscimo da energia potencial U .

Munidos dessas informações, estamos aptos a entender como o gráfico da parte inferior da Figura 23.1, isto é, o gráfico de F_x versus x , foi traçado. Vejamos como isso foi feito, passo a passo.

Para pontos pertencentes a um intervalo aberto, no qual a função energia potencial é constante, a força não aponta para a direita, pois U não decresce para a direita; F_x também não aponta para a esquerda, pois U tampouco decresce para a esquerda; portanto, F_x deve ser nula nesse intervalo. A demonstração apresentada ao lado foi feita supondo $x' > x$. No entanto, as mesmas conclusões são obtidas supondo $x' < x$ (verifique como exercício)

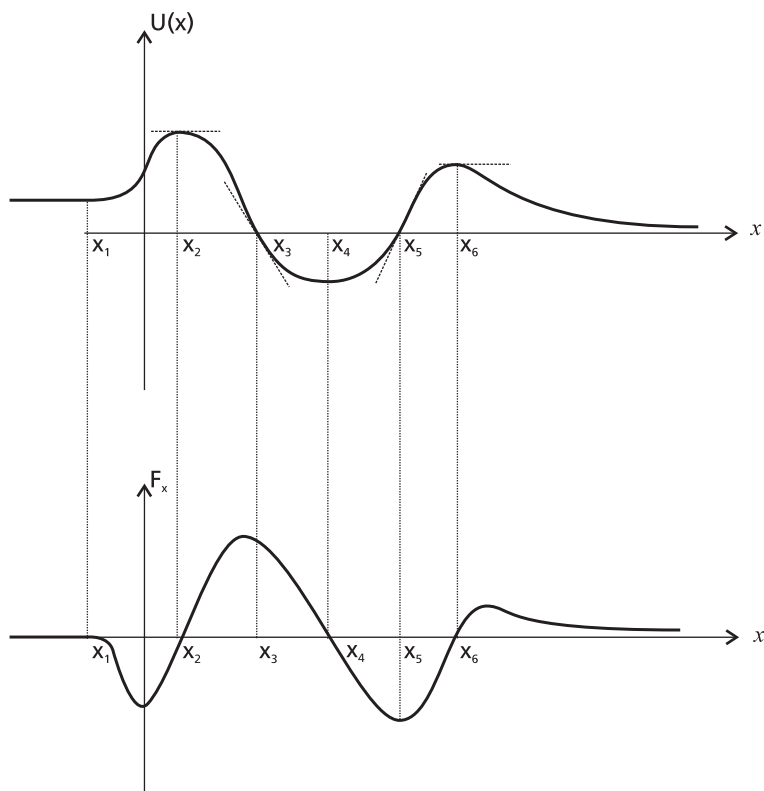


Figura 23.1: Na parte superior desta figura está traçado o gráfico de $U(x)$ versus x , enquanto na parte inferior, o gráfico de F_x versus x .

No intervalo $x \leq x_1$, a energia potencial $U(x)$ permanece constante e, com isso, a força F_x nesse intervalo é nula. No intervalo $x_1 < x < x_2$ a inclinação de $U(x)$ é sempre positiva. À medida que vamos de x_1 para x_2 , vemos que a inclinação de $U(x)$ aumenta até um valor máximo, que ocorre na origem e depois diminui, tendendo a zero, à medida que x tende para x_2 . Com isso, nesse intervalo, F_x é sempre negativa, passando por um valor mínimo na origem e tendendo a zero, à medida que x tende a x_2 . Como em x_2 temos $dU/dx = 0$, F_x nesse ponto é nula. Já no intervalo $x_2 < x < x_3$, a inclinação de $U(x)$ é sempre negativa e, portanto, F_x é sempre positiva. Acompanhando como varia essa inclinação nesse intervalo, vemos que a força F_x aumenta, passando por um valor máximo num ponto entre x_2 e x_3 , próximo a x_3 e tende a zero, à medida que x tende a x_4 . Note que em x_3 a força F_x não é nula pois, mesmo sendo nula a energia potencial nesse ponto ($U(x_3) = 0$), a inclinação de $U(x)$ não é nula nesse ponto, isto é, $\frac{dU}{dx}(x_3) \neq 0$. No entanto, no ponto x_4 , a inclinação de $U(x)$ é nula, o que corresponde a uma força F_x nula nesse ponto. No intervalo $x_4 < x < x_6$, a inclinação de $U(x)$ é sempre positiva, de modo que, nesse intervalo, a força F_x é sempre negativa. Observe que, embora $U(x_5) = 0$, a força em x_5 não é nula pois, analogamente

ao que ocorre em x_3 , $\frac{dU}{dx}(x_5) \neq 0$. Aliás, uma breve inspeção no gráfico de $U(x)$ nos permite concluir que em x_5 a inclinação de $U(x)$ atinge seu valor máximo no intervalo $x_4 < x < x_6$, de modo que no gráfico da força temos um mínimo local nesse ponto. Em x_6 , por motivos que agora já devem estar óbvios, a força é nula e, finalmente, no intervalo $x > x_6$ a inclinação de $U(x)$ é negativa, passando por um valor mínimo (seu valor mais negativo) e tornando-se menos negativa, tendendo a zero, à medida que $x \rightarrow \infty$. Conseqüentemente, nesse último intervalo, a força passa por um máximo e depois tende a zero no infinito.

Se a partícula for abandonada com velocidade nula num ponto qualquer do eixo \mathcal{OX} , ela iniciará o seu movimento no sentido da força F_x . Há, porém, pontos nos quais essa força é nula. Tais pontos são chamados **pontos de equilíbrio** ou **posições de equilíbrio**, pois quando uma partícula é colocada num desses pontos com velocidade nula, ela permanece em repouso nesse ponto. No entanto, há diferentes tipos de posições de equilíbrio, dependendo de como varia a energia potencial nas vizinhanças desses pontos. De fato, podemos distinguir três tipos de posições de equilíbrio, dependendo de como varia a força ao redor desses pontos.

O primeiro deles, e de suma importância na discussão de movimentos vibratórios, é quando o ponto de equilíbrio corresponde a um mínimo local da energial potencial, como ocorre, por exemplo, com a posição x_4 marcada nos gráficos da Figura 23.1. Nesse caso, tanto à direita quanto à esquerda do ponto de equilíbrio, a energia potencial é maior do que no ponto de equilíbrio, o que corresponde a uma força F_x apontando sempre para o ponto de equilíbrio. Ou seja, se afastarmos ligeiramente a partícula de um ponto de equilíbrio desse tipo, a força F_x tenderá a trazer a partícula de volta a essa posição, como se tentasse restaurá-la. Esse tipo de posição de equilíbrio é chamado **equilíbrio estável**. Por esse motivo, a força F_x nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio estável é chamada **força restauradora**.

Na maioria das vezes, quando são pequenos os deslocamentos da posição de equilíbrio estável, as forças restauradoras são proporcionais a esses deslocamentos (satisfazem à lei de Hooke, como ocorre nas molas cujas distensões e compressões são bem pequenas). No entanto, há casos em que, mesmo para pequenos desvios da posição de equilíbrio estável, a força restauradora não satisfaz à lei de Hooke (veja o problema proposto 3). Vale a pena comentar, ainda, que a existência de um mínimo local para a energia potencial significa que, no gráfico de U , há um **poço de potencial** num pequeno intervalo contendo esse ponto de mínimo.

Há pontos de equilíbrio que correspondem a um máximo local da energia potencial, como ocorre, por exemplo, com os pontos x_2 e x_6 marcados nos gráficos da Figura 23.1. Nesse caso, tanto à direita quanto à esquerda do ponto

de equilíbrio, a energia potencial é menor do que no ponto de equilíbrio, o que corresponde a uma força F_x apontando sempre no sentido oposto ao do ponto de equilíbrio. Conseqüentemente, se afastarmos ligeiramente a partícula de um ponto de equilíbrio desse tipo, a força F_x tenderá a afastá-la ainda mais. Por esse motivo, um ponto desse tipo é chamado **equilíbrio instável**. Note, agora, que a existência de um máximo local para a energia potencial significa que, no gráfico de U , há uma **barreira de potencial** num pequeno intervalo contendo esse ponto de mínimo.

Finalmente, há pontos de equilíbrio que pertencem a intervalos do eixo \mathcal{OX} nos quais a energia potencial é constante, como ocorre, por exemplo, com o intervalo $x < x_1$ nos gráficos da Figura 23.1. Conseqüentemente, se afastarmos ligeiramente a partícula de um ponto de equilíbrio desse tipo, a força F_x continuará sendo nula, não tendendo a trazê-la de volta, como ocorre no caso de uma força restauradora e, tampouco, a afastá-la ainda mais, como ocorre no caso de um equilíbrio instável. Um ponto desse tipo é chamado **equilíbrio indiferente**.

Discussão qualitativa do movimento

Vamos, agora, analisar quais são as características principais dos possíveis movimentos de uma partícula sob a ação de uma força total conservativa F_x , associada à energia potencial U , para distintos valores da energia mecânica $E = K + U$. Como veremos, dependendo do valor de E , as características do movimento podem mudar drasticamente. Por exemplo, para um certo valor da energia, o movimento pode ser limitado, isto é, a partícula se movimenta sempre num intervalo finito do eixo \mathcal{OX} , enquanto para outro valor da energia, ela pode se afastar indefinidamente da origem. Para chegarmos a essas conclusões, é conveniente reescrever a equação (23.2) na forma

$$\frac{1}{2}mv_x^2 = E - U(x), \quad (23.3)$$

onde v_x significa a velocidade da partícula num instante em que ela está na posição x (pode haver mais de um instante em que isto ocorre). Como a energia cinética de uma partícula não pode ser negativa, a equação anterior nos diz que tampouco a quantidade $E - U(x)$ pode ser negativa. Ou seja, dado um valor E para a energia mecânica, o movimento da partícula só pode ocorrer (incluindo o repouso como um caso particular de movimento) nos intervalos do eixo \mathcal{OX} que satisfazem à condição $E \geq U(x)$. Esse resultado é tão importante, que vale a pena destacá-lo:

as posições acessíveis a um movimento de uma partícula que tenha energia mecânica E são apenas aquelas que satisfazem à condição $E \geq U(x)$.

Para fixarmos bem essa e outras idéias, consideremos o gráfico de energia potencial $U(x)$ versus x , mostrado na Figura 23.2. Nele, estão indicados vários valores de energia mecânica, escolhidos apropriadamente de modo a ilustrar os vários tipos de movimento possíveis.

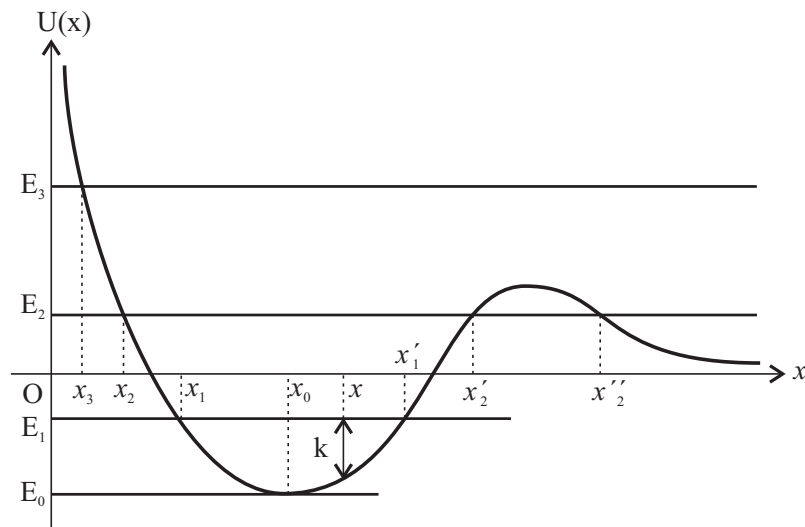


Figura 23.2: Gráfico de $U(x)$ versus x , no qual diversos valores da energia mecânica estão marcados.

Antes de tudo, vejamos como obter, graficamente, o valor da energia cinética da partícula quando ela se encontra numa posição genérica x , supondo que sua energia mecânica seja conhecida. Por exemplo, suponha que a energia mecânica da partícula seja E_1 , indicada na Figura 23.2. Seja K a sua energia cinética nessa posição. Da conservação da energia mecânica, expressa, por exemplo, pela equação (23.3), temos

$$K = E_1 - U(x).$$

Portanto, no gráfico, o valor de K é representado pelo tamanho do segmento de reta vertical que vai do gráfico de $U(x)$ até a reta horizontal associada à energia mecânica E_1 . Por inspeção direta do gráfico, não é difícil perceber que, à medida que a partícula se move com energia mecânica constante E_1 , a sua energia cinética varia, sendo máxima na posição x_0 e nula nos pontos x_1 e x_1' . Com a energia E_1 , o movimento da partícula está restrito ao intervalo $x_1 \leq x \leq x_1'$, pois somente nesse intervalo a condição $E_1 \geq U(x)$ é satisfeita. Os pontos x_1 e x_1' são chamados **pontos de retorno** do movimento com essa energia mecânica, pois neles a velocidade da partícula é nula e o sentido do movimento é invertido. Observe que, ao atingir um ponto de retorno, embora a partícula tenha velocidade nula, há uma força sobre ela e, portanto, ela possui uma aceleração nesse ponto. Por exemplo, quando a partícula atinge o ponto x_1 , como a inclinação de U é negativa, a força

sobre ela será positiva, isto é, para a direita, fazendo com que ela retorne e comece a se mover para a direita (daí o nome ponto de retorno). Portanto, com a energia mecânica E_1 , a partícula permanecerá sempre dentro de um intervalo de extensão finita do eixo \mathcal{OX} . Dizemos, nesse caso, que seu movimento é limitado.

Caso a partícula se movimente com a energia mecânica E_2 , indicada na Figura 23.2, as posições acessíveis em seu movimento são dadas pelos intervalos $x_2 \leq x \leq x'_2$ ou $x \geq x''_2$. Note, por exemplo, que as posições entre x'_2 e x''_2 são inacessíveis em seu movimento, ou seja, são posições proibidas. Portanto, ou a partícula estará se movendo no intervalo $x_2 \leq x \leq x'_2$ ou no intervalo $x \geq x''_2$, mas, uma vez num desses intervalos, ela nunca poderá passar para o outro, já que entre esses intervalos há posições proibidas para a partícula. Note que, com a energia mecânica E_2 , o movimento da partícula pode ser limitado, caso ela esteja se movendo no intervalo $x_2 \leq x \leq x'_2$ ou ilimitado, caso ela esteja se movendo no intervalo $x \geq x''_2$ (ilimitado à direita). Com essa energia mecânica, há três pontos de retorno, a saber, x_2 , x'_2 e x''_2 .

Quando a partícula se move com energia mecânica E_3 , seu movimento é ilimitado e pode ocorrer no intervalo $x \geq x_3$.

Finalmente, quando a energia mecânica da partícula é E_0 , a sua única posição acessível é x_0 . É como se, à medida que a energia fosse diminuindo de E_1 para E_0 , os pontos de retorno fossem se aproximando cada vez mais até coincidirem em x_0 , de modo que a partícula não pode cruzá-lo nem para a direita nem para a esquerda. Permanece, então, em repouso nesse ponto. Observe que, por se tratar do fundo do poço de potencial, x_0 é, na verdade, um ponto de equilíbrio estável.

Antes de passarmos a um exemplo e finalizarmos esta seção, definimos de modo genérico o que são pontos de retorno:

pontos de retorno do movimento unidimensional de uma partícula, cuja energia mecânica é dada por E , são dados pelas raízes da equação algébrica $E = U(x)$.

Exemplo 23.1

Como sabemos, dois átomos podem interagir de modo a formar uma molécula diatômica. Embora a descrição de sistemas na escala atômica deva ser feita por meio da Mecânica Quântica, algumas características de uma molécula diatômica podem ser discutidas qualitativamente com o auxílio da Mecânica Clássica. Suponha, para simplificar, que um dos átomos seja muito mais pesado do que o outro, de modo que seus deslocamentos sejam desprezíveis e ele possa ser considerado em repouso numa primeira aproximação. Com isso, transformamos o problema do

movimento de dois átomos interagindo entre si no problema de um único átomo, o mais leve, movendo-se sob a ação da força que o mais pesado exerce sobre ele. Para tornar o problema unidimensional, suponha, ainda, que o centro do átomo mais leve se desloque apenas ao longo de uma mesma direção, escolhida como a do eixo \mathcal{OX} . O movimento desse átomo pode ser descrito pela chamada **energia potencial de Lennard-Jones**, dada por

$$U(x) = U_0 \left\{ \left(\frac{a}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{x} \right)^6 \right\}, \quad (23.4)$$

onde U_0 e a são constantes positivas com dimensões, respectivamente, de energia e comprimento. Nosso objetivo, aqui, é desenhar os gráficos de $U(x)$ *versus* x e da força F_x sobre o átomo mais leve *versus* x , e fazer uma análise qualitativa do movimento.

A força sobre o átomo mais leve é dada, então, por

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = 12 \frac{U_0}{a} \left\{ \left(\frac{a}{x} \right)^{13} - \left(\frac{a}{x} \right)^7 \right\}, \quad (23.5)$$

onde, por conveniência, pusemos em evidência o fator $1/a$. Tanto o gráfico da energia potencial quanto o da força estão desenhados na Figura 23.3. Como anteriormente, o gráfico da força está colocado exatamente abaixo do gráfico da energia potencial, para que você possa perceber claramente o significado da relação $F_x = -dU/dx$.

Por inspeção direta dos gráficos, vemos que há um único ponto de equilíbrio estável. Fazendo $F_x = 0$ e utilizando a equação (23.5), concluímos que a posição de equilíbrio estável é dada por $x = a$. Nela, o valor da energia potencial é dado por $U(a) = -U_0$ (confira no gráfico). Como esse é o menor valor assumido pela energia potencial, podemos afirmar que só há movimento para $E \geq -U_0$.

Quando $E = -U_0$, o átomo mais leve está em repouso na posição de equilíbrio, isto é, em $x = a$. Quando $-U_0 < E < 0$, esse átomo possui um movimento limitado e oscila no intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$, onde x_1 e x_2 são os pontos de retorno correspondentes mostrados no gráfico superior da Figura 23.3 (como vimos anteriormente, tais pontos são dados pelas raízes da equação $E = U(x)$).

Para $E \geq 0$, o movimento do átomo mais leve é sempre ilimitado à direita. Ou seja, para energias positivas ou nula, a molécula está dissociada, pois o átomo mais leve sempre acabará por afastar-se indefinidamente do mais pesado.

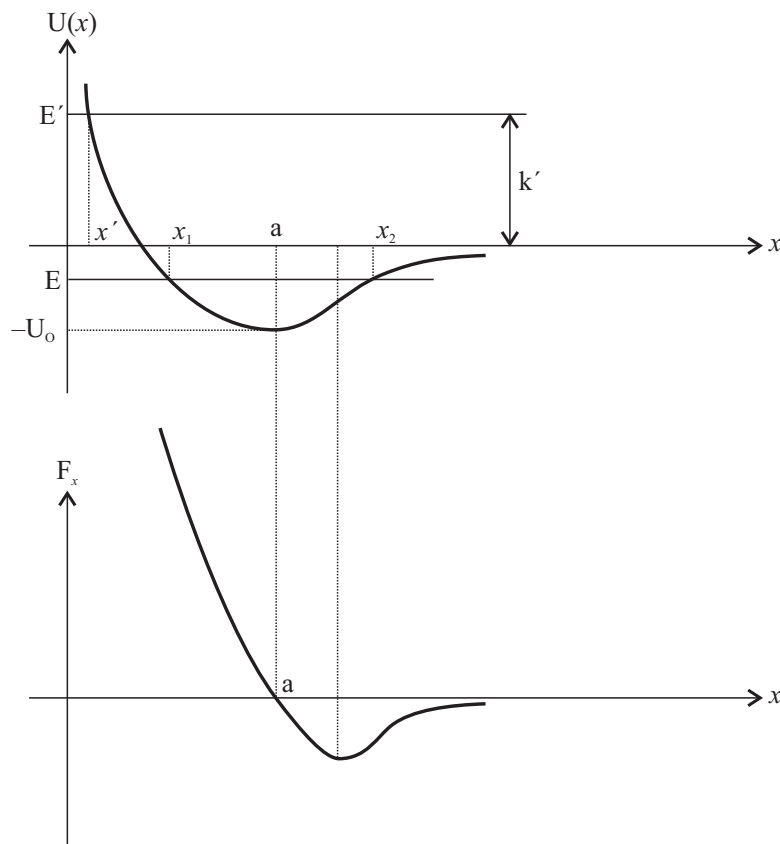


Figura 23.3: Na parte superior desta figura está traçado o gráfico da energia potencial de Lennard-Jones, enquanto na parte inferior, o gráfico da força sobre o átomo mais leve.

Por exemplo, se $E = E' > 0$, seu movimento só pode ocorrer no intervalo $x \geq x'$. E, independentemente de como tenha iniciado seu movimento, quando $t \rightarrow \infty$, esse átomo estará infinitamente afastado da origem e se movimentando para a direita com uma energia cinética $K' = E'$, como indicado na Figura 23.3.

Como último comentário, vamos definir o importante conceito de **energia de dissociação** dessa molécula. No caso em questão, ela é definida como o menor valor de energia que deve ser fornecido ao átomo mais leve, para que ele passe a ter um movimento ilimitado, isto é, para dissociar a molécula, estando ele, inicialmente, em repouso na posição de equilíbrio. Como $E = 0$ é o menor valor da energia mecânica para o qual o movimento do átomo mais leve é ilimitado e $E = -U_0$ é a sua energia quando está em repouso na posição de equilíbrio, concluímos que a energia de dissociação dessa molécula é dada por

$$E_{\text{dissociação}} = 0 - (-U_0) = U_0.$$

Para fixar bem as idéias seria muito instrutivo que você resolvesse, antes de passar para a próxima seção, os problemas propostos 3, 4 e 5.

Em nossa discussão, consideramos um átomo muito mais pesado do que o outro. Nos casos em que as massas dos átomos são parecidas, ou mesmo iguais, como ocorre na molécula de Oxigênio (O_2), essa discussão qualitativa continua válida, desde que interpretemos a coordenada x como a distância entre os átomos. Para a molécula de O_2 , verifica-se que $a \approx 1,2 \times 10^{-10} \text{ m}$ e $U_0 \approx 8,2 \times 10^{-19} \text{ J}$. Na Física Atômica, o ângstrom (\AA) e o eletrônvolt (eV) são unidades mais adequadas. Nessas unidades, temos $a \approx 1,2 \text{\AA}$ e $U_0 \approx 5,1 \text{ eV}$.

Cálculo do período em movimentos periódicos

Na seção anterior, vimos como fazer uma análise qualitativa dos movimentos possíveis de uma partícula, conhecendo-se o gráfico de $U(x)$ versus x . Nesta seção, veremos que, se for dada a expressão de $U(x)$, poderemos ir muito mais longe e fazer também uma análise quantitativa desses movimentos. Por exemplo, uma vez conhecida a expressão de $U(x)$, poderemos obter o intervalo de tempo gasto pela partícula quando ela se desloca entre duas posições quaisquer. Em particular, no caso de movimentos limitados, seremos capazes de calcular o intervalo de tempo gasto pela partícula para se deslocar entre dois pontos de retorno, em função da energia mecânica do movimento. Esse intervalo de tempo está ligado diretamente ao período do movimento. Nosso objetivo, nesse momento, é justamente obter uma fórmula geral para o período de um movimento de uma partícula, dada a sua energia mecânica.

Consideremos, então, o movimento de uma partícula de massa m sob a ação da força total $F_x = -dU/dx$, onde a energia potencial $U(x)$ apresenta um poço como o ilustrado na Figura 23.4. Suponha que a partícula possua energia mecânica E , sendo x_1 e x_2 os dois pontos de retorno associados a essa energia.

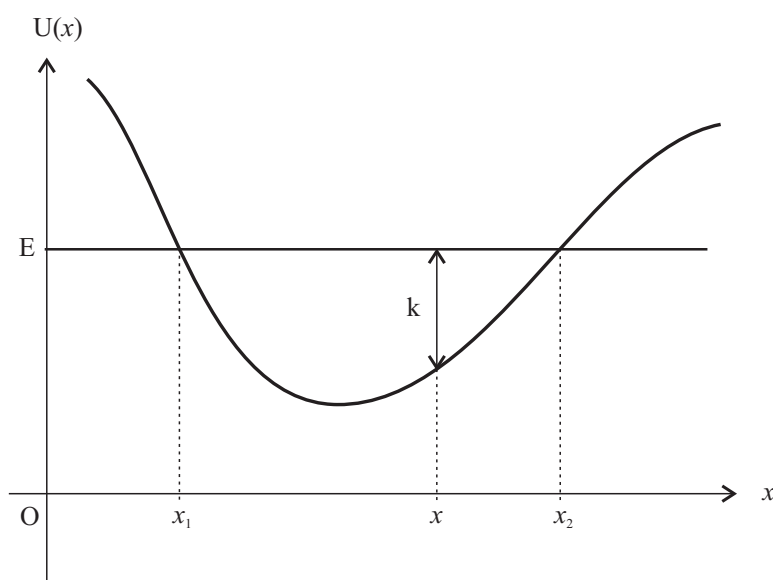


Figura 23.4: Poço de energia potencial genérico.

Nesse gráfico, está marcada uma posição genérica x e está indicada a energia cinética K da partícula ao passar por este ponto, não importante o sentido de seu movimento. Ou seja, o módulo da velocidade da partícula em x tem sempre o mesmo valor, independentemente de a partícula se mover para a direita ou para a esquerda. Se ela estiver se movendo para a direita, sua velocidade em x , que denotaremos, por conveniência, por $v_x^{(+)}$, é obtida diretamente a partir da conservação da energia:

$$v_x^{(+)} = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - U(x)} . \quad (23.6)$$

Caso ela se mova para a esquerda, temos, simplesmente, menos esse valor, ou seja, $v_x^{(-)} = -v_x^{(+)} = -\sqrt{(2/m)} \sqrt{E - U(x)}$, onde usamos uma notação que dispensa explicações.

Conseqüentemente, o intervalo de tempo Δt_{12} , gasto pela partícula quando ela se move para a direita desde x_1 até x_2 , é dado por

$$\begin{aligned} \Delta t_{12} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v_x^{(+)}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} . \end{aligned} \quad (23.7)$$

Analogamente, o intervalo de tempo Δt_{21} , gasto pela partícula quando ela se move para a esquerda desde x_2 até x_1 , é dado por

$$\begin{aligned} \Delta t_{21} &= \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{v_x^{(-)}} \\ &= -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \\ &= \Delta t_{12} , \end{aligned} \quad (23.8)$$

onde, na penúltima passagem, trocamos os limites de integração, o que acarreta uma troca de sinal e, na última passagem, identificamos a expressão de Δt_{12} . Acabamos de mostrar, portanto, que o tempo gasto pela partícula para se mover desde x_1 até x_2 é exatamente igual ao tempo gasto por ela para se mover desde x_2 até x_1 , e é dado pela expressão (23.7).

Mostraremos, agora, um resultado muito importante: sempre que uma partícula se mover em uma dimensão sob a ação de uma força total conservativa e seu movimento for limitado, ele será obrigatoriamente periódico. Para demonstrar esse resultado, calculemos o intervalo de tempo gasto pela partícula, desde o instante em que ela passa por uma posição genérica x , com uma certa velocidade,

Note que, no percurso de x_2 até x_1 , a partícula passa pela posição x , mas, nesse caso, o sentido da velocidade está para a esquerda e, portanto, nesse instante, ela não está na mesma posição de partida com a mesma velocidade de partida.

até o instante em que ela retorna, pela primeira vez, a esta mesma posição, mas com a mesma velocidade (incluindo o sentido de sua velocidade). Designemos esse intervalo de tempo por T . Suponha, por exemplo, que, num dado instante, a partícula esteja na posição x e com velocidade positiva, isto é, para a direita (um raciocínio totalmente análogo poderá ser feito imaginando que sua velocidade seja negativa). Desse modo, o intervalo T é igual ao tempo gasto para a partícula se mover da posição x até a posição x_2 somado ao tempo gasto para ela se deslocar de x_2 até x_1 e adicionado, ainda, ao tempo gasto para ela se mover de x_1 até x . Conseqüentemente, T pode ser calculado como

$$T = \int_x^{x_2} \frac{dx}{v_x^{(+)}} + \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{v_x^{(-)}} + \int_{x_1}^x \frac{dx}{v_x^{(+)}} . \quad (23.9)$$

Identificando o segundo termo do lado direito da última expressão com Δt_{21} e juntando as duas outras integrais numa só, obtemos

$$\begin{aligned} T &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{v_x^{(+)}} + \Delta t_{21} \\ &= \Delta t_{12} + \Delta t_{21} \\ &= 2 \Delta t_{12} . \end{aligned} \quad (23.10)$$

Portanto, o intervalo de tempo T não depende do ponto x em consideração, o que significa dizer que vale para qualquer posição x da partícula no intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$. Com isso, fica demonstrado que o movimento da partícula, nas condições consideradas, é periódico. Esse resultado é tão importante que vale a pena destacá-lo.

Sempre que o movimento unidimensional de uma partícula sujeita a uma força total conservativa $F_x = -dU/dx$ for limitado, ele será, obrigatoriamente, periódico. Conhecida a sua energia mecânica e a expressão de $U(x)$, o período do movimento é dado por

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} , \quad (23.11)$$

onde x_1 e x_2 são os pontos de retorno correspondentes, dados pelas raízes da equação $E = U(x)$.

A fórmula anterior tem validade geral, desde que a integral exista. Vemos então que, dada a função energia potencial U e conhecida a energia mecânica da partícula, a fórmula anterior determina univocamente o período do movimento.

Em geral, para distintos valores da energia mecânica da partícula, temos distintos valores para o período. Note que o integrando depende explicitamente da energia mecânica E . Além disso, os pontos de retorno, que estão nos limites de integração, também dependem da energia, uma vez que são calculados a partir da equação $E = U(x)$.

No entanto, há casos em que o período do movimento da partícula resulta ser independente de sua energia mecânica. Por incrível que pareça, tais casos não são tão raros assim! Veremos, no exemplo a seguir, que isso ocorre no problema do oscilador harmônico unidimensional.

Exemplo 23.2

Neste exemplo, vamos considerar a energia potencial $U(x) = (1/2)kx^2$, onde k é uma constante positiva. A força conservativa correspondente é dada por $F_x = -kx$, ou seja, trata-se de uma força restauradora, sendo a posição $x = 0$ uma posição de equilíbrio estável. Esta energia potencial descreve, por exemplo, a energia potencial elástica de um sistema massa-mola, no qual a constante k é identificada com a constante elástica da mola, que supostamente satisfaz à lei de Hooke. A posição $x = 0$ corresponde à situação em que a mola está com seu tamanho natural, configuração escolhida como padrão para a energia potencial. Ou seja, o problema de uma partícula sujeita a esta energia potencial nada mais é do que o problema de um oscilador harmônico unidimensional, estudado em aulas anteriores. Já obtivemos, inclusive, as funções-movimento possíveis de um oscilador unidimensional. Sabemos, portanto, que tais movimentos são periódicos e com a peculiaridade de que, qualquer que seja a amplitude do movimento, o período desse movimento é sempre o mesmo, dado por $T = 2\pi\sqrt{m/k}$. Nosso objetivo, nesse exemplo, se restringirá a reobter esse resultado aplicando diretamente a equação geral (23.11).

Substituindo $U(x) = (1/2)kx^2$ na equação (23.11) e rearrumando adequadamente os termos, temos

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(2E/k) - x^2}}. \quad (23.12)$$

Os pontos de retorno, nesse caso, são dados por

$$E = \frac{1}{2}kx^2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{\frac{2E}{k}} \quad \text{e} \quad x_2 = \sqrt{\frac{2E}{k}}. \quad (23.13)$$

Note que os pontos de retorno dependem de E . No caso em questão, pelo fato de a energia potencial $U(x)$ ser uma função par e, portanto, simétrica em relação à

origem, os pontos de retorno são equidistantes da posição de equilíbrio (origem, no caso). A amplitude do movimento, quando a partícula possui energia E , é identificada, então, como $\sqrt{2E/k}$. Designando a amplitude do movimento por A , reescrevemos a integral anterior na forma:

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-A}^A \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}. \quad (23.14)$$

Fazendo a transformação de variáveis $x = A \sin\theta \rightarrow dx = A \cos\theta d\theta$, obtemos

$$\begin{aligned} \tau &= 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{A \cos\theta d\theta}{A\sqrt{1 - \sin^2\theta}} \\ &= 2\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \\ &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \end{aligned} \quad (23.15)$$

resultado independente da energia e de acordo com o obtido anteriormente.

Obtenção das funções-movimento possíveis a partir da conservação da energia

Embora, na seção anterior, tenhamos utilizado a conservação da energia mecânica apenas para calcular períodos de movimentos limitados sob a ação de uma força total conservativa, o método empregado nesse cálculo nos permite, na verdade, determinar o tempo de percurso entre quaisquer duas posições ocupadas pela partícula. O cálculo do período, no caso dos movimentos limitados, é apenas um caso particular no qual, por conveniência, calcula-se o tempo gasto para a partícula ir de um ponto de retorno ao outro e, depois, multiplica-se o resultado por dois.

Conseqüentemente, se a partícula estiver na posição x_0 , no instante t_0 , poderemos determinar em que instante t ela estará na posição x , sendo x uma posição genérica de seu movimento. Em muitos casos, como ocorre nos movimentos oscilantes, a partícula ocupa uma certa posição x em vários instantes diferentes. Nesses casos, devemos tomar um certo cuidado e deixar bem claro qual desses instantes desejamos determinar. A fim de evitar esse tipo de complicação, imagine que estejamos interessados em analisar movimentos durante intervalos de tempo nos quais a partícula passa apenas uma única vez em cada posição de sua trajetória. Suponha, ainda, que $x > x_0$. Nesse caso, o intervalo de tempo gasto para a partícula se deslocar de x_0 até x é dado por

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{v_x^{(+)}},$$

ou seja,

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}}. \quad (23.16)$$

Como a posição x é arbitrária, a equação (23.16) nos fornece t como função da posição da partícula. Como supusemos que, durante o intervalo de tempo considerado, a partícula passasse por uma posição uma única vez, podemos inverter essa função e obter, assim, a posição x da partícula em função do tempo, isto é, $x = f_x(t)$. Desse modo, obtemos a função-movimento da partícula correspondente às seguintes condições iniciais: no instante t_0 , a partícula se encontra em x_0 com velocidade $v_{x0} = +\sqrt{(2/m)(E - U(x_0))}$, pois supusemos que $x > x_0$.

Nesse momento, deve estar claro para você que, partindo da conservação da energia, basta integrar apenas uma vez para obtermos a função-movimento da partícula (após invertermos a função que dá o instante t em termos da posição x da partícula). Para ilustrarmos o método que acabamos de descrever, de como obter a função-movimento de uma partícula diretamente a partir da conservação da energia mecânica, apresentaremos dois exemplos detalhadamente.

Exemplo 23.3

Consideremos o movimento de queda livre de um pequeno corpo, no qual a resistência do ar é desprezível. Para sermos mais específicos e tornarmos o exemplo o mais simples possível, suponha que esse corpo seja abandonado, a partir do repouso, de uma altura h do solo e determinemos a sua função-movimento durante sua queda.

Escolhendo \mathcal{OY} como o eixo vertical com origem no solo e apontando para cima, a energia potencial gravitacional da partícula é dada por $U(y) = mgy$, desde que seja escolhida como nula a sua energia potencial quando estiver no solo. Adaptando a equação (23.16) a essa situação, temos

$$t = t_0 + \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{y_0}^y \frac{dy'}{-\sqrt{E - mgy'}} , \quad (23.17)$$

onde o sinal negativo foi empregado, pois $y < y_0$ e, com isso, $v_y < 0$. Escolhendo $t_0 = 0$ e usando o fato de que $E = mgh$, obtemos

$$\begin{aligned} t &= -\sqrt{\frac{1}{2g}} \int_h^y \frac{dy'}{\sqrt{h - y'}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2g}} \left\{ 2\sqrt{h - y'} \right\}_h^y \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}}(h - y). \end{aligned} \quad (23.18)$$

Para obtermos y como função de t , basta elevar ao quadrado a última equação e rearranjar convenientemente os termos, a saber,

$$t^2 = \frac{2}{g}(h - y) \quad \implies \quad y = h - \frac{1}{2}gt^2, \quad (23.19)$$

resultado que está de pleno acordo com o obtido por cálculos elementares, como aqueles feitos na Aula 7. Seria muito apropriado se, antes de seguir adiante, você resolvesse o problema proposto 9.

Exemplo 23.4

Neste último exemplo, consideraremos, novamente, o movimento unidimensional de uma partícula de massa m sob a ação da força gravitacional da Terra, mas, agora, levando em consideração que essa força é proporcional ao inverso do quadrado da distância entre a partícula e o centro da Terra. Por simplicidade, vamos ignorar todos os movimentos da Terra em relação a um referencial inercial solidário ao Sol, ou seja, vamos ignorar seu movimento de translação em torno do Sol e também seu movimento de rotação em torno de seu eixo.

Vamos escolher o eixo \mathcal{OX} como radial, cuja origem está no centro da Terra. Suponhamos, então, que no instante $t_0 = 0$ a partícula seja lançada radialmente da posição x_0 ($x_0 \geq R$, com R sendo o raio terrestre) e com uma velocidade $v_{x0} > 0$, isto é, cujo sentido é o de afastamento da Terra, como ilustra a parte superior da Figura 23.5. Simplificadamente, vamos analisar o movimento para o caso particular em que a energia mecânica da partícula é $E = 0$. Na parte inferior dessa mesma figura está o gráfico da energia potencial gravitacional dada por $U(x) = -GMm/x$, onde M é a massa da Terra. Nesse gráfico, está indicada a posição inicial x_0 , a energia mecânica da partícula ($E = 0$) e a sua energia cinética inicial $(1/2)mv_{x0}^2$.

Antes, porém, de obtermos a função-movimento da partícula, façamos uma breve análise qualitativa do movimento. Vejamos, inicialmente, o que significa a partícula ter energia mecânica nula. Da conservação da energia, podemos escrever

$$\frac{1}{2}mv_{x0}^2 = E - U(x_0) = \frac{GMm}{x_0}.$$

Como $v_{x0} > 0$, pois a partícula foi lançada se afastando da Terra, temos

$$v_{x0} = \sqrt{\frac{2GM}{x_0}}. \quad (23.20)$$

Portanto, uma simples inspeção no gráfico da Figura 23.5 nos permite afirmar que a partícula parte de x_0 com a velocidade v_{x0} , que acabamos de calcular, e

vai se afastando da Terra com uma velocidade cada vez menor, tendendo a zero no infinito. No momento, utilizando apenas uma análise qualitativa, não somos capazes de dizer se para a partícula atingir o infinito será necessário um intervalo de tempo finito ou infinito. No entanto, ficará evidente, mais adiante, que somente quando $t \rightarrow \infty$ é que $x \rightarrow \infty$.

Note, ainda, que $E = 0$ é justamente o menor valor da energia para o qual o movimento é ilimitado (à direita). Ou seja, se a partícula for lançada para a direita da posição x_0 , mas de tal modo que sua energia mecânica E seja negativa, a sua velocidade irá, necessariamente, diminuir até que ela atinja um ponto de retorno a uma distância finita da Terra. A partir dessa posição, ela irá se aproximar da Terra com velocidades de módulos cada vez maiores, até se chocar com a Terra. Desse modo, com $E < 0$ a partícula não escapa da Terra. Com $E = 0$, ela possui o menor valor de energia mecânica que lhe permite escapar da Terra, atingindo o infinito com velocidade nula (verifique no próprio gráfico da Figura 23.5 que $K \rightarrow 0$ à medida que $x \rightarrow \infty$). Por esse motivo, interpretamos a velocidade $v_{x0} = \sqrt{2GM/x_0}$ como a menor velocidade que a partícula deve possuir para que, quando lançada da posição x_0 , ela escape da Terra.

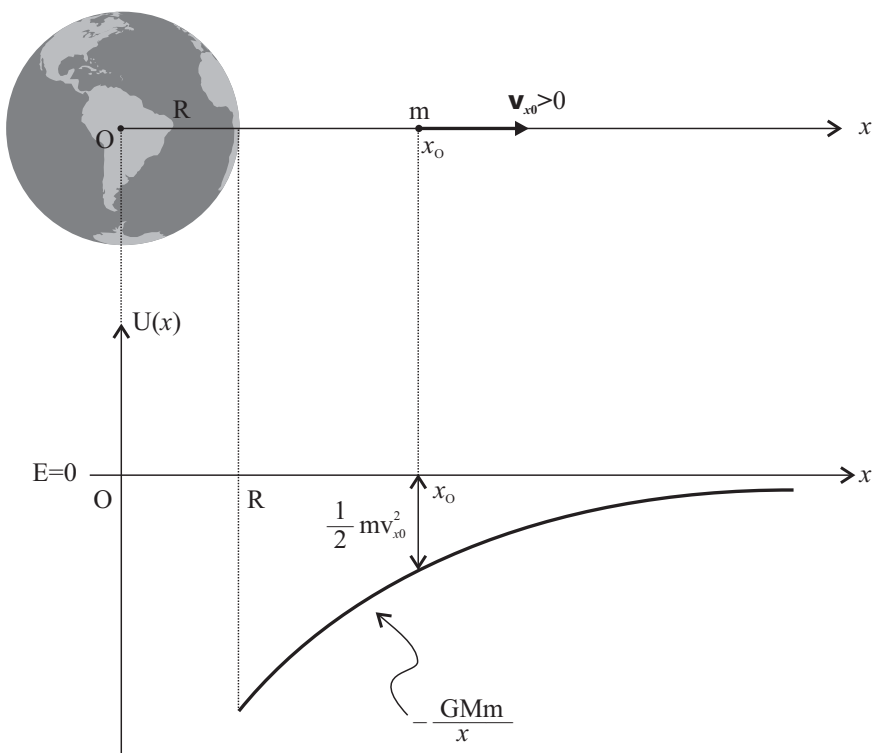


Figura 23.5: Lançamento radial de uma partícula sob ação da força gravitacional terrestre com energia mecânica $E = 0$.

Mostramos que a velocidade de escape da Terra, num lançamento radial, é dada por $v_e = \sqrt{2GM/R}$. Embora não seja óbvio, a velocidade de escape da Terra não depende do ângulo de lançamento da partícula com a superfície terrestre.

No caso de a partícula ser lançada da própria superfície terrestre (com $E = 0$), temos $x_0 = R$ e, nesse caso, v_{x0} é chamada **velocidade de escape da Terra** e dada por $v_e = \sqrt{2GM/R}$.

Passemos, agora, a uma análise quantitativa do problema. Usando a equação (23.16) adaptada ao problema em questão, obtemos

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{0 + GMm/x'}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2GM}} \int_{x_0}^x \sqrt{x'} dx' \\ &= \sqrt{\frac{2}{9GM}} \{x^{3/2} - x_0^{3/2}\}. \end{aligned} \quad (23.21)$$

Temos, portanto,

$$t + \sqrt{\frac{2x_0^3}{9GM}} = \sqrt{\frac{2x^3}{9GM}} \implies \left(t + \sqrt{\frac{2x_0^3}{9GM}}\right)^2 = \frac{2x^3}{9GM}. \quad (23.22)$$

Uma inspeção direta na última equação nos permite concluir que para $x \rightarrow \infty$ temos $t \rightarrow \infty$, como havíamos antecipado. Rearrmando, convenientemente, os termos da equação (23.22), escrevemos

$$x^3 = \left(\sqrt{9GM/2} t + x_0^{3/2}\right)^2 \implies x = \left(\sqrt{9GM/2} t + x_0^{3/2}\right)^{2/3}. \quad (23.23)$$

De posse da função-movimento da partícula, podemos calcular a sua velocidade em qualquer instante de tempo, por meio de uma simples derivação em relação ao tempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{2GM}}{\left(\sqrt{9GM/2} t + x_0^{3/2}\right)^{1/3}}. \quad (23.24)$$

Para finalizar esse exemplo, podemos obter, a partir da equação anterior, as velocidades em alguns instantes particulares. Fazendo $t = 0$ em (23.24), é imediato verificar que $v_{x0} = \sqrt{2GM/x_0}$, de acordo com a equação (23.20). Já no limite $t \rightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_x = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2GM}}{\left(\sqrt{9GM/2} t + x_0^{3/2}\right)^{1/3}} = 0,$$

de acordo com a nossa discussão anterior.

Resumo

Conhecido o gráfico da energia potencial U , o gráfico da força conservativa associada a U pode ser obtido com o auxílio da relação $F_x = -dU/dx$ que afirma ser F_x , numa dada posição da partícula, igual a menos a inclinação no gráfico de U , nessa mesma posição. Pontos de equilíbrio são aqueles onde a força sobre a partícula é nula. Existem três tipos de pontos de equilíbrio: estável, instável e indiferente. Uma posição de equilíbrio estável corresponde a um mínimo local da energia potencial. A força F_x sobre a partícula na vizinhança de uma posição de equilíbrio estável é restauradora. Uma posição de equilíbrio instável corresponde a um máximo local da energia potencial. A força F_x sobre a partícula na vizinhança de uma posição de equilíbrio instável é sempre no sentido de afastamento dessa posição. Uma posição de equilíbrio indiferente é aquela localizada num intervalo onde U é constante, de modo que a força F_x sobre a partícula na vizinhança de uma posição de equilíbrio desse tipo é sempre nula. Pontos de retorno são definidos como as raízes da equação $E = U(x)$. Neles, a velocidade da partícula é nula, e são assim chamados porque a partícula inverte o sentido de seu movimento sempre que atinge um ponto de retorno.

Conhecido o gráfico de U e dada a energia mecânica da partícula, pode-se fazer uma análise qualitativa do movimento. As chamadas posições acessíveis da partícula são aquelas para as quais vale a condição $E \geq U(x)$. Dependendo da forma de U e dos valores de E , os movimentos podem ser limitados ou ilimitados. Em movimentos unidimensionais sob a ação de uma força total conservativa, todo movimento limitado é periódico, com o período dado pela equação (23.11). Finalmente, mostramos que a expressão da conservação da energia pode ser integrada, para fornecer o instante em que a partícula passa por uma determinada posição, sabendo-se o instante t_0 em que passa pela posição x_0 , sua energia mecânica e o sentido de seu movimento em x_0 . Invertendo-se, apropriadamente, esse resultado, obtemos a função-movimento da partícula correspondente.

Questionário

1. Conhecida a energia potencial $U(x)$ e a energia mecânica da partícula, a sua velocidade na posição x está univocamente determinada?
2. Qual é a relação entre uma dada energia potencial U e a força conservativa F_x a ela associada? Interprete esta relação no gráfico de F_x versus x .
3. Defina ponto de equilíbrio estável, instável e indiferente.

4. O que é uma força restauradora?
5. O que é um movimento unidimensional limitado? E um movimento unidimensional ilimitado.
6. Defina ponto de retorno.
7. Que característica fundamental deve ter o gráfico de uma energia potencial U , para que exista a possibilidade de movimentos periódicos?
8. Supondo que uma partícula sob a ação de uma força total conservativa F_x descreva um movimento periódico, quando possui energia mecânica E , escreva uma fórmula para o período, em termos de E e da energia potencial U . Deixe claro, nesta fórmula, onde aparece a dependência em E .

Problemas propostos

1. Considere a energia potencial cujo gráfico está desenhado na Figura 23.2. Descreva, detalhadamente, como varia a energia cinética da partícula nas seguintes situações:
 - (a) quando a partícula vem do infinito com energia mecânica E_2 ;
 - (b) quando a partícula vem do infinito com energia mecânica E_3 ,
 onde E_2 e E_3 também estão marcadas na Figura 23.2.
2. Considere o movimento de uma partícula sob a ação de uma força total conservativa $F_x = -dU/dx$, onde $U(x)$ é dada por

$$U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2},$$

sendo a e b duas constantes positivas.

- (a) Determine a expressão de F_x e a posição de equilíbrio estável x_e .
 - (b) Esboce os gráficos de U e F_x versus x , marcando no eixo \mathcal{OX} nos dois gráficos a posição de equilíbrio estável.
 - (c) Descreva, qualitativamente, os movimentos da partícula nos casos em que: (i) $E = U(x_e)$; (ii) $U(x_e) < E < 0$; (iii) $E = 0$ e (iv) $E > 0$.
3. Considere duas molas idênticas, de comprimento ℓ_0 e constante elástica k cada uma delas, e uma partícula de massa m dispostas da seguinte maneira: uma mola tem um de seus extremos preso à partícula e o outro fixo no

ponto $(0, a)$ do plano \mathcal{OXY} ; a outra mola tem um de seus extremos também preso à partícula e o outro fixo no ponto $(0, -a)$ do plano \mathcal{OXY} . Devido às reações vinculares, a partícula pode se mover apenas ao longo do eixo \mathcal{OX} , mas de tal modo que a força total sobre ela seja igual à resultante das forças elásticas exercidas pelas molas, como indica a Figura 23.6

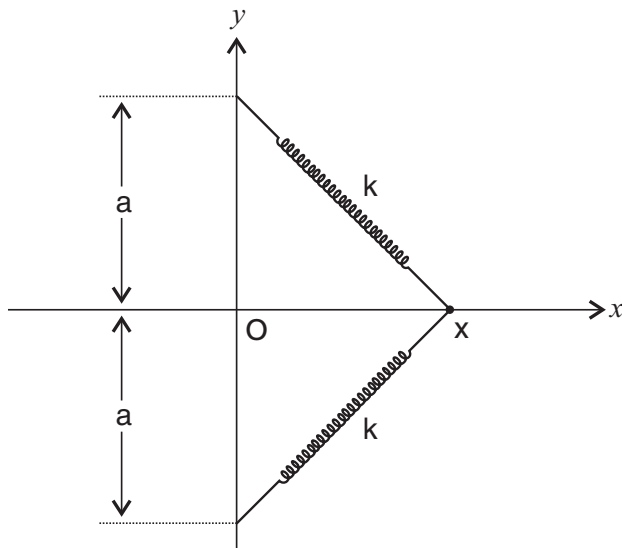


Figura 23.6: Partícula restrita a se mover apenas ao longo de \mathcal{OX} , sob a ação da força elástica de duas molas idênticas.

- (a) Tomando como padrão para a energia potencial elástica a posição de equilíbrio $x = 0$, isto é, escolhendo $U(0) = 0$ e lembrando que F_x aponta sempre no sentido de decréscimo de U , esboce o gráfico de $U(x)$ versus x nos três casos: (i) $\ell_0 < a$; (ii) $\ell_0 = a$ e (iii) $\ell_0 > a$. Determine, em cada caso, se $x = 0$ é uma posição de equilíbrio estável ou instável.
- (b) No caso em que $a = \ell_0$, mostre que a força total sobre a partícula pode ser escrita na forma

$$F_x = -2kx \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2/\ell_0^2}} \right).$$

- (c) Usando a aproximação $(1 + \delta)^{-1/2} \approx 1 - \delta/2$, válida sempre que $|\delta| \ll 1$, e ainda supondo que $a = \ell_0$, mostre que a força restauradora para pontos muito próximos da posição de equilíbrio estável $x = 0$ não é linear, mas dada por

$$F_x \approx -\frac{kx^3}{\ell_0^2}.$$

4. Considere o movimento unidimensional de uma partícula sob a ação da força total $F_x = -dU/dx$, onde a energia potencial $U(x)$ é dada por

$$U(x) = D (e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}) ,$$

onde D e α são constantes positivas. Ela é conhecida como energia potencial de Morse unidimensional, por corresponder a um caso particular da energia potencial de Morse utilizada na Química para descrever a ligação atômica em certas circunstâncias.

- Faça um esboço do gráfico de $U(x)$ versus x .
 - Obtenha a expressão da força F_x e faça um esboço do gráfico de F_x versus x .
 - Descreva, qualitativamente, os movimentos possíveis para essa partícula com diferentes valores de energia mecânica.
5. Considere a energia potencial mostrada no gráfico da Figura 23.7. Ela simula, em certos aspectos, a interação de uma partícula α (núcleo do hélio) com um núcleo pesado.

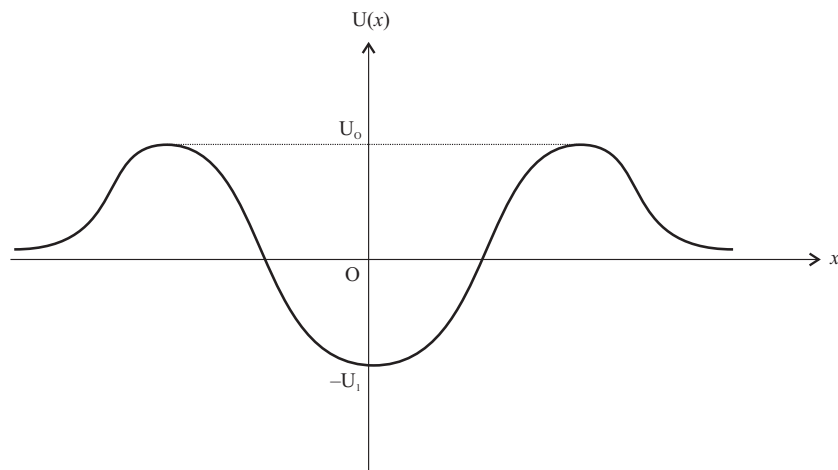


Figura 23.7: Energia potencial que simula a interação de uma partícula α com um núcleo pesado.

- Esboce o gráficos de F_x versus x , identificando, no mesmo, os pontos de equilíbrio estável e instável.
- Descreva, qualitativamente, os movimentos possíveis para a partícula α com diferentes valores de energia mecânica.

Qualquer valor superior ao encontrado no item (c) do problema faz com que o movimento da partícula α passe a ser ilimitado, fazendo com que ela escape do núcleo. Essa é a descrição dada pela Física Clássica. Na verdade, mesmo partículas α com energias menores do que U_0 são emitidas por núcleos pesados, como se pudessem “tunelar” pela barreira de potencial, isto é, atravessar a barreira mesmo sem energia suficiente para isso. Esse efeito, explicado somente com a Mecânica Quântica, é chamado **efeito túnel**.

- (c) Suponha que a partícula esteja se movendo num movimento limitado com energia mecânica E tal que $0 < E < U_0$. Qual é o menor valor de energia que deve ser fornecido à partícula para que ela atinja o topo de uma das barreiras de energia potencial?
6. Considere, novamente, o cálculo do período de um oscilador harmônico unidimensional, como apresentado no exemplo 23.2. Mais precisamente, considere a equação (23.14). Faça, nessa equação, uma transformação de variáveis adequada e mostre que o período não depende da amplitude.

Sugestão: defina a variável adimensional $\xi = x/A$.

7. Suponha que uma partícula se movimente ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação de uma força total conservativa F_x associada a uma energia potencial dada, aproximadamente, por $U(x) = \alpha|x|$, onde α é uma constante positiva. Seja $E > 0$ a energia mecânica da partícula.

(a) Esboce o gráfico de $U(x)$ versus x e descreva qualitativamente o movimento da partícula.

(b) Calcule o período do movimento dessa partícula.

8. Suponha que uma partícula se mova ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação de uma força total conservativa F_x associada a uma energia potencial dada, aproximadamente, por $U(x) = \alpha|x|^\nu$, onde α é uma constante positiva e $\nu \geq 1$. Seja $E > 0$ a energia mecânica da partícula.

(a) Calcule a amplitude A das oscilações.

(b) Mostre que o período do movimento pode ser escrito na forma

$$T = 2\sqrt{\frac{2m}{\alpha}} A^{1-\nu/2} I_0 ,$$

onde I_0 é apenas um fator numérico dado pela integral

$$I_0 = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^\nu}} .$$

- (c) Verifique, para o caso particular de um oscilador harmônico unidimensional, isto é, para $\nu = 2$, que o período não depende da amplitude de oscilação, como mostrado no problema 6. Verifique, ainda, que a dependência de T com a amplitude das oscilações para $\nu = 1$ confere com o resultado obtido no problema 7.

A força F_x associada à energia potencial do problema 7 não está definida em $x = 0$. Ainda assim, ela é útil para simular algumas situações físicas.

9. No Exemplo 23.3, mostramos como é possível obter, a partir da conservação da energia, a função-movimento de uma partícula que é abandonada em repouso de uma altura h acima do solo. Nesse problema, você irá obter a função-movimento de uma partícula que é lançada verticalmente para cima com uma certa velocidade. Simplificando, pediremos que você considere apenas o intervalo de tempo no qual a partícula está subindo. Escolha o eixo \mathcal{OY} como vertical, orientado para cima e com origem no solo. Seja $v_{y0} > 0$ a velocidade da partícula no instante em que ela é lançada do solo.

Utilizando a conservação da energia mecânica, como foi feito no exemplo 23.3, obtenha a função-movimento da partícula no intervalo de tempo no qual ela está subindo. Confira o resultado com aquele obtido na Aula 7, obtido por meio de métodos mais elementares.

10. Considere, novamente, o movimento de uma partícula na presença do campo gravitacional terrestre, discutido no exemplo 23.4. No entanto, em lugar de possuir energia mecânica nula, suponha, neste problema, que a partícula seja lançada se afastando radialmente da Terra, de uma posição $x_1 > R$, onde R é o raio terrestre, e com a energia mecânica E_1 , contida no intervalo $-GMm/R < E_1 < 0$. Escolha, também aqui, o eixo \mathcal{OX} na direção do movimento da partícula e com a origem no centro da Terra.
- (a) Descreva, qualitativamente, o movimento da partícula desde o seu lançamento até o instante em que toca a superfície terrestre. Determine o único ponto de retorno desse movimento.
 - (b) Calcule a velocidade com que a partícula atinge a superfície da Terra.
11. Considere o movimento de uma partícula de massa m ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação da força total F_x associada à energia potencial $U(x) = (1/2)kx^2 - F_0x$, onde k e F_0 são constantes positivas (esse tipo de energia potencial ocorre num sistema massa-mola no qual, além da força elástica da mola, atua uma força constante F_0).
- (a) Faça o gráfico de $U(x)$ versus x e determine a posição de equilíbrio estável. Marque, no gráfico, essa posição.
 - (b) Descreva, qualitativamente, o movimento da partícula no caso em que a sua energia mecânica é nula. Determine os pontos de retorno.
 - (c) Considere um movimento com energia mecânica genérica E onde $E > -F_0^2/(2k)$. Determine os pontos de retorno e calcule o período do movimento.

- (d) No item anterior, você deve ter concluído que o período da partícula não depende de sua energia mecânica e tampouco de F_0 . Interprete esse resultado.

Sugestão: escreva a energia potencial em termos da coordenada $x' = x - F_0/k$.

12. Considere o movimento de uma partícula de massa m ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação da força total F_x associada à energia potencial $U(x) = (1/2)kx^2$. Seja $E > 0$ a sua energia mecânica. Suponha que em $t_0 = 0$ a partícula esteja na posição x_0 com velocidade positiva. Utilizando o método empregado nos exemplos 23.3 e 23.4 desta aula, obtenha a função-movimento da partícula desde t_0 até o instante em que ela atinge, pela primeira vez, um ponto de retorno.

Sugestão: utilize a mesma transformação de variáveis que aparece no Exemplo 23.2.

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de responder ao questionário inteiro e de resolver todos os problemas que exigem, apenas, descrições qualitativas do movimento, como os problemas 1, 2, 4, 5, e 10. Sempre que necessário, retorne ao texto para relembrar os conceitos principais exigidos no problema em questão. Nos problemas que envolvem integrações, você poderá encontrar mais dificuldade. Caso isso aconteça, procure, no texto da aula, o exemplo em que um cálculo análogo tenha sido feito e, seguindo o mesmo procedimento, tente solucionar o problema.

Aula 24 – Energia Cinética e Trabalho

Objetivos

- Aprender a definição de produto escalar entre dois vetores e algumas de suas propriedades mais importantes.
- Aprender os conceitos de energia cinética e trabalho no caso de um movimento geral de uma partícula.
- Demonstrar o Teorema da Energia Cinética.
- Aprender a definição de força conservativa no caso de um movimento geral e compreender seu significado.

Introdução

Antes de iniciarmos o estudo desta aula, você deve reler a introdução da Aula 21. Nela, propusemo-nos a estudar o movimento de uma partícula na presença de corpos cujos movimentos são conhecidos. Nesse caso, a força total \mathbf{F} sobre a partícula é dada por uma função \mathcal{F} de sua posição \mathbf{r} , de sua velocidade \mathbf{v} e do instante t em que estamos considerando essas grandezas. Temos, então:

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) . \quad (24.1)$$

Para estudar o movimento nessas condições, consideramos, na Aula 21, o caso particular de movimentos retilíneos, nos quais a força total tinha componente apenas ao longo da reta do movimento. Nesse contexto simples, desenvolvemos os conceitos de energia cinética, de trabalho e de força conservativa. Na Aula 22, continuamos considerando apenas movimentos retilíneos e introduzimos os conceitos de energia potencial e de energia mecânica, demonstrando, ao final, o importante Teorema da Conservação da Energia Mecânica. Na Aula 23, consideramos diversos exemplos e aplicações desses conceitos.

Nesta aula, estenderemos os conceitos e resultados obtidos para movimentos retilíneos, apresentados na Aula 21, ao caso de movimentos gerais de uma partícula. O estudo dos movimentos retilíneos feito nas aulas anteriores nos ajudará enormemente, pois muitas das idéias e métodos usados naquelas circunstâncias adaptam-se, facilmente, ao estudo geral que faremos a seguir. Entretanto, há diferenças importantes entre certos conceitos tratados nas aulas anteriores no caso de movimentos retilíneos e suas generalizações para movimentos quaisquer. Por

exemplo, na Aula 21, vimos que a força com componente apenas na reta do movimento é conservativa se depender apenas da posição da partícula nessa reta. Na presente aula, em que uma força pode ter componentes em qualquer direção, veremos que para uma força ser conservativa não basta que ela seja função apenas da posição da partícula.

Se tentarmos estender o Teorema da Energia Cinética, para o caso de um movimento espacial qualquer sob a ação de forças com direções variáveis, perceberemos, muito rapidamente, a necessidade de definir o chamado produto escalar de vetores. Por isso, vamos nos antecipar a essa necessidade e começar nossa aula pelo estudo de tal produto. Em seguida, ele será usado na definição de trabalho em um movimento qualquer e na demonstração do Teorema da Energia Cinética, nesse caso geral.

Produto escalar de vetores

Sejam dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Suporemos, por ora, que nenhum deles seja o vetor nulo. Desenhando-os com a mesma origem, podemos determinar, univocamente, o ângulo θ entre eles que satisfaça à condição $0 \leq \theta \leq \pi$. A Figura 24.1 ilustra o caso em que $\theta < \pi/2$.

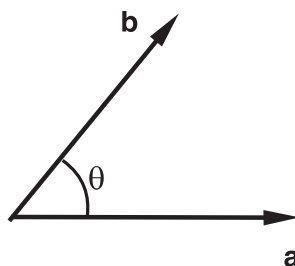


Figura 24.1: Dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} que fazem entre si um ângulo θ .

Os dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} nos fornecem três números: os seus módulos $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{b}|$ e o cosseno do ângulo entre eles, isto é, $\cos \theta$. Usaremos esses números para definir **produto escalar do vetor \mathbf{a} pelo vetor \mathbf{b}** como o número $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$. O produto escalar de \mathbf{a} por \mathbf{b} é representado por $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, de modo que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta, \quad (24.2)$$

isto é,

produto escalar de dois vetores é o número obtido multiplicando-se o módulo do primeiro pelo módulo do segundo e pelo cosseno do ângulo entre eles.

Essa é a definição de produto escalar de dois vetores diferentes do vetor nulo. Se um dos vetores ou ambos são nulos, não é possível definir ângulo entre eles, de modo que a definição anterior não pode ser propriamente aplicada a esse caso. Nos casos em que um dos vetores \mathbf{a} ou \mathbf{b} é nulo, ou em que ambos são nulos, definimos o produto escalar entre eles como sendo o número zero. Podemos dizer que essa definição é coerente com a definição (24.2) anterior, no sentido de que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ tende a zero quando um dos vetores em (24.2) tende para o vetor nulo. De fato, se um dos vetores tende para o vetor nulo, o seu módulo tende a zero e o lado direito de (24.2) também.

Chamamos **multiplicação escalar de vetores** a operação matemática que, a cada par de vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , faz corresponder o número $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Ao denominarmos esse número produto escalar, manteremos o costume de utilizar a denominação produto ao resultado de uma multiplicação. Também chamamos os vetores com os quais fazemos a multiplicação escalar **fatores do produto escalar**. O símbolo $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ é, também, lido como “**a** escalar **b**”, em lugar de “produto escalar do vetor **a** pelo vetor **b**”.

Não há muito o que dizer sobre o produto escalar quando um dos seus vetores é nulo. Em contrapartida, quando os vetores não são nulos, o produto escalar tem um significado geométrico importante, relacionado com o conceito de projeção de um vetor ao longo de um unitário. Sejam dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} não-nulos. Dividindo-se \mathbf{a} pelo seu módulo, obtemos um vetor unitário que representaremos por $\hat{\mathbf{a}}$, isto é, $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$. O vetor $\hat{\mathbf{a}}$ é chamado **unitário do vetor a**. Conforme definimos na Aula 8, a projeção do vetor \mathbf{b} ao longo do unitário $\hat{\mathbf{a}}$ é o produto do módulo de \mathbf{b} pelo cosseno do ângulo entre \mathbf{b} e o unitário $\hat{\mathbf{a}}$. Obviamente, o ângulo entre \mathbf{b} e o unitário $\hat{\mathbf{a}}$ é o ângulo entre \mathbf{b} e o vetor \mathbf{a} , que denominamos ângulo θ . Desse modo, temos:

$$\text{proj}_{\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos \theta . \quad (24.3)$$

Usando essa expressão na definição (24.2) de produto escalar, obtemos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{proj}_{\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{b} . \quad (24.4)$$

Em outras palavras, podemos afirmar que

o produto escalar de dois vetores quaisquer é igual ao produto do módulo do primeiro vetor pela projeção do segundo ao longo do unitário do primeiro.

Quando o vetor \mathbf{a} já é um vetor unitário, temos $|\mathbf{a}| = 1$. Nesse caso, o unitário de \mathbf{a} é ele mesmo, $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{a}}$, e a igualdade (24.4) nos leva ao resultado

$$\text{proj}_{\hat{\mathbf{a}}} \mathbf{b} = \hat{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{b} , \quad (24.5)$$

isto é,

a projeção de um vetor ao longo de um unitário é o produto escalar do unitário pelo vetor.

A Figura 24.2 mostra vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} nos casos em que o ângulo entre eles é menor, igual ou maior do que $\pi/2$. Na figura, estão indicadas as respectivas projeções de \mathbf{b} ao longo do unitário de \mathbf{a} . A projeção de \mathbf{b} ao longo do unitário $\hat{\mathbf{a}}$ é positiva, nula ou negativa, conforme o ângulo entre \mathbf{a} e \mathbf{b} seja menor, igual ou maior do que $\pi/2$. Como essa projeção é multiplicada pelo número positivo $|\mathbf{b}|$, para se obter o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, temos:

o produto escalar de dois vetores é positivo ou negativo conforme o ângulo entre eles seja menor ou maior do que um ângulo reto; é nulo o produto escalar de dois vetores perpendiculares entre si.

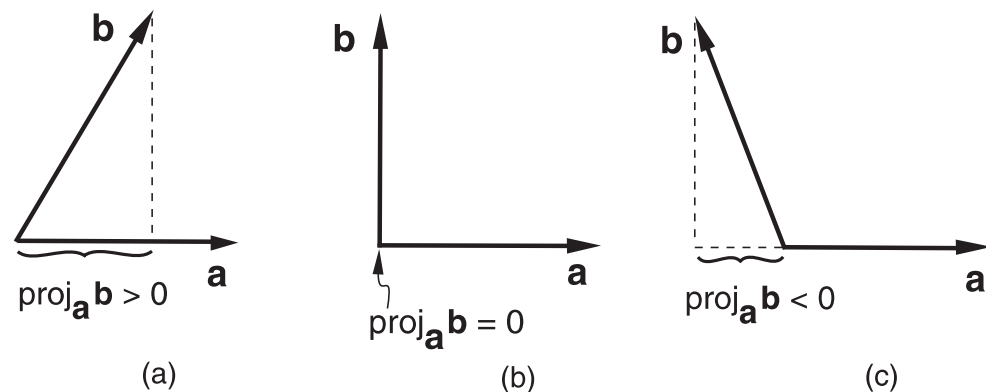


Figura 24.2: Os três casos notáveis do produto escalar, nos quais o ângulo entre os vetores é (a) menor, (b) igual ou (c) maior do que um ângulo reto.

O produto escalar de vetores goza de quatro propriedades algébricas importantes, que tratamos a seguir. As propriedades serão identificadas pela sigla **PE**, que significa “produto escalar”.

PE1) *O produto escalar de dois vetores não depende da ordem dos fatores:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} . \quad (24.6)$$

PE2) *O produto escalar de vetores é distributivo em relação à adição de vetores:*

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \quad \text{e} \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} . \quad (24.7)$$

PE3) Se um dos fatores do produto escalar é multiplicado por um número, o produto fica multiplicado por esse número:

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \quad \text{e} \quad \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) . \quad (24.8)$$

PE4) O produto escalar de um vetor por ele mesmo é positivo ou nulo; é nulo se, e somente se, o vetor for nulo:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0} . \quad (24.9)$$

A comutatividade (24.6) decorre, diretamente, da definição (24.2) de produto escalar. De fato, o ângulo entre dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} não depende da ordem em que consideramos esses vetores, e o produto dos números $|\mathbf{a}|$ e $|\mathbf{b}|$ também independe da ordem em que são multiplicados. Com isso, temos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \cos \theta = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} .$$

Para demonstrar a distributividade (24.7), começamos por usar a equação (24.4) para escrever:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) . \quad (24.10)$$

Na Aula 8, vimos que a projeção da soma é a soma das projeções, isto é, $\text{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{c}$. Usando esse resultado em (24.10), obtemos $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|(\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{c})$ e, portanto, $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}| \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} + |\mathbf{a}| \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{c}$. De acordo com (24.4), o lado direito dessa equação é igual a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, de modo que ela pode ser escrita como $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, que é exatamente a segunda igualdade em (24.7).

Tendo demonstrado a segunda igualdade escrita em (24.7), podemos usá-la para demonstrar a primeira. Com efeito, da comutatividade (24.6) obtemos $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Usando, no lado direito dessa equação, a propriedade expressa na segunda igualdade em (24.7), obtemos $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$. No lado direito dessa equação, a ordem dos fatores nos produtos escalares pode ser trocada, em virtude da comutatividade (24.6). Obtém-se, com isso, o resultado $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, que é, precisamente, a primeira igualdade em (24.7), como queríamos demonstrar.

Para demonstrar (24.8), usamos (24.4) e uma outra propriedade da projeção que vimos na Aula 8, qual seja: $\text{proj}_{\mathbf{a}}(\lambda \mathbf{b}) = \lambda \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$, onde λ é um número qualquer. Temos, então,

$$\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \text{proj}_{\mathbf{a}}(\lambda \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \lambda \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \lambda (|\mathbf{a}| \text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) ,$$

isto é, $\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, que é a segunda igualdade em (24.8). Tendo demonstrado a segunda igualdade escrita em (24.8), podemos usá-la, juntamente com a comutatividade (24.6), para demonstrar a primeira igualdade em (24.8). Essa demonstração é deixada como um problema proposto para você.

Finalmente, a positividade escrita em (24.9) decorre diretamente da definição (24.2). Temos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos 0 = |\mathbf{a}|^2$, já que o ângulo entre um vetor e ele mesmo é sempre zero. Portanto, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, evidenciando que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ é sempre positivo ou nulo. Além disso, o módulo de um vetor é nulo se, e somente se, o vetor é nulo. Com isso, fica demonstrada a propriedade (24.9) do produto escalar. Note que, do resultado $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, resulta a igualdade

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}, \quad (24.11)$$

isto é,

o módulo de um vetor é igual à raiz quadrada do produto escalar dele por ele mesmo.

É costume definir **quadrado de um vetor** como o número dado pelo produto escalar dele por ele mesmo. Escrevemos:

$$\mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}. \quad (24.12)$$

Com isso, o quadrado de um vetor é nada mais, nada menos, do que o quadrado de seu módulo: $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.

Façamos uma aplicação das propriedades algébricas do produto escalar, para expressá-lo em função das componentes dos vetores em um sistema de eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$. Uma vez que esses eixos têm unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z ortonormais, obtemos, facilmente:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_x &= 1, & \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y &= 0, & \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_z &= 0, \\ \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_x &= 0, & \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_y &= 1, & \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{u}_z &= 0, \\ \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_x &= 0, & \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_y &= 0 & \text{ e } & \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{u}_z &= 1. \end{aligned} \quad (24.13)$$

Considere os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} expressos na base desses unitários, isto é, $\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z$ e $\mathbf{b} = b_x \mathbf{u}_x + b_y \mathbf{u}_y + b_z \mathbf{u}_z$. Usando-se, repetidamente, as propriedades algébricas (24.7) e (24.8), obtém-se uma expressão para $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ em termos de produtos escalares dos unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z . Usando-se os valores desses produtos, dados em (24.13), chega-se a

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (24.14)$$

ou seja,

o produto escalar de dois vetores quaisquer é igual à soma dos produtos das componentes do primeiro vetor pelas respectivas componentes do segundo.

Vale a pena você praticar o cálculo de produtos escalares resolvendo, antes de prosseguir, os primeiros problemas propostos.

Consideremos, agora, a velocidade \mathbf{v} de uma partícula, expressa na base dos unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z , isto é, $\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z$. Como vimos na Aula 9, a derivada do vetor velocidade em relação ao tempo é obtida derivando-se as componentes da velocidade em relação ao tempo. Temos, pois:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{u}_z. \quad (24.15)$$

De acordo com a definição (24.12), o quadrado do vetor velocidade \mathbf{v} é o produto escalar de \mathbf{v} por ele mesmo, ou seja, $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Usando para esse produto escalar a fórmula (24.14), obtemos:

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (24.16)$$

Derivando em relação ao tempo ambos os membros dessa igualdade, temos

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}^2 = \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} + 2v_z \frac{dv_z}{dt}, \quad (24.17)$$

isto é,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{v}^2 = v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt}. \quad (24.18)$$

De acordo com (24.15), o lado direito dessa equação é a soma dos produtos das componentes da velocidade pelas respectivas componentes da derivada da velocidade em relação ao tempo. Usando a fórmula (24.14), vemos, então, que esse lado direito é o produto escalar da velocidade pela derivada da velocidade. Com isso, (24.18) toma a forma

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (24.19)$$

A fórmula (24.19) é válida para qualquer vetor \mathbf{v} que seja função de uma variável real t , embora estejamos interessados, por ora, apenas no caso em que \mathbf{v} é a velocidade da partícula e t é o tempo. Podemos obter a equação (24.19), como caso particular da fórmula geral

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (24.20)$$

válida para quaisquer vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} que sejam funções de uma variável real t . A demonstração dessa fórmula está pedida no problema proposto 8.

Teorema da energia cinética e trabalho de uma força

Voltemos, agora, ao nosso problema de uma partícula de massa m sujeita a uma força \mathbf{F} que depende da posição \mathbf{r} da partícula, de sua velocidade \mathbf{v} e do tempo t . Sendo \mathcal{F} a função que dá essa força, temos, pela Segunda Lei de Newton,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (24.21)$$

na qual, por conveniência, escrevemos a aceleração como $d\mathbf{v}/dt$. Fazendo o produto escalar de ambos os membros dessa equação pela velocidade \mathbf{v} e usando (24.19), chegamos a

$$m \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{v}^2 = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{v}, \quad (24.22)$$

ou, passando os fatores constantes para dentro do símbolo da derivada,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \right) = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{v}. \quad (24.23)$$

Também no caso de um movimento qualquer, definimos **energia cinética** de uma partícula como o semi-produto de sua massa pelo quadrado de sua velocidade e a representamos por K ,

$$K = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2. \quad (24.24)$$

Definimos **potência** fornecida por uma força a uma partícula como o produto escalar da força pela velocidade da partícula. Usando essas definições, podemos enunciar o resultado (24.23) na seguinte forma:

a taxa instantânea de variação temporal da energia cinética de uma partícula é igual à potência fornecida à partícula pela força total que age sobre ela.

Seja f , agora, um movimento possível qualquer da partícula. A sua posição e a sua velocidade, em qualquer instante t , são dadas por

$$\mathbf{r} = f(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \dot{f}(t). \quad (24.25)$$

Substituindo essas grandezas na igualdade (24.23), ambos os lados da equação resultante se tornam funções do tempo t :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m [\dot{f}(t)]^2 \right) = \mathcal{F}(f(t), \dot{f}(t), t) \cdot \dot{f}(t). \quad (24.26)$$

Integrando a equação anterior em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, obtemos:

Note que no lado direito da equação (24.26) temos um vetor $\dot{f}(t)$. De fato, o valor da função-velocidade \dot{f} no instante t é o vetor velocidade \mathbf{v} . Esse vetor $\dot{f}(t)$ aparece precedido de um pontinho para indicar que estamos tomando o produto escalar do vetor força $\mathcal{F}(f(t), \dot{f}(t), t)$ pelo vetor velocidade $\dot{f}(t)$.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m [\dot{f}(t)]^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F} \left(f(t), \dot{f}(t), t \right) \cdot \dot{f}(t) dt. \quad (24.27)$$

A integral no lado esquerdo dessa equação é a variação da energia cinética no intervalo $[t_1, t_2]$, ou seja,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m [\dot{f}(t)]^2 \right) dt &= \frac{1}{2} m [\dot{f}(t_2)]^2 - \frac{1}{2} m [\dot{f}(t_1)]^2 \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2, \end{aligned} \quad (24.28)$$

onde representamos por \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 as respectivas velocidades no início e no fim do intervalo de tempo:

$$\mathbf{v}_1 = \dot{f}(t_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \dot{f}(t_2). \quad (24.29)$$

Para representar a integral no lado direito da equação (24.27), usamos a expressão exibida no lado esquerdo da seguinte igualdade:

$$\int_{t_1(f)}^{t_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F} \left(f(t), \dot{f}(t), t \right) \cdot \dot{f}(t) dt. \quad (24.30)$$

O significado do lado esquerdo dessa equação é dado pelo lado direito, qual seja, devemos usar a função do tempo f para fazer a integral da potência $\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{v}$ que aparece no integrando. A integral (24.30) é chamada **trabalho** realizado pela força $\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ durante o intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ no movimento f e é simbolizado por $W(t_1, t_2; f)$. Note que o trabalho, como definido pela equação (24.30), é uma integral na variável real t e, portanto, é uma integral simples, com a qual já estamos bem familiarizados. Usando o resultado (24.28) e a definição de trabalho (24.30), podemos escrever o resultado (24.27) na forma

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 = \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{v} dt \quad \left(\mathbf{v}_1 = \dot{f}(t_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \dot{f}(t_2) \right) \quad (24.31)$$

e dizer que

a variação da energia cinética em qualquer intervalo de tempo durante um movimento de uma partícula é igual ao trabalho realizado pela força total sobre ela durante esse mesmo intervalo de tempo no movimento considerado.

Esse é o chamado **Teorema da Energia Cinética** de uma partícula.

Nada nos impede de calcular o trabalho da força (24.30) usando uma função f qualquer, que não seja uma função-movimento possível da partícula. Naturalmente, não podemos esperar, nesse caso, que a integral obtida seja igual à variação da energia cinética da partícula. De fato, as funções que descrevem movimentos possíveis da partícula são as que satisfazem a Segunda Lei de Newton e, conseqüentemente, satisfazem o Teorema da Energia Cinética, que é uma conseqüência dessa lei.

Exemplo 24.1

Nesse exemplo, ilustraremos a validade do Teorema da Energia Cinética e o fato de que o trabalho realizado por uma força sobre uma partícula depende não apenas da força e do intervalo de tempo considerado mas, também, do movimento seguido pela partícula. Para simplificar, consideraremos uma força que é função apenas do tempo t . Com esse objetivo, suponha que a força total sobre uma partícula de massa m seja dada por

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = F_0 \left(\cos(\omega t) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t) \mathbf{u}_y \right). \quad (24.32)$$

Pode-se mostrar, por substituição direta na Segunda Lei de Newton, que uma função-movimento possível da partícula é

$$\mathbf{r} = f(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} \left[\left(1 - \cos(\omega t) \right) \mathbf{u}_x + \left(\omega t - \sin(\omega t) \right) \mathbf{u}_y \right]. \quad (24.33)$$

Basta, para tanto, calcular a função-velocidade e a função-aceleração correspondentes, isto é,

$$\mathbf{v} = \dot{f}(t) = \frac{F_0}{m\omega} \left[\sin(\omega t) \mathbf{u}_x + \left(1 - \cos(\omega t) \right) \mathbf{u}_y \right]; \quad (24.34)$$

$$\mathbf{a} = \ddot{f}(t) = \frac{F_0}{m} \left[\cos(\omega t) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t) \mathbf{u}_y \right]. \quad (24.35)$$

Comparando as equações (24.32) e (24.35), fica evidente que a Segunda Lei de Newton é satisfeita pela função-movimento escrita na equação (24.33). Calculemos, então, o trabalho realizado por essa força, no intervalo de tempo $[t_1 = 0, t_2 = \pi/\omega]$ ao longo do movimento dado pela equação (24.33). Usando a definição (24.30), temos

$$\begin{aligned} W(t_1 = 0, t_2 = \pi/\omega; f) &= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}(f(t), \dot{f}(t), t) \cdot \dot{f}(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/\omega} \left\{ \mathcal{F}_x(f(t), \dot{f}(t), t) \dot{f}_x(t) + \mathcal{F}_y(f(t), \dot{f}(t), t) \dot{f}_y(t) \right\} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{F_0^2}{m\omega} \int_0^{\pi/\omega} \left\{ \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t + \operatorname{sen} \omega t (1 - \cos \omega t) \right\} dt \\
&= \frac{F_0^2}{m\omega} \int_0^{\pi/\omega} \operatorname{sen} \omega t \, dt \\
&= \frac{2F_0^2}{m\omega^2} .
\end{aligned} \tag{24.36}$$

Para verificarmos a validade do Teorema da Energia Cinética, basta calcular a variação da energia cinética da partícula no intervalo considerado. Esse cálculo é imediato, uma vez que conhecemos a sua função-velocidade, escrita em (24.34):

$$\begin{aligned}
\Delta K &= K_2 - K_1 \\
&= \frac{1}{2}m \left(\dot{f}_x^2(\pi/\omega) + \dot{f}_y^2(\pi/\omega) \right) - \frac{1}{2}m \left(\dot{f}_x^2(0) + \dot{f}_y^2(0) \right) \\
&= \frac{2F_0^2}{m\omega^2} ,
\end{aligned} \tag{24.37}$$

resultado que torna evidente a igualdade $W(t_1 = 0, t_2 = \pi/\omega; f) = \Delta K$.

Desejamos ilustrar, ainda neste exemplo, o fato de que o trabalho realizado por uma força num certo intervalo de tempo depende do movimento seguido pela partícula. Com essa finalidade, consideremos uma outra função-movimento possível da partícula sob a ação da força total (24.32), a saber:

$$\mathbf{r} = \tilde{f}(t) = -\frac{F_0}{m\omega^2} \left(\cos(\omega t) \mathbf{u}_x + \operatorname{sen}(\omega t) \mathbf{u}_y \right) . \tag{24.38}$$

A função-velocidade correspondente é dada por

$$\mathbf{v} = \dot{\tilde{f}}(t) = \frac{F_0}{m\omega} \left(\operatorname{sen}(\omega t) \mathbf{u}_x - \cos(\omega t) \mathbf{u}_y \right) . \tag{24.39}$$

Derivando uma vez mais em relação ao tempo e substituindo o resultado, juntamente com a expressão dada para a função-força na Segunda Lei de Newton, você poderá verificar que, realmente, esse é um movimento possível da partícula. Calculemos, então, o trabalho realizado por essa força, no mesmo intervalo de tempo $[t_1 = 0, t_2 = \pi/\omega]$ mas, agora, ao longo do movimento dado pela equação (24.38).

Usando, novamente, a definição de trabalho dada por (24.30) e seguindo um procedimento análogo ao anterior, obtemos

$$W(t_1 = 0, t_2 = \pi/\omega; \tilde{f}) = \frac{F_0^2}{m\omega} \int_0^{\pi/\omega} \left\{ \cos \omega t \operatorname{sen} \omega t - \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t \right\} dt = 0 . \tag{24.40}$$

Comparando esse resultado com o trabalho calculado na equação (24.36) fica claro, mais uma vez, que o trabalho realizado por uma força depende não apenas da força e do intervalo de tempo considerado mas, também, do movimento seguido pela partícula. Finalizamos esse exemplo, enfatizando o fato de que a variação da energia cinética da partícula no intervalo $[0, \pi/\omega]$, quando sua função-movimento é dada por \tilde{f} , é nula, de modo que a igualdade $W(0, \pi/\omega; \tilde{f}) = \Delta K$ é verdadeira, de acordo com o Teorema da Energia Cinética (verifique você mesmo que $\Delta K = 0$, nesse caso).

Faremos, agora, uma grande simplificação em nosso estudo, restringindo-nos às situações em que as forças exercidas sobre a partícula dependem apenas da sua posição. Temos, pois,

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}) . \quad (24.41)$$

Nesse caso, o trabalho dado pela equação (24.30), calculado como uma integral no tempo, também pode ser calculado como uma integral no vetor-posição da partícula. Vejamos o significado e as consequências importantes dessa mudança de variável de integração.

Primeiramente, note que no integrando de (24.30) temos o produto da velocidade pelo diferencial dt , que é o diferencial do vetor posição $d\mathbf{r}$,

$$\mathbf{v} dt = \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt = d\mathbf{r} . \quad (24.42)$$

Desse modo, no caso em que a força depende apenas da posição, podemos escrever para o trabalho (24.30):

$$\int_{t_1(f)}^{t_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{v} dt = \int_{\mathbf{r}_1(f)}^{\mathbf{r}_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} , \quad (24.43)$$

onde \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 são, respectivamente, as posições da partícula nos instantes inicial e final,

$$\mathbf{r}_1 = f(t_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = f(t_2) . \quad (24.44)$$

Observe que, na integral do lado direito de (24.43), o integrando depende apenas da posição \mathbf{r} da partícula e os limites de integração são as posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . Portanto, essa integral depende apenas do conjunto de posições ocupadas pela partícula, desde \mathbf{r}_1 até \mathbf{r}_2 , quando ela segue o movimento dado pela função-movimento f escolhida para calcular o trabalho. Mas, dizer que a integral depende, apenas, desse conjunto de posições é o mesmo que dizer que a integral depende apenas da trajetória da partícula entre as posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . Se, no movimento dado por f , a trajetória da partícula é a curva \mathcal{C} , podemos indicar que o

trabalho no membro direito de (24.43) depende apenas da trajetória \mathcal{C} , escrevendo:

$$\int_{\mathbf{r}_1(f)}^{\mathbf{r}_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1(\mathcal{C})}^{\mathbf{r}_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} . \quad (24.45)$$

Uma integral como a que aparece no membro direito da equação anterior é chamada **integral de trajetória**, por motivos óbvios. Portanto, no caso de uma força que depende apenas da posição da partícula, o trabalho é uma integral de trajetória. Uma trajetória é também chamada caminho ou linha. Por isso, uma integral de trajetória é também chamada **integral de caminho** ou **integral de linha**.

A integral de trajetória (24.45) tem uma forma conveniente para entendermos o significado físico do conceito de trabalho, o que conseguiremos à medida que formos avançando em nosso estudo. Contudo, como a forma da integral (24.45) pode parecer pouco familiar, convém observar que ela pode sempre ser reduzida a uma integral simples, com a qual já estamos familiarizados. Há diversas formas pelas quais (24.45) se reduz a uma integral de uma única variável, como veremos em exemplos e problemas propostos. Por ora, basta considerar uma forma óbvia. A trajetória \mathcal{C} , usada em (24.45), pode ser descrita por qualquer função-movimento f que descreva um movimento com trajetória \mathcal{C} . Nesse caso, a equação $\mathbf{r} = f(t)$ é o que se costuma chamar uma equação paramétrica da trajetória \mathcal{C} (no caso, o parâmetro é o tempo). Usando essa equação, temos $d\mathbf{r} = (df(t)/dt) dt$, de modo que (24.45) se reduz a uma integral em uma única variável real t , de acordo com

$$\int_{\mathbf{r}_1(\mathcal{C})}^{\mathbf{r}_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}(f(t)) \cdot \frac{df(t)}{dt} dt , \quad (24.46)$$

onde t_1 e t_2 são os valores do parâmetro t que determinam, na trajetória, as posições inicial \mathbf{r}_1 e final \mathbf{r}_2 , respectivamente. É claro que a transformação (24.46) do trabalho em uma integral no tempo é uma volta à definição original de trabalho dada anteriormente nesta aula. Fizemos essa volta momentânea apenas para que fique claro que é sempre possível reduzir o cálculo do trabalho a uma integral simples, isto é, com uma única variável real de integração. Essas considerações ficarão mais claras num dos exemplos que estudaremos mais adiante.

Vemos, pois, que, no caso de uma força que depende apenas da posição, o trabalho pode ser obtido como uma integral de trajetória. Representamos o trabalho dado pela integral de trajetória no lado direito de (24.45) por $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathcal{C})$, para indicar que ele é determinado pelas posições inicial \mathbf{r}_1 e final \mathbf{r}_2 , e pela trajetória \mathcal{C} percorrida pela partícula. Temos, então,

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathcal{C}) = \int_{\mathbf{r}_1(\mathcal{C})}^{\mathbf{r}_2} \mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} . \quad (24.47)$$

Se não houver dúvida quanto ao fato de a força depender apenas da posição da partícula, poderemos escrever esse trabalho na forma mais abreviada

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathcal{C}) = \int_{\mathbf{r}_1(\mathcal{C})}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} , \quad (24.48)$$

sem, com isso, causar ambigüidade alguma. Contudo, deve ficar claro que só podemos calcular esse trabalho se soubermos a função que dá a força \mathbf{F} em termos da posição \mathbf{r} .

Sabemos que cada vetor-posição determina um único ponto no espaço e vice-versa. Há uma correspondência biunívoca que associa a cada ponto P o vetor-posição $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$. Conseqüentemente, dizer que uma grandeza é função do vetor-posição é equivalente a dizer que ela é função do ponto do espaço especificado por esse vetor. O trabalho definido em (24.48) é função de um vetor-posição inicial \mathbf{r}_1 , do vetor-posição final \mathbf{r}_2 e da trajetória \mathcal{C} . Podemos, então, dizer que esse trabalho é uma função de dois pontos, do ponto inicial P_1 e do ponto final P_2 , cujos vetores-posição são, respectivamente, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ e $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ e da trajetória \mathcal{C} . Nesse caso, usamos para o trabalho o símbolo $W(P_1, P_2; \mathcal{C})$, no qual \mathcal{C} é a curva em consideração, que vai do ponto P_1 ao ponto P_2 . Além disso, cada ponto do espaço tem uma única trinca de coordenadas cartesianas e cada uma delas determina um único ponto. Portanto, dizer que uma grandeza é função do ponto do espaço P é equivalente a dizer que ela é função da trinca (x, y, z) de coordenadas desse ponto. No caso do trabalho, que é função dos pontos inicial P_1 e final P_2 e da trajetória \mathcal{C} , podemos equivalentemente dizer que ele é função da trinca de coordenadas (x_1, y_1, z_1) de P_1 , da trinca de coordenadas (x_2, y_2, z_2) de P_2 e da trajetória \mathcal{C} . Podemos, então, escrever $W(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2; \mathcal{C})$ no lugar de $W(P_1, P_2; \mathcal{C})$. Dentro dessa mesma ótica, temos três maneiras de escrever a integral do trabalho definido em (24.48). Elas são dadas nas igualdades que seguem:

$$\int_{\mathbf{r}_1(\mathcal{C})}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{P_1(\mathcal{C})}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(x_1, y_1, z_1)(\mathcal{C})}^{(x_2, y_2, z_2)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (24.49)$$

Em cálculos de trabalhos, é conveniente dispor dessas diversas notações, pois, em casos específicos, algumas podem ser mais convenientes do que as outras.

O integrando em (24.48) é representado por dW e denominado **trabalho infinitesimal realizado pela força \mathbf{F} no deslocamento infinitesimal $d\mathbf{r}$** . Note que, de acordo com a equação (24.42), o deslocamento infinitesimal em cada ponto é tangente à trajetória nesse ponto. Escrevemos:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (24.50)$$

Esse trabalho infinitesimal é o produto escalar da força pelo deslocamento infinitesimal em consideração. Podemos, então, dizer que o trabalho é a projeção da força ao longo do deslocamento infinitesimal multiplicada pelo módulo desse deslocamento. Esse trabalho é positivo, se a projeção da força ao longo do deslocamento é positiva, isto é, se a força faz um ângulo com o deslocamento menor do que um ângulo reto. O trabalho é negativo, se a projeção é negativa, isto é, se a força faz um ângulo com o deslocamento maior do que um ângulo reto. Finalmente, se a força é perpendicular ao deslocamento, o trabalho realizado é nulo. Se a força for perpendicular ao deslocamento na trajetória inteira, o trabalho total será nulo. Isso acontece, por exemplo, quando você carrega uma mala em um caminho horizontal. A força que você exerce sobre ela é praticamente vertical, para contrabalançar o peso da mala. Sendo horizontal o movimento da mala, é nulo o trabalho que você realiza sobre ela. Uma vez que você realiza um esforço para carregar a mala, você talvez diga que está realizando um trabalho, no sentido coloquial da palavra. Isso mostra que esse significado coloquial da palavra trabalho não é o mesmo que o significado preciso que essa palavra tem na Mecânica.

Ao calcularmos o trabalho de \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 , ao longo da trajetória C , podemos considerar que são integrados, isto é, somados, os trabalhos infinitesimais ao longo da trajetória, conforme ilustrado na Figura 24.3

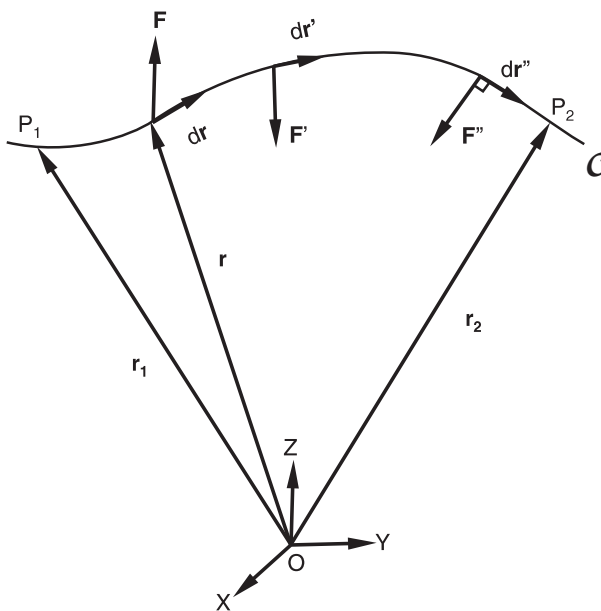


Figura 24.3: Trajetória C , na qual selecionamos os três deslocamentos infinitesimais $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}'$ e $d\mathbf{r}''$. As direções das forças nesses três deslocamentos mostram que os respectivos trabalhos infinitesimais são positivo, negativo e nulo. A soma de todos os trabalhos infinitesimais ao longo da trajetória, do ponto inicial ao final, é o trabalho total de P_1 a P_2 , ao longo de C .

No caso em que a força total sobre uma partícula depende apenas da posição

da partícula, temos para o Teorema da Energia Cinética (24.51), a versão:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathcal{C}), \quad (24.51)$$

onde \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são as respectivas velocidades da partícula nas posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . Dizemos, então, que

a variação da energia cinética de uma partícula entre dois pontos de sua trajetória é igual ao trabalho realizado ao longo da trajetória pela força total sobre ela, desde o ponto inicial até o ponto final.

Note, nesse caso, que não se faz menção ao tempo no enunciado do teorema.

Podemos calcular o trabalho $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathcal{C})$, definido em (24.48), considerando qualquer curva \mathcal{C} , mesmo que não seja uma trajetória possível da partícula. Contudo, por motivos anteriormente comentados, não esperamos, em geral, que tal trabalho seja igual à variação da energia cinética da partícula.

É importante enfatizar que, de modo geral, o trabalho $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathcal{C})$ depende não apenas das posições inicial e final da partícula, mas também da trajetória percorrida pela partícula entre essas posições. Lembre-se de que, na aula anterior, consideramos o trabalho ao longo de uma trajetória retilínea, contida no eixo \mathcal{OX} , de uma força que dependia apenas da posição x nesse eixo. Tínhamos, então, a trajetória da partícula fixada, de modo que o trabalho dependia somente das posições inicial e final. Agora, temos a possibilidade de considerar diversas trajetórias entre dois pontos, motivo pelo qual o trabalho poderá depender, também, da trajetória. O próximo exemplo ilustra esse fato.

Exemplo 24.2

Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} dois vetores constantes, de mesmo módulo k , e perpendiculares entre si. Temos, pois:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = k \quad \text{e} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (24.52)$$

Suponha que a força total sobre uma partícula seja dada por

$$\mathbf{F} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})\mathbf{B}. \quad (24.53)$$

Essa força é uma função apenas da posição \mathbf{r} . Vamos aproveitar o fato de que os vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} são constantes e perpendiculares entre si, para simplificar a expressão da força (24.53). Escolhendo o eixo \mathcal{OX} na direção e no sentido de \mathbf{A} e usando o fato de que o módulo de \mathbf{A} é igual a k , temos $\mathbf{A} = k\mathbf{u}_x$. Escolhendo

o eixo \mathcal{OY} na direção e no sentido de \mathbf{B} e usando o fato de que o módulo de \mathbf{B} também é igual a k , temos $\mathbf{B} = k\mathbf{u}_y$. Com isso, obtemos para a força (24.53):

$$\mathbf{F} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})\mathbf{B} = (k\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{r})k\mathbf{u}_y = k^2 x \mathbf{u}_y ,$$

isto é,

$$\mathbf{F} = k^2 x \mathbf{u}_y . \quad (24.54)$$

Calcularemos o trabalho realizado por essa força ao longo de três curvas que ligam o ponto P_1 de coordenadas $x = 0$, $y = R$ e $z = 0$ ao ponto P_2 de coordenadas $x = 0$, $y = -R$ e $z = 0$, sendo R uma distância constante. Temos, então, para os respectivos vetores-posição desses pontos

$$\mathbf{r}_1 = R\mathbf{u}_y \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = -R\mathbf{u}_y . \quad (24.55)$$

Podemos considerar diversas curvas no espaço conectando esses dois pontos, mas, para nossos propósitos, é suficiente tomar curvas contidas no plano \mathcal{OXY} . A primeira curva, que chamaremos \mathcal{C}_1 , é o segmento de reta no eixo \mathcal{OY} , de $y = R$ a $y = -R$, conforme indicado na Figura 24.4.

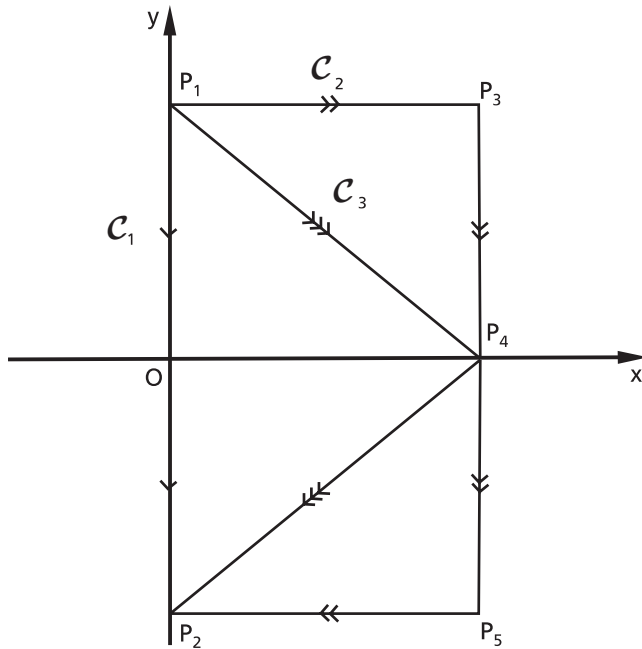


Figura 24.4: Curvas \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 no plano \mathcal{OXY} . \mathcal{C}_1 é o segmento reto de P_1 a P_2 , identificado por setinhas simples. \mathcal{C}_2 é a poligonal identificada por setinhas duplas e \mathcal{C}_3 , a poligonal identificada por setinhas triplas.

A figura também mostra as outras duas curvas, \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 , que conectam as posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . A curva \mathcal{C}_2 é a poligonal pelos pontos consecutivos $P_1 = (0, R, 0)$, $P_3 = (R, R, 0)$, $P_5 = (R, -R, 0)$ e $P_2 = (0, -R, 0)$. A curva \mathcal{C}_3 é a poligonal que passa pelos pontos consecutivos $P_1 = (0, R, 0)$, $P_4 = (R, 0, 0)$ e $P_2 = (0, -R, 0)$. Vamos calcular o trabalho da força nesses três caminhos.

Começamos o cálculo dos trabalhos observando o fato de que a força em questão pode ser escrita na forma (24.54) e, portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= k^2 x \mathbf{u}_y \cdot (dx \mathbf{u}_x + dy \mathbf{u}_y + dz \mathbf{u}_z) \\ &= k^2 x dy.\end{aligned}$$

Para o caminho \mathcal{C}_1 , temos, de acordo com a definição (24.48), o trabalho

$$\begin{aligned}W(R\mathbf{u}_y, -R\mathbf{u}_y; \mathcal{C}_1) &= \int_{R\mathbf{u}_y(\mathcal{C}_1)}^{-R\mathbf{u}_y} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{R(\mathcal{C}_1)}^{-R} k^2 x dy \\ &= 0.\end{aligned}\tag{24.56}$$

Note que o resultado nulo é imediato para esse trabalho, porque a curva \mathcal{C}_1 é um segmento de reta no eixo \mathcal{OY} , o que faz com que tenhamos $x = 0$ no integrando em (24.56). Note também que, ao passarmos da variável de integração \mathbf{r} para a variável de integração y , tivemos o cuidado de trocar os limites de integração de $\mathbf{r} = R\mathbf{u}_y$ e $\mathbf{r} = -R\mathbf{u}_y$ para $y = R$ e $y = -R$. Não é necessário preocupar-se com esse tipo de detalhe de notação, se estivermos entendendo bem esse tipo de cálculo.

Na notação preconizada anteriormente, o resultado (24.56) toma a forma

$$W(P_1, P_2; \mathcal{C}_1) = 0, \tag{24.57}$$

onde $P_1 = (0, R, 0)$ e $P_2 = (0, -R, 0)$.

Continuando com essa notação, calculamos agora o trabalho na curva \mathcal{C}_2 , indicado na Figura 24.4. Separamos o caminho de integração em três partes:

$$\begin{aligned}W(P_1, P_2; \mathcal{C}_2) &= \int_{P_1(\mathcal{C}_2)}^{P_2} k^2 x dy \\ &= \int_{P_1(\mathcal{C}_2)}^{P_3} k^2 x dy + \int_{P_3(\mathcal{C}_2)}^{P_5} k^2 x dy + \int_{P_5(\mathcal{C}_2)}^{P_2} k^2 x dy \\ &= \int_{P_3(\mathcal{C}_2)}^{P_5} k^2 R dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k^2 R \int_R^{-R} dy \\
&= -2 k^2 R^2 .
\end{aligned} \tag{24.58}$$

Na integral de P_1 a P_3 , observe que y é uma constante (igual a R) e, portanto, $dy = 0$. Na integral de P_5 a P_2 , também temos $dy = 0$, porque y é constante. Por esses motivos, essas integrais são nulas. Na integral restante, de P_3 a P_5 , a coordenada y varia de R a $-R$ e a coordenada x é constante em todo o caminho ($x = R$).

Passemos, finalmente, ao trabalho na curva \mathcal{C}_3 , indicada na Figura 24.4. Agora, separamos o caminho de integração em duas partes. A primeira delas é o segmento de reta de P_1 a P_4 , ao longo do qual temos $y = R - x$ e, conseqüentemente, $dy = -dx$. A segunda parte é o segmento de P_4 a P_2 , ao longo do qual temos $y = -R + x$ e, portanto, $dy = dx$. Temos, então,

$$\begin{aligned}
W(P_1, P_2; \mathcal{C}_3) &= \int_{P_1(\mathcal{C}_3)}^{P_2} k^2 x dy \\
&= \int_{P_1(\mathcal{C}_3)}^{P_4} k^2 x dy + \int_{P_4(\mathcal{C}_3)}^{P_2} k^2 x dy \\
&= \int_{P_1(\mathcal{C}_3)}^{P_4} k^2 x (-dx) + \int_{P_4(\mathcal{C}_3)}^{P_2} k^2 x dx \\
&= -k^2 \int_{P_1(\mathcal{C}_3)}^{P_4} x dx + k^2 \int_{P_4(\mathcal{C}_3)}^{P_2} x dx \\
&= -k^2 \int_0^R x dx + k^2 \int_R^0 x dx \\
&= -k^2 R^2 .
\end{aligned} \tag{24.59}$$

Os limites da variável de integração x , que aparecem na penúltima linha da fórmula anterior, são determinados pelo fato de que, de P_1 a P_4 , a coordenada x varia de 0 a R , enquanto de P_4 a P_2 essa coordenada varia de R a 0.

Observe, nessas três curvas, que o cálculo do trabalho sempre se reduz a integrais de uma única variável, como mencionado anteriormente. No problema proposto 13, você verificará que o mesmo acontece ao longo de outros caminhos.

Os trabalhos (24.56), (24.58) e (24.59) são diferentes, embora sejam calculados com a mesma força e a partir dos mesmos pontos inicial e final. Eles são diferentes, porque são calculados ao longo de trajetórias diferentes que conectam esses pontos. Finalizamos esse exemplo enfatizando que,

em geral, o trabalho depende do caminho de integração.

No primeiro exemplo desta aula ilustramos a validade do Teorema da Energia Cinética no caso de uma força dependente apenas do tempo.

Exemplo 24.3

O objetivo deste exemplo é aproveitar a força descrita no exemplo anterior para ilustrar, numa situação em que a força total sobre a partícula em estudo depende apenas de sua posição, a validade do Teorema da Energia Cinética. Considere, portanto, uma partícula de massa m sujeita a uma força total dada por (24.53) ou, em sua forma simplificada, por (24.54). Um dos movimentos possíveis dessa partícula é dado pela seguinte função-movimento:

$$\mathbf{f}(t) = \left(R - \frac{2R}{T} t \right) \mathbf{u}_y \quad (t \in [0, T]) , \quad (24.60)$$

na qual T é um instante fixo do tempo. É fácil verificar que esse é um movimento possível da partícula, substituindo $\mathbf{r} = [R - (2R/T)t]\mathbf{u}_y$ na Segunda Lei de Newton $m\mathbf{a} = k^2 x \mathbf{u}_y$.

Nesse movimento, a posição da partícula no instante $t = 0$ é $\mathbf{r} = R\mathbf{u}_y$, e no instante $t = T$ é $\mathbf{r} = -R\mathbf{u}_y$; ou seja, no intervalo de tempo $[0, T]$, a partícula se desloca do ponto P_1 ao ponto P_2 , conforme indicados na Figura 24.4. A variação da energia cinética da partícula no deslocamento de P_1 a P_2 é zero, pois a velocidade da partícula permanece constante durante esse movimento. Observe que o movimento descrito pela equação (24.60) é um MRU com velocidade $\mathbf{v} = -(2R/T)\mathbf{u}_y$. De acordo com o Teorema da Energia Cinética (24.51), o trabalho realizado pela força resultante na trajetória do movimento de P_1 a P_2 deve ser zero. Ora, essa trajetória é exatamente a curva \mathcal{C}_1 da Figura 24.4, para a qual, de fato, encontramos um trabalho nulo em (24.57). A variação da energia cinética no movimento de P_1 a P_2 não é igual aos trabalhos ao longo das curvas \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 , dados por (24.57) e (24.57), respectivamente. O motivo para isso deve estar claro, desde que você tenha entendido bem o conteúdo do Teorema da Energia Cinética (24.51).

Forças conservativas

Continuemos a estudar forças que dependem apenas da posição da partícula, isto é, do tipo descrito em (24.41). Para uma dada força, esse trabalho é uma integral de caminho, de um ponto inicial P_1 a um ponto final P_2 , ao longo de uma certa curva \mathcal{C} . Esse trabalho é uma função dessa curva e dos pontos inicial e final. De acordo com uma das notações sugeridas na seção anterior, vamos representá-lo por $W(P_1, P_2; \mathcal{C})$. Fixando o ponto inicial P_1 e o ponto final P_2 , o trabalho depende, em geral, do caminho \mathcal{C} que os conecta. Quando dizemos “em geral”, queremos dizer que, ao variarmos a curva, o valor do trabalho pode mudar. Isso não significa que para diferentes curvas os trabalhos sejam, necessariamente, dife-

rentes; significa, apenas, que podem ser diferentes. O que desejamos considerar, agora, é um tipo de força para a qual os trabalhos nunca são diferentes, quaisquer que sejam as curvas consideradas, desde que P_1 e P_2 permaneçam fixos. Eles têm o mesmo valor ao longo de qualquer trajetória que ligue o ponto inicial ao final. Uma força desse tipo é chamada **conservativa**. Definimos o conceito de força conservativa, porque forças desse tipo são encontradas na Natureza e desempenham um papel importante na Mecânica.

Força conservativa é uma força cujo trabalho realizado de um ponto a outro, ao longo de um caminho que os conecta, não depende do caminho, mas apenas desses dois pontos.

Vamos expressar essa definição usando a simbologia da seção anterior. Sejam duas curvas C_1 e C_2 , ambas conectando os pontos arbitrários P_1 e P_2 . Sejam $W(P_1, P_2; C_1)$ e $W(P_1, P_2; C_2)$ os trabalhos correspondentes realizados por uma força ao longo das curvas C_1 e C_2 . Por definição, essa força é conservativa, se satisfizer à seguinte propriedade:

$$W(P_1, P_2; C_1) = W(P_1, P_2; C_2) \quad \text{para quaisquer caminhos } C_1 \text{ e } C_2. \quad (24.61)$$

Vale a pena enfatizar que a força será conservativa se, fixados os pontos inicial e final, o trabalho for o mesmo para todos os caminhos que conectam esses pontos. Basta que exista um único par de caminhos nos quais os respectivos trabalhos não sejam iguais, para que a força não seja conservativa. No exemplo 24.2, calculamos os trabalhos realizados pela força $\mathbf{F} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})\mathbf{B}$ ao longo de três caminhos diferentes, C_1 , C_2 e C_3 , todos conectando o mesmo ponto inicial ao mesmo ponto final. Encontramos três valores diferentes para esses trabalhos. Podemos concluir, então, que tal força não é conservativa. Na verdade, bastaria calcular os trabalhos ao longo de C_1 e C_2 para chegarmos a essa conclusão, uma vez que tais trabalhos são diferentes. Não seria nem mesmo necessário calcular o trabalho ao longo da curva C_3 , para afirmar que essa força não é conservativa.

Uma vez que no caso de uma força conservativa \mathbf{F} o trabalho $W(P_1, P_2; C)$ não depende do caminho C , vamos representar esse trabalho simplesmente por $W(P_1, P_2)$. Não é necessário mencionar o caminho usado na integral de linha, de modo que escrevemos para o trabalho da força conservativa \mathbf{F} :

$$W(P_1, P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (24.62)$$

Note que essa integral ainda é uma integral de caminho. Para que ela tenha significado, é necessário considerar algum caminho do ponto P_1 ao ponto P_2 , como

ilustrado na Figura 24.4. O símbolo do caminho foi abolido da integral, apenas porque o valor da integral é o mesmo, qualquer que seja o caminho considerado.

O fato de que o trabalho de uma força conservativa depende apenas dos pontos inicial e final tem algumas conseqüências imediatas importantes. Primeiramente, observe que, para quaisquer pontos P_1 , P_2 e P_3 , temos

$$W(P_1, P_2) + W(P_2, P_3) = W(P_1, P_3) . \quad (24.63)$$

Podemos entender essa propriedade da seguinte maneira: usando um caminho \mathcal{C} de P_1 a P_3 , que passe por P_2 , teremos

$$W(P_1, P_3; \mathcal{C}) = W(P_1, P_2; \mathcal{C}) + W(P_2, P_3; \mathcal{C}) ,$$

devido ao próprio significado de integral de caminho. Como a força em questão é conservativa, podemos ignorar o caminho usado e chegar à forma (24.63). O fato de que nesta equação as integrais não dependem do caminho nos permite considerar o cálculo de $W(P_1, P_2)$ ao longo de uma curva qualquer \mathcal{C}_1 que ligue P_1 a P_2 , $W(P_2, P_3)$ ao longo de uma curva qualquer \mathcal{C}_2 , que ligue P_2 a P_3 e, por fim, o cálculo de $W(P_1, P_3)$ ao longo de uma curva qualquer \mathcal{C}_3 , que ligue P_1 a P_3 , conforme ilustrado na Figura 24.5.

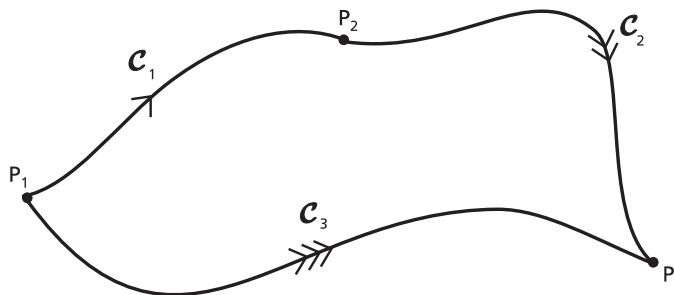


Figura 24.5: O trabalho realizado por uma força conservativa de P_1 a P_2 adicionado ao trabalho realizado de P_2 a P_3 é igual ao trabalho realizado de P_1 a P_3 , não importando os caminhos \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 e \mathcal{C}_3 considerados no cálculo desses trabalhos.

Temos, também,

$$W(P, P) = 0 \quad (24.64)$$

e

$$W(P_1, P_2) = -W(P_2, P_1) . \quad (24.65)$$

Obtemos o resultado (24.64) tomando os pontos P_1 , P_2 e P_3 iguais ao ponto P na equação (24.63). Já o resultado (24.65) é obtido tomando-se $P_3 = P_1$ em (24.63) e considerando-se o resultado (24.64), já demonstrado.

Consideremos agora uma propriedade importante das forças conservativas que decorre, diretamente, de sua definição.

Uma força é conservativa se, e somente se, ela realiza trabalho nulo em qualquer caminho fechado.

É fácil demonstrar que, se a força é conservativa, então é nulo o seu trabalho em qualquer caminho fechado. Com efeito, consideremos uma curva fechada qualquer \mathcal{C} e um ponto P nessa curva. Percorrendo a curva inteira, a partir do ponto P , voltamos a esse ponto, pois a curva é fechada. Conseqüentemente, o trabalho ao longo da curva é $W(P, P; \mathcal{C})$. Mas como a força é conservativa, esse trabalho não depende do caminho, pode ser denotado por $W(P, P)$ e é igual a zero, como estabelecido na equação (24.64). A propriedade supracitada também afirma a recíproca, isto é:

se é nulo o trabalho de uma força em qualquer caminho fechado, então a força é conservativa.

A tarefa de fazer a demonstração dessa recíproca é deixada para você como um problema proposto.

Uma integral de linha em um caminho fechado é representada por um símbolo de integral superposto a um pequeno círculo. Desse modo, a propriedade supracitada de uma força conservativa \mathbf{F} pode ser expressa na forma:

$$\mathbf{F} \text{ é conservativa} \iff \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad \text{para qualquer caminho fechado } \mathcal{C}. \quad (24.66)$$

Veremos, agora, alguns exemplos de forças conservativas. Para verificar se uma força é ou não conservativa, calculamos o trabalho que ela realiza ao longo de um caminho arbitrário. Se a resposta final não depender do caminho, ficará verificado que a força é conservativa.

Exemplo 24.4

Consideremos uma força constante \mathbf{F} . Aproveitamos o fato de que a força é constante para escolher um eixo, digamos o \mathcal{OX} , na direção e sentido da força. Nesse caso, temos $\mathbf{F} = F \mathbf{u}_x$, onde F é o módulo da força. Obtemos, dessa forma,

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \mathbf{u}_x \cdot d\mathbf{r} = F dx.$$

Vamos calcular o trabalho realizado por \mathbf{F} desde uma posição $\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{u}_x + y_1 \mathbf{u}_y + z_1 \mathbf{u}_z$ até uma posição $\mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{u}_x + y_2 \mathbf{u}_y + z_2 \mathbf{u}_z$, ao longo de uma curva \mathcal{C} , conectando essas posições, conforme ilustrado na Figura 24.6. Naturalmente, as duas posições e a curva são totalmente arbitrárias. Temos, então,

$$\int_{\mathbf{r}_1(\mathcal{C})}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{x_1}^{x_2} F dx = F \int_{x_1}^{x_2} dx = F(x_2 - x_1), \quad (24.67)$$

onde usamos o fato de que o módulo F é constante para tirá-lo da integral escrita na equação anterior.

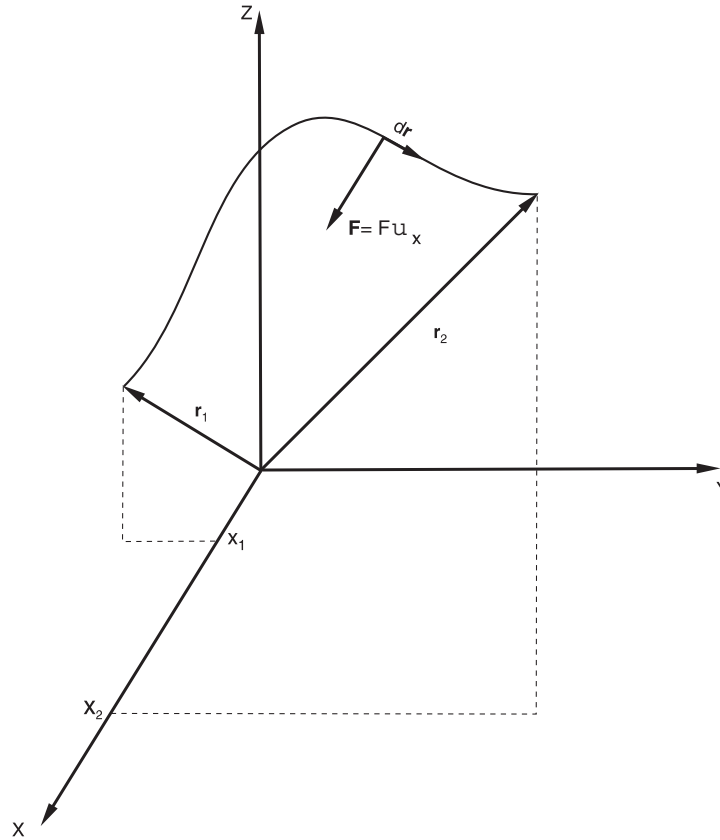


Figura 24.6: No cálculo do trabalho de uma força constante, escolhemos um dos eixos ao longo da direção e sentido da força. Somente estão indicadas as componentes de \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 ao longo do eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$.

Note que na última integral em (24.67) omitimos o símbolo \mathcal{C} do caminho, pois ela é uma integral simples na variável real x e não depende em nada do caminho que conecta os pontos inicial e final. Finalmente, usando $\mathbf{F} = F\mathbf{u}_x$, temos $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = F(x_2 - x_1)$. Desse modo, podemos escrever o resultado anterior como

$$\mathbf{F} \text{ constante} \implies \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1). \quad (24.68)$$

É evidente que esse trabalho não depende do caminho \mathcal{C} , mas apenas das posições inicial e final. Portanto, a força constante é conservativa. A expressão anterior mostra também que, no caso de uma força constante, o trabalho realizado quando

a partícula vai do ponto inicial ao ponto final é o produto escalar da força pelo vetor deslocamento correspondente. Conseqüentemente, o trabalho é a projeção da força ao longo do unitário do deslocamento multiplicada pelo módulo desse deslocamento.

Exemplo 24.5

Consideremos, nesse exemplo, o caso importante da força gravitacional. Suponhamos que uma partícula de massa M esteja fixa na origem. A força gravitacional que ela exerce sobre uma partícula de massa m , localizada na posição \mathbf{r} , é dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u}_r. \quad (24.69)$$

Essa também é a força que uma esfera homogênea de massa M e raio R , com centro na origem, exerce sobre a partícula de massa m , localizada na posição \mathbf{r} , desde que $r \geq R$. Portanto, nossa análise será aplicável a esses dois casos.

Para calcular o trabalho da força gravitacional, devemos considerar as características de uma variação infinitesimal $d\mathbf{r}$ do vetor-posição \mathbf{r} . A Figura 24.7 mostra um vetor \mathbf{r} que sofre uma variação $d\mathbf{r}$ considerada muito pequena para simular o conceito matemático de variação infinitesimal $d\mathbf{r}$. A variação transforma o vetor \mathbf{r} no vetor $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$. O módulo r do vetor \mathbf{r} sofreu uma variação dr , que está indicada na Figura 24.7; obviamente, $dr = |\mathbf{r}'| - |\mathbf{r}|$. A figura ilustra a situação geral em que o vetor \mathbf{u}_r varia em módulo e em direção. De fato, \mathbf{r}' aparece na Figura 24.7 com uma direção diferente da de \mathbf{r} . Nessa situação geral, vamos calcular o produto escalar do unitário \mathbf{u}_r pela variação infinitesimal $d\mathbf{r}$. Sabemos que esse produto escalar é a projeção do vetor $d\mathbf{r}$ ao longo do unitário \mathbf{u}_r . Vemos na Figura 24.7 que, para $d\mathbf{r}$ infinitesimal, essa projeção é a variação dr do módulo do vetor \mathbf{r} , isto é,

$$\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} = \text{proj}_{\mathbf{u}_r} d\mathbf{r} = dr. \quad (24.70)$$

Esse resultado pode ser obtido sem auxílio de figuras, por um cálculo direto com o vetor-posição, como você poderá verificar no problema proposto 11. No entanto, é bom você se acostumar também com o método geométrico que usamos para obter (24.70). De acordo com (24.70), o trabalho infinitesimal realizado pela força gravitacional (24.69) é

$$\begin{aligned} dW &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\frac{GMm}{r^2}\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

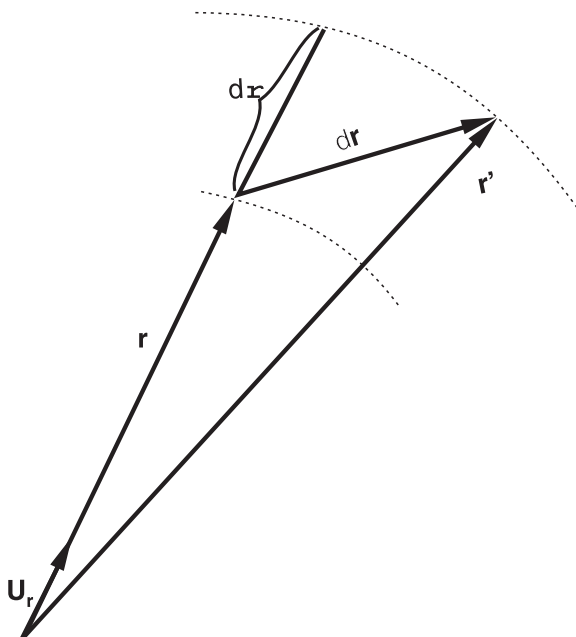


Figura 24.7: Variação dr do vetor-posição de uma partícula.

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{GMm}{r^2} dr \\
 &= \frac{d}{dr} \left(\frac{GMm}{r} \right) dr, \quad (24.71)
 \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que a derivada de $1/r$ é $-1/r^2$. Agora, vamos integrar esse trabalho infinitesimal desde uma posição inicial r_1 até uma posição final r_2 , ao longo de um caminho \mathcal{C} . Temos:

$$\begin{aligned}
 \int_{r_1(\mathcal{C})}^{r_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{r_1(\mathcal{C})}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} \\
 &= \int_{r_1}^{r_2} \frac{d}{dr} \left(\frac{GMm}{r} \right) dr, \quad (24.72)
 \end{aligned}$$

onde, naturalmente, r_1 e r_2 são os módulos dos respectivos vetores \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 . A última integral em (24.72) é uma integral simples na variável real r e não depende em nada do caminho que conecta os pontos inicial e final. Vemos, então, que o trabalho da força gravitacional depende apenas das posições inicial e final; mais precisamente, depende dos módulos dos vetores-posição dos pontos inicial e final e é dado por

$$\int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}. \quad (24.73)$$

Concluimos, desse modo, que a força gravitacional é conservativa.

Um outro exemplo importante de força conservativa é a força do tipo elástica, dada por

$$\mathbf{F} = -k \mathbf{r} . \quad (24.74)$$

No entanto, como um problema proposto, deixaremos você demonstrar que essa força é, de fato, conservativa. Na verdade, qualquer força que aponte sempre para um mesmo ponto, chamado por esse motivo **centro de força**, e cujo módulo dependa apenas da distância dele até a posição da partícula, é uma força conservativa. É comum a denominação **força central** para esse tipo de força. Ou seja, uma força central tem a forma

$$\mathbf{F} = F_C(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_C|) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_C}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_C|} , \quad (24.75)$$

onde F_C é uma função genérica de uma única variável e \mathbf{r}_C é o vetor-posição do centro de força. Escolhendo a origem no centro de força, a expressão anterior se reduz a

$$\mathbf{F} = F_C(r) \mathbf{u}_r . \quad (24.76)$$

Tanto a força gravitacional quanto a força elástica escritas em (24.69) e (24.74), respectivamente, são casos particulares de forças centrais. No caso da força gravitacional, temos $F_C(r) = -GMm/r^2$, enquanto no caso da força do tipo elástica, $F_C(r) = -kr$. Você irá demonstrar, num problema proposto 17, que

toda força central é conservativa.

Resumo

Produto escalar de dois vetores é o número obtido da multiplicação do módulo do primeiro pelo módulo do segundo e pelo cosseno do ângulo entre eles. Geometricamente, o produto escalar de dois vetores é o produto do módulo do primeiro pela projeção do segundo ao longo do unitário do primeiro. O produto escalar de dois vetores é nulo se, e somente se, um deles for o vetor nulo ou eles forem perpendiculares entre si. O produto escalar não depende da ordem dos fatores; é distributivo em relação à adição vetorial e fica multiplicado pelo número que for usado para multiplicar qualquer um de seus fatores. Além disso, o produto escalar de um vetor por ele mesmo é sempre positivo ou nulo, sendo nulo se, e somente se, o vetor for nulo. O produto escalar de um vetor por ele mesmo é chamado quadrado do vetor. O módulo de qualquer vetor é a raiz quadrada de seu quadrado. Os produtos escalares dos unitários ortonormais dos eixos cartesianos são um ou zero, conforme os fatores sejam ou não iguais. Como consequência

desse resultado, o produto escalar de dois vetores é igual à soma dos produtos das componentes do primeiro pelas respectivas componentes do segundo.

Energia cinética de uma partícula é o semi-produto de sua massa pelo quadrado de sua velocidade. O produto escalar de uma força sobre uma partícula pela velocidade da partícula é chamado potência fornecida pela força à partícula. A partir da Segunda Lei de Newton, pode-se mostrar que a taxa instantânea de variação temporal da energia cinética de uma partícula é igual à potência fornecida à partícula pela força total que age sobre ela. Esse resultado pode ser considerado como uma versão preliminar do Teorema da Energia Cinética.

Trabalho realizado por uma força que age sobre uma partícula durante um intervalo de tempo de seu movimento é a integral no tempo da potência da força, desde o início até o final do intervalo. A partir da Segunda Lei de Newton, pode-se mostrar que a variação da energia cinética de uma partícula, durante um intervalo de tempo de seu movimento, é igual ao trabalho realizado pela força total sobre a partícula nesse intervalo. Esse é o chamado Teorema da Energia Cinética.

No caso de uma força que dependa apenas da posição da partícula, o trabalho realizado pela força em um certo intervalo de tempo do movimento da partícula depende apenas da trajetória da partícula nesse intervalo de tempo; dizemos, então, que ele é o trabalho realizado pela força ao longo da trajetória da partícula, desde o ponto inicial até o ponto final. Esse trabalho é dado pela integral do produto escalar da força pelo deslocamento infinitesimal da partícula. Esse deslocamento infinitesimal é o diferencial do vetor-posição, de modo que a variável de integração, nesse caso, é o vetor-posição da partícula. Uma tal integral é dita de trajetória, de linha ou, ainda, de caminho. Nesse caso, em que a força depende apenas da posição da partícula, o Teorema da Energia Cinética toma a seguinte forma: a variação da energia cinética de uma partícula entre dois pontos de sua trajetória é igual ao trabalho realizado ao longo da trajetória pela força total sobre ela, desde o ponto inicial até o final.

De modo geral, o trabalho realizado por uma força sobre uma partícula que se desloca de um ponto a outro depende não somente desses pontos, mas também da trajetória que a partícula segue para ir de um ao outro. Se o trabalho realizado por uma força depender, apenas, dos pontos entre os quais se processa o deslocamento da partícula, mas não da trajetória que os conecta, a força será dita conservativa. Sucintamente, uma força é chamada conservativa se sua integral de caminho entre dois pontos não depende do caminho que os conecta. Essa afirmativa é equivalente à seguinte: uma força é conservativa se, e somente se, ela realizar trabalho nulo em qualquer caminho fechado.

Questionário

1. Defina produto escalar de dois vetores.
2. Sob que condições é nulo o produto escalar?
3. Qual é a interpretação geométrica do produto escalar?
4. Quais são as propriedades algébricas fundamentais do produto escalar?
5. O que é energia cinética de uma partícula?
6. Defina potência fornecida por uma força a uma partícula.
7. O que é trabalho realizado por uma força sobre uma partícula durante um intervalo de tempo de seu movimento?
8. Sob que condição é possível definir trabalho realizado por uma força ao longo de uma trajetória de uma partícula? Suponha que essa condição seja satisfeita e dê a definição.
9. Enuncie o Teorema da Energia Cinética, em sua versão mais geral.
10. Enuncie o Teorema da Energia Cinética, no caso particular em que a força total que atua sobre a partícula depende apenas de sua posição.
11. Defina força conservativa. Dê exemplos de forças conservativas.
12. Considere uma partícula que, ao final de um certo intervalo de tempo, volte ao mesmo ponto que ocupava no início do intervalo. O trabalho realizado por uma força sobre a partícula, nesse intervalo, é necessariamente nulo?
13. Toda força constante é conservativa?
14. Defina força central.

Problemas propostos

1. Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} dois vetores não-nulos. Faça um gráfico do produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ versus o ângulo θ entre os vetores.
2. Use a segunda igualdade escrita em (24.8) e a comutatividade dada por (24.6) para demonstrar a primeira igualdade escrita em (24.8).

3. Considere seis pontos, A, B, C, D, E e F , localizados nos vértices de um hexágono de lado ℓ , como mostra a Figura 24.8.

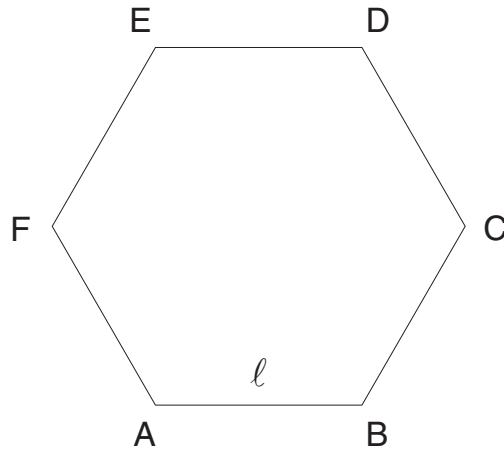


Figura 24.8: Hexágono de lado ℓ e os pontos A, B, C, D, E e F , localizados em seus vértices, referentes ao problema 5.

Usando a definição geométrica de produto escalar, calcule os seguintes produtos escalares: $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$, $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, $\vec{AC} \cdot \vec{AF}$ e $\vec{AC} \cdot \vec{AE}$.

4. Considere os três vetores escritos a seguir:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \sqrt{2}\mathbf{u}_z}{2}; \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\sqrt{2}\mathbf{u}_z - \mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y}{2}.$$

- (a) Verifique que todos eles são vetores unitários.
 - (b) Calcule os produtos escalares entre dois deles quaisquer, incluindo os produtos escalares de cada um deles por ele próprio, isto é, calcule $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$, com $i, j = 1, 2, 3$. Interprete os resultados.
5. Considere os vetores $\mathbf{a} = a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z$ e $\mathbf{b} = b_x\mathbf{u}_x + b_y\mathbf{u}_y + b_z\mathbf{u}_z$.
- (a) Determine o ângulo formado entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} em termos de suas componentes cartesianas.
 - (b) Que condição as componentes cartesianas desses vetores devem satisfazer para que eles sejam perpendiculares entre si? E para que sejam paralelos entre si?
6. Além das cartesianas, existem muitos outros tipos de coordenadas, como as esféricas, as cilíndricas e as parabólicas. Neste problema, vamos considerar as coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) de um ponto genérico P indicadas na Figura 24.9 e definidas do seguinte modo: r é a distância de P à origem; θ é

o ângulo entre o unitário \mathbf{u}_z e o vetor-posição \mathbf{r} do ponto P e, finalmente, ϕ é o ângulo formado entre o plano \mathcal{Oxz} e o plano determinado pelo ponto P e o eixo \mathcal{OZ} (para pontos do eixo \mathcal{OZ} o ângulo ϕ fica indeterminado).

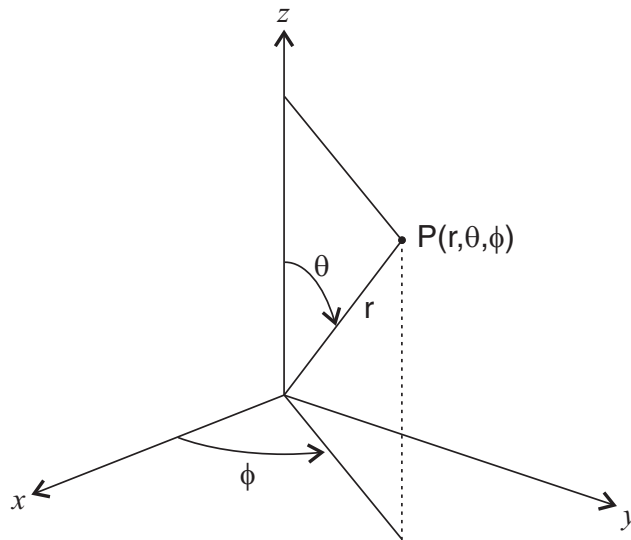


Figura 24.9: Coordenadas esféricas do ponto P , discutidas no problema 6

Determine os respectivos ângulos entre o vetor-posição \mathbf{r} do ponto P e os unitários \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y em termos dessas coordenadas.

7. Considere dois pontos distintos, P e P' , cujas coordenadas esféricas são dadas, respectivamente, por (r, θ, ϕ) e (r', θ', ϕ') . Sejam \mathbf{r} e \mathbf{r}' os respectivos vetores-posição desses pontos. Determine o ângulo entre \mathbf{r} e \mathbf{r}' em termos das coordenadas esféricas de P e P' . Fazendo $\mathbf{r}' = \mathbf{u}_x$ e $\mathbf{r}' = \mathbf{u}_y$, verifique se o seu resultado está de acordo com os obtidos no problema anterior.
8. Na Aula 9, mostramos que a derivada do vetor-posição é o vetor cujas componentes cartesianas são as derivadas das respectivas componentes cartesianas do vetor-posição e idem para a velocidade. Demonstre que esse resultado é válido para qualquer vetor \mathbf{A} que seja função de uma variável real t . Demonstre ainda a equação (24.20).
9. A função-movimento de uma certa partícula que descreve um movimento circular uniforme é dada por

$$\mathbf{r} = A [\cos(\omega t) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t) \mathbf{u}_y] ,$$

onde A e ω são constantes positivas.

- (a) Verifique, explicitamente, que $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}/dt = 0$ e interprete o resultado.
- (b) Verifique, explicitamente, que $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}/dt = 0$ e interprete o resultado.
10. A Figura 24.10 mostra a trajetória de uma partícula em movimento uniforme. Nessa figura, além do sentido do movimento, estão marcados os pontos A , B e C .

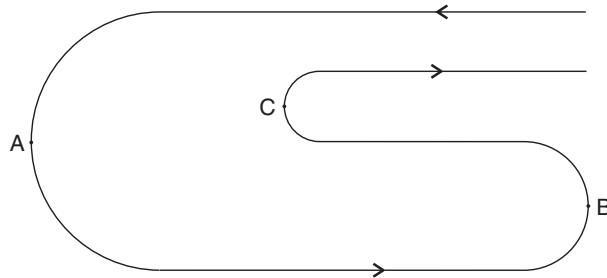


Figura 24.10: Trajetória da partícula movimento uniforme, mas não-retilíneo, descrita no problema 10.

- Em cada um dos pontos marcados, desenhe setas representando a velocidade e a aceleração da partícula (em seu desenho, represente, pela maior seta, a aceleração de maior módulo, e pela menor seta, a de menor módulo. Deixe claro, ainda, quais são os ângulos formados entre as velocidades e as acelerações da partícula nesses pontos.
11. De acordo com a definição de vetor unitário radial \mathbf{u}_r , o vetor-posição de qualquer partícula pode ser escrito como $\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r$, onde r é a distância da partícula à origem. Calcule o diferencial $d\mathbf{r}$ e mostre que $\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r} = dr$.
- Sugestão:** ao diferenciar \mathbf{r} , você obterá $d\mathbf{r} = dr \mathbf{u}_r + r d\mathbf{u}_r$; mostre, então, que $\mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{u}_r = 0$.
12. Considere, novamente, o Exemplo 24.1.
- (a) Supondo que a função-movimento da partícula f seja a dada pela equação (24.33), calcule o trabalho realizado pela força (24.32) sobre a partícula, mas, agora, no intervalo de tempo $[0, 2\pi/\omega]$, isto é, calcule $W(0, 2\pi/\omega; f)$.
- (b) Verifique, no intervalo considerado, a validade do Teorema da Energia Cinética.
13. Reconsidere o Exemplo 24.2, no qual a força total que atua sobre a partícula em estudo é dada por $\mathbf{F} = k^2 x \mathbf{u}_y$, sendo k uma constante.

- (a) Calcule o trabalho dessa força ao longo da poligonal que passa pelos pontos consecutivos P_1 , P_4 , P_5 e P_2 por meio de uma integral na variável y e outra na variável x (esses pontos estão definidos no Exemplo 24.2).
- (b) Calcule o trabalho dessa força ao longo da poligonal que passa pelos pontos consecutivos P_1 , P_5 e P_2 . Note que o resultado coincide com o trabalho ao longo da curva C_3 considerada no exemplo. Isso mostra que os trabalhos ao longo de diferentes caminhos não são, necessariamente, diferentes.
14. Considere, novamente, o exemplo 24.2, no qual a força total que atua sobre a partícula em estudo é dada por $\mathbf{F} = k^2 x \mathbf{u}_y$, sendo k uma constante. Como no exemplo, sejam P_1 e P_2 os pontos de coordenadas cartesianas $(0, R, 0)$ e $(0, -R, 0)$, respectivamente, onde R é uma constante positiva.
- (a) Calcule o trabalho $W(P_1, P_2; C_I)$, onde a curva C_I é uma poligonal que passa pelos pontos consecutivos $P_1(0, R, 0)$, $Q_1(-R, R, 0)$, $Q_2(-R, -R, 0)$ e $P_2(0, -R, 0)$;
- (b) Calcule o trabalho $W(P_1, P_2; C_{II})$, onde a curva C_{II} é uma poligonal que passa pelos pontos consecutivos $P_1(0, R, 0)$, $Q_3(-R, 0, 0)$ e $P_2(0, -R, 0)$.
15. Considere, uma vez mais, o Exemplo 24.2.

- (a) Verifique, por substituição direta na Segunda Lei de Newton, que a função-movimento

$$\mathbf{r} = f(t) = R \mathbf{u}_x + R \left(\frac{k^2 t^2}{2m} - 1 \right) \mathbf{u}_y,$$

onde m é a massa da partícula, é realmente uma de suas funções-movimento possíveis.

- (b) Verifique que essa função-movimento corresponde a um MRUV no qual em $t_0 = 0$ a partícula está na posição $\mathbf{r}_0 = R \mathbf{u}_x - R \mathbf{u}_y$, com velocidade nula e no instante $t_1 = \frac{2\sqrt{m}}{k}$ a partícula está na posição $\mathbf{r}_1 = R \mathbf{u}_x + R \mathbf{u}_y$.
- (c) Calcule o trabalho $W(t_0, t_1; f)$ e verifique, no intervalo de tempo considerado, a validade do Teorema da Energia Cinética.

16. Seguindo um procedimento análogo ao que foi feito para a força gravitacional, demonstre que a força elástica, dada por $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, onde k é uma constante positiva, é conservativa.
17. Demonstre que qualquer força central é conservativa. A Figura 24.11 pode ser útil para seu raciocínio.

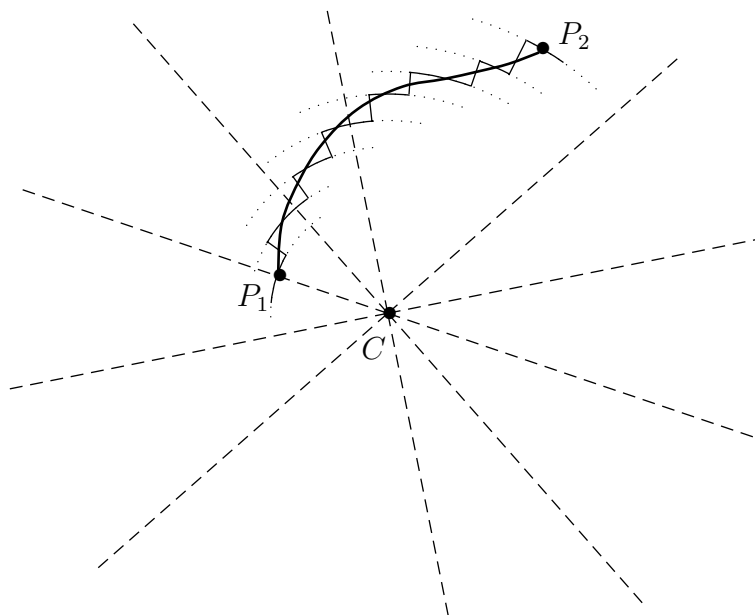


Figura 24.11: As linhas tracejadas indicam a direção de uma força central. Note que tais linhas passam sempre pelo mesmo ponto, o centro de força. Qualquer trajetória da partícula pode ser aproximada tão bem quanto desejarmos por uma poligonal formada por segmentos de reta radiais e arcos de círculos centrados no ponto C .

18. Demonstre que a potência fornecida a uma partícula por uma força é igual à taxa instantânea com que a força realiza trabalho sobre a partícula.

Auto-avaliação

Como de costume, você deve ser capaz de responder ao questionário inteiro pois, como já dissemos várias vezes, o questionário aborda os conceitos mais importantes tratados ao longo da aula e serve, inclusive, como um roteiro de estudo. Quanto aos problemas, não se assuste por serem muitos. Observe que a maior parte deles está relacionada diretamente com a definição e algumas propriedades do produto escalar. Portanto, dos onze primeiros problemas sobre produto escalar,

you do not need to solve all of them, just perceive that you have understood the definition and the main properties of this product. Choose five or six of them. However, if you perceive that you are still not familiarized with the scalar product, try to solve the largest possible number of problems on the subject.

For the remaining problems, you must solve all of them. It is probable that you will find difficulty in some of them. If this occurs in problem 12, read the first example of the class. If you have difficulty in problems 13 to 15, read the second example of the class. In the end, if you find some difficulty in solving problems 16 or 17, return to the text and review the demonstration that the gravitational force is conservative. Do not move forward, if you have not managed to solve most of the problems from 12 to 17, one time that you have understood the concepts of work and conservative force will be fundamental to understand the next class.

Aula 25 – Energia Pontencial e Conservação da Energia Mecânica

Objetivos

- Aprender os conceitos de energia potencial e energia mecânica.
- Dada uma força conservativa, saber obter a energia potencial da partícula associada a esta força.
- Dada a energia potencial de uma partícula, saber calcular a força conservativa correspondente, utilizando o conceito de gradiente de uma força.
- Demonstrar o Teorema da Conservação da Energia Mecânica.

Introdução

Na aula anterior, estudamos os conceitos de energia cinética e trabalho no caso de um movimento qualquer de uma partícula; demonstramos, nesse caso, a validade do Teorema da Energia Cinética. Consideramos, ainda, um tipo especial de força, chamada conservativa, que depende apenas da posição da partícula e cujo trabalho depende somente das posições inicial e final da partícula, qualquer que seja o caminho considerado entre esses dois pontos. Para uma força conservativa, que é uma grandeza vetorial, veremos que é possível definir uma quantidade chamada energia potencial da partícula, que é um número que depende da posição da partícula e de um ponto-padrão, escolhido convenientemente. Veremos ainda que, se a força total sobre a partícula for conservativa, a soma de suas energias cinética e potencial será constante durante cada movimento da partícula. Essa soma é chamada energia mecânica da partícula. Nesta aula, estenderemos os conceitos aprendidos e os resultados obtidos na Aula 22, válidos para movimentos retilíneos, ao caso de movimentos gerais de uma partícula.

Energia potencial de uma partícula sob a ação de uma força conservativa

O trabalho $W(P_1, P_2)$ realizado por uma força conservativa depende apenas dos pontos inicial P_1 e final P_2 . Vamos fixar o ponto final P_2 que, por esse motivo, é chamado **ponto-padrão** e representá-lo por P_p . Com isso, o trabalho passa a ser

uma quantidade que é função apenas do ponto inicial P_1 , que passamos a denotar por P . Essa quantidade é chamada **energia potencial da partícula** associada à força conservativa em consideração e avaliada no ponto P :

energia potencial de uma partícula que está sujeita a uma dada força conservativa, em um certo ponto, é o trabalho que essa força realizaria sobre a partícula, se ela fosse desse ponto até um ponto fixo escolhido como posição-padrão ou ponto-padrão.

Essa definição merece algumas considerações importantes. A primeira é que a energia potencial é uma quantidade associada a uma partícula e a uma força conservativa que age sobre ela. Não devemos considerar a energia potencial como uma propriedade apenas da partícula ou apenas da força conservativa. Ela é uma propriedade do conjunto constituído pela partícula e pela força. Na verdade, é ainda melhor lembrarmos que toda e qualquer força que age sobre uma partícula é exercida por outros corpos ou partículas, e que a força é determinada pelo conjunto constituído pela partícula que sofre a ação da força e pelas partículas que exercem a força. Desse modo, podemos descrever a energia potencial de maneira mais significativa, se dissermos que ela é uma propriedade do sistema constituído pela partícula que sofre a força conservativa e pelas partículas que a exercem.

A segunda consideração importante é que, estabelecida a partícula e a força conservativa que age sobre ela, a respectiva energia potencial é uma quantidade determinada pelo ponto onde se encontra a partícula, isto é, a energia potencial é uma função da posição da partícula. Representando essa função por U , a energia potencial em um ponto P é o número $U(P)$. Se \mathbf{F} é a força conservativa, a energia potencial correspondente é, então, dada por

$$U(P) = \int_P^{P_p} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (25.1)$$

O ponto-padrão P_p , usado na definição de energia potencial, é chamado mais especificamente, **ponto padrão da energia potencial**. Por definição, é claro que é nula a energia potencial no ponto padrão: $U(P_p) = 0$.

O ponto-padrão é arbitrário e escolhido do modo que julgarmos mais conveniente. Duas escolhas diferentes do ponto-padrão dão origem a duas energias potenciais diferentes em um mesmo ponto, cuja diferença, é apenas uma constante. De fato, sejam dois pontos-padrão P_p e P'_p e U e U' as respectivas funções que dão as energias potenciais: $U(P) = W(P, P_p)$ e $U'(P) = W(P, P'_p)$. Note que U e U' são energias potenciais descrevendo a mesma partícula, sob a ação da

mesma força conservativa. Elas descrevem a mesma situação física e são diferentes apenas devido a escolhas diferentes para o ponto-padrão. Podemos imaginar que pessoas diferentes, estudando o mesmo problema físico, tenham feito escolhas diferentes. De acordo com a equação (24.63), a diferença entre as duas energias potenciais, em um mesmo ponto P , é dada pela constante $W(P_p, P'_p)$:

$$\begin{aligned} U'(P) &= W(P, P'_p) \\ &= W(P, P_p) + W(P_p, P'_p) \\ &= U(P) + W(P_p, P'_p) . \end{aligned} \quad (25.2)$$

Como no caso do trabalho, é conveniente usar diversas notações para lidar com a energia potencial. Como a energia potencial é função do ponto P em que se encontra a partícula e esse ponto é determinado biunivocamente pela trinca de suas coordenadas cartesianas x, y e z , ou pelo seu vetor-posição $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, podemos escrever as seguintes expressões equivalentes a (25.1):

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' \quad \text{e} \quad U(x, y, z) = \int_{(x, y, z)}^{(x_p, y_p, z_p)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' , \quad (25.3)$$

onde, naturalmente, \mathbf{r}_p é o vetor-posição do ponto padrão e (x_p, y_p, z_p) é a trinca constituída por suas coordenadas cartesianas. Note, ainda, que utilizamos \mathbf{r}' , e não \mathbf{r} , como variável de integração, para evitar confusões. Dentre essas três maneiras de expressar o fato de que a energia potencial é função da posição da partícula, utiliza-se, em geral, a que se apresentar mais conveniente no problema em questão. Consideremos alguns exemplos de energia potencial.

Exemplo 25.1

Uma vez que uma força constante \mathbf{F} é conservativa, podemos associar a ela uma energia potencial que, de acordo com (24.68), tem, em uma posição arbitrária \mathbf{r} , a seguinte energia potencial:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' \\ &= \mathbf{F} \cdot \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} d\mathbf{r}' \\ &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}) , \end{aligned} \quad (25.4)$$

onde \mathbf{r}_p é a posição do ponto escolhido como padrão; além disso, usamos a propriedade da distributividade do produto escalar em relação à soma (lembre-se de que uma integral é uma soma). Se ponto-padrão for escolhido na origem, teremos

No estudo do movimento de uma carga elétrica, é muito comum aproximar a força eletrostática que atua sobre ela por uma força constante, desde que as variações do campo elétrico na região onde se passa o movimento da carga sejam desprezíveis. Nesse caso, teremos uma energia potencial eletrostática análoga à discutida no Exemplo 25.1.

$\mathbf{r}_p = \mathbf{0}$ e, conseqüentemente, a energia potencial tomará a forma mais simples:

$$U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{r} . \quad (25.5)$$

Um caso importante de força constante é o peso de uma partícula que se movimenta sempre próxima à superfície terrestre, dado por $m\mathbf{g}$, onde m é a massa da partícula, e \mathbf{g} , a aceleração da gravidade local. Nesse caso, definindo o eixo \mathcal{OY} , de modo que sua direção seja a da vertical local e com sentido positivo para fora da Terra, temos $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{u}_y$. Portanto, a energia potencial gravitacional da partícula com ponto-padrão na origem é dada por:

$$U(\mathbf{r}) = -m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} = -(-mg\mathbf{u}_y) \cdot \mathbf{r} = mgy . \quad (25.6)$$

Observe que existe uma infinidade de posições que a partícula pode ocupar, para as quais sua energia potencial gravitacional é a mesma, bastando para isso que em todas essas posições a sua coordenada y tenha o mesmo valor (isto é, basta que a partícula, nas diferentes posições, esteja a uma mesma altura do solo). Em outras palavras, em qualquer ponto de uma superfície plana, perpendicular à vertical, isto é, uma superfície perpendicular à direção de \mathbf{g} , a energia potencial da partícula é a mesma.

Exemplo 25.2

Vimos que, mesmo quando se leva em consideração a expressão exata da força gravitacional, dada por $\mathbf{F} = -(GMm/r^2)\mathbf{u}_r$ (veja a equação (24.69)), ela ainda é uma força conservativa. Essa é a expressão da força exercida sobre uma partícula de massa m por uma partícula de massa M localizada na origem, ou por uma esfera homogênea com essa massa e centrada na origem, desde que r seja maior ou igual ao raio da esfera.

Usando a equação (24.73), a energia potencial gravitacional correspondente é, então,

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} -\frac{GMm}{r'^2} \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r}' \\ &= \frac{GMm}{r_p} - \frac{GMm}{r}, \end{aligned} \quad (25.7)$$

onde r_p é o módulo do vetor-posição do ponto escolhido como padrão. Essa é a energia potencial gravitacional da partícula de massa m na posição \mathbf{r} e na presença da partícula de massa M localizada na origem. É, também, a energia potencial da mesma partícula de massa m na presença de uma esfera homogênea de massa M centrada na origem, desde que $r \geq R$, onde R é o raio da esfera.

No caso em que há uma partícula de massa M localizada na origem, note que o ponto-padrão não pode ser escolhido na origem, pois teríamos $r_p = 0$, o que tornaria infinita a primeira fração em (25.7). Para simplificar a forma da energia potencial gravitacional (25.7), podemos escolher o ponto-padrão como um ponto infinitamente afastado da origem. Essa escolha corresponde a tomar o limite da expressão (25.7) quando $r_p \rightarrow \infty$. Obtemos

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{G M m}{r}. \quad (25.8)$$

Note que essa energia potencial só depende de r , isto é, da distância entre a partícula e a origem. Desse modo, os pontos de uma superfície esférica qualquer, centrada na origem, correspondem às posições da partícula para as quais ela tem a mesma energia potencial gravitacional.

Exemplo 25.3

Consideremos, finalmente, a força elástica dada pela equação (24.74), isto é, $\mathbf{F} = -k\mathbf{u}_r$. Como vimos anteriormente, essa força é conservativa, e uma partícula sujeita a essa força tem uma energia potencial dada por

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} -kr' \mathbf{u}_r \cdot d\mathbf{r}' \\ &= -k \int_r^{r_p} r' dr' \\ &= \frac{1}{2}k (r^2 - r_p^2). \end{aligned} \quad (25.9)$$

Escolhendo a posição-padrão na origem, isto é, tomando $r_p = 0$, a equação anterior se reduz a

$$U(r) = \frac{1}{2}kr^2. \quad (25.10)$$

Usando-se a definição de energia potencial (25.1) e a propriedade (24.63) das forças conservativas, é fácil demonstrar que

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_p) + W(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_2) \\ &= -[U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)], \end{aligned} \quad (25.11)$$

isto é,

o trabalho realizado por uma força conservativa em um deslocamento é o negativo da variação da energia potencial nesse deslocamento.

Dada uma força conservativa, obtemos uma energia potencial, de acordo com a definição (25.1), que escrevemos como na primeira expressão em (25.3):

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' . \quad (25.12)$$

Em contrapartida, dada uma energia potencial, é possível descobrir a força a partir da qual ela foi obtida. Vejamos como isso pode ser feito.

Escolhemos, inicialmente, um ponto P localizado pelo vetor-posição \mathbf{r} , e um vetor unitário \mathbf{u}_s cuja direção é arbitrária. A partir de P , consideramos um deslocamento dado por um número Δs multiplicado pelo unitário \mathbf{u}_s , isto é, um deslocamento $\Delta s \mathbf{u}_s$. Esse deslocamento está ilustrado na Figura 25.1, no caso em que Δs é positivo. No caso em que Δs é negativo, o deslocamento é, naturalmente, um vetor com sentido oposto ao do unitário \mathbf{u}_s . Com o deslocamento $\Delta s \mathbf{u}_s$, passamos do ponto P , de vetor-posição \mathbf{r} , para um outro ponto, de vetor-posição $\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s$.

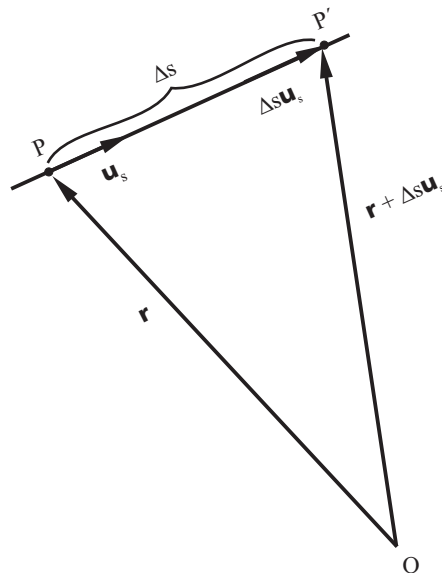


Figura 25.1: Deslocamento $\Delta s \mathbf{u}_s$, a partir do ponto P , na direção do unitário \mathbf{u}_s . O desenho foi feito considerando o caso em que Δs é positivo, pois $\Delta s \mathbf{u}_s$ aparece com o mesmo sentido de \mathbf{u}_s .

A energia potencial da partícula quando ela está na posição \mathbf{r} é dada por $U(\mathbf{r})$ e quando ela está na posição $\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s$, ela é dada por $U(\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s)$. Portanto,

a variação da energia potencial da partícula no deslocamento $\Delta s \mathbf{u}_s$ é

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s) - U(\mathbf{r}) &= \int_{\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}' \\ &= - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (25.13)$$

onde usamos a expressão (25.12) e as propriedades (24.63) e (24.65).

A integral no lado direito de (25.13) não depende do caminho e, portanto, podemos considerar qualquer um que ligue as posições \mathbf{r} e $\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s$. Escolhere-mos um caminho retilíneo, isto é, o segmento de reta que une P a P' . Usando o símbolo usual \mathcal{F} para a função que dá a força conservativa \mathbf{F} , essa força tem um valor $\mathcal{F}(\mathbf{r})$ no início do caminho e seu valor vai mudando ao longo do segmento PP' até chegar ao valor final $\mathcal{F}(\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s)$. Naturalmente, no limite em que Δs vai a zero, o vetor-posição $\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s$ tende ao vetor-posição \mathbf{r} , o ponto P' tende para o ponto P e o valor da força no caminho PP' só pode ser $\mathcal{F}(\mathbf{r})$, pois PP' torna-se um único ponto P , cujo vetor-posição é \mathbf{r} . Agora, vem o passo crucial. Podemos considerar o segmento PP' tão pequeno que, ao longo dele, a força é aproximadamente constante, com o valor $\mathcal{F}(\mathbf{r})$ que tem no início do segmento. Isso é válido, porque estamos supondo que a função-força é contínua. Pois bem, considerando que no caminho da integral (25.13) a força seja aproximadamente constante e com o valor $\mathcal{F}(\mathbf{r})$, obtemos

$$U(\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s) - U(\mathbf{r}) \approx -\mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot \Delta s \mathbf{u}_s. \quad (25.14)$$

Você deve se lembrar de que, ao discutirmos a função-velocidade, na Aula 4, apresentamos a idéia de continuidade de uma função e explicamos que as funções usadas em Física são, em geral, contínuas.

De fato, como vimos na aula anterior, se a força é constante, o trabalho é o produto escalar da força pelo deslocamento total. Em (25.14) o resultado é aproximado, porque a força é aproximadamente constante no deslocamento $\Delta s \mathbf{u}_s$. Essa igualdade aproximada se torna exata no limite em que Δs vai a zero, pois a força se torna exatamente constante no caminho PP' , já que, nesse caso, PP' se torna um único ponto P . De fato, é trivial verificar que, no limite $\Delta s \rightarrow 0$, a equação (25.14) se torna a igualdade exata $0 = 0$. Exata, mas sem interesse. Para extrairmos uma informação relevante da equação (25.14), dividiremos ambos os lados dessa equação por Δs e, somente depois disso, tomaremos o limite $\Delta s \rightarrow 0$. Obtemos, primeiramente

$$\frac{U(\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s) - U(\mathbf{r})}{\Delta s} \approx -\mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_s. \quad (25.15)$$

Agora, tomamos o limite $\Delta s \rightarrow 0$ para obter o resultado exato:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s) - U(\mathbf{r})}{\Delta s} = -\mathcal{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{u}_s. \quad (25.16)$$

O limite que aparece no lado esquerdo dessa equação é uma operação realizada com a função U , que depende do vetor-posição \mathbf{r} . Para efetuar essa operação, devemos escolher um unitário \mathbf{u}_s , que especifica a direção ao longo da qual consideramos um deslocamento e depois fazemos esse deslocamento tender a zero. O limite obtido é chamado **derivada direcional** da função U , **na posição \mathbf{r} e na direção dada por \mathbf{u}_s** . Essa derivada direcional é denotada pelo símbolo $\partial U(\mathbf{r})/\partial s$. Temos, então, a seguinte definição para essa derivada:

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{r} + \Delta s \mathbf{u}_s) - U(\mathbf{r})}{\Delta s}. \quad (25.17)$$

Usando a equação anterior em nosso resultado (25.16), obtemos:

$$\mathbf{u}_s \cdot \mathcal{F}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial s}. \quad (25.18)$$

Note que na equação anterior $\mathcal{F}(\mathbf{r})$ é a força conservativa que age sobre a partícula quando esta se encontra na posição \mathbf{r} . O lado esquerdo dessa equação é o produto escalar do unitário \mathbf{u}_s por essa força, isto é, a projeção da força ao longo do unitário \mathbf{u}_s . Portanto,

em cada posição, a projeção de uma força conservativa ao longo de um unitário é igual a menos a derivada direcional da energia potencial associada a essa força na direção desse unitário.

Como de costume, representamos a força no ponto \mathbf{r} por \mathbf{F} , isto é, escrevemos $\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r})$, de modo que (25.18) pode ser reescrita na seguinte forma, um pouco mais abreviada:

$$\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{F} = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial s}. \quad (25.19)$$

Esse resultado nos permite encontrar a força conservativa a partir da energia potencial a ela associada, uma vez que o unitário em questão é arbitrário. Com efeito, aplicando essa fórmula aos unitários dos três eixos coordenados, obtemos as três componentes da força e, conseqüentemente, a própria força.

Começamos tomando como \mathbf{u}_s , em (25.19), o vetor unitário \mathbf{u}_x , ao longo de $\mathcal{O}\mathcal{X}$. Nesse caso, o lado esquerdo dessa equação é $\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{F}$, que é a componente F_x da força, enquanto o lado direito é $-\partial U(\mathbf{r})/\partial x$. Desse modo, temos

$$F_x = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x}, \quad (25.20)$$

onde, naturalmente, $\partial U(\mathbf{r})/\partial x$ é a derivada direcional da energia potencial na direção do unitário \mathbf{u}_x . Vejamos como é simples calcular essa derivada. De acordo com a definição (25.17) de derivada direcional, temos

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U(\mathbf{r} + \Delta x \mathbf{u}_x) - U(\mathbf{r})}{\Delta x}. \quad (25.21)$$

No entanto, temos, também

$$\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z \quad \text{e} \quad \mathbf{r} + \Delta x \mathbf{u}_x = (x + \Delta x) \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z .$$

Com isso, obtemos,

$$\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{U((x + \Delta x) \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z) - U(x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z)}{\Delta x} . \quad (25.22)$$

No lado direito dessa equação, fizemos a seguinte operação: calculamos a variação da função U quando x sofre uma variação Δx (enquanto y e z são mantidos constantes), dividimos a variação de U por Δx e, finalmente, tomamos o limite quando Δx vai a zero. Comparando essa operação com a definição comum de derivada em relação a x , vemos que a operação consiste, simplesmente, em considerar y e z como se fossem constantes na expressão de $U(\mathbf{r})$, e tomar a derivada comum de U em relação a x . Dito de outro modo: o símbolo $\partial/\partial x$ pode ser considerado como a operação de derivar em relação à variável x , considerando as variáveis y e z como se fossem constantes. Essa simples regra prática permite calcular com facilidade a derivada (25.22), como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 25.4

Consideremos, primeiramente, o caso da energia potencial elástica, dada pela equação (25.10). Temos

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} k \mathbf{r}^2 = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2) . \quad (25.23)$$

Para calcularmos a derivada $\partial U(\mathbf{r})/\partial x$, usamos a regra prática mencionada, obtendo, desse modo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} k \left[\frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial x} y^2 + \frac{\partial}{\partial x} z^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} k [2x + 0 + 0] \\ &= kx . \end{aligned} \quad (25.24)$$

De acordo com a relação (25.20), esse resultado mostra que a componente F_x da força que dá origem à energia potencial (25.23) é:

$$F_x = -kx . \quad (25.25)$$

É claro que as demais componentes têm propriedades análogas. Além da relação (25.20), temos, também,

$$F_y = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} \quad \text{e} \quad F_z = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z}. \quad (25.26)$$

Para calcularmos a derivada direcional na direção do unitário \mathbf{u}_y , usamos a regra prática de considerar o símbolo $\partial/\partial y$ como a operação de derivar em relação à variável y , considerando as variáveis x e z como se fossem constantes. Analogamente, para calcularmos a derivada direcional na direção do unitário \mathbf{u}_z , usamos a regra prática de considerar o símbolo $\partial/\partial z$ como a operação de derivar em relação à variável z , considerando as variáveis x e y como se fossem constantes. Essas regras práticas nos permitem obter, a partir da energia potencial escrita em (25.23), as outras duas componentes da força conservativa elástica associada a essa energia potencial:

$$F_y = -k y \quad \text{e} \quad F_z = -k z. \quad (25.27)$$

Voltando, agora, ao caso geral, podemos usar as relações escritas nas equações (25.20) e (25.26) na expressão da força em termos de suas componentes, ou seja, $\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x + F_y \mathbf{u}_y + F_z \mathbf{u}_z$. O resultado obtido é

$$\mathbf{F} = - \left[\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \mathbf{u}_z \right]. \quad (25.28)$$

Essa equação é o resultado que havíamos anunciado: dada uma energia potencial, é possível descobrir a força conservativa a partir da qual essa energia potencial foi obtida. De fato, fazendo as derivadas da energia potencial U , indicadas em (25.28), multiplicando-as pelos unitários correspondentes e somando os resultados encontrados, obtemos a força conservativa \mathbf{F} , que deu origem à energia potencial por meio da fórmula (25.12). Você pode dizer que (25.12) é a fórmula de ida (da força conservativa para a energia potencial), enquanto (25.28) é a fórmula de volta (da energia potencial para a força conservativa). Nos problemas propostos 1, 2, 4 e 5, você poderá praticar o uso dessas fórmulas para obter a energia potencial a partir da força conservativa e vice-versa.

Vamos, agora, aprender alguns nomes e símbolos novos. As derivadas direcionais nas direções dos unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z são chamadas **derivadas parciais** em relação às coordenadas x , y e z , respectivamente. Com essa nomenclatura, podemos descrever a relação (25.20), dizendo que a componente F_x da força conservativa é menos a derivada parcial de sua energia potencial em relação à coordenada x . Obviamente, as relações (25.26) podem ser descritas de modo similar. As operações realizadas no lado direito da equação (25.28), de tomar as derivadas parciais da energia potencial, multiplicá-las pelos unitários correspondentes e

somar os resultados obtidos, é abreviada pelo símbolo ∇ . Temos, então,

$$\nabla U(\mathbf{r}) = \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial x} \mathbf{u}_x + \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial y} \mathbf{u}_y + \frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial z} \mathbf{u}_z . \quad (25.29)$$

A quantidade que aparece no lado direito dessa equação é chamada **gradiente** da função U no ponto de vetor-posição \mathbf{r} . Naturalmente, o símbolo abreviado no lado esquerdo recebe o mesmo nome. O próprio símbolo ∇ é denominado **nabla**. Com isso, podemos ler o símbolo no lado esquerdo de (25.29) de duas maneiras: “gradiente de U ” ou “nabla U ”. Usando esses nomes, podemos enunciar o resultado (25.28) na seguinte forma abreviada:

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}) , \quad (25.30)$$

isto é,

uma força conservativa é igual a menos o gradiente da energia potencial da partícula associada a essa força.

Exemplo 25.5

Como uma ilustração simples dessas idéias, vamos obter a força conservativa que dá origem à energia potencial elástica (25.23). A derivada parcial dessa energia em relação à coordenada x foi calculada em (25.24). As derivadas em relação às coordenadas y e z são obtidas de modo análogo. Usando todas essas derivadas parciais na definição de gradiente (25.29), obtemos:

$$\nabla \left[\frac{1}{2} k \mathbf{r}^2 \right] = k x \mathbf{u}_x + k y \mathbf{u}_y + k z \mathbf{u}_z = k \mathbf{r} . \quad (25.31)$$

Com esse resultado, da equação (25.30) obtemos $\mathbf{F} = -k \mathbf{r}$ que é, como esperado, a força elástica (24.74) que deu origem à energia potencial elástica (25.23).

Conservação da energia mecânica

Na seção anterior, consideramos diversos exemplos de forças conservativas e das energias potenciais associadas a elas. Agora, consideraremos o caso no qual a força total que age sobre a partícula é conservativa. Nesse caso, a partícula tem uma energia potencial associada a essa força total conservativa. Denominaremos essa energia, simplesmente, energia potencial da partícula.

No caso geral, em que a força total sobre uma partícula depende apenas da posição da partícula, temos, pelo Teorema da Energia Cinética (24.51),

$$\frac{1}{2} m \mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2} m \mathbf{v}_1^2 = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathcal{C}) , \quad (25.32)$$

Originariamente, nabla era o nome de uma harpa triangular usada pelos antigos hebreus, geralmente no acompanhamento de cânticos.

onde $W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathcal{C})$ é o trabalho da força total ao longo do caminho \mathcal{C} . Se, além disso, a força total é conservativa, esse trabalho não depende do caminho \mathcal{C} , e é dado, de acordo com (25.11), por menos a variação da energia potencial associada à força total. Temos, então,

$$W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathcal{C}) = W(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -[U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)] .$$

Substituindo esse resultado em (25.32), obtemos

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 = -[U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)] , \quad (25.33)$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 + U(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 + U(\mathbf{r}_2) . \quad (25.34)$$

O significado desse resultado é claro, se lembrarmos que, nessa expressão, \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são as velocidades da partícula nas posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , respectivamente. A igualdade (25.34) afirma que a soma das energias cinética e potencial da partícula tem o mesmo valor, quaisquer que sejam as posições \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , ocupadas por ela durante seu movimento. Como essas posições são arbitrárias, podemos concluir que a tal soma tem o mesmo valor em qualquer posição durante o movimento, ou seja,

se a força total sobre uma partícula é conservativa, a soma de suas energias cinética e potencial é constante durante o seu movimento,

isto é,

$$\text{Força total conservativa} \implies \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}) = \text{constante} . \quad (25.35)$$

Chamamos a soma da energia cinética de uma partícula com sua energia potencial **energia mecânica da partícula**. Denotando essa energia mecânica por E , temos

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}) . \quad (25.36)$$

Usando essa definição de energia mecânica, podemos reenunciar o resultado (25.35), afirmando que

se a força total sobre uma partícula é conservativa, então sua energia mecânica é constante durante o seu movimento,

isto é,

$$\text{Força total conservativa} \implies E = \text{constante} . \quad (25.37)$$

Esse é um teorema que demonstramos, tomando como hipótese que a força total sobre a partícula é conservativa. Sob essa hipótese, concluímos que a quantidade chamada energia total é uma constante durante o movimento da partícula. Esse teorema é chamado **Teorema da Conservação da Energia Mecânica**. Uma outra maneira de enunciá-lo é dizer que a energia mecânica da partícula se conserva, ou que a energia mecânica da partícula é uma grandeza conservada durante cada movimento da partícula quando sujeita a uma força total conservativa. O nome força “conservativa” foi cunhado tendo em vista esse resultado.

Note que o valor da energia mecânica da partícula, durante um dado movimento, é determinado a partir do conhecimento da posição e velocidade da partícula em algum instante. Digamos que, em um certo instante, a sua posição e a sua velocidade sejam dadas por \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 . Nesse instante, a sua energia mecânica é dada por $E = (1/2)m\mathbf{v}_0^2 + U(\mathbf{r}_0)$. Uma vez que a energia é constante, ela terá esse mesmo valor em todos os instantes do movimento da partícula, dado pelo valor da constante que aparece na expressão (25.37). Desse modo, podemos escrever o Teorema da Conservação da Energia na forma

$$\text{Força total conservativa} \implies \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 + U(\mathbf{r}_0) . \quad (25.38)$$

Uma partícula, sob uma dada força total, pode realizar diversos movimentos, que são determinados pelas diversas condições iniciais possíveis. Se a força é conservativa, em cada um desses movimentos a energia mecânica tem um valor constante bem determinado. Em diferentes movimentos, a energia mecânica pode ter valores constantes diferentes. Sendo uma grandeza que em cada movimento tem um valor constante, ela é chamada **constante de movimento**. Existem outras grandezas, como a energia mecânica (25.36), que dependem da posição e da velocidade da partícula, mas que também não mudam o seu valor durante cada movimento que a partícula pode realizar. São grandezas cujo valor é fixado pelas condições iniciais do movimento. Elas também são chamadas constantes de movimento. A energia mecânica é apenas uma delas, embora seja uma das mais importantes. Encontraremos outras constantes de movimento em aulas seguintes.

Uma força conservativa \mathbf{F} pode ser a soma vetorial de diversas forças conservativas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$. Temos, então,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n . \quad (25.39)$$

Uma vez que a força total é conservativa, existe uma energia potencial associada a ela, e seu valor em uma posição \mathbf{r} é dado por

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} , \quad (25.40)$$

onde \mathbf{r}_p é o vetor-posição do ponto padrão escolhido. Uma vez que as forças \mathbf{F}_1 , $\mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ que compõem a força total também são conservativas, também existe uma energia potencial associada a cada uma delas. Vamos representar por U_1 a energia potencial associada à força \mathbf{F}_1 , por U_2 a energia potencial associada à força \mathbf{F}_2 , e assim sucessivamente até U_n , que representa a energia potencial associada à força \mathbf{F}_n . Supondo, além disso, que para todas essas energias potenciais escolhamos o mesmo ponto-padrão escolhido para a energia potencial da força total, escrita em (25.40), temos:

$$U_1(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r}, \quad U_2(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}, \dots, \quad U_n(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r}. \quad (25.41)$$

Usando, agora, a equação (25.39) e a propriedade de que a integral da soma é igual à soma das integrais, obtemos:

$$\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r} + \dots + \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_p} \mathbf{F}_n \cdot d\mathbf{r}. \quad (25.42)$$

De acordo com (25.40) e (25.41), a equação (25.42) pode ser escrita como

$$U(\mathbf{r}) = U_1(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}) + \dots + U_n(\mathbf{r}), \quad (25.43)$$

isto é,

a energia potencial definida para a soma vetorial de diversas forças conservativas é igual à soma das energias potenciais dessas diversas forças, desde que para todas as energias potenciais tenhamos escolhido o mesmo ponto-padrão.

A soma das diversas energias potenciais é chamada **energia potencial total**.

Vamos considerar, agora, um caso um pouco mais geral, no qual algumas forças que agem sobre a partícula são conservativas e outras não. Vamos representar por \mathbf{F} a soma vetorial de todas as forças conservativas e por \mathbf{F}' a soma vetorial de todas as forças não-conservativas. Nesse caso, a força total que age sobre a partícula é $\mathbf{F} + \mathbf{F}'$. Consideremos o trabalho que essa força total realiza no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ de um movimento da partícula dado pela função-movimento f . Esse trabalho é dado por:

$$\int_{t_1(f)}^{t_2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}') \cdot \mathbf{v} dt = \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt + \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v} dt \quad (25.44)$$

De acordo com o Teorema da Energia Cinética (24.51), esse trabalho da força total sobre a partícula é igual à variação de sua energia cinética no intervalo de tempo

em consideração:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 = \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt + \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v} dt, \quad (25.45)$$

onde \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são as velocidades da partícula nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente. Uma vez que a força \mathbf{F} é conservativa, o seu trabalho em (25.45) depende apenas das posições da partícula nos instantes inicial t_1 e final t_2 . Essas posições são dadas por $\mathbf{r}_1 = f(t_1)$ e $\mathbf{r}_2 = f(t_2)$, de modo que podemos escrever no lugar de (25.45):

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v} dt. \quad (25.46)$$

Além disso, o fato de que \mathbf{F} é conservativa nos permite associar a ela uma energia potencial U . A propriedade (25.11) nos garante que o trabalho dessa força conservativa, em qualquer deslocamento, é igual a menos a variação da energia potencial U nesse deslocamento, isto é,

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -[U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)]. \quad (25.47)$$

Usando essa expressão em (25.46), obtemos

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 = -[U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1)] + \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v} dt, \quad (25.48)$$

ou seja,

$$\left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}_2^2 + U(\mathbf{r}_2) \right] - \left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 + U(\mathbf{r}_1) \right] = \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v} dt. \quad (25.49)$$

Para ficar claro o significado dessa igualdade, devemos fazer algumas observações. A primeira é que a energia potencial U escrita em (25.48) não é a energia potencial da força total $\mathbf{F} + \mathbf{F}'$ que age sobre a partícula. De fato, U é a energia potencial apenas da parte conservativa \mathbf{F} da força total. A segunda é que as somas das energias cinéticas com as energias potenciais que aparece em (25.49) não se enquadra na definição de energia mecânica dada anteriormente. De fato, na definição (25.36) dissemos que a energia mecânica é a soma da energia cinética da partícula com a energia potencial associada à força total da partícula, enquanto em (25.49) a energia cinética aparece somada à energia potencial associada apenas à parte conservativa da força total. Bem, podemos, então, ampliar a definição de energia mecânica da partícula, dizendo que ela é a energia cinética da partícula mais a energia potencial total das forças conservativas que agem sobre a partícula. Se todas as forças que agem sobre a partícula são conservativas, essa energia potencial total é a energia potencial da força total que age sobre a partícula. Nesse

caso, a nova definição de energia mecânica se torna idêntica à definição (25.36), dada anteriormente. Em contrapartida, se houver forças não-conservativas agindo sobre a partícula, a nova definição permite dizer que a partícula tem uma energia mecânica

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + U(\mathbf{r}) , \quad (25.50)$$

onde, agora, U é a energia potencial apenas da parte conservativa da força total. No entanto, nesse caso, a energia mecânica não será mais uma constante de movimento, pois existem, por hipótese, forças não-conservativas realizando trabalho.

Com essa definição mais geral de energia mecânica, podemos reescrever a equação (25.49) na forma

$$E_2 - E_1 = \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v} dt , \quad (25.51)$$

onde E_1 e E_2 representam a energia mecânica da partícula nos instantes t_1 e t_2 , respectivamente. Desse modo, temos

a variação da energia mecânica de uma partícula em qualquer intervalo de tempo é igual ao trabalho realizado pela soma de todas as forças não-conservativas que agem sobre a partícula.

Desse modo, se todas as forças que agem sobre a partícula são conservativas, podemos dizer que é nula a soma total \mathbf{F}' de todas as forças não-conservativas que agem sobre a partícula. Conseqüentemente, não há trabalho realizado por forças não-conservativas, o lado direito da igualdade (25.51) é nulo e obtemos $E_1 = E_2$, isto é, a energia mecânica da partícula em quaisquer dois instantes t_1 e t_2 tem o mesmo valor. Esse é apenas o resultado (25.37), que afirma que a energia mecânica será uma constante de movimento se todas as forças que agirem sobre a partícula forem conservativas.

Já no caso em que há forças não-conservativas agindo sobre a partícula, e sua soma \mathbf{F}' realiza trabalho em um certo intervalo de tempo, esse trabalho em (25.51) é exatamente a variação da energia mecânica da partícula nesse intervalo. O resultado (25.51) também prevê uma outra situação interessante, na qual há forças não-conservativas agindo sobre a partícula, porém a soma total delas não realiza trabalho durante o particular movimento que estamos considerando para a partícula. Nesse caso, (25.51) prevê que a energia mecânica se conserva durante esse particular movimento.

Até o momento, as forças consideradas no cálculo dos trabalhos, tanto as conservativas quanto as não-conservativas, foram forças dadas, isto é, dadas em

função da posição da partícula ou, de um modo mais geral, em função da posição e velocidade da partícula e do tempo. Consideremos, agora, a possibilidade de que haja forças que não são dadas. Essas são as forças vinculares, como as reações normais exercidas por superfícies rígidas ou tensões exercidas por fios inextensíveis, ou as forças de atrito. Elas são, em geral, desconhecidas e são encontradas juntamente com o movimento da partícula que estamos procurando descobrir. Se \mathbf{F}'' é uma força vincular ou de atrito, podemos definir o seu trabalho durante um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ de um movimento f exatamente como o fizemos para as forças dadas, isto é, como a quantidade

$$W'' = \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F}'' \cdot \mathbf{v} dt. \quad (25.52)$$

Se desconhecemos a força \mathbf{F}'' durante esse intervalo de tempo, o valor desse trabalho também é desconhecido. Entretanto, em muitas situações concretas, o trabalho realizado por essas forças em um dado intervalo de tempo pode ser conhecido de antemão, ou pode ficar desconhecido durante a solução do problema, sem com isso impedir que cheguemos a uma solução final. Não há uma regra geral para lidar com o trabalho das forças vinculares ou de atrito, de modo que devemos considerar caso a caso, para decidir o que fazer em cada problema que considerarmos. Nesses casos, mais do que nunca, é imprescindível estudar os exemplos e praticar, resolvendo os problemas propostos (como você verá, a Aula 26 se constitui apenas de exemplos).

Exemplo 25.6

Ilustraremos, neste exemplo, uma situação na qual a força total sobre a partícula em estudo não é conservativa, mas a força não-conservativa presente não realiza trabalho, de modo que a energia mecânica da partícula permanece constante durante qualquer um de seus movimentos possíveis.

Consideremos um pêndulo simples, formado por uma partícula de massa m e um fio ideal de comprimento ℓ cujo extremo superior está preso a um suporte fixo. Suponha que, no instante inicial, a partícula esteja em repouso e no ponto P_0 . Nesse ponto, o fio está esticado e forma um ângulo θ_0 com a vertical, como indica a Figura 25.2.

Desejamos determinar, utilizando o Teorema da Conservação da Energia Mecânica, o módulo da velocidade da partícula quando ela se encontra no ponto mais baixo de sua trajetória, ponto P_1 da Figura 25.2, ou seja, quando o pêndulo está na vertical. Seja \mathbf{v}_1 a velocidade da partícula no ponto P_1 . A direção desta velocidade é facilmente determinada. Basta lembrar que a velocidade de uma

partícula, num certo instante, é sempre tangente à sua trajetória nesse instante. Portanto, por ser o fio inextensível, a trajetória da partícula é um arco de círculo e, conseqüentemente, podemos afirmar que \mathbf{v}_1 é horizontal.

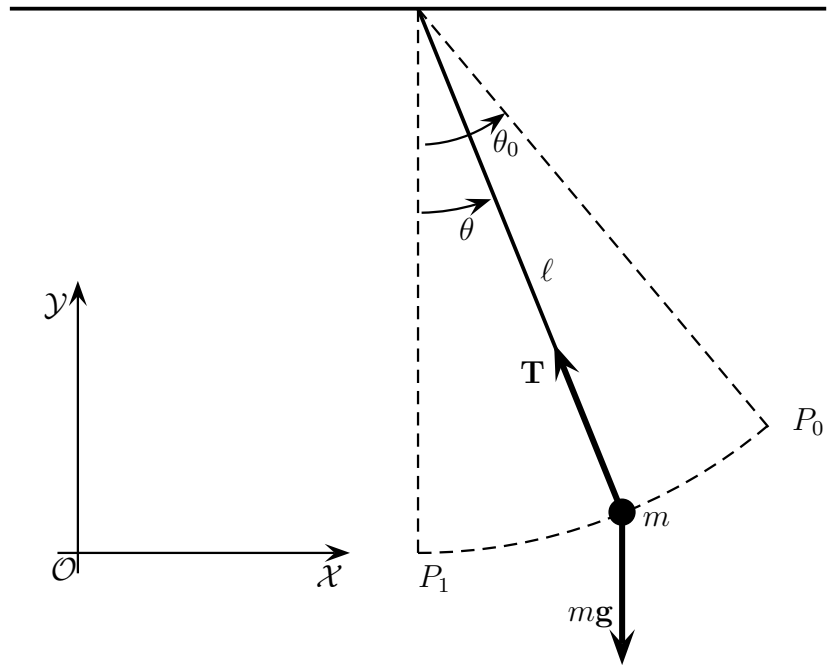


Figura 25.2: Pêndulo simples formado por uma partícula de massa m e um fio ideal de comprimento ℓ que é abandonado do repouso do ponto P_0 .

Nesse exemplo, a força total que age sobre a partícula é dada pela soma de seu peso com a força exercida pelo fio, isto é, $mg + \mathbf{T}$. Note que somente o peso é uma força conservativa. A força \mathbf{T} sequer é conhecida de antemão. No entanto, como a trajetória da partícula é um arco de circunferência, a sua velocidade é, em qualquer instante de seu movimento, perpendicular à força \mathbf{T} , fazendo com que essa força não realize trabalho sobre a partícula. Por esse motivo, podemos afirmar que a energia mecânica da partícula é uma constante de movimento no problema em consideração.

Por conveniência, escolheremos o eixo \mathcal{OY} como vertical e com origem num ponto que esteja na mesma altura que o ponto P_1 (ponto mais baixo da trajetória da partícula). Se, além disso, escolhermos o ponto-padrão para a energia potencial gravitacional da partícula na origem, isto é, se fizermos $y_p = 0$, essa

energia potencial toma a forma $U(y) = mgy$. O valor da energia mecânica fica determinado pelas condições iniciais:

$$E = U(y_0) + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 = mgy_0. \quad (25.53)$$

Durante o movimento do pêndulo, tanto a sua energia cinética quanto a potencial variam, mas, justamente, por ser a energia mecânica uma grandeza conservada, a soma dessas duas energias permanece constante durante todo o movimento do pêndulo e com o valor dado pela expressão anterior. Em particular, esse é o valor da energia mecânica da partícula, quando ela passa pelo ponto P_1 , de modo que podemos escrever

$$mgy_0 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_1^2, \quad (25.54)$$

onde usamos o fato de que $y_1 = 0$. Da Figura 25.2 podemos, ainda, escrever y_0 em termos de ℓ e θ_0 :

$$y_0 = \ell - \ell \cos \theta_0 = \ell(1 - \cos \theta_0). \quad (25.55)$$

Substituindo a expressão anterior na equação (25.54), obtemos

$$|\mathbf{v}_1| = \sqrt{2g\ell(1 - \cos \theta_0)}. \quad (25.56)$$

Finalizamos esse exemplo utilizando o resultado anterior para calcularmos a tensão no fio, quando o pêndulo está na vertical (designada por T_1). Usando a Segunda Lei de Newton e tomando a sua componente normal à trajetória, no instante em que a partícula passa pelo ponto P_1 , obtemos

$$T_1 - mg = m\frac{\mathbf{v}_1^2}{\ell} \quad \implies \quad T_1 = mg(3 - 2 \cos \theta_0). \quad (25.57)$$

Exemplo 25.7

Neste exemplo, continuaremos ilustrando o Teorema da Conservação da Energia numa situação simples, mas introduzindo um ingrediente novo em relação ao exemplo anterior. Além de uma força de vínculo e de uma força conservativa, há, também, uma força dissipativa.

A Figura 25.3 mostra uma rampa na qual um pequeno bloco de massa m desliza a partir do ponto P_0 , onde se encontrava, inicialmente, em repouso. Não há atrito entre o bloco e a rampa em seu trecho curvo, de P_0 até o ponto A . No trecho plano da rampa, de A até o ponto B , na base, há um pequeno atrito entre o bloco e a rampa, com coeficiente de atrito cinético μ_c . Seja ℓ a distância entre A e

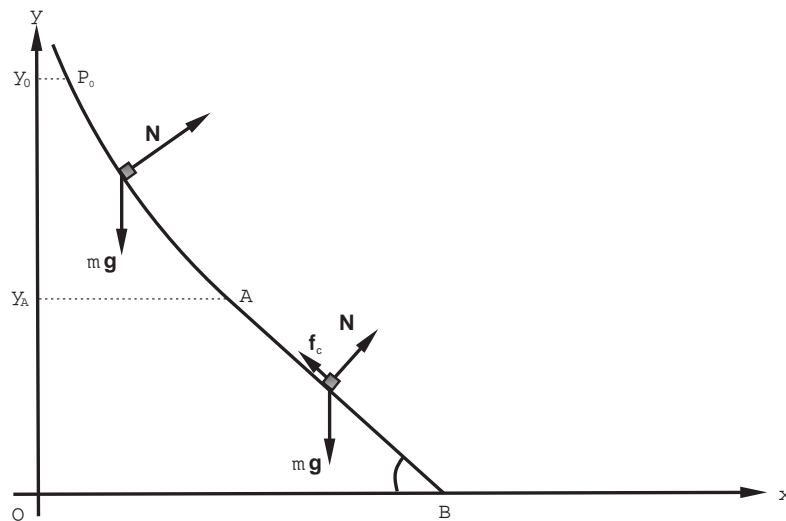


Figura 25.3: Rampa contendo um trecho curvo, de P_0 até A , no qual o atrito é desprezível e outro trecho plano, de A até B , no qual existe atrito.

B , e θ o ângulo entre o trecho de A a B da rampa e a horizontal. Por hipótese, o valor de θ é grande o suficiente para que o bloco atinja o ponto B .

Para simplificar, vamos considerar o bloco como uma partícula e o plano de seu movimento como sendo o plano da figura, escolhido como plano \mathcal{OXY} . O eixo \mathcal{OY} é vertical e a origem é escolhida de tal modo que $y_B = 0$. As alturas dos pontos P_0 e A são, respectivamente, dadas por y_0 e y_A . Desejamos, aqui, calcular os módulos da velocidade da partícula nos instantes em que ela se encontra nos pontos A e B em termos dos dados do problema.

No trecho da rampa de P_0 até A , as forças sobre o bloco são o seu peso mg e força normal N que a rampa exerce sobre ele. A força normal não realiza trabalho sobre a partícula, pois é sempre perpendicular à sua velocidade e a força-peso mg é constante e, portanto, conservativa. Associamos a ela uma energia potencial com ponto-padrão na origem \mathcal{O} do sistema de eixos \mathcal{OXY} , mostrado na Figura 25.3. Com essa escolha, tal energia potencial é dada por mgy , onde y é altura do bloco em relação à base da rampa num instante genérico. A Segunda Lei de Newton mostra que o bloco desce de P_0 até A . Para determinarmos o módulo da velocidade do bloco em A aplicamos, diretamente, o Teorema da Conservação da Energia, escrevendo:

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_A^2 + mgy_A = mgy_0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{v}_A| = \sqrt{2g(y_0 - y_A)}. \quad (25.58)$$

Devido à presença da força de atrito cinético no trecho de A até B , a energia mecânica da partícula não mais se conserva. No entanto, como vimos nesta aula, a sua variação entre dois instantes do movimento é igual ao trabalho das forças

não-conservativas, no caso, igual ao trabalho da força dissipativa presente. Como no trecho de A a B a força de atrito cinético \mathbf{f}_c tem módulo constante, dado por

$$|\mathbf{f}_c| = \mu_c |\mathbf{N}| = \mu_c mg \cos \theta ,$$

e aponta no sentido oposto ao da velocidade, o trabalho realizado por essa força, nesse trecho, é dado por $-\mu_c mg \cos \theta \ell$. Igualando, então, essa quantidade à variação da energia mecânica da partícula nesse trecho, obtemos

$$E_B - E_A = -\mu_c mg \cos \theta \ell , \quad (25.59)$$

ou seja,

$$\left\{ \frac{1}{2} m \mathbf{v}_B^2 + mg y_B \right\} - \left\{ \frac{1}{2} m \mathbf{v}_A^2 + mg y_A \right\} = -\mu_c mg \cos \theta \ell . \quad (25.60)$$

Lembrando que $y_B = 0$ e resolvendo para $|\mathbf{v}_B|$, obtemos

$$|\mathbf{v}_B| = \sqrt{\mathbf{v}_A^2 + 2g y_A - \mu_c mg \cos \theta \ell} . \quad (25.61)$$

Finalmente, substituindo o valor de $|\mathbf{v}_A|$, dado por (25.58), na última equação, obtemos

$$|\mathbf{v}_B| = \sqrt{2g (y_0 - \mu_c \cos \theta \ell)} . \quad (25.62)$$

Obviamente, poderíamos ter obtido $|\mathbf{v}_B|$ igualando, diretamente, a variação da energia mecânica do bloco entre os pontos P_0 e B com o trabalho das forças não-conservativas no trecho de P_0 a B . Deixaremos que você mesmo verifique essa outra possibilidade de solução no problema proposto 9.

Resumo

Analogamente ao que ocorre para movimentos retilíneos, se uma força é conservativa, podemos associar a ela e à partícula sobre a qual ela age uma função chamada energia potencial da partícula. O valor dessa energia potencial, em uma certa posição, é o trabalho que seria realizado pela força conservativa, se a partícula fosse da posição considerada até uma posição fixada chamada posição-padrão. Diferentes escolhas da posição-padrão dão origem a energias potenciais que diferem entre si por uma constante aditiva, mas sem importância no estudo do movimento da partícula. São diferenças entre os valores da energia potencial de dois pontos que têm significado físico. A força gravitacional sobre uma partícula

é conservativa. Para movimentos que ocorrem próximos à superfície terrestre, é conveniente tomar como padrão um ponto na própria superfície da Terra. Nesses casos, a energia potencial gravitacional é, aproximadamente, igual ao produto do módulo do peso pela altura da partícula em relação à superfície da Terra. Se, em seu movimento, a partícula se afastar bastante da superfície terrestre, é conveniente escolher o ponto-padrão no infinito e, nesse caso, sua energia potencial gravitacional é dada pela expressão $-GMm/r$, onde r é a distância da partícula ao centro da Terra, considerada uma esfera homogênea de raio R (essa última expressão é válida para $r \geq R$; obviamente, quando o corpo que exerce a força sobre a partícula em estudo for uma partícula de massa M , localizada na origem dos eixos cartesianos, essa expressão vale para $r > 0$).

Dada uma energia potencial, podemos obter a força conservativa que lhe deu origem, calculando menos o seu gradiente, isto é, $\mathbf{F} = -\nabla U$. Em coordenadas cartesianas, temos $F_x = -\partial U/\partial x$, $F_y = -\partial U/\partial y$ e $F_z = -\partial U/\partial z$. Se a força total que age sobre uma partícula é conservativa, a sua energia mecânica é uma constante para cada escolha de condições iniciais do movimento. Qualquer quantidade que dependa da posição e da velocidade da partícula, e que permaneça constante durante todo o seu movimento, é chamada constante de movimento da partícula no problema em consideração. A energia mecânica é uma constante de movimento nos casos em que a força total sobre a partícula é conservativa ou, também, nos casos em que a força total é dada por forças conservativas e não-conservativas, desde que essas últimas não realizem trabalho. Quando forças não-conservativas realizarem trabalho sobre a partícula, a sua energia mecânica, definida ainda como a soma de sua energia cinética com a sua energia potencial total, não será mais uma constante de movimento. No entanto, a variação de sua energia mecânica entre dois instantes quaisquer será igual ao trabalho de todas as forças não-conservativas.

Questionário

1. O que é energia potencial de uma partícula associada a uma dada força conservativa num movimento geral?
2. Dada uma força conservativa $\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r})$, dê a fórmula que expressa a energia potencial a ela associada, usando \mathbf{r}_p como ponto-padrão. Dê exemplos de energias potenciais, deixando clara a escolha feita para o ponto-padrão em cada caso.
3. Como diferem energias potenciais de uma mesma força conservativa definidas com diferentes pontos-padrão \mathbf{r}_p e \mathbf{r}'_p ?

4. Defina derivada direcional ao longo de um dado vetor unitário de uma função que depende da posição.
5. O que é gradiente de uma função que depende apenas da posição?
6. Como se obtém uma força conservativa a partir da energia potencial a ela associada? Dê exemplos.
7. O que é constante de movimento num movimento geral?
8. O que é energia mecânica de uma partícula?
9. Enuncie o Teorema da Conservação da Energia Mecânica de uma partícula nas três situações:
 - (a) quando a força total sobre a partícula é conservativa;
 - (b) quando atuam sobre a partícula forças conservativas e não-conservativas, mas as únicas que realizam trabalho são as conservativas;
 - (c) quando atuam sobre a partícula forças conservativas e não-conservativas, e todas elas realizam trabalho.

Problemas propostos

1. Considere a Terra como uma esfera de raio R na qual a sua massa M esteja uniformemente distribuída. Escolhendo a origem no centro da Terra, pode-se mostrar, nesse caso, que a força gravitacional exercida pela Terra sobre uma partícula de massa m é dada por:

$$\mathbf{F} = \begin{cases} -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{u}_r, & \text{se } r \geq R; \\ -\frac{GMm}{R^3} \mathbf{r}, & \text{se } 0 \leq r \leq R. \end{cases}$$

Note que, dentro da Terra, a força gravitacional sobre a partícula de massa m é do tipo harmônica.

- (a) Tomando como ponto-padrão um ponto infinitamente afastado da Terra ($r_p = \infty$), obtenha a expressão da energia potencial gravitacional da partícula quando ela se encontra dentro da Terra (para posições fora da Terra você já sabe o resultado, pois esse cálculo foi feito como exemplo no texto). Quanto vale $U(0)$?
 - (b) Faça um gráfico de $U(r)$ versus r para o intervalo $0 \leq r \leq \infty$.
2. Considere uma força central (e, portanto, conservativa) dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{k}{r^n} \mathbf{u}_r,$$

onde k é uma constante positiva e $n > 1$.

- (a) Tomando como ponto-padrão um ponto infinitamente afastado da origem ($r_p = \infty$), obtenha a expressão da energia potencial da partícula, associada a essa força conservativa, quando ela se encontra numa posição genérica.
- (b) Faça um gráfico de $U(r)$ versus r para o intervalo $0 \leq r \leq \infty$.
- (c) A força gravitacional que uma partícula de massa M exerce sobre outra de massa m pode ser obtida como um caso particular da expressão anterior, bastando, para isso, fazer $k = GMm$ e $n = 2$. Substitua esses valores no seu resultado do item (a) e verifique que a resposta coincide com o resultado escrito na equação (25.8).
3. Seja \mathbf{F} uma força conservativa e U a energia potencial correspondente. Considere, agora, o lugar geométrico de todos os pontos para os quais U é constante. Tais pontos formam superfícies definidas por $U(\mathbf{r}) = C$, onde C é uma constante. Diferentes valores de C correspondem, obviamente, a diferentes superfícies.
- (a) Quais são as superfícies de energia potencial constante para o caso da força $\mathbf{F} = -(k/r^2) \mathbf{u}_r$, onde k é uma constante positiva. Desenhe duas dessas superfícies, indicando em qual delas o valor de U é maior.
- (b) Repita o item anterior, mas, agora, supondo que $\mathbf{F} = A \mathbf{u}_z$, onde A é uma constante positiva.
- (c) Mostre, num caso genérico, que a força conservativa \mathbf{F} num dado ponto P é perpendicular à superfície de energia potencial constante que passa por P . Verifique essa propriedade nos exemplos feitos nos dois itens anteriores.
4. Suponha que a energia potencial de uma partícula seja dada por

$$U(x, y, z) = -\frac{k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}},$$

onde k é uma constante positiva (observe que esta nada mais é do que a função $-k/r$, porém, escrita em termos das coordenadas cartesianas).

- (a) Calcule, explicitamente, as derivadas parciais $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$ e $\partial U/\partial z$.
- (b) Obtenha a expressão da força conservativa \mathbf{F} associada a essa energia potencial e verifique, após fazer as identificações apropriadas, que $\mathbf{F} = -(k/r^2) \mathbf{u}_r$.

5. Suponha que a energia potencial de uma partícula seja dada por

$$U(x, y, z) = -\frac{Cz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (25.63)$$

onde C é uma constante positiva.

- (a) Calcule, explicitamente, as derivadas parciais $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$ e $\partial U/\partial z$.
- (b) Calcule, explicitamente, a expressão da força conservativa \mathbf{F} associada a essa energia potencial.
- (c) Calcule a expressão da força conservativa encontrada no item anterior nos seguintes casos particulares:
 - i. para pontos do eixo \mathcal{OZ} ;
 - ii. para pontos do plano \mathcal{OXY} .

6. Considere uma força central, isto é, uma força que pode ser escrita na forma $\mathbf{F} = F(r) \mathbf{u}_r$ e seja U a energia potencial associada a essa força.

- (a) A partir da definição de U , mostre que $F(r) = -dU(r)/dr$.
- (b) Calcule as forças conservativas associadas a cada uma das energias potenciais:
 - i. $U(r) = C/r$, onde k é uma constante não-nula;
 - ii. $U(r) = Ce^{-\mu r}/r$, onde C e μ são constantes positivas. Verifique, nesse caso, que no limite $\mu \rightarrow 0$ a força obtida se reduz à encontrada no caso anterior.

7. Reconsidere o Exemplo 25.6 e reobtenha o resultado (25.56), mas escolhendo como ponto-padrão para a energia potencial gravitacional o ponto de suspensão do pêndulo, isto é, tomando $y_p = \ell$.

8. Considere um pêndulo, como o descrito no Exemplo 25.6, mas suponha que em $t_0 = 0$ ele tenha sido abandonado do repouso de um ângulo $\theta_0 = \pi/2$ com a vertical.

- (a) Após oscilar muitas vezes, verifica-se que num instante $t_1 > t_0$ o pêndulo está na vertical e a partícula no extremo inferior do fio tem uma velocidade de módulo igual a $\sqrt{g\ell}$. Calcule a variação da energia mecânica do pêndulo entre os instantes t_0 e t_1 , ou seja, determine $\Delta E = E_1 - E_0$.

Como você verá em seu curso de eletromagnetismo, a expressão (25.63) corresponde à energia potencial eletrostática entre um dipolo elétrico, localizado na origem e orientado ao longo do eixo \mathcal{OZ} , e uma carga puntiforme, desde que a constante C seja identificada apropriadamente

- (b) Ocorridas muitas outras oscilações, verifica-se que o pêndulo pára de oscilar num instante $t_2 > t_1$, permanecendo, portanto, em repouso e com direção vertical a partir de então. Calcule a variação da energia mecânica do pêndulo entre os instantes t_0 e t_2 , ou seja, determine $\Delta E = E_2 - E_0$.
 - (c) Os resultados dos itens anteriores dependem do ponto-padrão escolhido para a energia potencial gravitacional?
9. Neste problema você irá reobter o resultado escrito em (25.62) seguindo um procedimento ligeiramente diferente do adotado no Exemplo 25.7. Aplique o Teorema da Conservação da Energia diretamente aos pontos P_0 e B e reobtenha o resultado (25.62).
10. No texto, quando definimos a energia potencial total como a soma das energias potenciais das diversas forças conservativas, fizemos a ressalva de que todas essas energias potenciais tinham o mesmo ponto-padrão. Considere agora que as energias potenciais das diversas forças conservativas tenham sido definidas com diferentes pontos-padrão.
- (a) A soma de todas essas energias potenciais com a energia cinética da partícula é conservada durante seu movimento, caso atuem sobre ela apenas forças conservativas?
 - (b) Qual a diferença entre essa soma e a energia mecânica total, sendo essa última definida usando-se um único ponto-padrão para todas as energias potenciais?

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de responder a todo o questionário sem muita dificuldade, para que possa enfrentar os problemas propostos desta aula. Não tente resolvê-los sem estar com os conceitos de energia potencial e energia mecânica bem compreendidos. Ao terminar esta aula, você deve ter condições de fazer vários tipos de cálculo. Primeiramente, você deve saber que, dada uma força conservativa, obtém-se a energia potencial a ela associada. Para testar se não atingiu tal objetivo, você deve resolver os dois primeiros problemas, apesar das dificuldades matemáticas envolvidas (integrais de caminho). Em segundo lugar,

você também deve saber seguir o caminho inverso, ou seja, dada uma energia potencial, obter a força conservativa a ela associada. Para verificar se esse outro objetivo foi alcançado, você deve resolver os problemas 4, 5 e 6. O problema 5 é, sem dúvida, o mais difícil. Portanto, não se preocupe se esse problema lhe exigir muito mais tempo do que os outros dois. Finalmente, você deve saber aplicar o Teorema da Conservação da Energia Mecânica, inclusive em situações onde forças não-conservativas estiverem presentes. Verifique seus conhecimentos sobre esse assunto, resolvendo os problemas 7, 8 e 9. Eles não devem apresentar muita dificuldade, pois estão baseados em exemplos feitos na aula.

Aula 26 – Aplicações da conservação da energia mecânica em movimentos não-retilíneos

Objetivos

- Resolver alguns problemas usando o Teorema da Conservação da Energia em situações nas quais só realizam trabalho forças conservativas.
- Resolver alguns problemas utilizando o Teorema da Conservação da Energia em situações nas quais forças não-conservativas realizam trabalho.

Introdução

Após as Aulas 21 e 22, nas quais aprendemos o Teorema da Energia Cinética, os conceitos de força conservativa e energia potencial e, por fim, discutimos o Teorema da Conservação da Energia Mecânica em movimentos retilíneos, fizemos uma aula de aplicações, a Aula 23. Portanto, após termos generalizado tudo o que aprendemos para movimentos gerais de uma partícula, isto é, movimentos não-retilíneos, é bastante natural fazermos, também, uma aula somente com aplicações desses conceitos mas, agora, dando ênfase a movimentos não-retilíneos. Nada nos impede, no entanto, de apresentarmos algum exemplo no qual o movimento da partícula seja retilíneo, desde que seja interessante para ilustrar algum conceito que acharmos relevante e pertinente. Portanto, nesta aula, nenhum conceito novo será introduzido. Tudo o que você precisa para entendê-la em sua totalidade é, apenas, ter compreendido as aulas anteriores deste módulo.

Antes, porém, de passarmos para os exemplos, gostaríamos de fazer um pequeno comentário. Na Aula 23, mostramos como podemos utilizar a conservação da energia mecânica, no caso de movimentos retilíneos nos quais a força total que age sobre uma partícula é conservativa, para obter uma descrição qualitativa e quantitativa do movimento da partícula. Uma discussão análoga, porém um pouco mais complicada, pode ser feita para o caso de movimentos não-retilíneos, em particular para os movimentos sob a ação de forças centrais como os movimentos planetários em torno do Sol. Por esse motivo, não discutiremos nesta disciplina os detalhes dos movimentos planetários.

No entanto, mostraremos, em nosso primeiro exemplo, como utilizar a conservação da energia mecânica para determinar os períodos de um movimento não-retilíneo, a saber, de um pêndulo simples em que as oscilações podem ter grandes amplitudes.

Exemplo 26.1

Considere um pêndulo simples, formado por uma partícula de massa m e um fio ideal de comprimento ℓ cujo extremo superior está preso a um suporte fixo. Suponha que, no instante inicial, a partícula esteja em repouso e no ponto P_0 . Nesse instante, o fio está esticado e forma um ângulo θ_0 com a vertical, como indica a Figura 26.1. Suponha, ainda, que $0 < \theta_0 \leq \pi/2$.

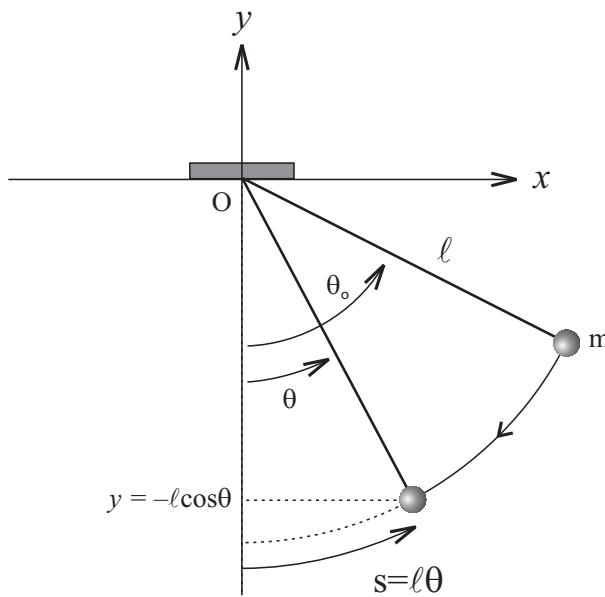


Figura 26.1: Pêndulo simples formado por uma partícula de massa m e um fio de comprimento ℓ com grandes amplitudes de oscilação.

Nosso principal objetivo, aqui, é obter uma fórmula que nos dê o período do pêndulo em função da amplitude θ_0 e verificar que, apenas para pequenas oscilações, isto é, $\theta_0 \ll 1$, o período não depende de θ_0 , de acordo com o problema proposto 10 da Aula 18.

Como, por hipótese, o fio é inextensível, a trajetória da partícula é um arco de circunferência e, portanto, a força exercida pelo fio sobre a partícula não realiza trabalho. Como o peso é uma força conservativa, a energia mecânica da partícula é uma constante de movimento. Escolheremos o eixo \mathcal{OY} como vertical com a origem no ponto de suspensão do pêndulo. Além disso, tomaremos como ponto-padrão para a energia potencial gravitacional $y_p = 0$. Com essa escolha e com as condições consideradas, a energia mecânica da partícula é dada por

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 + U(y_0 = -\ell \cos \theta_0) = -mg\ell \cos \theta_0. \quad (26.1)$$

Durante todo o movimento do pêndulo, a soma de sua energia cinética com sua energia potencial possui o valor escrito na última equação. Por isso, para des-

cobrirmos o módulo da velocidade do pêndulo em uma posição genérica, quando o fio faz com a vertical um ângulo θ , basta igualar essa soma ao valor anterior, ou seja:

$$\frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta = -mgl \cos \theta_0, \quad (26.2)$$

onde usamos o fato de que $\mathbf{v}^2 = \ell^2\dot{\theta}^2$, pois $\mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{u}_T$ e o arco percorrido na trajetória pode ser escrito como $s = \ell\theta$, desde que se escolha a origem de s quando o pêndulo se encontra na vertical (veja, novamente, a Figura 26.1). A taxa com que o ângulo θ varia com o tempo é dada, então, por

$$\dot{\theta} = \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}, \quad (26.3)$$

onde o sinal a ser escolhido para $\dot{\theta}$ dependerá do fato de θ estar crescendo ou diminuindo, obviamente.

O período do movimento do pêndulo pode ser calculado como o intervalo de tempo transcorrido desde o instante inicial, t_0 , e o instante em que o pêndulo retorna, pela primeira vez, à sua posição inicial. Denotando por T o período e lembrando que uma variação infinitesimal $d\theta$ ocorre num intervalo de tempo infinitesimal $dt = d\theta/\dot{\theta}$, temos

$$\int_{t_0}^{t_0+T} dt = 4 \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{-\sqrt{2g/\ell} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}},$$

ou seja,

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (26.4)$$

Certifique-se de que entendeu bem a presença do fator 4, os limites de integração e o sinal escolhido para $\dot{\theta}$: o período é quatro vezes o intervalo de tempo gasto pelo pêndulo para atingir, pela primeira vez, a configuração vertical, daí o fator 4; na posição inicial, o ângulo com a vertical é θ_0 e quando o fio está na vertical esse ângulo é nulo, daí os limites θ_0 e 0 e, finalmente, como o ângulo θ diminui nesse trecho, utilizamos o sinal negativo para $\dot{\theta}$.

A equação (26.4) nos dá o período de um pêndulo simples para qualquer amplitude de oscilação, entre 0 e $\pi/2$. Em princípio, esse período depende da amplitude de oscilação. Não vamos, aqui, calcular a integral que aparece em (26.4), pois ela é um pouco complicada, e tentar resolvê-la estaria acima do nível pretendido para nosso curso. Porém, essa integral é bem conhecida para os matemáticos e seu valor pode ser encontrado em livros que contêm tabelas de integrais. No entanto, antes de colocarmos a resposta para essa integral, vamos analisar o caso

particular de pequenas oscilações, isto é, o caso em que $\theta_0 \ll 1$ e verificar que, nesse caso, o período não depende da amplitude θ_0 , de acordo com o problema proposto 10 da Aula 18.

Com esse objetivo, usaremos as aproximações

$$\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2 \quad \text{e} \quad \cos \theta_0 \approx 1 - \theta_0^2/2 ,$$

válidas para $|\theta|, \theta_0 \ll 1$. Substituindo essas aproximações na integral escrita em (26.4), obtemos

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} .$$

Fazendo, agora, a transformação de variáveis

$$\theta = \theta_0 \sin \alpha \quad \implies \quad d\theta = \theta_0 \cos \alpha \, d\alpha ,$$

obtemos

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} d\alpha \quad \implies \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} , \quad (26.5)$$

resultado que independe da amplitude de oscilação θ_0 e está de acordo com a resposta encontrada no problema proposto 10 da Aula 18.

Finalizamos este exemplo colocando a resposta exata para o período do pêndulo, qualquer que seja a amplitude de suas oscilações, dado pela equação (26.4). Pode-se mostrar que, embora o resultado seja exato, ele é escrito em termos de uma série de infinitas parcelas, dado por (escrevemos, apenas, os primeiros termos desta série)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} [\sin(\theta_0/2)]^2 + \frac{9}{64} [\sin(\theta_0/2)]^4 + \dots \right\} . \quad (26.6)$$

No caso particular de pequenas amplitudes de oscilação, isto é, $\theta_0 \ll 1$, podemos desprezar todos os termos da série, exceto o primeiro, reobtendo, assim, o resultado independente de θ_0 escrito em (26.5). À medida que consideramos amplitudes cada vez maiores, devemos manter cada vez mais termos da série. Nesse caso, vemos que o período passa a depender de θ_0 , isto é, da amplitude das oscilações. Qualquer que seja o valor de θ_0 , o resultado exato é dado somando-se todos os termos da série. Pode-se mostrar que tal soma é finita para valores de amplitudes tais que $0 < \theta_0 \leq \pi/2$.

Exemplo 26.2

Considere uma partícula de massa m que está, inicialmente, em repouso no ponto mais alto de um hemisfério de raio R . Suponha que não exista atrito entre

a partícula e a superfície. Perturba-se, ligeiramente, a partícula, de modo que ela entre em movimento, deslizando sobre a superfície do hemisfério até que, para um certo ângulo entre seu vetor-posição (com origem no centro do hemisfério) e a vertical, designado por θ_c , ela perca o contato com o hemisfério. A Figura 26.2 ilustra essa situação. Nela, estão indicadas três posições da partícula, a saber, a sua posição inicial, a sua posição num instante genérico de seu deslizamento e, por fim, a sua posição no instante em que ela perde o contato com a superfície do hemisfério.

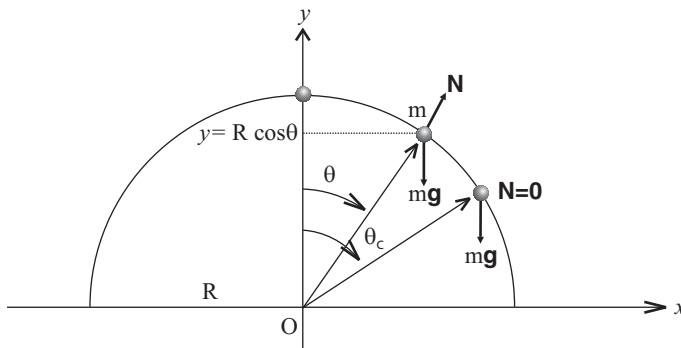


Figura 26.2: Partícula deslizando sobre hemisfério liso de raio R até perder o contato com o mesmo.

Desejamos, aqui, determinar o valor do ângulo θ_c . No entanto, antes de começarmos a resolver o problema, um comentário se faz necessário. Note que se a partícula for abandonada em repouso no ponto mais alto do hemisfério, permanecerá em repouso nesse ponto. Mas, se a ela for dada uma velocidade inicial, por menor que seja, ela irá entrar em movimento, pois as forças que atuam sobre a partícula, a saber, seu peso e a normal exercida pela superfície, não mais serão forças colineares, não podendo, por esse motivo, se anular. Quando dissemos que a partícula foi ligeiramente perturbada, queríamos dizer que, necessariamente, ela entrará em movimento mas, na prática, poderemos considerar, nos cálculos que faremos, a sua velocidade inicial como nula. Dito isso, passemos à solução do problema proposto.

Como a normal é sempre perpendicular à superfície, essa força não realiza trabalho. E como o peso é uma força conservativa, podemos afirmar que a energia mecânica da partícula é uma constante de movimento nesse problema. Escolheremos o eixo OY como vertical e com sua origem no centro do hemisfério (veja a Figura 26.2). Além disso, tomaremos como ponto-padrão para a energia potencial gravitacional o ponto para o qual $y = 0$. Desse modo, a energia mecânica da partícula é dada por:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0 = mgR. \quad (26.7)$$

Por ser a energia mecânica uma constante de movimento, podemos igualar a soma da energia cinética da partícula com a sua energia potencial, num instante genérico de seu movimento sobre o hemisfério, com o valor escrito na última equação:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgR. \quad (26.8)$$

A partir da Figura **26.2**, podemos expressar y em termos de θ , numa posição genérica. Temos, então:

$$y = R \cos \theta. \quad (26.9)$$

Das duas últimas equações, obtemos

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR \cos \theta = mgR \quad \implies \quad v^2 = 2gR(1 - \cos \theta). \quad (26.10)$$

Para determinarmos o ângulo θ_c , devemos nos perguntar o que caracteriza perder o contato com a superfície do hemisfério. Não é difícil perceber que, nesse exato momento, a normal deve ser nula. Portanto, devemos, inicialmente, aplicar a Segunda Lei de Newton num instante genérico e tomar a componente normal à trajetória, ou seja:

$$mg \cos \theta - |\mathbf{N}| = m \frac{v^2}{R}.$$

Substituindo (26.10) na equação anterior, obtemos:

$$|\mathbf{N}| = mg(3 \cos \theta - 2).$$

A última equação nos dá o valor do módulo da normal num instante genérico do movimento da partícula sobre o hemisfério. Em particular, quando $\theta = \theta_c$, temos $\mathbf{N} = \mathbf{0}$, de modo que:

$$0 = mg(3 \cos \theta_c - 2) \quad \implies \quad \cos \theta_c = \frac{2}{3}. \quad (26.11)$$

Vale a pena observar que o resultado independe da massa da partícula e, tampouco, do raio do hemisfério.

Exemplo 26.3

Considere um pêndulo simples, formado por uma partícula de massa m e um fio ideal de comprimento ℓ cujo extremo superior está preso a um suporte fixo. Suponha que, no instante inicial, o fio esteja na vertical e a partícula tenha velocidade horizontal, para a direita e de módulo v_0 , como indica a Figura 26.3.

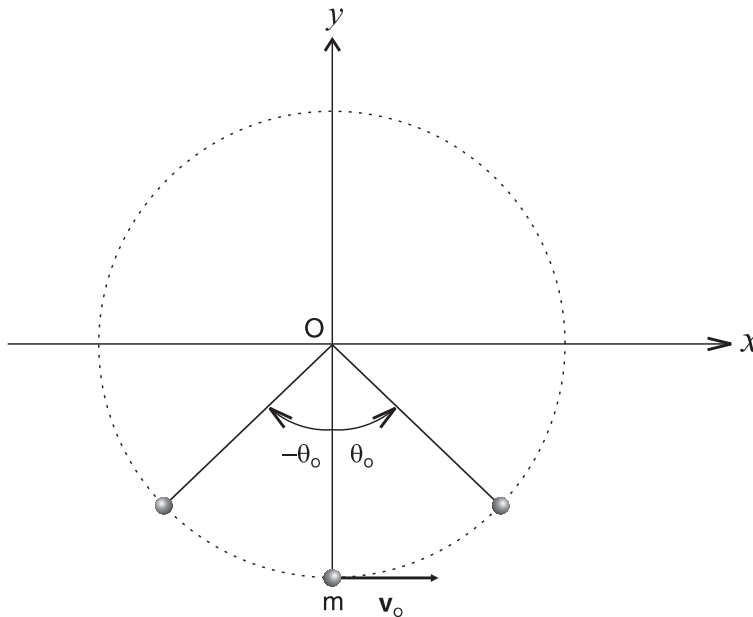


Figura 26.3: Pêndulo simples que, no instante inicial, tem velocidade \mathbf{v}_0 . Para $0 < v_0^2 \leq 2g\ell$ o pêndulo irá oscilar com o fio sempre esticado entre os ângulos $-\theta_0$ e θ_0 com a vertical, sendo $0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

Inicialmente, queremos determinar quais são os valores de v_0 que mantêm o fio esticado durante todo o movimento do pêndulo. Diferentes valores de v_0 correspondem a diferentes valores da energia mecânica do pêndulo. Por conveniência, escolheremos o eixo \mathcal{OY} como vertical, orientado para cima e com a sua origem no ponto de suspensão do pêndulo. Desse modo, a energia mecânica do pêndulo é dada, simplesmente, por $E = (1/2)mv_0^2 - mg\ell$. Obviamente, com $v_0 = 0$, sua energia mecânica só lhe permite ficar em repouso com o fio na vertical. Trata-se de uma posição de equilíbrio estável do pêndulo. Para valores não-nulos de v_0 , mas ainda pequenos (já veremos o que significa pequenos), o pêndulo oscilará com uma amplitude θ_0 que pode ser, facilmente, determinada pela conservação da energia mecânica. Basta lembrar que quando $\theta = \pm\theta_0$, sua velocidade é nula (trata-se de pontos de retorno). Desse modo, podemos escrever

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell = -mg\ell \cos \theta_0 \quad \implies \quad \cos \theta_0 = 1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}. \quad (26.12)$$

Observe que para $v_0^2 = 2g\ell$, temos $\cos \theta_0 = 0$ e, conseqüentemente, a amplitude de oscilação é dada por $\theta_0 = \pi/2$. Ou seja, no ponto mais alto, o fio estará na horizontal. Se v_0 for ligeiramente maior do que $\sqrt{2g\ell}$, o fio deixará de ficar esticado, pois fará um ângulo com a vertical ligeiramente maior do que $\pi/2$, mas ainda não terá energia suficiente para dar uma volta completa com o fio esticado. Portanto, podemos afirmar, por enquanto, que, para valores de v_0 no intervalo $0 < v_0 \leq \sqrt{2g\ell}$, o pêndulo oscila com o fio sempre esticado, com amplitudes no intervalo $0 < \theta_0 \leq \pi/2$.

Vejamos, agora, quais os valores de v_0 que permitem ao pêndulo completar a volta toda com o fio esticado. Para isso, devemos, inicialmente, calcular o valor da tensão no fio em função do ângulo θ que ele faz com a vertical e determinar para que ângulo θ_m a tensão é mínima. Encontrado esse ângulo, imporemos a condição de que o fio esteja esticado nessa posição, ou seja, que a tensão seja maior ou igual a zero quando o pêndulo estiver nessa posição.

Usando a Segunda Lei de Newton numa posição genérica do pêndulo, isto é, escrevendo $\mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$ e tomando a componente normal à trajetória dessa equação, temos

$$T - mg \cos \theta = m \frac{v^2}{\ell}. \quad (26.13)$$

Para calcularmos o valor de v^2 em termos de θ , usamos a conservação da energia mecânica:

$$\frac{1}{2}mv^2 - mg\ell \cos \theta = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg\ell \implies v^2 = v_0^2 + 2g\ell(\cos \theta - 1). \quad (26.14)$$

A partir das equações (26.14) e (26.13), obtemos

$$T = m \frac{v_0^2}{\ell} - 2mg + 3mg \cos \theta. \quad (26.15)$$

A equação anterior nos mostra que, para movimentos do pêndulo que completam toda a circunferência em torno do ponto de suspensão, a tensão no fio é mínima em $\theta_m = \pi$ (verifique esse resultado como exercício). Substituindo $\theta = \theta_m = \pi$ na equação anterior, obtemos o valor da tensão quando o pêndulo está no ponto mais alto da circunferência, denotado por T_m :

$$T_m = m \frac{v_0^2}{\ell} - 5mg. \quad (26.16)$$

A Figura 26.4 ilustra um movimento do pêndulo no qual ele atinge o ponto mais alto da circunferência, mas mantendo o fio sempre esticado.

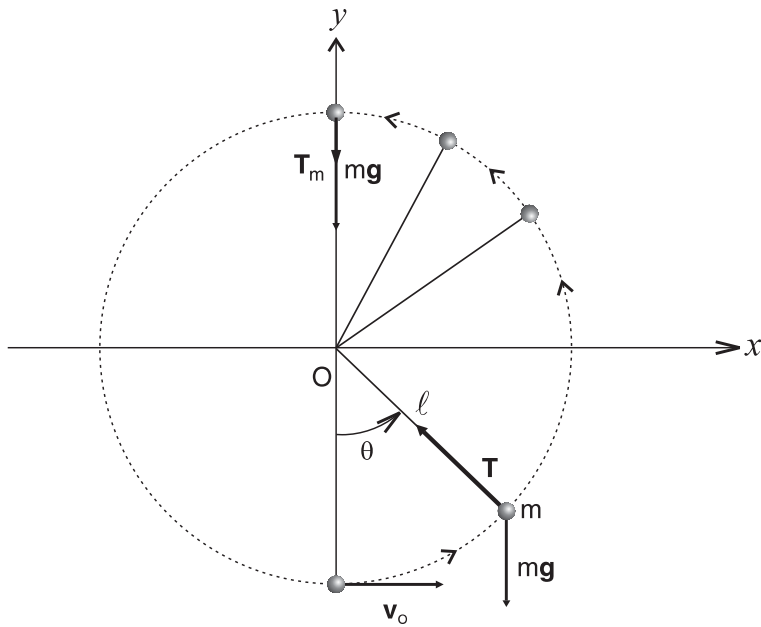


Figura 26.4: Com $v_0^2 \geq 5gl$, o pêndulo irá completar a volta mantendo o fio sempre esticado; caso $v_0^2 = 5gl$, a tensão mínima, que ocorre para $\theta = \pi$, será nula. Esta figura ilustra uma situação em que $v_0^2 > 5gl$ pois, como você pode verificar no desenho, $T_m > 0$.

O menor valor de v_0 , denotado por v_{0m} , para o qual o pêndulo completa toda a circunferência com o fio sempre esticado é obtido, então, fazendo-se na equação anterior $T_m = 0$:

$$0 = m \frac{v_{0m}^2}{\ell} - 5mg \quad \Rightarrow \quad v_{0m} = \sqrt{5gl}. \quad (26.17)$$

Podemos, então, resumir os resultados anteriores, afirmando que o fio permanecerá esticado durante todo o movimento do pêndulo sempre que

$$0 \leq v_0 \leq \sqrt{2gl} \quad \text{ou} \quad v_0 \geq \sqrt{5gl}. \quad (26.18)$$

Exemplo 26.4

Este exemplo complementa o anterior. Consideraremos, aqui, exatamente o mesmo sistema físico descrito no exemplo anterior, mas supondo que $v_0 = \sqrt{3gl}$, de modo que o pêndulo não é capaz de dar uma volta completa mantendo o fio esticado. No entanto, como $\sqrt{3gl} > \sqrt{2gl}$, o pêndulo tem energia suficiente para passar da horizontal, de modo que, necessariamente, existirá um ângulo θ_1 para o qual a tensão no fio será nula e a trajetória da partícula deixará de ser circular. Nosso objetivo, aqui, é calcular o valor do ângulo θ_1 e descrever, qualitativamente, o que ocorre com o pêndulo depois que ele atinge essa posição.

Vejamos, inicialmente, como a tensão varia com o ângulo θ durante o trecho do movimento para o qual o fio está esticado quando $v_0 = \sqrt{3gl}$. Para isso, basta

substituir esse valor de v_0 na equação (26.15), o que nos leva a

$$T = mg(1 + 3 \cos \theta) . \quad (26.19)$$

Para determinar o ângulo θ_1 , basta tomar $T = 0$ na equação anterior, isto é,

$$0 = mg(1 + 3 \cos \theta_1) \quad \Rightarrow \quad \cos \theta_1 = -\frac{1}{3} . \quad (26.20)$$

No instante em que $\theta = \theta_1$, a tensão no fio é nula (embora o fio ainda não tenha se encurvado) e a velocidade da partícula é tangente à trajetória circular nesse ponto. No entanto, a partir desse instante, a única força que atua sobre a partícula é o seu próprio peso, de modo que daí para a frente ela descreverá um movimento de projétil usual. Em outras palavras, a partir desse instante sua trajetória será parabólica e o fio não estará mais esticado. Todos esses resultados estão ilustrados na Figura 26.5.

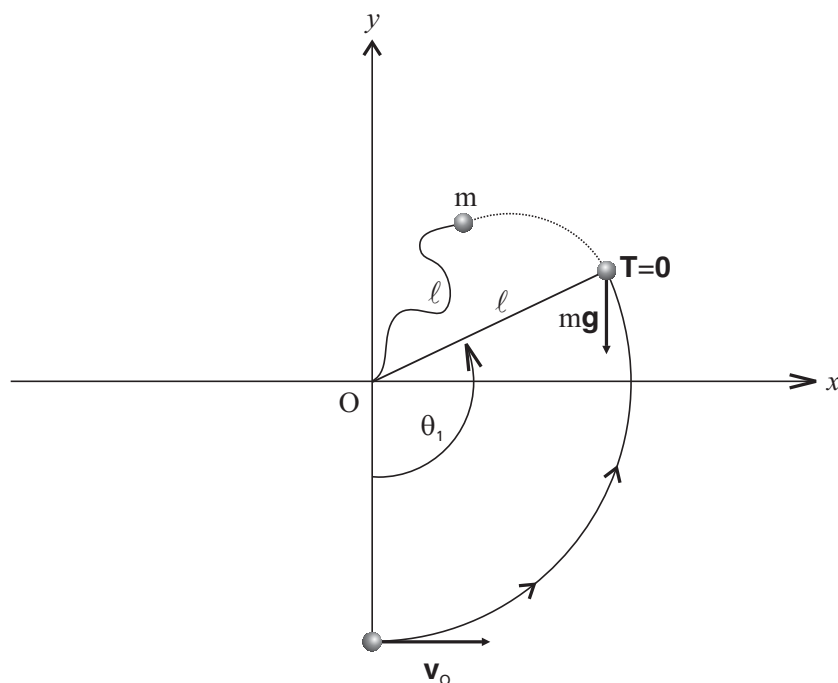


Figura 26.5: Pêndulo simples cuja energia mecânica não é capaz de fazê-lo completar a circunferência em torno do ponto de suspensão.

No problema proposto 7, você irá determinar se a partícula passa por cima ou por baixo do ponto de suspensão.

Exemplo 26.5

Neste exemplo, vamos considerar uma partícula de massa m que se movimenta numa órbita circular de raio R em torno de uma partícula de massa M , fixa, por hipótese, na origem do sistema de eixos cartesianos, como ilustra a Figura 26.6. Nosso primeiro objetivo será obter a expressão da energia mecânica da partícula de massa m sob a ação da força gravitacional exercida pela partícula fixa na origem quando descreve um MCU de raio R .

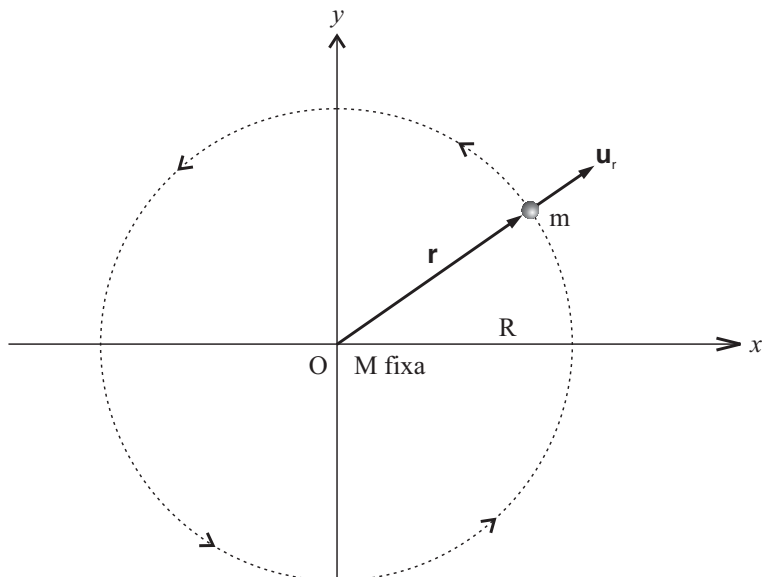


Figura 26.6: Órbita circular da partícula de massa m sob a ação da força gravitacional exercida pela partícula de massa M , fixa na origem.

Da conservação da energia mecânica, escrevemos

$$E = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - \frac{GMm}{R}. \quad (26.21)$$

A fim de expressar \mathbf{v}^2 em termos de R , utilizamos a Segunda Lei de Newton:

$$-\frac{GMm}{R^2}\mathbf{u}_r = -m\frac{\mathbf{v}^2}{R}\mathbf{u}_r \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{GMm}{2R}. \quad (26.22)$$

Substituindo a equação (26.22) na expressão da energia mecânica de partícula, dada por (26.21), obtemos

$$E = \frac{GMm}{2R} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2R}. \quad (26.23)$$

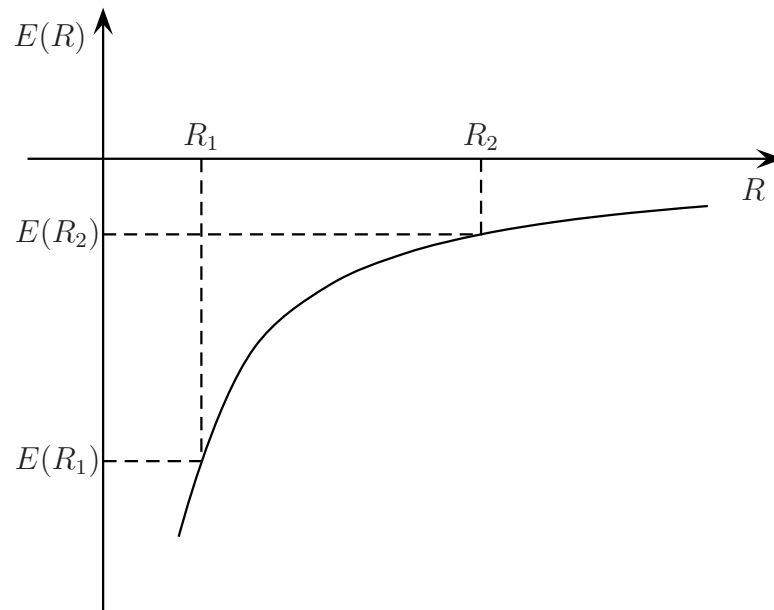


Figura 26.7: Órbitas circulares de raios menores têm energias mecânicas menores.

Note que a energia mecânica da partícula em estudo é sempre negativa, aproximando-se de zero quando o raio da órbita circular se aproxima de infinito. Ou seja, quanto mais próxima de zero está a energia mecânica da partícula, menos “presa” pela força gravitacional está a partícula.

Nesse sentido, se E_1 é a energia mecânica associada a uma órbita circular de raio R_1 e E_2 é a energia mecânica associada a uma órbita circular de raio R_2 , então, se $E_2 < E_1$, temos $R_2 < R_1$. Ou seja, órbitas circulares de raios cada vez menores têm energias mecânicas cada vez menores. Por esse motivo, quando um satélite que está orbitando a Terra, por exemplo, perde energia devido à ação de alguma força dissipativa (resistência do ar, mesmo sendo este muito rarefeito), o raio de sua órbita deve diminuir. Em geral, tais satélites têm órbitas que vão espiralando até retornarem à Terra. A Figura 26.7 mostra como a energia mecânica da partícula em MCU varia com o raio R de sua órbita circular.

A Terceira Lei de Kepler, discutida aqui, supõe que a massa M permaneça fixa na origem, o que ocorre com boa aproximação, no caso em que $M \gg m$. No caso do Sistema Solar, embora a massa do Sol seja bem maior do que a massa de cada um dos planetas, o Sol se move devido à força gravitacional de cada planeta, fazendo com que a expressão dada por (26.24) não seja exata.

Aproveitamos esse exemplo para estabelecer, no caso particular de órbitas circulares, um resultado muito interessante, conhecido como Terceira Lei de Kepler. Trata-se de uma relação entre o período T de uma órbita planetária com seu tamanho, caracterizado, no caso de uma órbita circular, pelo raio R da órbita.

Se substituirmos, na Segunda Lei de Newton escrita em (26.22), a expressão $v^2 = (2\pi R)^2/T^2$, obtemos

$$-\frac{GMm}{R^2} \mathbf{u}_r = -m \frac{4\pi^2 R^2/T^2}{R} \mathbf{u}_r \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} . \quad (26.24)$$

Esse importante resultado nos diz que o quadrado do período é proporcional ao cubo do raio da órbita, para movimentos circulares sob a ação da força gravitacional da massa M , supostamente fixa na origem. Aplicando ao sistema planetário (supondo, para simplificar, que os movimentos dos planetas sejam circulares), esse resultado afirma que a razão T^2/R^3 é a mesma para todos os planetas.

Exemplo 26.6

Neste exemplo, consideraremos uma situação na qual, além de forças conservativas, há, também, uma força dissipativa realizando trabalho sobre a partícula. Considere um pequeno bloco de massa m que é abandonado a partir do repouso de um ponto sobre a superfície de uma rampa inclinada de um ângulo θ em relação a um plano horizontal. Suponha que $\theta > \theta_0$, onde $\tan \theta_0 = \mu_e$, sendo μ_e o coeficiente de atrito estático entre as superfícies do bloco e da rampa. No instante inicial, o bloco está encostado em uma mola ideal de constante elástica k que está paralela à rampa e fazendo com o plano horizontal o mesmo ângulo θ . O extremo inferior da mola está fixo e, no instante inicial, ela está com seu comprimento natural. Verifica-se que, após percorrer uma distância $\Delta \ell$ sobre a rampa, o bloco atinge, pela primeira vez, o repouso, como indica a Figura 26.8 (não importa, para nossos propósitos, se o bloco permanece em repouso ou ainda volta a subir e descer até parar definitivamente). Nosso objetivo é determinar o valor do coeficiente de atrito cinético μ_c em termos dos dados anteriores.

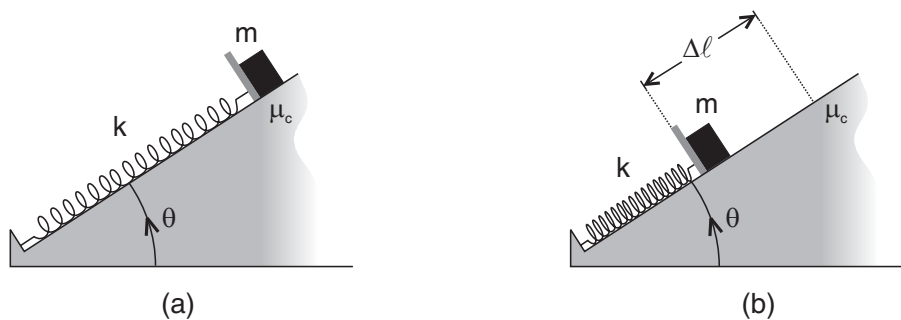


Figura 26.8: Bloco que parte do repouso, desliza sobre rampa com atrito comprimindo uma mola ideal até parar.

Observe, inicialmente, que a energia mecânica não se conserva, pois há uma força dissipativa realizando trabalho sobre o bloco, a força de atrito cinético, de módulo constante e dado por

$$|\mathbf{f}_{at}| = \mu_c |\mathbf{N}| = \mu_c mg \cos \theta .$$

Nesse caso, podemos afirmar que a variação da energia mecânica do bloco no trecho considerado de seu movimento é igual ao trabalho realizado pela força de

atrito cinético nesse mesmo trecho. Tomando como ponto-padrão para ambas as energias potenciais, a elástica e a gravitacional, a posição inicial do bloco, a variação da energia mecânica no trecho em consideração é dada por

$$\Delta E = \frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 - mg\Delta\ell\sin\theta.$$

Em contrapartida, o trabalho realizado pela força de atrito cinético é

$$W_{at} = -|\mathbf{f}_{at}|\Delta\ell = -\mu_c mg \cos\theta \Delta\ell.$$

Portanto, de $\Delta E = W_{at}$, obtemos

$$\frac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 - mg\Delta\ell\sin\theta = -\mu_c mg \cos\theta \Delta\ell. \quad (26.25)$$

Como $\Delta\ell = 0$ não pode ser solução, uma vez que, necessariamente, o bloco entra em movimento (a força total inicial exercida sobre o bloco é diferente de zero), descartamos essa possibilidade e dividimos a equação anterior por $\Delta\ell$, obtendo para μ_c o resultado

$$\mu_c = \tan\theta - \frac{k\Delta\ell}{2mg \cos\theta}. \quad (26.26)$$

Finalizamos este exemplo considerando o caso particular em que $\mu_c = 0$. É claro que, nesse caso, a energia mecânica do bloco se conserva e ele ficará oscilando harmonicamente entre a posição inicial e o ponto mais baixo atingido por ele sobre a rampa, ou seja, oscilará harmonicamente com amplitude igual a $\Delta\ell/2$. Fazendo $\mu_c = 0$ na equação anterior, obtemos

$$0 = \tan\theta - \frac{k\Delta\ell}{2mg \cos\theta} \quad \Rightarrow \quad \Delta\ell = \frac{2mg\sin\theta}{k}. \quad (26.27)$$

Isso significa que a amplitude das oscilações harmônicas, no caso de $\mu_c = 0$, é dada por $mg\sin\theta/k$, como pode ser verificado resolvendo-se a Segunda Lei de Newton e aplicando as condições iniciais apropriadas. Faça como exercício, caso não esteja convencido disso.

Exemplo 26.7

Neste último exemplo, vamos analisar o efeito da resistência do ar sobre um satélite artificial terrestre de massa m que se movimenta numa órbita aproximadamente circular em torno da Terra. Devido à dissipação, a energia mecânica do satélite irá diminuir durante seu movimento. Veremos que o raio de sua órbita irá diminuir e sua trajetória será uma espiral até se chocar com a superfície terrestre. É comum ouvirmos, no noticiário, a informação de que um satélite que fora colocado numa órbita a algumas centenas de quilômetros acima da superfície terrestre caiu, de volta, na Terra.

A discussão feita nesse exemplo foi baseada no livro-texto *Newtonian Mechanics*, A.P. French (W.W. Norton and Company, Inc, Nova York, 1971); veja as páginas 470-473.

De qualquer modo, trata-se de um exemplo bastante peculiar, pois, ao contrário do que normalmente ocorre quando forças dissipativas realizam trabalho, a energia cinética do satélite irá aumentar enquanto ele perde energia mecânica. Não se assuste, não há nenhuma contradição com o que você aprendeu. Lembre-se de que a energia mecânica é a soma da cinética com a potencial e a diminuição desta última pode ser maior do que o aumento da energia cinética, fazendo com que, no conto geral, a energia mecânica diminua. É exatamente isso que ocorre nesse caso.

Vamos supor que o efeito da força resistiva seja muito pequeno, o que é bastante razoável, pelo menos quando o satélite ainda está bem longe da superfície terrestre (milhares de revoluções em torno da Terra ocorrem antes que tais satélites caiam de volta). Consequentemente, podemos dizer que a trajetória do satélite em retorno à Terra é uma espiral na qual cada revolução pode ser considerada, com ótima aproximação, como uma trajetória circular, como ilustra a Figura 26.9.

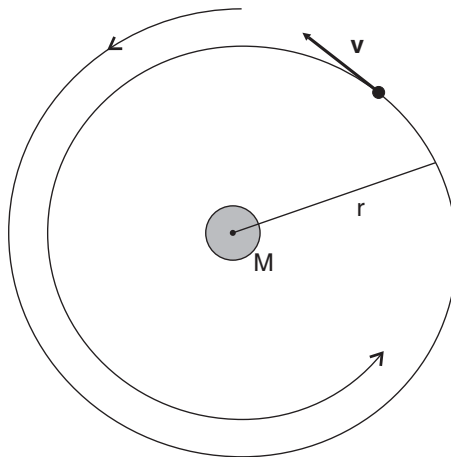


Figura 26.9: Satélite terrestre perdendo energia mecânica devido à existência de forças dissipativas e espiralando de volta à Terra.

Seja r o raio da órbita do satélite durante uma revolução genérica em torno da Terra, cuja massa denotaremos por M . A partir da discussão feita no exemplo 26.5, as energias cinética, potencial gravitacional e mecânica do satélite durante essa revolução são dadas, aproximadamente, por

$$K = \frac{GMm}{2r}; \quad U = -\frac{GMm}{r} \quad \text{e} \quad E = -\frac{GMm}{2r}. \quad (26.28)$$

Analisando as expressões anteriores, vemos que $E = -K = U/2$. Imagine, então, que, após algumas revoluções, o raio da órbita do satélite tenha sofrido uma variação $\Delta r = -\varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$, ou seja, tenha passado de r para $r + \Delta r = r - \varepsilon$.

Utilizando as expressões escritas em (26.28), as respectivas variações de K , U e E são dadas por:

$$\begin{aligned}\Delta K &\approx -\frac{GMm}{2r^2}\Delta r = +\frac{GMm}{2r^2}\varepsilon \\ \Delta U &\approx +\frac{GMm}{r^2}\Delta r = -\frac{GMm}{r^2}\varepsilon \\ \Delta E &\approx +\frac{GMm}{2r^2}\Delta r = -\frac{GMm}{2r^2}\varepsilon .\end{aligned}\quad (26.29)$$

Das expressões anteriores, temos $\Delta K = -\Delta U/2$, de modo que, mesmo sendo $\Delta K > 0$, a variação da energia mecânica é negativa:

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U = \frac{1}{2}\Delta U = -\frac{GMm}{2r^2}\varepsilon < 0 .$$

A análise anterior foi baseada no balanço de energia do satélite. Para entendermos com mais detalhes por que o módulo da velocidade do satélite aumenta à medida que o raio de sua órbita diminui, podemos analisar, também, as forças que atuam sobre o satélite. Consideremos, então, um pequeno trecho de sua órbita que vai do ponto A ao ponto B , como ilustra a Figura 26.10. Note que, nesse trecho, vamos considerar a variação do raio orbital.

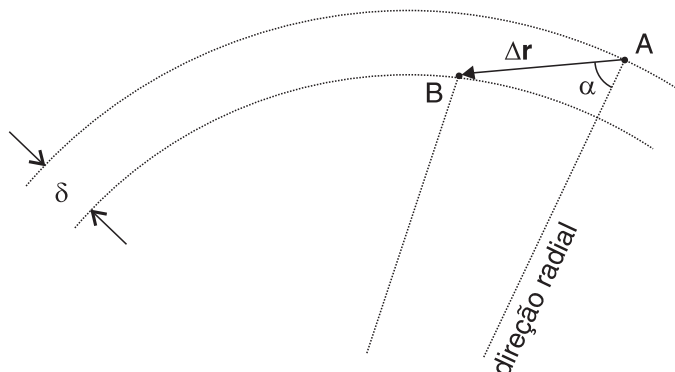


Figura 26.10: Pequeno trecho da trajetória do satélite cujo deslocamento tem módulo Δs e sua distância ao centro da Terra diminui de um valor δ .

Designando por $R(v)$ o módulo da força resistiva sobre o satélite, o trabalho total sobre ele no trecho de A até B é dado por

$$W_{AB} \approx \left\{ \frac{GMm}{r^2} \cos \alpha - R(v) \right\} \Delta s , \quad (26.30)$$

onde α é o ângulo entre o deslocamento do satélite $\Delta \mathbf{r}$ e a direção radial (veja, novamente, a Figura 26.10). Usando, ainda, as relações $\Delta s \cos \alpha = \delta$ e $\Delta s = v \Delta t$, onde v é o módulo da velocidade do satélite, obtemos

$$W_{AB} \approx \frac{GMm}{r^2} \delta - R(v)v \Delta t . \quad (26.31)$$

Em contrapartida, podemos escrever $\Delta K = \Delta(mv^2/2) \approx mv\Delta v$, de modo que, a partir do Teorema da Energia Cinética, temos

$$\Delta K = W_{AB} \implies mv\Delta v \approx \frac{GMm}{r^2} \delta - R(v)v\Delta t. \quad (26.32)$$

Lembrando que $\frac{GMm}{r^2} \delta = 2\Delta K = 2mv\Delta v$, obtemos

$$mv\Delta v = +R(v)v\Delta t \implies \frac{\Delta v}{\Delta t} \approx +\frac{R(v)}{m}! \quad (26.33)$$

Esse resultado é mesmo bastante surpreendente, pois não esperaríamos, de antemão, que a taxa temporal com que aumenta o módulo da velocidade do satélite fosse proporcional ao módulo da força de resistência que atua sobre ele. Mas, como dissemos anteriormente, não há paradoxo nenhum nisso tudo. Para forças de resistência maiores, mais rapidamente irá diminuir o raio da órbita do satélite, fazendo com que mais rapidamente aumente a sua energia cinética e diminuam as suas energias potencial e mecânica.

Resumo

Esta foi uma aula de exercícios, para ajudá-lo na compreensão de conceitos fundamentais em Mecânica, como, por exemplo, os conceitos de energia potencial e energia mecânica. Aplicamos o Teorema da Conservação da Energia Mecânica, incluindo os casos onde forças não-conservativas realizam trabalho, em diversas situações. Não faria muito sentido resumir aqui todos os resultados desta aula, mas vale a pena comentar e relembrar alguns deles.

A utilização da conservação da energia mecânica simplifica a solução do problema de encontrar os movimentos possíveis de uma partícula. Além disso, em alguns casos, como por exemplo em problemas unidimensionais, nos quais a força total sobre uma partícula é conservativa, a conservação da energia reduz o problema a uma quadratura, isto é, a uma única integração. Em particular, permite-nos calcular o período, no caso de movimentos periódicos.

Quando apenas forças conservativas realizam trabalho, a energia mecânica é uma constante de movimento. Quando forças não-conservativas realizam trabalho, a variação da energia mecânica da partícula num certo intervalo de tempo e ao longo de um certo movimento possível é igual ao trabalho das forças não-conservativas, nesse intervalo e ao longo do movimento considerado.

A energia mecânica de uma partícula de massa m que está numa órbita circular de raio R sob a ação apenas da força gravitacional exercida por uma

partícula de massa M , fixa por hipótese, é igual à metade de sua energia potencial nessa órbita, isto é, $E = -GMm/2R$. Se considerarmos, nessa órbita, efeitos de dissipação causados pela resistência do ar (pense no movimento de satélites artificiais em torno da Terra), a partícula de massa m perde energia, diminuindo o raio de sua órbita mas, à medida que espirala em direção à partícula de massa M , sua energia cinética aumenta (o decréscimo de sua energia potencial é maior do que o acréscimo de sua energia cinética, de modo que sua energia mecânica diminui, como esperado).

Questionário

1. Para que uma força exercida sobre uma partícula seja conservativa, basta que ela dependa apenas da posição da partícula?
2. Considere uma força que atua sobre uma partícula que dependa apenas de sua posição. O trabalho realizado por essa força entre dois pontos P_1 e P_2 depende apenas da trajetória seguida pela partícula entre esses dois pontos ou também depende de como a partícula se move ao longo dessa trajetória?
3. Em que circunstâncias o período das oscilações de um pêndulo simples independe da amplitude das oscilações?
4. Considere uma partícula em órbita circular em torno de outra, fixa em um ponto do espaço, sob a ação apenas da força gravitacional que atua sobre ela. O que ocorre com o período de seu movimento caso o raio de sua órbita circular passe a ser quatro vezes o raio da órbita inicial?
5. Sempre que a energia mecânica de uma partícula estiver diminuindo, a sua energia cinética também estará, necessariamente, diminuindo? Dê dois exemplos ilustrando a sua resposta.

Problemas propostos

1. Seja T' o período de um pêndulo simples, formado por uma partícula de massa m e um fio ideal de comprimento ℓ , considerando-se os dois primeiros termos da série escrita na equação (26.6) e seja T o período para pequenas amplitudes de oscilação, isto é, $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. Calcule o erro relativo $(T' - T)/T$ no cálculo do período do pêndulo para uma amplitude de oscilação de 15 graus.

2. Nesse problema, você irá fazer algumas passagens que foram omitidas no exemplo 26.1. Em particular, você obterá o segundo termo da expressão do período de um pêndulo simples para grandes oscilações, isto é, o segundo termo do lado direito da equação (26.4). Para isso, siga o procedimento indicado nos itens desta questão.

- (a) Utilizando as identidades trigonométricas que achar apropriadas, mostre que a equação (26.4) pode ser escrita na forma

$$T = \sqrt{\frac{2\ell}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}}.$$

- (b) Na integral anterior, mude a variável de integração θ pela nova variável φ , definida por $\sin \varphi = \frac{1}{\kappa} \sin(\theta/2)$, onde $\kappa = \sin(\theta_0/2)$, e mostre que a equação (26.4) toma a forma

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (26.34)$$

- (c) Para pequenas amplitudes de oscilação, temos $\kappa \ll 1$. Nesse caso, pode-se mostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} \approx 1 + \frac{\kappa^2}{2} \sin^2 \varphi.$$

Substituindo a última expressão na integral (26.34), mostre que

$$T \approx 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[1 + \frac{\kappa^2}{2} \sin^2 \varphi \right] = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[1 + \frac{\kappa^2}{4} \right]. \quad (26.35)$$

Lembrando que $\kappa = \sin(\theta_0/2)$, vemos que o resultado anterior corresponde precisamente a considerar os dois primeiros termos do lado direito da equação (26.4), fórmula que corrige, em primeira aproximação, o resultado para o período de um pêndulo simples.

3. Reconsidere o Exemplo 26.2, mas supondo, agora, que, no instante inicial, a partícula esteja no ponto mais alto do hemisfério com uma velocidade horizontal de módulo v_0 .

- (a) Qual é a condição sobre v_0 para que a partícula comece o movimento deslizando sobre o hemisfério?

(b) Supondo que a condição encontrada no item anterior seja satisfeita, determine a posição da partícula no instante em que ela abandona a superfície do hemisfério. Ou seja, encontre, nesse instante, o ângulo entre o seu vetor-posição e a vertical (escolha a origem como na Figura 26.2).

4. Considere, novamente, o Exemplo 26.2, mas suponha que, no instante inicial, a partícula esteja em repouso sobre a superfície numa posição na qual seu vetor posição faça um ângulo θ_0 com a vertical (escolha a origem como na Figura 26.2).

Determine a posição da partícula no instante em que ela abandona a superfície do hemisfério, ou seja, encontre, nesse instante, o ângulo entre o seu vetor-posição e a vertical.

5. Considere um pêndulo simples, formado por um fio ideal de comprimento ℓ e uma pequena esfera de massa m que, no instante inicial, parte do repouso de uma posição na qual o fio está na horizontal. A uma distância d abaixo do ponto de suspensão há um prego, de modo que quando o fio atinge a direção vertical, ele esbarra no prego e o pêndulo passa a descrever um arco de circunferência de raio $\ell - d$, como ilustra a Figura 26.11.

Despreze a resistência do ar ou qualquer outro efeito dissipativo. Calcule d para que o fio permaneça sempre esticado.

Inspirado no problema 5, você poderia inventar um jogo, para relaxar, com seus colegas, das longas horas de estudo que essa matéria exige. A seguir, daremos nossa sugestão, mas fique à vontade para criar suas próprias variações: construa um pêndulo simples, amarrando um pequeno objeto no extremo inferior de um fio ideal de comprimento ℓ , cujo extremo superior está preso a um prego fixo numa chapa de madeira. A uma distância $d = (3/5)\ell$ abaixo do ponto de suspensão, fixe outro prego na chapa de madeira. Ganha o jogador que descobrir de que ângulo deve abandonar o pêndulo do repouso, para que o pequeno objeto atinja o prego inferior.

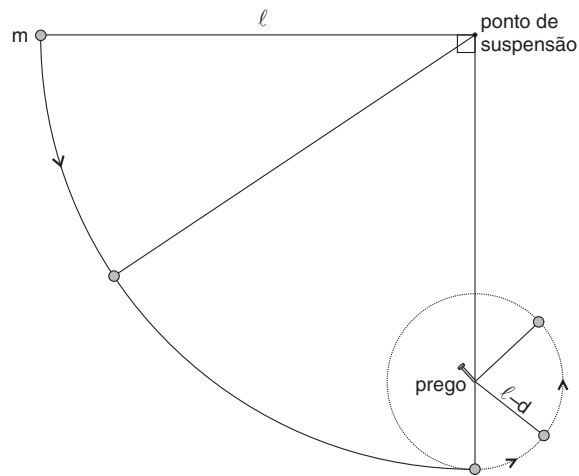


Figura 26.11: Pêndulo de comprimento ℓ , que parte do repouso da horizontal, e quando tem a direção vertical atinge um prego, localizado a uma distância d abaixo de seu ponto de suspensão.

6. Considere a situação descrita no problema anterior, mas, agora, suponha que a distância entre o prego e o ponto de suspensão do pêndulo seja conhecida e dada por $d = \ell/2$, como ilustra a Figura 26.12.

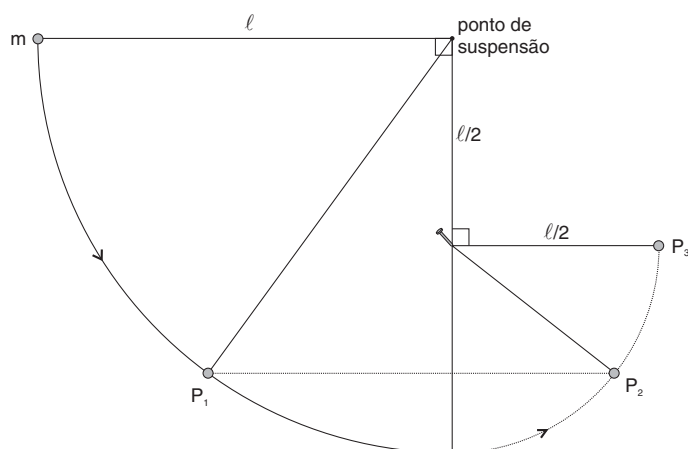


Figura 26.12: Pêndulo de comprimento ℓ que parte do repouso da horizontal e quando tem a direção vertical atinge um prego, localizado a uma distância $d = \ell/2$ abaixo de seu ponto de suspensão.

- Calcule a tensão no fio quando ele ficar horizontal pela primeira vez, ou seja, quando a partícula presa em seu extremo estiver no ponto P_3 da Figura 26.12.
- Calcule os módulos das velocidades da partícula presa ao fio nos instantes em que ela está nos pontos P_1 e P_2 , situados numa mesma horizontal, como mostra a Figura 26.12. Escreva a sua resposta em termos de g , ℓ e θ_1 .
- Considere os instantes em que a partícula está nos pontos P_1 e P_2 e sejam F_1 e F_2 os módulos da força resultante sobre a partícula nesses instantes. Usando os símbolos de ordem $>$, $<$ e $=$, compare F_1 e F_2 .

7. Reconsidere o Exemplo 26.4.

- Obtenha a equação cartesiana da trajetória da partícula após o instante em que se anula a tensão no fio e antes que o fio se estique novamente.
 - A partícula se chocará com o prego? Faça um esboço da trajetória da partícula durante o intervalo de tempo no qual o fio não está esticado.
- Qual seria a altura máxima atingida por uma partícula que fosse lançada radialmente da superfície terrestre com metade de sua velocidade de escape?
 - Seja v_0 o módulo da velocidade de uma partícula que se movimenta em MCU numa órbita rasante em torno da Terra, isto é, uma órbita circular com o raio terrestre R . Calcule a razão v_e/v_0 , onde v_e é o módulo da velocidade de escape e comente o resultado.

10. (a) Calcule o módulo da velocidade com que uma partícula atingiria a superfície terrestre caso ela fosse abandonada, em repouso, no infinito. Comente o resultado.
- (b) Suponha que uma partícula tivesse uma aceleração constante de módulo igual a g (aceleração da gravidade na superfície terrestre). Calcule a distância d que ela teria de percorrer para que, partindo do repouso, atingisse uma velocidade igual à velocidade de escape da Terra.
11. Na verdade, este não é um problema a ser resolvido, mas sim uma pequena tarefa experimental a ser realizada no laboratório ou mesmo em sua casa. Construa dois pêndulos idênticos e os coloque para oscilar simultaneamente a partir do repouso, nas seguintes circunstâncias:
- (a) ambos com pequenas amplitudes de oscilação, mas de tal modo que tenham amplitudes diferentes;
- (b) um deles com amplitude de oscilação bem pequena e o outro com amplitude de oscilação bem grande.

Deixe ambos os pêndulos executarem várias oscilações. Descreva o que você foi capaz de observar e verifique se suas observações estão em acordo com a equação (26.6).

12. Demonstre as equações escritas em (26.29). Com essa finalidade, use a aproximação

$$\frac{1}{r - \varepsilon} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^{-1} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right),$$

válida para $\varepsilon \ll 1$.

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de responder ao questionário inteiro que, aliás, é um dos mais curtos das últimas aulas. Quanto aos problemas, muitos deles se baseiam em exemplos feitos na aula e, portanto, não devem causar nenhuma dificuldade. O problema 2 é, de longe, o mais difícil da lista e, realmente, não é necessário resolvê-lo para seguir adiante. Mas caso você queira saber um pouco mais sobre a dependência do período de um pêndulo com sua amplitude de oscilação, aí está o problema 2, à sua espera. Vale enfatizar que o último problema não é, de fato, um

problema, mas sim uma proposta de um pequeno experimento caseiro. Divirta-se com ela, pois essa tarefa o ajudará a fixar o conteúdo da fórmula (26.4). Não deixe, também, de se distrair com o jogo do pêndulo, proposto na margem ao lado do problema 5.

Aula 27 – Medindo a energia mecânica de um sistema

Objetivos

- Estudar o movimento de um sistema composto por um carrinho e um corpo ligado a ele por um fio ideal que passa por uma polia de massa desprezível, como ilustra a foto a seguir.



Figura 27.1: O sistema físico considerado.

- Obter, a partir das medidas das posições do carrinho sobre o trilho de ar, as energias cinéticas e potenciais do carro e do corpo suspenso, em diversos instantes de tempo.
- Verificar a validade, dentro das barras de erro consideradas, do Princípio da Conservação da Energia Mecânica para este sistema, discutindo as idealizações feitas e suas conseqüências.

Introdução

Você precisará, nesta aula, dos conceitos de trabalho, energia cinética e energia potencial, em particular da energia potencial gravitacional, já vistos em aulas teóricas. Nessa prática, estudaremos um sistema composto por um carrinho que se move sobre um trilho de ar ligado a um corpo suspenso por um fio inextensível de massa desprezível. Essa ligação se dá através de uma polia ideal, isto é, de massa

Você verá mais adiante, neste curso, que uma polia pode ser considerada ideal quando sua massa e dimensões forem muito menores que as massas e dimensões características do sistema. Em particular, você verificará que uma polia pode ser considerada ideal quando seu momento de inércia puder ser desprezado.

desprezível. O corpo suspenso pode se movimentar na vertical, como ilustra a Figura 27.1.

Observe que, na foto, para melhor enquadramento, usamos um fio de comprimento bem menor do que o necessário para realizar essa prática. Além disso, a foto foi tirada segundo um ângulo enviesado, em relação ao trilho de ar.

O modelo teórico

Comentaremos, agora, alguns itens que o ajudarão a fazer um modelo teórico para esse experimento.

- O fato de usarmos o trilho de ar faz com que a força de atrito entre o carrinho e o trilho seja desprezível pois, devido ao jato de ar, o carrinho não mais encosta no trilho. Além disso, como as velocidades do carrinho, nesse experimento, são baixas, desprezaremos a resistência do ar. Conseqüentemente, a força total sobre o carrinho é a força horizontal exercida pelo fio sobre ele.
- Consideramos o fio como ideal, isto é, de massa desprezível e inextensível. Essa última propriedade do fio acarreta a existência de um vínculo no sistema, restringindo o movimento do corpo e do carrinho, que se traduz pela igualdade do módulo da velocidade do carrinho com o módulo da velocidade do corpo, em qualquer instante do movimento. Com isso, os módulos das acelerações do carrinho e do corpo também serão iguais em todos os instantes de tempo.
- Você verá, em aulas posteriores, que, em conseqüência de considerarmos a polia ideal, a tensão no fio na parte entre o carrinho e a polia é exatamente igual à tensão no fio entre a polia e o corpo.

Estudaremos o sistema composto pelo carrinho e o corpo baseado no Princípio da Conservação de Energia, uma vez que o atrito no trilho e a resistência do ar são desprezíveis. Na seção de Atividades extras, você será incentivado a estudar esse mesmo sistema usando diretamente as leis de Newton.

Vamos considerar, inicialmente, o sistema em repouso. Além disso, vamos escolher, como nível zero da energia potencial gravitacional, a altura inicial do corpo suspenso. Quando é permitido ao sistema evoluir, ele o faz, diminuindo a energia potencial gravitacional do corpo (a do carrinho permanece constante, pois o trilho está nivelado na horizontal), com o conseqüente aumento das energias

cinéticas do carrinho e do corpo. Temos, então, para qualquer instante de tempo:

$$E = K_{\text{corpo}} + K_{\text{carrinho}} + U_{\text{corpo}} + U_{\text{carrinho}} \quad (27.1)$$

Se chamarmos m a massa do corpo, M a massa do carrinho e g o módulo da aceleração da gravidade, teremos, então, as seguintes expressões para as energias que aparecem na equação anterior:

$$K_{\text{corpo}} = \frac{mv^2}{2}, \quad (27.2)$$

$$K_{\text{carrinho}} = \frac{Mv^2}{2}, \quad (27.3)$$

$$U_{\text{corpo}} = -mgh, \quad (27.4)$$

$$U_{\text{carrinho}} = \text{constante},$$

onde h é a distância percorrida pelo corpo desde sua altura inicial. Como mencionamos anteriormente, o fato de o fio ser inextensível permite que usemos a mesma velocidade v nas duas energias cinéticas e obtenhamos h a partir das distâncias medidas na fita termossensível.

No instante inicial, o sistema está parado e a energia potencial do corpo é zero. Portanto,

$$E_{\text{inicial}} = U_{\text{carrinho}}.$$

Num instante posterior, que denotaremos final, o corpo já desceu uma distância genérica h e está animado de uma velocidade de módulo v . Nesse caso, a equação (27.1) fornece:

$$E_{\text{final}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} - mgh + U_{\text{carrinho}}.$$

Do Princípio da Conservação de Energia, podemos escrever $E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$, o que implica:

$$\frac{1}{2}(m + M)v^2 - mgh = 0. \quad (27.5)$$

Esta é justamente a fórmula que desejamos verificar experimentalmente.

Procedimento Experimental

1. Verifique se o trilho de ar está nivelado, colocando o carrinho em várias posições e observando se ele fica acelerado. Se necessário, nivele o trilho com a ajuda do tutor. Seja paciente, pois, embora não pareça, essa é uma tarefa extremamente importante para o sucesso dessa experiência.

2. Utilizando uma balança, meça a massa do carrinho e a do corpo a que ele será amarrado. Escolha um corpo com massa entre 10 e 30 gramas. Não se esqueça de anotar a incerteza dessas medidas.
3. Coloque a pequena polia preta na extremidade do trilho. Amarre um dos extremos do fio ao carrinho e o outro ao corpo, de tal modo que o fio passe sobre a polia, como mostra a foto inicial dessa prática.
4. Com o trilho de ar ligado, verifique visualmente que, ao soltar o corpo de uma determinada altura, o carrinho aumenta sua velocidade.
5. Faça a instalação elétrica do centelhador com o trilho. Ainda sem a fita termossensível, simule uma obtenção de dados, verificando:
 - qual a região do trilho que será usada. Observe que, quando o corpo bater no solo, o tipo de movimento do carrinho não será mais o mesmo (qual será?). Por isso, escolha um comprimento de fio conveniente para a tomada dos dados para os dois tipos de movimento do carrinho (antes e depois de o corpo tocar o solo). Isso também determina a região do trilho onde a fita termossensível deve ser colocada;
 - qual a frequência que deve ser colocada no centelhador, de tal maneira que haja um razoável número de pontos centelhados para as duas fases do movimento do carrinho;
 - se a distância entre a ponta centelhadora ligada ao carrinho e à fita de aço está ajustada, de forma a produzir centelhas.
6. Coloque a fita termossensível no trilho e, antes de iniciar a tomada de dados propriamente dita, marque na fita a posição inicial do carrinho, assim como a posição que ele terá quando o corpo tocar o solo.
7. Registre o movimento do carrinho na fita.
8. Retire a fita do trilho e, com o auxílio de uma fita adesiva, fixe-a sobre a mesa. Verifique, ainda visualmente, se os pontos centelhados foram convenientes para descrever as duas fases do movimento. Caso isso não ocorra, volte ao item 5.
9. Construa uma tabela de medidas de posição e instantes de tempo correspondentes, da mesma forma que nos experimentos anteriores. Coloque nessa tabela a incerteza na determinação da posição do carrinho.

Análise dos dados

1. Usando os dados obtidos e colocados na sua tabela, faça um gráfico da posição do carrinho *versus* tempo. A partir desse gráfico, determine os intervalos de tempo dos dois tipos de movimento do carrinho. Em particular, determine o instante de tempo t_c em que o corpo tocou o solo. O que você pode afirmar, em relação aos movimentos do carrinho, para instantes de tempo $t < t_c$ e $t > t_c$? Determine, então, a velocidade v_c do carrinho, imediatamente antes do choque do corpo com o solo.
2. A partir da tabela de posição *versus* tempo, construa uma tabela de velocidade *versus* tempo, usando o mesmo procedimento dos experimentos anteriores. Não se esqueça das incertezas nos valores das velocidades obtidas.
3. Com os dados obtidos por você até agora, construa uma tabela com as seguintes colunas:
 - instante de tempo t ;
 - energia cinética total dada por $K_{total} = \frac{1}{2}(M + m)v^2$;
 - incerteza na energia cinética total ΔK_{total} (veja apêndice sobre propagação de incertezas mais adiante);
 - energia potencial gravitacional dada por $U_{corpo} = -mgh$;
 - incerteza nesta energia ΔU_{corpo} ;
 - energia total dada por $E = K + U$;
 - incerteza nesta energia ΔE .
4. Faça um gráfico da energia cinética total, da energia potencial gravitacional e da energia total do sistema *versus* tempo.
5. Discuta, a partir do gráfico e da equação (27.5), se há conservação de energia mecânica.
6. Determine o valor da energia perdida pelo sistema, no choque do corpo com o chão, de duas maneiras:
 - usando o valor de v_c , que você já determinou. Nesse caso, a energia perdida foi a cinética do corpo, já que, após o choque, o mesmo fica parado;
 - usando o gráfico e comparando a energia total para os instantes $t < t_c$ e $t > t_c$.

7. Verifique se os dois resultados obtidos por você são compatíveis dentro das incertezas consideradas.

Atividades extras

1. Faça um gráfico da velocidade do carrinho *versus* tempo com os dados da tabela. Determine, a partir dele, os valores de v_c e t_c .
2. Indique todas as forças que atuam sobre o carrinho e o corpo. Quais são as reações a essas forças e em que corpos estão aplicadas? Usando as leis de Newton, calcule teoricamente a aceleração do carrinho antes e depois do choque do corpo com o chão. A partir de v_c e de t_c , encontrados no item anterior, obtenha a aceleração do sistema e compare com o resultado obtido, usando as leis de Newton.
3. Obtenha, também através das leis de Newton, a tensão a que o fio está submetido durante o experimento.
4. Faça um gráfico do quadrado da velocidade do carrinho *versus* a distância percorrida. Determine, com o auxílio do gráfico, o módulo da aceleração do sistema. Compare com os resultados anteriores.

Apêndice – a propagação das incertezas nesse experimento

No cálculo da propagação das incertezas que aparecem nesta prática, não será necessário considerar as contribuições provenientes das incertezas nas massas do carrinho e do corpo, pois essas incertezas são bem menores do que os valores mais prováveis das próprias massas. Além disso, pelo mesmo motivo, também não consideraremos a incerteza associada à aceleração da gravidade g . Tendo isso em mente, as propagações de incertezas de grandezas que faremos serão sempre em uma única variável. Assim, teremos:

- para a energia cinética total - primeiro termo da eq.(27.5):

$$K_{total} = \frac{1}{2}(m + M)v^2 \implies \Delta K_{total} = (m + M)v\Delta v; \quad (27.6)$$

- para a energia potencial gravitacional – segundo termo da eq.(27.5):

$$U = -mgh \implies \Delta U = mg\Delta h; \quad (27.7)$$

- para a energia total:

$$E = K_{total} + U \implies \Delta E = \sqrt{\Delta K_{total}^2 + \Delta U^2}. \quad (27.8)$$

Resumo

Nesta aula, estudamos um sistema de dois corpos, usando o Princípio da Conservação de Energia. Verificamos que, dentro da margem das incertezas, a energia mecânica do sistema é conservada. Uma análise do sistema, por meio das leis de Newton, também permitiu que se tirasse teoricamente informações do sistema como, por exemplo, as acelerações dos corpos e a tensão a que o fio está submetido. Esses resultados teóricos foram comparados com os dados experimentais. Para o procedimento teórico foram feitas algumas idealizações como, por exemplo, tratar o fio como um fio ideal e desprezar a resistência do ar. Ao se comparar os resultados teóricos e experimentais, obteve-se uma boa concordância, o que nos leva a crer que as idealizações usadas no procedimento teórico são bastante razoáveis.

Auto-avaliação

Não se esqueça de fazer um relatório. Isso é muito importante para verificar se tudo foi entendido! Nesse ponto do curso, você já deve ser capaz de relatar, de forma organizada, o experimento realizado, incluindo:

- apresentação dos objetivos, de forma clara;
- descrição do procedimento experimental;
- explicação sobre o modelo adotado e as hipóteses simplificadoras;
- apresentação dos resultados das medidas realizadas;
- conclusão da prática.

Para verificar se você compreendeu bem a prática, tente escrever as equações que deveriam ser usadas, se fizéssemos a mesma prática com o trilho de ar levemente inclinado, como na prática feita na Aula 20 (“E Newton tinha razão...”).

Aula 28 – Momento linear de uma partícula e impulsão de uma força

Objetivos

- Aprender as definições de momento linear de uma partícula e de impulsão de uma força e saber utilizá-las na solução de problemas.
- Aprender a definição de força média sobre uma partícula num dado intervalo de tempo e entender seu significado.
- Calcular, a partir da força total que atua sobre uma partícula, a variação de seu momento linear, num dado intervalo de tempo, ao longo de um de seus movimentos possíveis.

Introdução

Em nossa experiência cotidiana, sabemos que para retirar um corpo do repouso e dotá-lo de uma velocidade \mathbf{v} , nosso esforço é tanto maior quanto maiores forem a massa do corpo e o módulo $|\mathbf{v}|$ da velocidade. Além disso, a direção e o sentido das forças que aplicarmos devem ser bem escolhidos, para que a velocidade tenha a direção e o sentido desejados. Esses fatos podem ser percebidos na experiência trivial de arremessar pedras. A Segunda Lei de Newton nos revela que o resultado de nosso esforço para imprimir a um corpo de massa m uma velocidade \mathbf{v} pode ser descrito, com proveito, pelo produto das duas grandezas envolvidas no problema: a massa do corpo e sua velocidade. Esse produto é chamado momento linear ou quantidade de movimento do corpo. A definição rigorosa desse conceito é dada, primeiramente, para partículas, nesta aula. Para corpos, isto é, sistemas de partículas, ela será apresentada no módulo seguinte.

O momento linear $m\mathbf{v}$ de uma partícula é constante se, e somente se, a velocidade da partícula for constante. Portanto, o único movimento de uma partícula com momento linear constante é o movimento retilíneo uniforme. Obviamente, a condição de momento linear constante é muito restritiva. Já uma partícula com energia mecânica constante pode realizar os mais variados movimentos, nos quais o momento linear não é constante, como vimos em diversos exemplos anteriores. Vê-se, então, que momento linear e energia mecânica são grandezas, em geral, independentes. Nesse contexto, há uma outra grandeza que associamos a uma partícula, um vetor chamado momento angular, que dá informações sobre o seu

movimento, que não aparecem nem no momento linear nem na energia. Como veremos na próxima aula, o momento angular é uma grandeza importante para estudar movimentos de rotação em torno de um ponto. O momento linear é uma grandeza conservada quando a força total sobre a partícula é nula. Nesse caso, a conservação do momento linear significa apenas que a partícula está em MRU. Na verdade, a conservação do momento linear de uma única partícula não acrescenta nada à teoria que já vimos. O conceito de momento linear será realmente importante quando considerarmos o movimento de sistemas com várias partículas, o que será feito no Módulo 4.

Nesta aula também consideraremos a ação de uma força sobre uma partícula durante um certo intervalo de tempo e ao longo de um de seus movimentos possíveis. Isso nos levará aos conceitos de impulsão de uma força e força média sobre uma partícula no intervalo e movimentos considerados. Tais conceitos podem, em alguns casos, trazer informações gerais importantes sobre os movimentos que estivermos estudando.

Momento linear de uma partícula e impulsão de uma força

Seja uma partícula de massa m sujeita a uma força total \mathbf{F} . Temos, pela Segunda Lei de Newton,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} . \quad (28.1)$$

Sendo a massa de uma partícula uma constante, ela pode ser passada para dentro do símbolo da derivação, para multiplicar a velocidade \mathbf{v} . Com isso, o membro esquerdo de (28.1) adquire a forma $d(m\mathbf{v})/dt$, isto é, torna-se a derivada da quantidade $m\mathbf{v}$. Com esse fato em mente, definimos **momento linear** de uma partícula como o vetor dado pelo produto da massa da partícula pela sua velocidade. Representando por \mathbf{p} o momento linear, temos:

$$\mathbf{p} = m \mathbf{v} . \quad (28.2)$$

Naturalmente, momento linear é um vetor com a mesma direção e o mesmo sentido da velocidade, pois a massa é um número positivo.

A segunda lei de Newton (28.1) pode ser, então, escrita na forma

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} , \quad (28.3)$$

isto é,

a taxa instantânea de variação do momento linear de uma partícula é igual à força total aplicada sobre ela.

É claro que na equação (28.3) podemos substituir \mathbf{p} por $m \mathbf{v}$, retirar a massa de dentro do símbolo de derivação e voltar à equação (28.1). De fato, as equações (28.1) e (28.3) são duas maneiras perfeitamente equivalentes de se escrever a Segunda Lei de Newton. É interessante observar que Newton enunciou sua segunda lei na forma (28.3) e não na forma (28.1), que hoje em dia é mais comum. Newton chamava o momento linear simplesmente “movimento”, e a derivada em relação ao tempo era denominada “mudança”. Além disso, ao que chamamos força aplicada, Newton denominava “força motriz impressa”. Como era comum na época, enunciou sua lei em latim e sem usar símbolos matemáticos, escrevendo:

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Traduzido para Português:

A mudança do movimento é proporcional à força motriz impressa e se faz segundo a linha reta pela qual se imprime essa força.

No caso em que a força total sobre a partícula é nula, concluímos de (28.3) que a derivada do momento linear é nula, isto é, o momento linear é um vetor constante. Temos, então:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \implies \mathbf{p} = \text{constante} . \quad (28.4)$$

O resultado escrito na equação (28.3) pode ser chamado **Teorema do Momento Linear e Força** para uma partícula, pois estabelece uma relação importante entre esses dois conceitos. No entanto, como foi discutido, esse é um teorema trivial que apenas põe a Segunda Lei de Newton numa forma um pouco diferente da que usamos normalmente. No Módulo 4, veremos um teorema do momento linear e força para sistemas de partículas que é bem mais interessante. O resultado contido na equação (28.4) costuma ser chamado **Teorema da Conservação do Momento Linear** de uma partícula. Você pode observar que ele não traz nenhuma

A segunda lei, junto com as demais, foi publicada por Newton em 1687, na sua obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Usamos a tradução portuguesa da Segunda Lei dada por Carlos Lopes de Mattos em: *Os Pensadores*, vol. XIX, São Paulo: Abril Cultural, 1974.

informação nova sobre o movimento da partícula, pois dizer que seu momento linear $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ é constante é equivalente a dizer que sua velocidade é constante. Ora, já sabíamos, como consequência direta da segunda lei em sua forma usual (28.1), que a partícula tem velocidade constante quando a força total sobre ela é nula. Na verdade, o conceito de momento linear não é de grande utilidade quando aplicado a uma única partícula. No entanto, quando aplicado a todas as partículas de um sistema, ele dá origem a resultados importantíssimos na análise dos seus movimentos, como veremos no próximo módulo.

Nesta seção, apenas tomamos o primeiro contato com o conceito de momento linear e exploramos o seu significado sugestivo, de ser o produto de duas quantidades importantes associadas ao movimento de uma partícula, a sua massa e a sua velocidade no movimento em consideração.

Note que a equação (28.3) descreve um evento instantâneo: a taxa de variação do momento linear em cada instante é igual à força total sobre a partícula nesse exato instante. Também é interessante avaliar a variação do momento linear em um intervalo de tempo qualquer $[t_1, t_2]$. Digamos que o movimento da partícula seja dado pela função-movimento f . Temos, então:

$$\mathbf{r} = f(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \dot{f}(t) . \quad (28.5)$$

Durante esse movimento, o momento linear da partícula varia com o tempo, de acordo com a função $\mathbf{p} = m \dot{f}(t)$. Seja \mathcal{F} a função que dá a força \mathbf{F} em função da posição \mathbf{r} da partícula, de sua velocidade \mathbf{v} e do tempo t :

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) . \quad (28.6)$$

Durante o movimento f , dado em (28.5), a força varia com o tempo, de acordo com a função

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}(f(t), \dot{f}(t), t) . \quad (28.7)$$

Podemos, portanto, escrever a equação (28.3) na forma da igualdade de duas grandezas que são funções do tempo,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathcal{F}(f(t), \dot{f}(t), t) , \quad (28.8)$$

e integrar ambos os membros dessa equação no tempo, desde o instante t_1 até o instante t_2 . Obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}(f(t), \dot{f}(t), t) dt . \quad (28.9)$$

O primeiro membro se integra facilmente para se obter:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}(f(t), \dot{f}(t), t) dt , \quad (28.10)$$

onde \mathbf{p}_1 é o momento linear no instante t_1 e \mathbf{p}_2 no instante t_2 , isto é,

$$\mathbf{p}_1 = m \dot{\mathbf{f}}(t_1) \text{ e } \mathbf{p}_2 = m \dot{\mathbf{f}}(t_2). \quad (28.11)$$

Para representar a integral que aparece no lado direito da igualdade (28.10), também é comum o uso do símbolo mais abreviado que aparece no lado esquerdo da seguinte equação:

$$\int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{F}(f(t), \dot{\mathbf{f}}(t), t) dt. \quad (28.12)$$

Com isso, podemos escrever o resultado (28.10) na forma abreviada

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F} dt. \quad (28.13)$$

Tanto o primeiro membro da equação (28.12) quanto o segundo são símbolos que representam o vetor obtido como a integral da força \mathbf{F} durante o intervalo $[t_1, t_2]$ do movimento f . Esse vetor é chamado **impulsão** da força durante o intervalo $[t_1, t_2]$ do movimento f e é representado por $\mathbf{I}(f; t_1, t_2)$. Portanto, a definição de impulsão é

$$\mathbf{I}(f; t_1, t_2) = \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F} dt. \quad (28.14)$$

Usando esse conceito, descrevemos o resultado contido em (28.13) da seguinte maneira:

a variação do momento linear de uma partícula em um intervalo de tempo é igual à impulsão da força total durante esse intervalo,

isto é,

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = \mathbf{I}(f; t_1, t_2). \quad (28.15)$$

Esse enunciado, ou as diversas equações (28.10), (28.13) e (28.15) que o expressam, é conhecido como **Teorema do Momento Linear e Impulsão**. Os próximos três exemplos ilustram vários aspectos do Teorema do Momento Linear e Força que, certamente, irão ajudá-lo a entender melhor o conceito de impulsão e a compreender melhor esse teorema.

Exemplo 28.1

Consideremos, neste exemplo, o movimento de uma bola de sinuca que se choca com a borda da mesa. Para nossos propósitos, a bola será tratada como uma partícula. Vamos supor que a massa da bola seja 0,5 kg, que sua velocidade

tenha módulo igual a $6,0 \text{ m/s}$ e que ela incida sobre a borda da mesa fazendo um ângulo $\theta = \pi/3$ radianos com a direção do eixo normal à borda, como ilustra a Figura 28.1. Por conveniência, escolheremos os eixos cartesianos paralelos aos respectivos lados da mesa, ou seja, como os desenhados nesta figura.

Vamos supor que, após o choque, a bola possua uma velocidade de módulo igual àquele que possuía antes do choque e se mova numa direção que forma com a direção normal à borda também um ângulo θ , como mostra a Figura 28.1. Desejamos, aqui, calcular a impulsão da força exercida pela borda da mesa sobre a bola de sinuca durante o intervalo de tempo em que ocorreu o choque (como o seu peso se cancela com a reação normal exercida pela superfície, a força exercida pela borda coincide com a força total sobre a bola, desde que o atrito com a superfície da mesa seja desprezado).

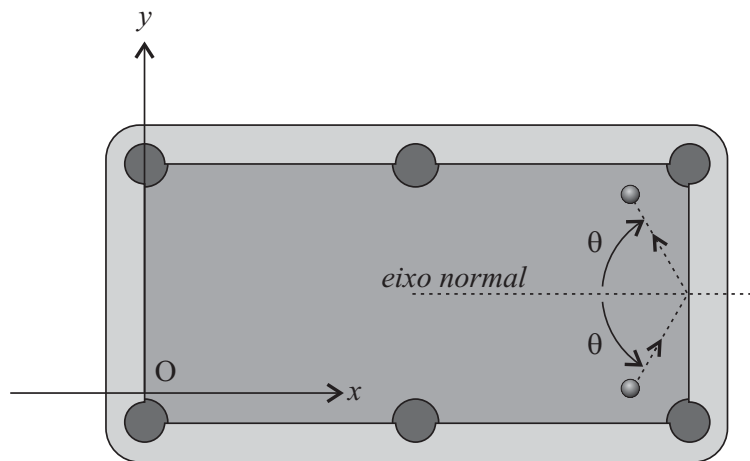


Figura 28.1: Choque de uma bola de sinuca com a borda da mesa.

Do Teorema do Momento Linear e Impulsão, podemos escrever

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1,$$

onde \mathbf{p}_1 é o momento linear da bola no instante em que ela toca pela primeira vez a borda da mesa e \mathbf{p}_2 é o seu momento linear no instante em que ela perde o contato com a borda. Da Figura 28.1 e denotando por p o módulo do momento linear da bola (antes ou depois do choque, pois, como mencionamos, são iguais), podemos escrever

$$\mathbf{p}_1 = p \cos \theta \mathbf{u}_x + p \sin \theta \mathbf{u}_y \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_2 = -p \cos \theta \mathbf{u}_x + p \sin \theta \mathbf{u}_y.$$

Subtraindo essas expressões, temos

$$\mathbf{I} = \Delta \mathbf{p} = -2p \cos \theta \mathbf{u}_x.$$

Substituindo na expressão anterior os valores para a massa e o módulo da velocidade da bola, obtemos

$$\mathbf{I} = -2 \times 0,5 \text{ (kg)} \times 6,0 \text{ (m/s)} \cos(\pi/3) \mathbf{u}_x = 1,5 \text{ (kg}\cdot\text{m/s)} \mathbf{u}_x.$$

Exemplo 28.2

Considere o movimento retilíneo de uma partícula, ao longo do eixo \mathcal{OX} , sobre a qual atua a força total $\mathbf{F} = F_x \mathbf{u}_x = \mathcal{F}(t) = F_0 \sin(\omega t) \mathbf{u}_x$, onde F_0 e ω são constantes positivas. Nosso objetivo, neste exemplo, é simplesmente calcular a impulsão $\mathbf{I} = I_x \mathbf{u}_x$ dessa força em diferentes intervalos de tempo de um movimento possível qualquer da partícula e verificar a validade do Teorema do Momento Linear e Impulsão.

Antes de tudo, gostaríamos de enfatizar que, pelo fato de a força só depender do tempo, e não da posição e da velocidade da partícula, a impulsão dessa força só dependerá dos instantes inicial e final do intervalo de tempo considerado, mas independará do movimento seguido pela partícula. Por esse motivo, omitiremos, neste exemplo, a letra f em $I(f; t_i, t_f)$ para indicar o movimento seguido pela partícula, mantendo apenas os instantes inicial t_i e t_f .

Com isso em mente, calculemos, por exemplo, a impulsão I_x durante o intervalo $\Delta t_1 = [0, \pi/\omega]$ (por ser retilíneo o movimento, podemos trabalhar com a componente I_x da impulsão \mathbf{I}). A partir da equação (28.14), temos

$$\begin{aligned} I_x(0, \pi/\omega) &= \int_0^{\pi/\omega} F_0 \sin(\omega t) dt \\ &= F_0 \left(-\frac{\cos(\omega t)}{\omega} \right)_0^{\pi/\omega} \\ &= \frac{2F_0}{\omega}. \end{aligned} \quad (28.16)$$

Com o intuito de verificar a validade do Teorema do Momento Linear e Impulsão, tomemos um movimento possível qualquer da partícula sob a ação dessa força total. Não é difícil verificar que a sua velocidade, num instante qualquer, pode ser escrita na forma

$$v_x = \dot{f}_x(t) = v_{x0} + \frac{F_0}{m\omega} [1 - \cos(\omega t)], \quad (28.17)$$

onde m é a massa da partícula e v_{x0} é a sua velocidade em $t = 0$. Da expressão anterior, temos para o momento linear da partícula no instante $t = \pi/\omega$:

$$m\dot{f}_x(\pi/\omega) = mv_{x0} + \frac{2F_0}{\omega},$$

de modo que a variação de momento linear da partícula no intervalo em consideração é dada por

$$\Delta p_x = m\dot{f}_x(\pi/\omega) - m\dot{f}_x(0) = mv_{x0} + \frac{2F_0}{\omega} - mv_{x0} = \frac{2F_0}{\omega}. \quad (28.18)$$

Comparando as equações (28.16) e (28.18), vemos, claramente, que elas estão de acordo com o Teorema do Momento Linear e Impulsão ($I_x = \Delta p_x$).

Consideremos, agora, o intervalo $\Delta t' = [\pi/\omega, 2\pi/\omega]$. Nesse caso, a impulsão correspondente é dada por

$$I_x(0, \pi/\omega) = \int_{\pi/\omega}^{2\pi/\omega} F_0 \sin(\omega t) dt = -\frac{2F_0}{\omega}.$$

Esse resultado ilustra o fato de que, em geral, ao mudarmos o intervalo considerado, a impulsão muda. No entanto, sendo esta a impulsão da força total sobre a partícula, o Teorema do Momento Linear e Impulsão garante que o resultado anterior deve ser idêntico à variação do momento linear da partícula nesse mesmo intervalo. A partir da equação (28.17), é imediato verificar que

$$\Delta p'_x = m\dot{f}_x(\pi/\omega) - m\dot{f}_x(0) = -\frac{2F_0}{\omega}. \quad (28.19)$$

Comparando as duas últimas equações, vemos que $I_x(0, \pi/\omega) = \Delta p'_x$, de acordo com o teorema que acabamos de mencionar.

Exemplo 28.3

O exemplo anterior ilustrou o cálculo de impulsões de uma força e a verificação da validade do Teorema do Momento Linear e Impulsão, no caso de uma força dependente apenas do tempo, e não da posição ou velocidade da partícula em estudo. Neste exemplo, faremos cálculos análogos, mas considerando uma força que age sobre uma partícula que dependa de sua posição e velocidade. Por conveniência, escolheremos uma função-força já utilizada anteriormente, na Aula 21. Suponha, então, que a força total que atua numa partícula de massa m que, por hipótese, movimenta-se ao longo do eixo \mathcal{OX} , seja dada por

$$F_x = \mathcal{F}_x(x, v_x) = -m\omega^2 x - \frac{10}{3}m\omega v_x,$$

onde ω é uma constante positiva. É imediato verificar, por substituição direta na Segunda Lei de Newton, que $x = f_x(t) = x_0 e^{-3\omega t}$ é uma função-movimento possível (para cada valor da posição inicial x_0 temos, obviamente, uma função-movimento diferente).

Nosso objetivo, aqui, é calcular a impulsão dessa força no intervalo de tempo $[0, T]$, sendo T um instante genérico, ao longo do movimento f_x e, em seguida, verificar a validade do Teorema do Momento Linear e Impulsão. A partir da equação (28.14), temos

$$\begin{aligned}
 I_x(f_x; 0, T) &= \int_0^T \mathcal{F}_x(f_x(t), \dot{f}_x(t)) dt \\
 &= \int_0^T \left\{ -m\omega^2 (x_0 e^{-3\omega t}) - \frac{10}{3} m\omega (-3\omega x_0 e^{3\omega t}) \right\} dt \\
 &= 9m\omega^2 x_0 \int_0^T e^{-3\omega t} dt \\
 &= 3m\omega x_0 (1 - e^{-3\omega T}) .
 \end{aligned} \tag{28.20}$$

Devemos, agora, calcular a variação do momento linear da partícula no intervalo de tempo considerado, isto é, no intervalo $[0, T]$. Como $p_x = mv_x$, temos

$$p_x = m\dot{f}_x(t) = -3m\omega x_0 e^{-3\omega t} ,$$

o que nos leva à seguinte variação de momento linear

$$\Delta p_x = m\dot{f}_x(T) - m\dot{f}_x(0) = 3m\omega x_0 (1 - e^{-3\omega T}) . \tag{28.21}$$

Comparando as equações (28.20) e (28.21), constatamos, claramente, que elas estão de acordo com o Teorema do Momento Linear e Impulsão ($I_x = \Delta p_x$).

Finalizamos este exemplo enfatizando que a impulsão de uma dada força total, num certo intervalo de tempo, depende não apenas do intervalo considerado, mas, também, do movimento seguido pela partícula nesse intervalo. Você terá oportunidade de verificar essa afirmativa resolvendo o problema 5, no qual impulsões calculadas com outras funções-movimento possíveis da partícula (sob a ação dessa mesma força total e no mesmo intervalo $[0, T]$) terão valores diferentes do encontrado na equação (28.20). No entanto, embora a impulsão da força total mude quando consideramos outro movimento possível da partícula, muda também a variação do momento linear da partícula, de modo que a igualdade $I_x = \Delta p_x$ se mantém válida.

Se integrarmos a força total \mathbf{F} que atua sobre uma partícula durante o intervalo $[t_1, t_2]$, ao longo de um movimento possível f , e dividirmos o vetor assim obtido pela duração desse intervalo, obteremos o vetor chamado **força média** aplicada à partícula nesse intervalo do movimento, que representaremos por $\bar{\mathbf{F}}(f; t_1, t_2)$, isto é,

$$\bar{\mathbf{F}}(f; t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1(f)}^{t_2} \mathbf{F} dt . \tag{28.22}$$

A equação anterior torna evidente que a impulsão da força total, durante um certo intervalo, é o produto da força média, nesse intervalo, pela duração do intervalo,

$$\mathbf{I}(f; t_1, t_2) = \overline{\mathbf{F}}(f; t_1, t_2) (t_2 - t_1) . \quad (28.23)$$

Na definição de impulsão e de força média, usamos os símbolos $\mathbf{I}(f; t_1, t_2)$ e $\overline{\mathbf{F}}(f; t_1, t_2)$, nos quais estão indicados, explicitamente, o movimento e o intervalo de tempo em consideração. Na prática, e seguindo um costume anterior nosso, usaremos símbolos abreviados para essas grandezas, como \mathbf{I} para a impulsão e $\overline{\mathbf{F}}$ para a força média. Nesse caso, ficam implícitos o movimento e o intervalo de tempo em consideração.

Usando o conceito (28.22) de força média, podemos reescrever o Teorema do Momento Linear e Impulsão, escrito em (28.13), como:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 = (t_2 - t_1) \overline{\mathbf{F}} , \quad (28.24)$$

isto é,

a variação do momento linear de uma partícula em um intervalo de tempo é igual ao produto da duração do intervalo pela força total média aplicada sobre a partícula nesse intervalo.

Nessa forma, o Teorema do Momento Linear e Impulsão pode ser descrito de várias maneiras sugestivas. Em um dado intervalo de tempo, a variação de momento linear obtida é tanto maior quanto maior for a força média aplicada. Para uma dada força média, a variação do momento linear é tanto maior quanto maior for o tempo de aplicação da força.

Supondo que a partícula esteja em repouso no instante inicial e tenha velocidade \mathbf{v} no instante final, podemos usar (28.24) para escrever $m \mathbf{v} = \overline{\mathbf{F}} \Delta t$, onde Δt é o tempo decorrido no intervalo considerado e $\overline{\mathbf{F}}$ é a força média nesse intervalo. Portanto, no intervalo considerado, a força média necessária para levar a partícula de massa m a uma velocidade \mathbf{v} é tanto maior quanto maior for o produto da massa da partícula pela sua velocidade. Assim, o produto da massa pela velocidade caracteriza o efeito da força no intervalo de tempo e, conseqüentemente, tem um significado físico importante que motiva a definição de momento linear.

No resultado (28.24), podemos representar a variação $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ do momento linear por $\Delta \mathbf{p}$ e o intervalo $t_2 - t_1$ por Δt , de modo a obter

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \overline{\mathbf{F}} , \quad (28.25)$$

que deve ser comparada com a equação (28.3).

Uma dada força média aplicada sobre uma partícula durante um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ provoca, de acordo com a equação (28.24), uma variação $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ em seu momento linear. Essa variação gasta um tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ para ocorrer. A Figura 28.2(a) ilustra tal variação.

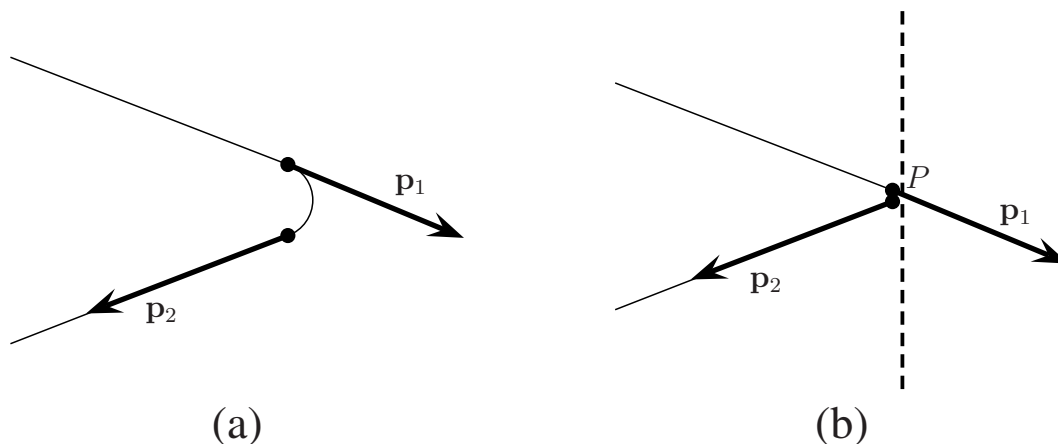


Figura 28.2: (a) Variação do momento linear da partícula durante um certo intervalo de tempo, em um trecho da trajetória. (b) Variação rápida do momento linear da partícula, nas proximidades do ponto P .

Observemos, agora, que algumas situações concretas dão a impressão de que o momento linear e, portanto, a velocidade, sofre uma mudança instantânea significativa, como a ilustrada no ponto P da Figura 28.2(b). Podemos imaginar que esta figura retrata o movimento de uma bolinha de pingue-pongue jogada contra uma parede. Podemos discernir o tempo de vôo da bolinha antes do impacto com a parede e o tempo de vôo depois do impacto. O impacto parece mesmo instantâneo. É claro que ele não é verdadeiramente instantâneo; ele tem uma duração, digamos Δt , que é muito pequena, praticamente desprezível, em comparação com os tempos de vôo da bolinha e com a precisão de que dispomos usualmente para medir o tempo.

De acordo com (28.24), a variação do momento linear $\Delta \mathbf{p}$ da partícula é igual à força média $\bar{\mathbf{F}}$ aplicada sobre ela, multiplicada pelo tempo de aplicação Δt . Desse modo, uma dada variação do momento linear pode ser obtida considerando-se intervalos de tempo tão pequenos quanto se queira, desde que se considerem forças médias suficientemente grandes, isto é, com módulos suficientemente grandes (é fácil imaginar um produto que permanece constante enquanto um dos fatores diminui e o outro aumenta). Nos casos que agora desejamos considerar, como a colisão de uma bolinha de pingue-pongue contra a parede, a variação do

momento linear é obtida por uma força extremamente grande que age sobre a partícula em um intervalo de tempo extremamente pequeno. Uma força com essas características é chamada **força percussiva**, ou **força impulsiva**. Temos então uma variação muito rápida do momento linear, provocada pela força percussiva, como ilustrado na Figura 28.2(b).

No caso de um movimento retilíneo de uma partícula, sobre a qual atua, num pequeno intervalo de tempo, uma força percussiva, é bastante elucidativo fazer o gráfico de como varia o módulo dessa força com o tempo num caso típico (por exemplo, imagine um choque frontal de uma bola de sinuca com uma das barras laterais da mesa, isto é, um choque no qual o momento linear da bola antes do choque tem direção perpendicular à barra lateral da mesa). A Figura 28.3 ilustra como varia com o tempo o módulo de uma força percussiva típica F_p que atua sobre a partícula em estudo durante um intervalo de tempo Δt , com início no instante t_0 .

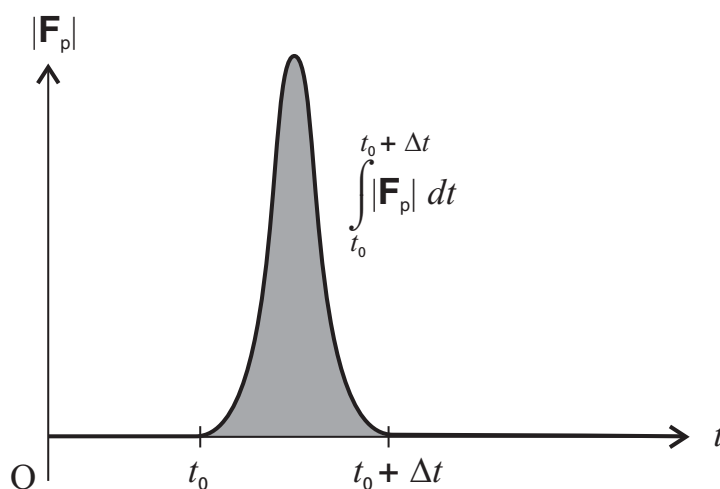


Figura 28.3: Variação temporal do módulo de uma força percussiva típica que atua sobre a partícula em estudo durante o intervalo Δt .

Como dissemos anteriormente, uma tal variação rápida pode parecer instantânea. É possível construir uma idealização matemática, na qual a variação do momento linear de uma partícula é realmente instantânea. Para isso, consideramos a situação-limite em que ocorrem três coisas. A primeira delas é considerar o limite em que o intervalo Δt vai a zero. A segunda é considerar o limite em que a força média vai a infinito, isto é, o seu módulo vai a infinito. A terceira, finalmente, é supor que esses limites são tomados de modo que a impulsão, dada pelo produto da força média pelo intervalo de tempo considerado, permaneça com

um valor fixo. Representamos esse limite como

$$\mathbf{I} = \lim_{\substack{\bar{\mathbf{F}} \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \bar{\mathbf{F}} \Delta t . \quad (28.26)$$

Nesse limite idealizado, temos uma força infinita que age em um único instante, isto é, em um intervalo de tempo nulo, mas que produz uma impulsão finita \mathbf{I} . Nesse caso idealizado, a força é chamada **força percussiva idealizada** ou **força impulsiva idealizada**. Embora esse tipo de idealização possa parecer exagerado, de uma força infinita com duração nula produzindo um impulso finito e bem determinado, ele é freqüente em Física, graças à sua utilidade.

Resumo

Momento linear de uma partícula é o produto de sua massa por sua velocidade. Trata-se, portanto, de uma grandeza vetorial, como a velocidade. A taxa instantânea de variação temporal do momento linear de uma partícula é igual à força total aplicada sobre ela. Esse resultado é usualmente chamado Teorema do Momento Linear e Força e é, essencialmente, a Segunda Lei de Newton numa forma ligeiramente modificada. Se a força total sobre uma partícula for nula, seu momento linear será conservado. Esse resultado é conhecido como Teorema da Conservação do Momento Linear, aplicado a uma única partícula, e equivale a dizer que o movimento de uma partícula será um MRU, se a força total sobre ela for nula.

Impulsão de uma força durante um intervalo de tempo do movimento de uma partícula é a integral no tempo da força nesse intervalo. O Teorema do Momento Linear e Impulsão afirma que, durante um intervalo de tempo do movimento de uma partícula, a variação de seu momento linear é igual à impulsão da força total no intervalo considerado. Força média durante um intervalo do movimento de uma partícula é a integral no tempo dessa força nesse intervalo dividida pela duração do intervalo. No caso em que a força considerada é a força total que age sobre a partícula, o seu valor médio em um intervalo de tempo de um de seus movimentos possíveis é igual à variação do momento linear da partícula no intervalo considerado dividida pela duração do intervalo. Uma força é dita impulsiva ou percussiva, se ela atuar sobre a partícula em estudo durante um intervalo de tempo muito curto, mas com um valor médio muito grande, de modo que seu impulso seja não-nulo e significativo.

Questionário

1. Enuncie o Teorema do Momento Linear e Força e o Teorema da Conservação do Momento Linear de uma Partícula. Comente os significados que têm na dinâmica da partícula.
2. O que é impulsão de uma força?
3. Enuncie o Teorema do Momento Linear e Impulsão.
4. O que é força média que atua sobre uma partícula em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ e ao longo do movimento possível f ?
5. O que é uma força percussiva, também denominada impulsiva?
6. A impulsão de uma força em um intervalo de tempo depende apenas da força e do intervalo considerados? Dê alguns exemplos simples para ilustrar a sua resposta.
7. Dada uma força que dependa apenas do tempo, a sua impulsão em um certo intervalo dependerá apenas desse intervalo ou também dependerá do movimento seguido pela partícula no intervalo?
8. Explique o que é uma força impulsiva idealizada.

Problemas propostos

1. Repita o Exemplo 28.1, mas supondo que o ângulo de incidência da bola de sinuca na borda da mesa seja agora $\theta = \pi/6$ radianos.
2. Considere, novamente, o Exemplo 28.1, mas não particularize o ângulo θ entre o momento linear inicial da bola de sinuca e a normal à borda da mesa, para qualquer valor. Suponha, ainda, que, após chocar-se com a borda da mesa pela primeira vez, a bola se mova em direção a um outro lado da mesa e sofra um segundo choque com a borda, nesse lado.
 - (a) Mostre que, qualquer que seja o valor de θ , com $(0 \leq \theta < \pi/2)$, o momento linear da bola de sinuca após o segundo choque com a borda da mesa é paralelo ao momento linear que a bola possuía antes do primeiro choque, mas de sentido oposto a esse;

- (b) seja p_0 o momento linear da bola de sinuca antes do primeiro choque com a borda da mesa. Usando os mesmos eixos que os escolhidos no Exemplo 28.1, calcule os momentos lineares da bola de sinuca logo após o primeiro choque com a borda e logo após o segundo choque;
- (c) determine a variação do momento linear da bola de sinuca no intervalo $[t_1, t_2]$, onde t_1 é um instante anterior ao primeiro choque com a borda e t_2 é um instante posterior ao segundo choque com a borda.
3. Reconsidere a situação descrita no Exemplo 28.2, isto é, uma partícula de massa m que se move ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação da força total $F_x = \mathcal{F}_x(t) = F_0 \sin(\omega t)$, onde F_0 e ω são constantes positivas. Considere, ainda, os movimentos possíveis dessa partícula, tais que $\dot{f}_x(0) = v_{x0}$ (para nossos propósitos, a posição inicial da partícula não é relevante).
- (a) Calcule as impulsões dessa força total, ao longo desses movimentos e num intervalo de tempo genérico, isto é, determine $I_x(f_x; t_1, t_2)$, onde t_1 e t_2 são instantes arbitrários;
- (b) calcule as variações do momento linear da partícula correspondentes e verifique a validade do Teorema do Momento Linear e da Impulsão.
4. Repita todos os cálculos do Exemplo 28.2, mas trocando a força total considerada naquele exemplo pela força total $F_x = \mathcal{F}_x(t) = F_0 \cos(\omega t)$, onde F_0 e ω são constantes positivas.
5. Refaça todos os passos do Exemplo 28.3, mas trocando a função-movimento considerada naquele exemplo pela seguinte função-movimento:

$$x = f_x(t) = ae^{-3\omega t} + be^{-\omega t/3},$$

onde a e b são constantes arbitrárias. Não se esqueça de verificar que esta é, de fato, uma função-movimento possível da partícula sob a ação da força total em consideração.

6. Uma partícula de massa m se movimenta ao longo do eixo \mathcal{OX} sob a ação da força total $F_x = \mathcal{F}_x(x) = -kx$, onde k é uma constante positiva (essa pode ser interpretada, como você já sabe, como a força elástica exercida por uma mola que satisfaça à lei de Hooke sobre uma partícula presa em uma de suas extremidades).
- (a) Verifique, inicialmente, que $x = f_x(t) = a \sin(\omega t)$, onde a é uma constante arbitrária, é uma função-movimento possível da partícula.

- (b) Calcule as impulsões $I_x(f_x; 0, \pi/\omega)$ e $I_x(f_x; 0, 2\pi/\omega)$.
- (c) Calcule as variações do momento linear da partícula nos intervalos $[0, \pi/\omega]$ e $[0, 2\pi/\omega]$ e verifique a validade do Teorema do Momento Linear e da Impulsão, isto é, mostre que $I_x = \Delta p_x$ para cada intervalo.
- (d) Repita os dois últimos itens, mas utilizando uma outra função-movimento possível, a saber, $\tilde{f}_x(t) = b \cos(\omega t)$.
7. Reconsidere o problema anterior, mas deixe arbitrários tanto o intervalo de tempo quanto a função-movimento possível da partícula. Ou seja, calcule a impulsão da força total $I_x(f_x; t_1, t_2)$, onde t_1 e t_2 são dois instantes quaisquer e $f_x(t) = a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)$, sendo a e b constantes arbitrárias e verifique a validade do Teorema do Momento Linear e da Impulsão.
8. Neste problema, você irá calcular forças médias utilizando funções-força já abordadas nos exemplos desta aula.
- (a) Considere o Exemplo 28.1. Suponha que a duração do choque da bola com a borda da mesa, isto é, a duração do intervalo de tempo no qual a bola e a borda da mesa permaneceram em contato, tenha sido $\Delta t = 0,1$ s. Determine a força média exercida pela borda sobre a bola de sinuca durante o choque da bola com a borda;
- (b) reconsidere o Exemplo 28.2, no qual a força total sobre a partícula tem componente apenas ao longo do eixo \mathcal{OX} e é dada por $\mathcal{F}_x(t) = F_0 \sin(\omega t)$, onde F_0 e ω são constantes positivas. Calcule as seguintes forças médias sobre a partícula:
- $\overline{F_1}$, durante o intervalo $\Delta t_1 = [0, \pi/\omega]$;
 - $\overline{F_2}$, durante o intervalo $\Delta t_2 = [\pi/\omega, 2\pi/\omega]$;
 - $\overline{F_3}$, durante o intervalo $\Delta t = [0, 2\pi/\omega]$.
- Note que $\overline{F_3} = (\overline{F_1} + \overline{F_2})/2$, que nada mais é do que um caso muito particular de uma relação mais geral, a ser demonstrada por você no problema 9, a saber,

$$\overline{F_3} = \frac{(\Delta t_1)\overline{F_1} + (\Delta t_2)\overline{F_2}}{\Delta t_1 + \Delta t_2}.$$

9. Seja $\mathbf{F} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ uma força que atua sobre uma partícula.

- (a) Considerando os intervalos de tempo

$$\Delta t_1 = [t_0, t_1]; \quad \Delta t_2 = [t_1, t_2]; \quad \text{e} \quad \Delta t = [t_0, t_2],$$

onde $t_0 \leq t_1 \leq t_2$, e o movimento possível f , demonstre que

$$\bar{\mathbf{F}}(f; t_0, t_2) = \frac{\Delta t_1 \bar{\mathbf{F}}(f; t_0, t_1) + \Delta t_2 \bar{\mathbf{F}}(f; t_1, t_2)}{\Delta t};$$

- (b) generalize o resultado obtido no item anterior, para o caso em que o intervalo de tempo total é subdividido em N subintervalos, isto é, mostre que

$$\bar{\mathbf{F}}(f; t_0, t_N) = \frac{\Delta t_1 \bar{\mathbf{F}}(f; t_0, t_1) + \Delta t_2 \bar{\mathbf{F}}(f; t_1, t_2) + \dots + \Delta t_N \bar{\mathbf{F}}(f; t_{N-1}, t_N)}{\Delta t}$$

$$\Delta t_1 = [t_0, t_1]; \quad \Delta t_2 = [t_1, t_2]; \quad \dots; \quad \Delta t_N = [t_{N-1}, t_N].$$

Na verdade, resultados análogos a esse são válidos para a média temporal de grandezas como, por exemplo, para a velocidade média de uma partícula.

10. Mostre, a partir de (28.24), que o produto da massa vezes a aceleração média é igual à força média.
11. Uma bala perdida de massa m atinge o solo com velocidade vertical de módulo v . Após penetrar no solo, ela percorre, em linha reta, uma distância d até parar.
 - (a) Calcule a força total média $\bar{\mathbf{F}}$ sobre a bala no intervalo de tempo $[t_i, t_f]$, onde t_i é o instante em que ela atinge o solo e t_f é o instante em que ela entra em repouso;
 - (b) supondo que $m = 2,0 \times 10^{-2}$ kg, $d = 4,0 \times 10^{-2}$ m e $v = 80$ m/s, determine o módulo de $\bar{\mathbf{F}}$.
12. Uma pessoa de massa m cai, a partir do repouso, de uma altura h acima do solo (ou seja, desde o início da queda até o instante em que seus pés tocam o solo, seu centro de massa percorre uma distância d). Ao atingir o solo, a pessoa se “esquece” de flexionar os joelhos, de modo que ela se comporta, praticamente, como se fosse um corpo rígido (pelo menos enquanto seus ossos não se romperem). Suponha que, ao tocar o solo, seu centro de massa tenha se deslocado, em linha reta, uma distância d até parar.
 - (a) Calcule a força total média $\bar{\mathbf{F}}$ sobre esta pessoa desde o instante em que ela atinge o solo até o instante em que ela entra em repouso;
 - (b) supondo que $h = 1,00$ m e $d = 0,05$ m, calcule a razão entre o módulo de $\bar{\mathbf{F}}$ e o módulo do peso da pessoa. Com base no resultado obtido, faça um comentário sobre a importância de flexionarmos os joelhos quando atingimos o solo após um salto.

Note que a força exercida pela parede sobre a esfera é diferente de zero somente enquanto a esfera e a parede estiverem em contato; trata-se de uma força percussiva, cuja duração é extremamente pequena mas, ainda assim, sua impulsão é significativa.

13. Uma pequena esfera de massa m colide com uma parede plana e lisa, de modo que a força exercida pela parede sobre a esfera é normal à superfície da parede durante toda a colisão. Para simplificar o problema, suponha que a força total sobre a esfera seja apenas a força exercida sobre ela pela parede. Seja θ_a o ângulo entre o momento linear da esfera antes da colisão, \mathbf{p}_a , e a direção normal à parede; analogamente, seja θ_d o ângulo entre o momento linear da esfera depois da colisão, \mathbf{p}_d , e a direção normal à parede, como ilustra a Figura 28.4.

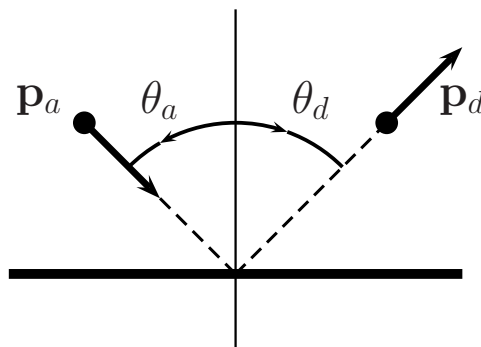


Figura 28.4: Esfera colidindo com uma parede lisa.

Usando os símbolos de ordem, $>$, $<$ e $=$, compare θ_d e θ_a no caso em que:

- as energias cinéticas da esfera antes e depois da colisão são as mesmas;
- a energia cinética da esfera depois da colisão é menor do que a energia cinética da esfera antes da colisão.

Auto-avaliação

Como de costume, você deve ser capaz de responder ao questionário inteiro (lembre-se de que o questionário é uma espécie de roteiro de estudo). Quanto aos problemas, note que os cinco primeiros estão baseados nos três exemplos discutidos no texto desta aula. Em princípio, você não deve ter dificuldade em resolver esses problemas mas, caso surja uma dúvida num desses problemas, releia o exemplo no qual ele está baseado. Se você conseguir resolver os problemas 3, 4 e 5, você deverá ser capaz de resolver os problemas 6 e 7, pois tratam-se, também, da verificação da validade do Teorema do Momento Linear e Impulsão em outras situações não tratadas na aula.

Os problemas restantes (8-13) testam a sua compreensão sobre o conceito de força média num intervalo e a sua capacidade em calcular forças médias. Exceto o problema 9, todos eles são simples e devem ser feitos por você sem dificuldade. Já o problema 9, além de pedir duas demonstrações, exige um bom domínio da notação utilizada e do conhecimento das propriedades básicas de integração.

Aula 29 – Momento angular de uma partícula e Torque

Objetivos

- Aprender a definição de produto vetorial entre dois vetores e entender as suas principais propriedades, sabendo utilizá-las sempre que necessário.
- Aprender as definições de momento angular de uma partícula e torque de uma força e saber aplicá-las corretamente na solução de problemas em Mecânica.
- Demonstrar o Teorema do Momento Angular e Torque e o Teorema da Conservação do Momento Angular.

Introdução

Na aula anterior, você aprendeu que o produto da massa de uma partícula por sua velocidade, definido como seu momento linear $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, é uma grandeza muito importante no estudo do movimento dessa partícula. Veremos, nesta aula, que há uma outra grandeza vetorial, chamada momento angular da partícula em relação a um ponto base, que também será bastante útil na discussão de certos tipos de movimento e guarda certa analogia com o momento linear da partícula. Qualitativamente, podemos dizer que essa grandeza indica quanto a partícula circula em torno do ponto-base em consideração (mais adiante daremos a definição precisa de momento angular de uma partícula e faremos uma análise também quantitativa dessa quantidade). No entanto, o significado físico de momento angular ficará mais claro quando, em lugar de estudarmos um sistema formado por uma única partícula, passarmos a estudar um sistema de partículas ou mesmo um corpo rígido, uma vez que o momento angular de um sistema de partículas em relação a um ponto base está estreitamente relacionado com a rotação do sistema em torno do ponto base. Se considerarmos um corpo rígido em rotação em torno de um eixo fixo como, por exemplo, uma esfera girando em torno de um eixo que passe pelo seu centro, veremos que a componente ao longo do eixo de rotação de seu momento angular em relação ao seu centro será dada pelo produto de dois fatores. Um deles está ligado à distribuição de massa do sistema (a esfera, no caso) em torno do eixo de rotação, e o outro é dado pela velocidade angular do corpo em torno desse eixo.

Pelo fato de não fazer sentido falar em rotação de uma partícula, já que, por definição, um ponto material não tem estrutura para dizermos que suas partes giram umas em relação às outras (uma partícula só pode se transladar), o conceito de momento angular se torna mais relevante na discussão de um sistema de partículas, principalmente no caso particular em que tal sistema é um corpo rígido.

De qualquer modo, é conveniente introduzir a definição de momento angular para uma única partícula, pois isso facilitará o entendimento do momento angular de um sistema de partículas, especialmente, de um corpo rígido em rotação. Além disso, no estudo de movimentos sob a ação de uma força total central, como ocorre nos movimentos planetários, o conceito de momento angular de uma partícula é bastante conveniente.

Uma vez introduzido o conceito de momento angular de uma partícula, somos levados, inevitavelmente, ao conceito de torque sobre uma partícula, que é um outro vetor importante no estudo de movimentos de rotação. O torque se relaciona com o momento angular do mesmo modo que a força se relaciona com o momento linear, como ficará claro mais adiante. No entanto, para definir momento angular e torque é necessário o conceito de produto vetorial, uma grandeza intimamente relacionada com a idéia de rotação. Por isso, nos anteciparemos a essa necessidade e dedicaremos a próxima seção ao produto vetorial, antes mesmo de abordarmos os conceitos de momento angular e torque.

Produto vetorial

Vamos definir o chamado produto vetorial de dois vetores. O produto vetorial do vetor \mathbf{a} pelo vetor \mathbf{b} será um novo vetor, que representaremos por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. O símbolo \times representará a operação que produz o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a partir dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . O símbolo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ será lido **produto vetorial de \mathbf{a} por \mathbf{b}** .

Veremos que o produto vetorial depende da ordem dos fatores, isto é, em geral $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ não será igual a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Desse modo, quando falarmos em produto vetorial de dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , ficará implícita uma ordem, no caso \mathbf{a} é o primeiro, e \mathbf{b} , o segundo. Para definir o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ vamos dar as regras que estabelecem sua direção, seu sentido e seu módulo $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

Começemos com dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} que não sejam nulos e que não tenham a mesma direção. Dois vetores têm essas características se, e somente se, não estiverem em uma mesma linha quando desenhados com a mesma origem (como você pode verificar considerando as três possibilidades: os dois serem nulos, apenas um ser nulo ou os dois serem não-nulos com direções diferentes. Portanto, designemos vetores não-colineares um par de vetores não-nulos e que tenham direções diferentes.

O ângulo entre vetores não-colineares, que denominaremos θ , é um ângulo entre 0 e π . Devemos nos lembrar de que o ângulo entre dois vetores não-nulos, por definição, é sempre maior ou igual a 0 e menor ou igual a π . Se os vetores

têm a mesma direção e sentido, o ângulo é 0 , e se têm a mesma direção e sentidos opostos, o ângulo é π . Conseqüentemente, se os dois vetores não têm a mesma direção, isto é, não são paralelos, o ângulo entre eles é maior do que 0 e menor do que π .

Os dois vetores não-colineares \mathbf{a} e \mathbf{b} determinam um plano, chamado **plano dos dois vetores**. É o plano que contém os dois vetores quando eles são desenhados com suas origens em um mesmo ponto, digamos um ponto P . Na Figura 29.1 estão representados os dois vetores com origem nesse ponto e também o plano determinado por eles.

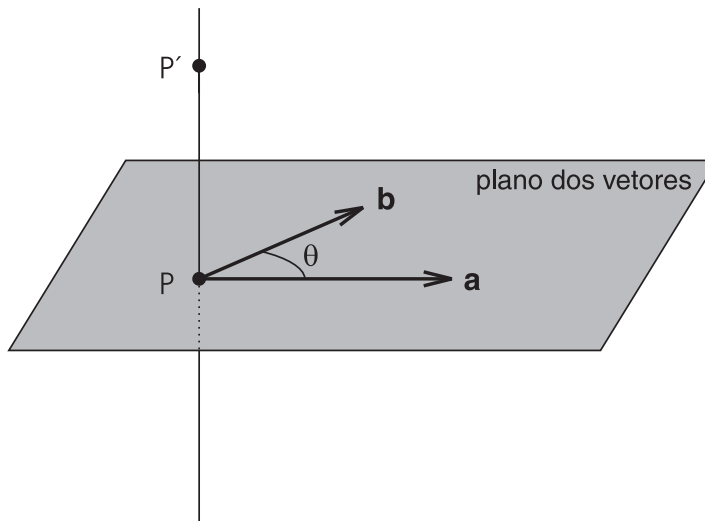


Figura 29.1: Dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} que fazem entre si um ângulo θ determinam uma direção perpendicular a ambos, a direção da reta perpendicular ao plano desses dois vetores.

Existe uma única direção perpendicular ao plano dos dois vetores: a direção de uma reta qualquer perpendicular ao plano, digamos, a que passa pela origem comum P dos dois vetores. Essa reta aparece na figura passando pelo ponto P e por um outro ponto P' fora do plano. Desse modo, os dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} determinam um plano e uma direção perpendicular ao plano. Naturalmente, é a direção perpendicular aos dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Essa é, por definição, a direção do produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Agora passaremos à especificação do sentido de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Na direção perpendicular ao plano de \mathbf{a} e \mathbf{b} há dois sentidos, que na Figura 29.1 são os sentidos de P para P' e de P' para P . Vamos, agora, enunciar uma regra que determina um desses sentidos a partir dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Para enunciar essa regra, é necessário levar em conta a ordem entre esses vetores.

No caso em consideração, \mathbf{a} é o primeiro, e \mathbf{b} , o segundo. Consideremos a rotação de um ângulo igual ao ângulo θ entre os dois vetores ($0 < \theta < \pi$), que levaria o vetor \mathbf{a} a ficar com a mesma direção e sentido do vetor \mathbf{b} . Digamos,

abreviadamente, que é a rotação que levaria o primeiro vetor até o segundo, varrendo o ângulo entre eles. Deve ficar bem claro que esse ângulo é, por definição, maior do que zero e menor do que π . Podemos, então, enunciar a chamada **regra da mão direita**:

*dado um par ordenado de vetores não-colineares, mantendo o polegar esticado perpendicularmente ao plano dos vetores, enquanto os demais dedos apontam no sentido da rotação que levaria o primeiro vetor até o segundo, varrendo o ângulo entre eles, o polegar estará apontando no sentido que chamamos **sentido direito** associado ao par ordenado de vetores.*

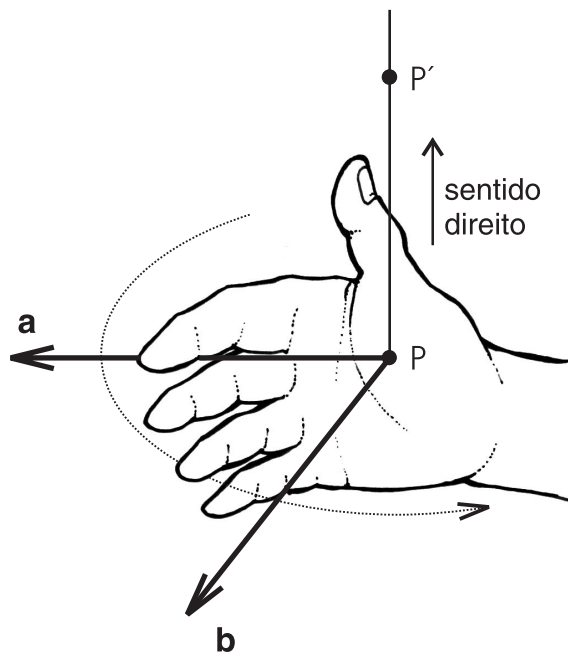


Figura 29.2: O sentido direito, determinado pela regra da mão direita a partir do par ordenado (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , é o sentido de P para P' .

O sentido direito associado ao par ordenado de vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é também chamado **sentido dado pela regra da mão direita aplicada aos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b}** . Uma vez que tomamos \mathbf{a} como o primeiro vetor e \mathbf{b} como o segundo, a regra da mão direita aplicada a eles está ilustrada na Figura 29.2. Nesse caso, o sentido direito é do ponto P para o ponto P' .

O sentido do produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é, por definição, o sentido direito associado ao par de vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Portanto, o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é um vetor com direção perpendicular a \mathbf{a} e \mathbf{b} e com o sentido igual ao sentido direito associado a esse par ordenado de vetores.

Finalmente, definimos o módulo do produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como o produto do módulo do vetor \mathbf{a} pelo módulo do vetor \mathbf{b} pelo seno do ângulo θ entre \mathbf{a} e \mathbf{b} , isto é,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta . \quad (29.1)$$

Em suma,

produto vetorial de um par ordenado de vetores não-colineares é o vetor cuja direção é perpendicular aos dois vetores, cujo sentido é o sentido direito determinado pelo par ordenado de vetores, e cujo módulo é o produto do módulo do primeiro vetor pelo módulo do segundo vetor e pelo seno do ângulo entre eles.

É muito importante que você resolva agora os problemas propostos 1 e 2 para adquirir alguma prática em calcular, a partir da definição, o produto vetorial de dois vetores.

Para expressar a definição do produto vetorial em uma única fórmula é conveniente definir um vetor unitário com a direção perpendicular ao par ordenado de vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} e com o sentido direito associado a esse par de vetores. Representamos esse vetor unitário por $\mathbf{n}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Portanto, $\mathbf{n}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mas, sendo unitário, seu módulo é 1, isto é, $|\mathbf{n}(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = 1$. Usando esse vetor unitário $\mathbf{n}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, podemos escrever para o produto vetorial de \mathbf{a} por \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta) \mathbf{n}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) . \quad (29.2)$$

As grandezas que aparecem nessa fórmula estão na Figura 29.3. Na equação (29.2), a direção e o sentido de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ estão indicados pelo unitário $\mathbf{n}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, e o próprio vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é igual ao seu módulo multiplicado por esse unitário. Tomando-se o módulo de ambos os membros da equação (29.2) e usando o fato de que $|\mathbf{n}(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = 1$, voltamos à equação (29.1).

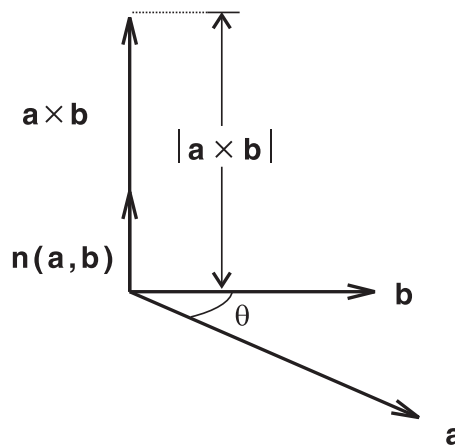


Figura 29.3: O produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tem módulo igual a $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$, direção perpendicular a \mathbf{a} e a \mathbf{b} e sentido dado pela regra da mão direita aplicada a \mathbf{a} e \mathbf{b} . A direção e o sentido de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ são os do vetor unitário $\mathbf{n}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Por enquanto, consideramos, apenas, vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} que não são nulos e que não têm a mesma direção. Quando um dos vetores é nulo ou ambos têm a mesma direção, definimos o produto vetorial dos dois vetores como o vetor nulo, isto é, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, ou, ainda, se \mathbf{a} tem a mesma direção de \mathbf{b} . Além disso, é fácil verificar que o produto vetorial só é nulo se alguma dessas condições é verificada. Temos, portanto,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{b} = \mathbf{0} \text{ ou } \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}. \quad (29.3)$$

Um caso importante do produto vetorial de dois vetores paralelos é o produto vetorial de um vetor por ele mesmo. O resultado é sempre nulo: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A operação matemática que, a cada par de vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , faz corresponder o vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é denominada **multiplicação vetorial** dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Os vetores com os quais fazemos a multiplicação vetorial são chamados **fatores do produto vetorial**. O símbolo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é também lido como “a vetor b”.

Quando trabalhamos com produtos vetoriais, torna-se muito importante indicar com clareza que um vetor tem direção perpendicular ao plano da figura e qual é o seu sentido. Nas figuras, um vetor perpendicular à página, e apontando dela para os nossos olhos, é desenhado como \odot , enquanto um vetor perpendicular à página, e apontando dos nossos olhos para ela, é desenhado como \otimes . É como se \odot fosse a ponta dianteira de uma flecha e \otimes , a sua ponta traseira.

Agora que definimos o produto vetorial de dois vetores, vamos considerar o que ocorre quando trocamos a ordem dos vetores envolvidos. Primeiramente, consideremos dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} não-colineares. No produto vetorial $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, o primeiro vetor é \mathbf{b} e o segundo é \mathbf{a} . O plano que contém os vetores \mathbf{b} e \mathbf{a} é,

obviamente, o mesmo que contém os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Como consequência, $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ tem a mesma direção que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, a direção perpendicular aos dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . No entanto, de acordo com a regra da mão direita, o sentido de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ é oposto ao sentido de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; na Figura 29.1, o sentido de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ é de P' para P . Finalmente, os produtos $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ têm o mesmo módulo. De fato, o ângulo entre \mathbf{b} e \mathbf{a} é igual ao ângulo entre \mathbf{a} e \mathbf{b} , de acordo com a definição de ângulo entre dois vetores. Consequentemente, a regra (29.1) determina para o módulo de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ o valor $|\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \sin \theta$ que, obviamente, é igual a $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$, isto é, ao módulo do vetor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Em suma, $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ têm o mesmo módulo, a mesma direção e sentidos opostos:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad (29.4)$$

isto é,

o produto vetorial de dois vetores troca de sinal, se a ordem dos vetores é trocada.

Considerando, agora, o caso em que os dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} são paralelos ou um deles é nulo, tanto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ quanto $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ são iguais a zero, e a equação (29.4) não deixa de ser verdadeira. Portanto, a igualdade (29.4) tem validade geral e é chamada **propriedade anti-simétrica** do produto vetorial.

De acordo com a definição do unitário $\mathbf{n}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, você não terá dificuldade em mostrar que $\mathbf{n}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{n}(\mathbf{b}, \mathbf{a})$. Essa igualdade, aplicada à definição (29.2) de produto vetorial, também nos leva à propriedade (29.4).

Antes de continuar com a teoria do produto vetorial de dois vetores, faremos uma pausa para compará-lo com o produto escalar de dois vetores. Dados os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , o produto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ é um número, enquanto o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ é um vetor. O produto escalar é comutativo, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$; já o produto vetorial obedece à propriedade anti-simétrica, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Quando um dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é nulo, o produto escalar é o número 0, enquanto o produto vetorial é o vetor nulo $\mathbf{0}$. Se nenhum dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é nulo, o produto escalar é zero se, e somente se, os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} forem perpendiculares, enquanto o produto vetorial de dois vetores não-nulos é o vetor nulo se, e somente se, os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} forem paralelos entre si.

O produto vetorial de dois vetores tem um significado geométrico importante. Consideremos dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} não-colineares. Quando os dois vetores são desenhados com uma origem comum, digamos em um ponto P , eles formam um paralelogramo, como mostrado na Figura 29.4. É o paralelogramo $PAP'B$,

sendo A , P' e B as extremidades finais dos vetores \mathbf{a} , $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e \mathbf{b} , respectivamente. Esse paralelogramo é chamado, simplesmente, **paralelogramo formado pelos dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b}** . Pois bem, o módulo do produto vetorial de \mathbf{a} por \mathbf{b} é igual à área do paralelogramo formado por esses dois vetores. Essa é uma propriedade fácil de verificar na Figura 29.4. Nela, podemos tomar a base do paralelogramo $PAP'B$ como o lado PA , cujo comprimento é igual a $|\mathbf{a}|$. Nesse caso, a altura do paralelogramo é dada por $|\mathbf{b}| \sin \theta$. Conseqüentemente, a área do paralelogramo é o produto do comprimento $|\mathbf{a}|$ da base pela altura $|\mathbf{b}| \sin \theta$, ou seja, é igual ao módulo do produto vetorial de \mathbf{a} por \mathbf{b} , isto é, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

O módulo $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ do produto vetorial de \mathbf{a} por \mathbf{b} é igual à área do paralelogramo formado pelos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} .

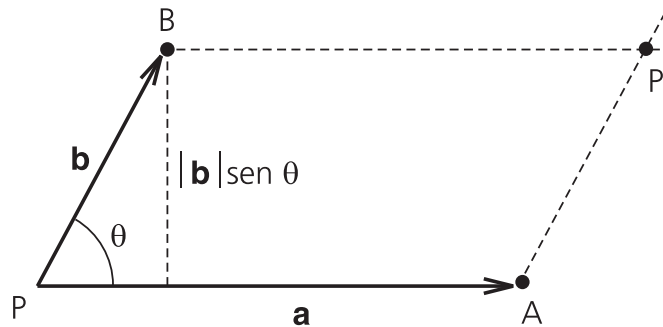


Figura 29.4: Os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} formam um paralelogramo $PAP'B$ com base PA de comprimento $|\mathbf{a}|$ e altura dada por $|\mathbf{b}| \sin \theta$. A área do paralelogramo é igual ao módulo do produto vetorial de \mathbf{a} por \mathbf{b} , dado por $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$.

Consideremos, agora, os dois vetores não-colineares \mathbf{a} e \mathbf{b} , desenhados com a mesma origem em um ponto P , com pontos finais A e B , respectivamente, conforme ilustrado na Figura 29.5. Existe um plano, e somente um, que passa pelo ponto P e é perpendicular ao vetor \mathbf{a} . Vamos denominá-lo **plano perpendicular a \mathbf{a}** . Tracemos uma perpendicular a esse plano da extremidade final B do vetor \mathbf{b} . Ela encontra o plano perpendicular a \mathbf{a} em um ponto B'' . Existe um vetor, e somente um, que vai da origem comum P até o ponto B'' . Vamos denotar por \mathbf{b}_\perp esse vetor. Ele é chamado **projeção vetorial de \mathbf{b} no plano perpendicular a \mathbf{a}** . Algumas vezes, é útil usar para essa projeção um símbolo mais explícito, como $\Pi_a \mathbf{b}$. Desse modo, temos essas duas maneiras de escrever o mesmo vetor:

$$\mathbf{b}_\perp = \Pi_a \mathbf{b} . \quad (29.5)$$

Vemos, na Figura 29.5, que o módulo do vetor \mathbf{b}_\perp é igual ao módulo de \mathbf{b} vezes o cosseno do ângulo que o segmento PB faz com o segmento PB' . O cosseno

desse ângulo é o seno do ângulo θ entre os dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . Portanto, temos

$$|\mathbf{b}_\perp| = |\mathbf{b}| \sin \theta. \quad (29.6)$$

Podemos repetir todos os passos para obter o vetor \mathbf{b}_\perp a partir de \mathbf{b} também nos casos em que \mathbf{b} é o vetor nulo ou é paralelo ao vetor \mathbf{a} . Em ambos os casos, temos $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{0}$. Desse modo, mantendo a condição de que \mathbf{a} é um vetor não-nulo, fica definida a projeção vetorial de \mathbf{b} no plano perpendicular a \mathbf{a} para qualquer vetor \mathbf{b} .

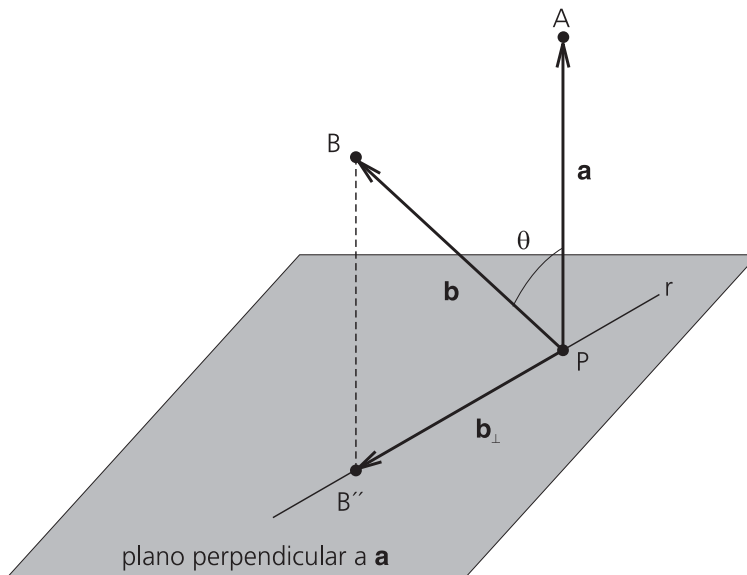


Figura 29.5: O plano desta figura é o dos dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . O plano perpendicular ao vetor \mathbf{a} intercepta, na reta r , o plano dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} . O vetor \mathbf{b}_\perp é a projeção vetorial de \mathbf{b} no plano perpendicular a \mathbf{a} .

Dispomos, portanto, de dois tipos de projeção para um vetor: a projeção escalar de um vetor \mathbf{b} ao longo de um vetor \mathbf{a} e a projeção vetorial de um vetor \mathbf{b} no plano perpendicular a um vetor \mathbf{a} . A projeção escalar de um vetor \mathbf{b} ao longo de um vetor \mathbf{a} é um número que representamos por $\text{proj}_\mathbf{a} \mathbf{b}$, que é igual ao módulo de \mathbf{b} multiplicado pelo cosseno do ângulo θ entre \mathbf{a} e \mathbf{b} , isto é, $\text{proj}_\mathbf{a} \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cos \theta$. Já a projeção vetorial de um vetor \mathbf{b} no plano perpendicular a um vetor \mathbf{a} é um vetor que representamos por $\Pi_\mathbf{a} \mathbf{b}$ que tem direção e sentido dados pela regra explicada anteriormente e módulo igual ao de \mathbf{b} multiplicado pelo seno do ângulo θ entre \mathbf{a} e \mathbf{b} , isto é, $|\Pi_\mathbf{a} \mathbf{b}| = |\mathbf{b}| \sin \theta$. Essas duas projeções estão ilustradas na Figura 29.6. Cada uma tem sua utilidade, como você irá perceber à medida que for se familiarizando com tais projeções (uma delas é útil na projeção escalar ao longo de um vetor, e a outra, na projeção vetorial no plano perpendicular a um vetor).

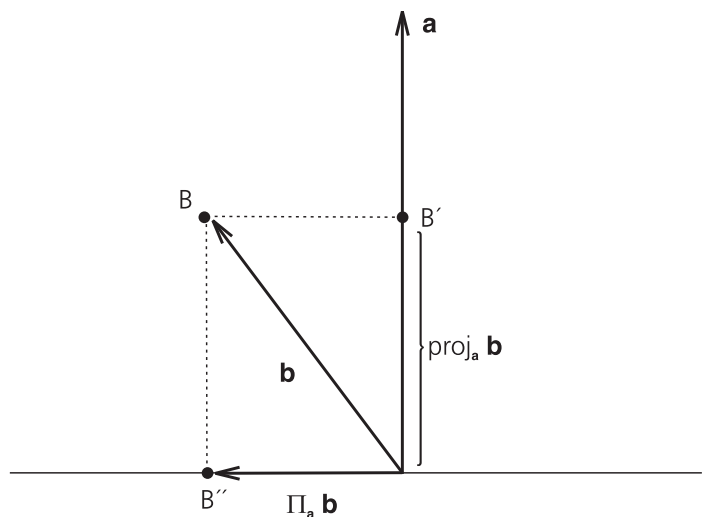


Figura 29.6: As duas projeções de \mathbf{b} : o número $\text{proj}_a \mathbf{b}$ e o vetor $\Pi_a \mathbf{b}$.

Essencialmente, o vetor \mathbf{b}_\perp é útil, porque seu produto vetorial pelo vetor \mathbf{a} é igual ao produto vetorial de \mathbf{b} por \mathbf{a} , isto é, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_\perp$. Demonstremos essa propriedade. Pela definição de produto vetorial, o módulo do produto vetorial de \mathbf{a} por \mathbf{b}_\perp é igual ao módulo de \mathbf{a} vezes o módulo de \mathbf{b}_\perp vezes o seno do ângulo entre \mathbf{a} e \mathbf{b}_\perp , isto é, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}_\perp| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}_\perp| \sin(\pi/2)$, pois \mathbf{b}_\perp é perpendicular a \mathbf{a} pela própria definição do vetor \mathbf{b}_\perp . Desse modo, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}_\perp| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}_\perp|$. Usando nessa equação o resultado (29.6), vemos que $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}_\perp| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$, isto é, o módulo de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}_\perp$ é igual ao módulo do produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, conforme a definição (29.1). É fácil verificar que também a direção e o sentido de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}_\perp$ são iguais à direção e ao sentido de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, respectivamente. Portanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}_\perp$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ são iguais em módulo, direção e sentido, isto é,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}_\perp. \quad (29.7)$$

Essa é uma propriedade muito útil, que podemos enunciar da seguinte maneira:

o produto vetorial de dois vetores não se altera, se substituirmos o segundo vetor pela sua projeção vetorial no plano perpendicular ao primeiro vetor.

Você está convidado a obter um resultado análogo ao anterior no problema proposto 3. Nesse problema, que você deve resolver agora, obtém-se $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_\perp \times \mathbf{b}$, em que \mathbf{a}_\perp é a projeção do vetor \mathbf{a} no plano perpendicular ao vetor \mathbf{b} , isto é, $\mathbf{a}_\perp = \Pi_b \mathbf{a}$.

Além da propriedade de anti-simetria (29.4), o produto vetorial goza de mais duas propriedades fundamentais, que enunciaremos a seguir.

O produto vetorial é distributivo em relação à adição de vetores:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} .\end{aligned}\quad (29.8)$$

Se um dos fatores do produto vetorial é multiplicado por um número, o produto fica multiplicado por esse número:

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad \text{e} \quad \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) . \quad (29.9)$$

A demonstração dessa última propriedade não é difícil, se for acompanhada de alguns desenhos simples que ilustrem as considerações que faremos a seguir. Começamos pela demonstração da primeira igualdade em (29.9). No caso em que λ é nulo, os dois lados da igualdade são nulos, o que mostra que ela é verdadeira.

No caso em que λ é positivo, $\lambda \mathbf{a}$ é um vetor de mesma direção e sentido que \mathbf{a} . Isto faz com que os produtos vetoriais $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tenham a mesma direção e o mesmo sentido. Mas, por ser λ positivo, também $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ têm a mesma direção e sentido; logo, $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ e $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ são vetores com a mesma direção e sentido. Para demonstrar que são vetores iguais resta, apenas, demonstrar que são vetores de mesmo módulo. Para o módulo de $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, temos $|\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = |\lambda| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$, onde θ é o ângulo entre \mathbf{a} e \mathbf{b} . Portanto,

$$|\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = |\lambda| |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta . \quad (29.10)$$

Para o módulo de $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$, temos $|(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\lambda \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta'$, onde θ' é o ângulo entre $\lambda \mathbf{a}$ e \mathbf{b} . Sendo λ positivo, $\lambda \mathbf{a}$ tem a mesma direção e sentido que \mathbf{a} e, conseqüentemente, o ângulo θ' entre $\lambda \mathbf{a}$ e \mathbf{b} é igual ao ângulo θ entre \mathbf{a} e \mathbf{b} . Com isso, temos $|(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = |\lambda \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$. Usando, nessa igualdade, a propriedade $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|$ e levando em conta que $|\lambda| = \lambda$, por ser λ positivo, obtemos $|(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}| = \lambda |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$. Comparando essa igualdade com (29.10), concluímos que os módulos dos vetores $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ e $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ são iguais, completando, assim, a demonstração de que os vetores $\lambda \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ são iguais. Com isso, fica demonstrado que a primeira igualdade em (29.9) é verdadeira para λ positivo. A seguir, usaremos esse resultado para λ positivo, para demonstrar que ela é verdadeira também para λ negativo.

No caso em que λ é negativo, temos $\lambda = |\lambda| (-1)$. Sabemos que a multiplicação de um vetor por -1 apenas muda o seu sentido, isto é, o transforma no seu oposto. Temos, então,

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = [|\lambda| (-1) \mathbf{a}] \times \mathbf{b} = [|\lambda| (-\mathbf{a})] \times \mathbf{b} .$$

Agora, usamos nesse resultado a primeira igualdade escrita em (29.9), para que o número positivo $|\lambda|$, que multiplica o vetor $-\mathbf{a}$, passe a multiplicar o produto vetorial de $-\mathbf{a}$ por \mathbf{b} . Obtemos $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = |\lambda| [(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}]$ que, em virtude da igualdade $|\lambda| = \lambda(-1)$, pode ser escrito como

$$(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(-1)[(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}]. \quad (29.11)$$

Usando a definição de produto vetorial, é fácil verificar que o produto vetorial $(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ tem mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto ao produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, isto é, $(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ é o oposto de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Multiplicando o oposto por -1 , obtemos de volta $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, isto é, $(-1)[(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}] = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Usando esse resultado no membro direito de (29.11), obtemos, finalmente, $(\lambda\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, que é a primeira igualdade em (29.9) para o caso de λ negativo. Com isso, fica demonstrado que essa igualdade é verdadeira para qualquer número λ , seja ele nulo, positivo ou negativo.

A segunda igualdade em (29.9) pode ser demonstrada usando-se um procedimento análogo.

A demonstração da propriedade distributiva (29.8) não é difícil, mas é muito longa. É possível fazê-la usando projeções vetoriais, com o auxílio de desenhos cuidadosos dos vetores envolvidos. Mesmo que você não demonstre a propriedade (29.8), você deverá saber usá-la. Na verdade, em Física, estamos mais interessados, normalmente, em usar os resultados matemáticos do que em demonstrá-los. Quando nos envolvemos em uma demonstração de um resultado matemático, é porque isso nos propicia um modo vantajoso de entendê-lo e de aprender a usá-lo.

Vamos utilizar as propriedades do produto vetorial para aprender a calcular o produto vetorial de dois vetores a partir de suas componentes cartesianas. Em primeiro lugar, calculamos o produto vetorial dos unitários ortonormais \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z de um sistema de eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$. Usando simplesmente a definição de produto vetorial, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_x &= \mathbf{0}, & \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y &= \mathbf{u}_z, & \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_z &= -\mathbf{u}_y, \\ \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x &= -\mathbf{u}_z, & \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_y &= \mathbf{0}, & \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_z &= \mathbf{u}_x, \\ \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_x &= \mathbf{u}_y, & \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_y &= -\mathbf{u}_x, & \mathbf{u}_z \times \mathbf{u}_z &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (29.12)$$

Agora consideramos dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} expressos na base desses unitários: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y + a_z\mathbf{u}_z$ e $\mathbf{b} = b_x\mathbf{u}_x + b_y\mathbf{u}_y + b_z\mathbf{u}_z$. Usando-se a propriedade distributiva (29.8) e a propriedade (29.9), reduzimos o produto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ a uma combinação de produtos vetoriais dos vetores unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z . Com o auxílio de (29.12), chega-se, então, ao resultado procurado:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{u}_x + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{u}_y + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{u}_z. \quad (29.13)$$

Esta fórmula parece, à primeira vista, difícil de ser memorizada. Na verdade, ela tem uma estrutura muito simétrica, que permite escrevê-la na forma de um determinante, isto é,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (29.14)$$

Neste momento, é essencial que você adquira alguma prática em calcular produtos vetoriais usando essas fórmulas; você pode fazê-lo resolvendo o problema proposto 6.

Suponhamos, agora, que temos dois vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} que são funções de uma variável real t . Podemos expandi-los na base dos unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z e obter $\mathbf{A} = A_x \mathbf{u}_x + A_y \mathbf{u}_y + A_z \mathbf{u}_z$ e $\mathbf{B} = B_x \mathbf{u}_x + B_y \mathbf{u}_y + B_z \mathbf{u}_z$. As componentes desses vetores também são funções da variável t e os unitários são, é claro, vetores fixos apontando na direção e sentido dos eixos coordenados. Tendo esses fatos em mente, usaremos a fórmula (29.13) para calcular o produto vetorial de \mathbf{A} por \mathbf{B} e derivá-lo em relação a t . Temos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}(A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{u}_x + \frac{d}{dt}(A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{u}_y + \frac{d}{dt}(A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{u}_z. \quad (29.15)$$

Usando, no lado direito dessa equação, a regra de derivada do produto de funções e reagrupando os termos obtidos, chegamos a

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (29.16)$$

ou seja, para o produto vetorial também é válida a regra de que a derivada do produto de dois vetores é igual ao produto da derivada do primeiro vetor pelo segundo mais o produto do primeiro vetor pela derivada do segundo. No problema proposto 7, você irá demonstrar a fórmula anterior.

Exemplo 29.1

Como uma aplicação da regra (29.16), faremos o produto vetorial da posição \mathbf{r} de uma partícula por seu momento linear $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, que são funções do tempo t , e derivar em relação ao tempo o produto obtido. Temos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (29.17)$$

onde usamos o fato de que $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$. Como $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (29.18)$$

Esse resultado será usado na próxima seção para obter o chamado Teorema do Momento Angular e Torque.

Teorema do momento angular e torque

Consideremos, novamente, uma partícula de massa m sujeita a uma força total \mathbf{F} . A segunda Lei de Newton aplicada a essa partícula, isto é,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} , \quad (29.19)$$

determina os seus movimentos possíveis. Associada a esses movimentos há uma grandeza, chamada momento angular, que estudaremos agora e que se mostrará conveniente na discussão, tanto qualitativa como quantitativa de certos tipos de movimento. Façamos a multiplicação vetorial do vetor-posição \mathbf{r} da partícula pelos dois membros da Segunda Lei de Newton escrita em (29.19). Obtemos:

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \quad (29.20)$$

Usando as propriedades do produto vetorial e o resultado escrito na equação (29.18), a equação anterior pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \quad (29.21)$$

Representaremos por \mathbf{L} o vetor que está sendo derivado no lado esquerdo da equação (29.21),

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} . \quad (29.22)$$

Ele é o produto vetorial do vetor-posição da partícula pelo seu momento linear $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, de modo que podemos também escrever:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} . \quad (29.23)$$

O vetor \mathbf{L} é chamado **momento angular** da partícula relativo à origem \mathcal{O} (o momento angular é sempre definido em relação a um ponto, o **ponto-base**; nesse caso, o ponto-base é a origem). A expressão “relativo à origem \mathcal{O} ” refere-se ao fato de que o vetor \mathbf{r} , na definição (29.23), vai da origem \mathcal{O} do sistema de eixos até a partícula. Temos, então,

momento angular de uma partícula relativo à origem \mathcal{O} é o produto vetorial de seu vetor-posição pelo seu momento linear.

Mais adiante, explicaremos o motivo pelo qual se usa o adjetivo “angular” para nomear o vetor \mathbf{L} .

Agora, definiremos mais um vetor importante no estudo dos movimentos de uma partícula:

torque, relativo à origem \mathcal{O} , de uma força exercida sobre uma partícula, é definido como o produto vetorial do vetor-posição da partícula pela força.

Se \mathbf{F} é a força que age sobre a partícula, \mathbf{r} seu vetor-posição e $\boldsymbol{\tau}$ o vetor torque, temos:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} . \quad (29.24)$$

Note que o torque é representado por $\boldsymbol{\tau}$ (a letra grega tau, em negrito, para indicar que se trata de um vetor). O torque de uma força que age sobre a partícula é chamado usualmente torque exercido sobre a partícula.

O vetor que aparece no lado direito da equação (29.21) é o torque da força total que age sobre a partícula. Podemos afirmar, portanto, que

a taxa instantânea de variação do momento angular de uma partícula relativo à origem é igual ao torque relativo à origem da força total que age sobre a partícula,

isto é,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} . \quad (29.25)$$

Vamos, agora, generalizar esse resultado. Seja Q um ponto do espaço e \mathbf{r}_Q o vetor-posição desse ponto, isto é, \mathbf{r}_Q é o vetor de módulo igual à distância entre \mathcal{O} e Q , que vai da origem \mathcal{O} até Q , conforme indicado na Figura 29.7.

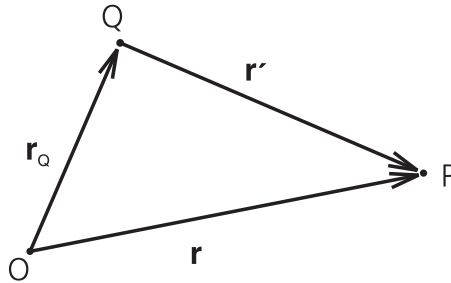


Figura 29.7: O vetor-posição \mathbf{r} da partícula quando se encontra no ponto P , o vetor-posição \mathbf{r}_Q de um ponto Q e o vetor \mathbf{r}' que vai de Q até a partícula, chamado vetor-posição relativo a Q da partícula.

O vetor que aponta de Q para a partícula e tem módulo igual à distância de Q até a partícula é chamado **vetor-posição relativo a Q** da partícula. Representando-o por \mathbf{r}' , temos

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q , \quad (29.26)$$

como indica a Figura 29.7 (de acordo com essa definição, o vetor-posição da partícula é, simplesmente, o seu vetor-posição relativo à origem \mathcal{O}).

Consideremos o caso em que o ponto Q está fixo, isto é, imóvel em relação ao sistema de eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$. Nesse caso, $d\mathbf{r}_Q/dt = \mathbf{0}$; definimos as generalizações dos conceitos de momento angular e torque que seguem.

Momento angular \mathbf{L}_Q de uma partícula relativo a um ponto fixo Q é o produto vetorial do vetor-posição relativo a Q da partícula pelo seu momento linear, isto é,

$$\mathbf{L}_Q = \mathbf{r}' \times \mathbf{p} \quad \text{onde} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q. \quad (29.27)$$

Torque relativo a um ponto Q , de uma força que age sobre uma partícula, é o produto vetorial do vetor-posição da partícula relativo a Q pela força, isto é

$$\boldsymbol{\tau}_Q = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} \quad \text{onde} \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q. \quad (29.28)$$

Obviamente, escolhendo o ponto fixo Q como a origem \mathcal{O} do sistema de eixos, o momento angular \mathbf{L}_Q se torna o momento angular relativo à origem, $\mathbf{L}_\mathcal{O}$, representado anteriormente por \mathbf{L} . Analogamente, temos $\boldsymbol{\tau}_\mathcal{O} = \boldsymbol{\tau}$. Usando-se a hipótese de que o ponto Q é fixo, demonstra-se que

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \boldsymbol{\tau}_Q, \quad (29.29)$$

isto é,

a taxa instantânea de variação do momento angular de uma partícula relativo a um ponto fixo Q é igual ao torque relativo a Q da força resultante que age sobre a partícula.

Você demonstrará esse resultado no problema proposto 8. É claro que, tomando o ponto fixo Q como a origem \mathcal{O} , recuperamos o resultado (29.25), demonstrado anteriormente. Esse resultado, chamado **Teorema do Momento Angular e Torque**, é o resultado mais importante desta aula. Para entendê-lo melhor e aplicá-lo corretamente, devemos nos aprofundar nos significados das grandezas que nele aparecem, o que faremos a seguir.

Primeiramente, consideraremos o momento angular e discutiremos o seu significado. A Figura 29.8 mostra uma partícula de massa m com vetor-posição \mathbf{r} e velocidade \mathbf{v} . Seu momento linear é $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ e seu momento angular relativo à origem \mathcal{O} é $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. O sistema de eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$, com origem \mathcal{O} , não foi desenhado para não sobrecarregar a figura. Escolhemos o plano da figura como o plano dos vetores \mathbf{r} e \mathbf{v} em um certo instante genérico t . É óbvio que esse

é também o plano dos vetores \mathbf{r} e $m\mathbf{v}$. Conseqüentemente, sendo o momento angular \mathbf{L} definido por $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$, ele é perpendicular ao plano da Figura 29.8. Tendo em vista as direções e sentidos dos vetores \mathbf{r} e $m\mathbf{v}$, vemos que \mathbf{L} aponta da página para os nossos olhos.

Se no instante t a partícula se encontra no ponto A , em um intervalo de tempo infinitesimal dt , ela sofrerá um deslocamento infinitesimal dado por $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ e passará para o ponto B , como indicado na Figura 29.8. Durante esse deslocamento, seu vetor-posição muda de \mathbf{r} , que é igual a \vec{OA} , para $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, que é igual a \vec{OB} . Além disso, durante esse deslocamento, os pontos do vetor-posição da partícula vão percorrendo todos os pontos do triângulo OAB (e nenhum ponto a mais). Descrevemos esse fato dizendo que, durante o deslocamento infinitesimal da partícula, o seu vetor-posição varre a área do triângulo OAB .

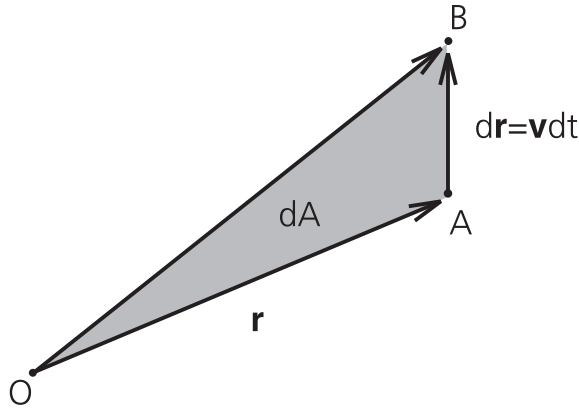


Figura 29.8: Em um intervalo de tempo infinitesimal, a partícula de vetor-posição \mathbf{r} e velocidade \mathbf{v} vai de A para B , enquanto o seu vetor posição varre a área do triângulo OAB .

Vamos representar essa área por dA e calcular o seu valor. Se você desenhar o vetor-deslocamento $d\mathbf{r}$ da partícula com a mesma origem O que a do seu vetor-posição \mathbf{r} , você verá que o paralelogramo formado pelos vetores \mathbf{r} e $d\mathbf{r}$ tem uma área que é o dobro da área dA do triângulo OAB . Mas sabemos que a área do paralelogramo formado pelos vetores \mathbf{r} e $d\mathbf{r}$ é o módulo do produto vetorial de \mathbf{r} por $d\mathbf{r}$. Portanto, esse módulo é o dobro da área varrida dA , isto é, $|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}| = 2 dA$. Lembrando que $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$, temos $|\mathbf{r} \times \mathbf{v} dt| = 2 dA$. Multiplicando os dois membros dessa igualdade pela massa da partícula, obtemos $|\mathbf{r} \times m\mathbf{v}| dt = 2m dA$, isto é, $|\mathbf{L}| dt = 2m dA$. Dividindo ambos os membros dessa igualdade pelo intervalo infinitesimal dt , chegamos a

$$|\mathbf{L}| = 2m \frac{dA}{dt}, \quad (29.30)$$

ou seja,

o módulo do momento angular de uma partícula relativo à origem é proporcional à taxa instantânea de variação da área varrida pelo vetor-posição da partícula.

Desse modo, quanto maior o módulo do momento angular da partícula, maior é a taxa com que seu vetor-posição varre uma área no espaço, no instante considerado. Esse resultado fornece um significado claro para o módulo do momento angular. A igualdade (29.30) é equivalente a $|\mathbf{L}| dt = 2m dA$, o que significa que

o módulo do momento angular de uma partícula relativo à origem é proporcional à área varrida pelo vetor-posição da partícula em um intervalo de tempo infinitesimal.

A partir da Figura 29.8, note que somente haverá a área infinitesimal varrida pelo vetor-posição da partícula, isto é, a área do triângulo $\mathcal{O}AB$, se houver um ângulo infinitesimal varrido \widehat{AOB} . Na verdade, a área infinitesimal varrida é proporcional ao ângulo infinitesimal varrido. Conseqüentemente, podemos dizer que o fato de existir um momento angular não-nulo relativo a um ponto \mathcal{O} é o responsável pela existência da varredura de um ângulo em torno de \mathcal{O} no intervalo de tempo considerado.

Se o momento angular de uma partícula é nulo, a sua velocidade é nula ou é paralela ao seu vetor-posição \mathbf{r} . Ou seja, ou a partícula está parada, ou ela se move radialmente, na direção da reta que a une ao ponto \mathcal{O} . Em ambos os casos não há varredura de ângulo no intervalo considerado. Essa relação essencial entre existência de momento angular não-nulo e ângulo varrido durante o movimento é o motivo do nome “angular” na designação do momento angular.

E quanto à direção e sentido do momento angular? A direção do momento angular é perpendicular ao plano dos vetores \mathbf{r} e \mathbf{v} , no qual se encontra, no instante considerado, a área infinitesimal varrida dA . Podemos dizer, então, que a cada intervalo infinitesimal durante o movimento, a área infinitesimal varrida é perpendicular à direção do momento angular. Podemos, informalmente, dizer que a cada intervalo infinitesimal, o movimento ocorre perpendicularmente à direção do momento angular. Devido à regra da mão direita do produto vetorial, o sentido do momento angular tem uma relação simples com o movimento da partícula. Se, ao observar o movimento da partícula em um dado instante, o momento angular apontar do plano determinado por \mathbf{r} e \mathbf{v} para os seus olhos, você verá a partícula girando em torno de \mathcal{O} no sentido anti-horário; se o momento angular for um vetor que aponte dos seus olhos para o plano determinado por \mathbf{r} e \mathbf{v} , então você verá a partícula girando em torno de \mathcal{O} em sentido horário.

Resumindo, dizemos que o momento angular de uma partícula tem, a cada instante, um módulo proporcional à taxa instantânea de variação da área varrida pelo vetor-posição da partícula, uma direção perpendicular ao movimento da partícula e um sentido que determina se o movimento da partícula em torno da origem é horário ou anti-horário. Discutimos o significado do momento angular relativo à origem O , mas a discussão pode ser facilmente adaptada ao caso em que o momento angular é definido em relação a qualquer ponto fixo Q (ou seja, em relação a qualquer outro ponto base que seja fixo).

Estando bem entendido o significado do momento angular, passemos ao conceito de torque, dado pela definição (29.24), isto é $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Esse conceito é muito intuitivo no caso em que a força \mathbf{F} é aplicada a uma partícula qualquer de um corpo rígido. No momento, porém, estamos considerando nosso sistema físico constituído por uma única partícula.

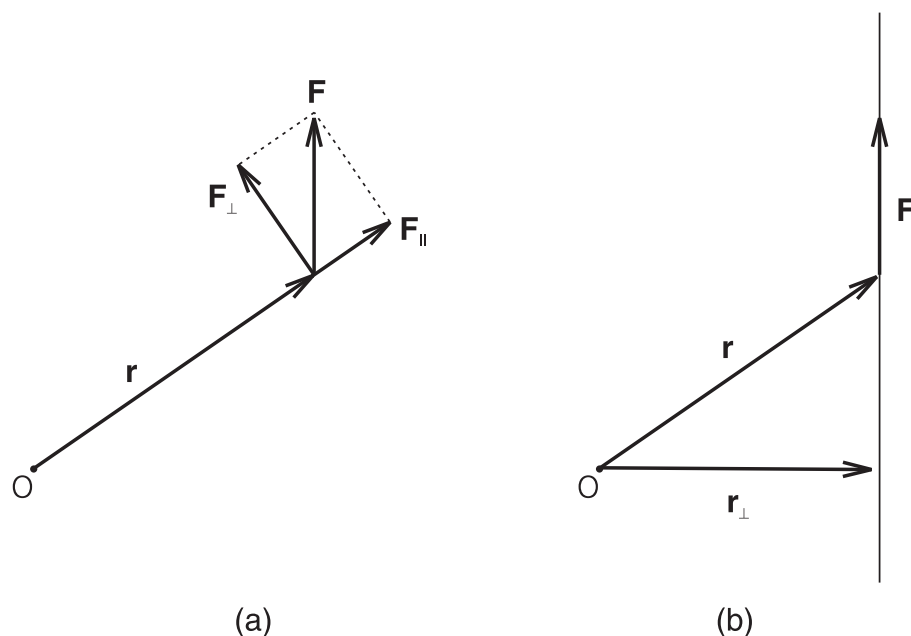


Figura 29.9: (a) Decomposição da força total \mathbf{F} que atua sobre a partícula em duas componentes vetoriais, uma perpendicular e outra paralela ao seu vetor-posição; (b) Parcela vetorial do vetor-posição da partícula perpendicular à reta-suporte da força \mathbf{F} .

Na Figura 29.9(a) a força \mathbf{F} sobre a partícula pode ser decomposta em uma componente \mathbf{F}_\perp , perpendicular ao seu vetor-posição \mathbf{r} , e uma componente \mathbf{F}_\parallel , paralela a \mathbf{r} . Portanto, escrevemos

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_\parallel . \quad (29.31)$$

De acordo com (29.7), temos $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_\perp$, isto é, somente a componente da força perpendicular ao vetor-posição contribui para o torque. Dito de outro

modo, uma força na direção da reta que une a partícula à origem \mathcal{O} não tem torque relativo a \mathcal{O} . Tomando o módulo da equação anterior, obtemos $|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r}| |\mathbf{F}_\perp|$. Afirmamos, então, que

o módulo do torque relativo à origem \mathcal{O} é igual ao módulo da componente da força perpendicular ao segmento que une a partícula a \mathcal{O} multiplicado pelo comprimento desse segmento; a direção do torque é perpendicular ao plano da força e desse segmento, e o sentido aponta para os nossos olhos se, e somente se, o sentido da força é anti-horário em relação ao centro \mathcal{O} .

As afirmativas que acabamos de fazer estão contidas na equação

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_\perp . \quad (29.32)$$

Esse mesmo torque pode ser descrito de outro modo elucidativo. Ele é dado, também, pela expressão

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{F} , \quad (29.33)$$

na qual \mathbf{r}_\perp é a parcela vetorial do vetor-posição perpendicular à reta-suporte da força \mathbf{F} , conforme ilustrado na Figura 29.9(b). Também podemos dizer que \mathbf{r}_\perp é o vetor perpendicular à reta suporte da força \mathbf{F} e que vai da origem \mathcal{O} até essa reta. O módulo do vetor \mathbf{r}_\perp é chamado **braço de alavanca da força \mathbf{F} relativo à origem \mathcal{O}** . Portanto, o braço de alavanca de uma força em relação à origem é a distância entre a origem e a reta suporte da força. Uma vez que $|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{F}| |\mathbf{r}_\perp|$, podemos afirmar, também, que

o módulo do torque de uma força exercida sobre uma partícula relativo à origem é igual ao produto do módulo da força pelo seu braço de alavanca relativo à origem.

Desse modo, o torque de uma dada força é tanto maior quanto maior for o seu braço de alavanca.

Com a compreensão que ganhamos dos conceitos de momento angular e torque, podemos, agora, apreciar melhor o Teorema do Momento Angular e Torque, dado pela equação (29.25). Ele dá a taxa instantânea de variação do momento angular relativo a \mathcal{O} e, portanto, dá a taxa de variação temporal da rapidez com que ângulos em torno de \mathcal{O} são varridos durante esse movimento, bem como a direção e o sentido em que tais variações ocorrem. Essa taxa de variação temporal do momento angular é igual ao torque relativo a \mathcal{O} exercido pela força total sobre

a partícula. Quanto maior o torque da força, maior a taxa de variação temporal da rapidez da varredura angular em torno de \mathcal{O} . Note, finalmente, que (29.25) pode ser escrita na forma $d\mathbf{L} = \boldsymbol{\tau} dt$, mostrando claramente que a variação infinitesimal do momento angular tem a direção e o sentido do torque total aplicado à partícula e, além disso, o módulo dessa variação é proporcional ao módulo do torque.

Como no caso do momento angular, podemos adaptar as considerações que acabamos de fazer sobre o torque relativo à origem \mathcal{O} ao torque relativo a um ponto fixo Q qualquer. Os comentários do parágrafo anterior sobre o Teorema do Momento Angular e Torque, relativos à origem \mathcal{O} , também continuam válidos se considerarmos um ponto fixo Q qualquer.

No caso em que o torque total sobre uma partícula é nulo, concluímos, a partir do Teorema do Momento Angular e Torque, que o momento angular da partícula é constante. De fato, de (29.25) segue, imediatamente, que

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \implies \mathbf{L} = \text{constante} . \quad (29.34)$$

É instrutivo comparar a equação anterior com a equação (28.4). O resultado (29.34) é chamado **Teorema da Conservação do Momento Angular** de uma partícula. O fato de o momento angular \mathbf{L} ser constante traz conseqüências importantes para o movimento da partícula. Naturalmente, sendo o vetor \mathbf{L} constante, são constantes seu módulo, sua direção e seu sentido. Pelo que discutimos anteriormente, podemos tirar as seguintes conclusões.

1. A direção constante de \mathbf{L} faz com que a posição e a velocidade da partícula permaneçam sempre no mesmo plano, perpendicular à direção de \mathbf{L} . Portanto, o movimento da partícula será um movimento plano sempre que \mathbf{L} for uma quantidade conservada.
2. O sentido de \mathbf{L} ser constante significa que a partícula se movimenta em torno da origem \mathcal{O} sempre no mesmo sentido. Se, num certo instante, esse for o sentido horário, ele permanecerá horário durante todo o movimento da partícula. Caso seja anti-horário, em um certo instante, será anti-horário em qualquer outro instante do movimento da partícula.
3. Finalmente, o módulo constante de \mathbf{L} significa que a taxa instantânea de variação da área varrida pelo vetor-posição da partícula é constante, isto é, $dA/dt = \text{constante}$. De acordo com (29.30), essa constante é igual a $|\mathbf{L}|/2m$, de modo que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} . \quad (29.35)$$

Integrando no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, obtemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dA}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{|\mathbf{L}|}{2m} dt \implies A_2 - A_1 = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} (t_2 - t_1), \quad (29.36)$$

onde A_2 é a área varrida até o instante t_2 e A_1 é a área varrida até o instante t_1 . Consequentemente, $\Delta A = A_2 - A_1$ é a área varrida durante o intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ e

$$\Delta A = \frac{|\mathbf{L}|}{2m} \Delta t, \quad (29.37)$$

ou seja, a área varrida em um certo intervalo de tempo é proporcional à duração do intervalo. É tradicional descrever esse resultado dizendo que o vetor-posição da partícula varre áreas iguais em tempos iguais.

Essas três conclusões podem ser resumidas da seguinte forma:

Se o momento angular de uma partícula é conservado, ela se move em um plano, com o vetor-posição varrendo áreas iguais em tempos iguais, e sempre no mesmo sentido.

Um caso importante em que temos conservação do momento angular é aquele no qual a força total sobre a partícula aponta sempre para um ponto fixo. Uma força com essa característica é chamada, como já vimos, força central. O momento angular da partícula relativo ao ponto fixo para o qual aponta a força central, chamado centro de força, é conservado, pois é nulo o torque dessa força relativo ao centro de força (é imediato perceber que esse torque é nulo, pois, nesse caso, \mathbf{r} e \mathbf{F} são vetores que possuem a mesma direção, fazendo com que $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$).

Exemplo 29.2

Suponha que uma partícula de massa m descreva um movimento circular uniforme cuja função-movimento seja dada por

$$\mathbf{r} = R[\cos(\omega t) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t) \mathbf{u}_y],$$

onde R e ω são constantes positivas. É fácil perceber que a trajetória da partícula é uma circunferência de raio R com centro na origem dos eixos cartesianos e que o sentido do movimento é o anti-horário, quando observado de um ponto no semi-eixo positivo \mathcal{OZ} . Com este exemplo, desejamos ilustrar vários tópicos abordados na teoria exposta ao longo desta aula: inicialmente, vamos obter as expressões do momento angular \mathbf{L} da partícula e do torque da força total, ambos em relação à origem, e verificar a validade do Teorema do Momento Angular e

Movimentos circulares uniformes são muito comuns em Física, muito embora sejam, na maioria das vezes, idealizações de movimentos reais. Exemplos vão desde o movimento de um pequeno objeto no extremo de um fio ideal girando horizontalmente sobre uma mesa lisa até alguns movimentos celestes, como os movimentos planetários.

Torque; em seguida, pelo fato de o momento angular da partícula em relação à origem ser constante, verificaremos as três propriedades discutidas no texto, que decorrem diretamente dessa lei de conservação.

A partir da função-movimento anterior, calculamos a velocidade da partícula em qualquer instante:

$$\mathbf{v} = \omega R[-\sin(\omega t) \mathbf{u}_x + \cos(\omega t) \mathbf{u}_y].$$

Conhecidas a função-movimento e a função-velocidade da partícula, calculamos o seu momento angular em relação à origem, cujo resultado é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \\ &= mR^2\omega[\cos(\omega t) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t) \mathbf{u}_y] \times [-\sin(\omega t) \mathbf{u}_x + \cos(\omega t) \mathbf{u}_y] \\ &= mR^2\omega[\cos^2(\omega t) \mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y - \sin^2(\omega t) \mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x] \\ &= mR^2\omega \mathbf{u}_z, \end{aligned} \quad (29.38)$$

onde usamos as relações $\mathbf{u}_x \times \mathbf{u}_y = -\mathbf{u}_y \times \mathbf{u}_x = \mathbf{u}_z$, o fato de que o produto vetorial entre dois vetores paralelos entre si é nulo e a identidade trigonométrica $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Uma vez que \mathbf{L} é constante, $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$.

Calculemos, agora, o torque da força total \mathbf{F} sobre a partícula em relação à origem. Lembrando que $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$, temos

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -m\omega^2 R[\cos(\omega t) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t) \mathbf{u}_y] = -m\omega^2 \mathbf{r}.$$

Como \mathbf{r} é paralelo a \mathbf{F} , obtemos

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (-m\omega^2 \mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

ou seja, o torque exercido pela força \mathbf{F} em relação à origem é nulo. Como já havíamos mostrado que $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$, fica assim verificada, nesse caso, a validade do Teorema do Momento Angular e Torque ($\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$).

Sendo \mathbf{L} uma quantidade conservada, devem ser satisfeitas as propriedades discutidas anteriormente, a saber, o movimento deve ser plano, deve manter o mesmo sentido de giro em torno da origem e, por fim, a lei das áreas tem de ser satisfeita, isto é, o vetor-posição da partícula deve varrer áreas iguais em tempos iguais. As duas primeiras são verificadas imediatamente, uma vez que todo movimento circular é plano, e pelo fato de o movimento ser uniforme, a partícula nunca muda o sentido do movimento. Falta-nos, então, verificar a lei das áreas.

Definindo θ como o ângulo entre o vetor-posição da partícula e o eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$, vemos que $\theta = \omega t$ e, portanto, $d\theta/dt = \omega$, isto é, $d\theta/dt$ é uma constante positiva. Desse modo, podemos reescrever \mathbf{L} na forma mais sugestiva

$$\mathbf{L} = mR^2 \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_z.$$

Em contrapartida, num intervalo de tempo infinitesimal dt , entre o instante genérico t e o instante $t + dt$, o ângulo varrido pelo vetor-posição da partícula é $d\theta = \omega dt$, de modo que a área infinitesimal varrida por esse vetor-posição, nesse intervalo, é a área do triângulo hachurado na Figura 29.10, dada por

$$dA = \frac{1}{2} R^2 d\theta = \frac{1}{2} R^2 \omega dt.$$

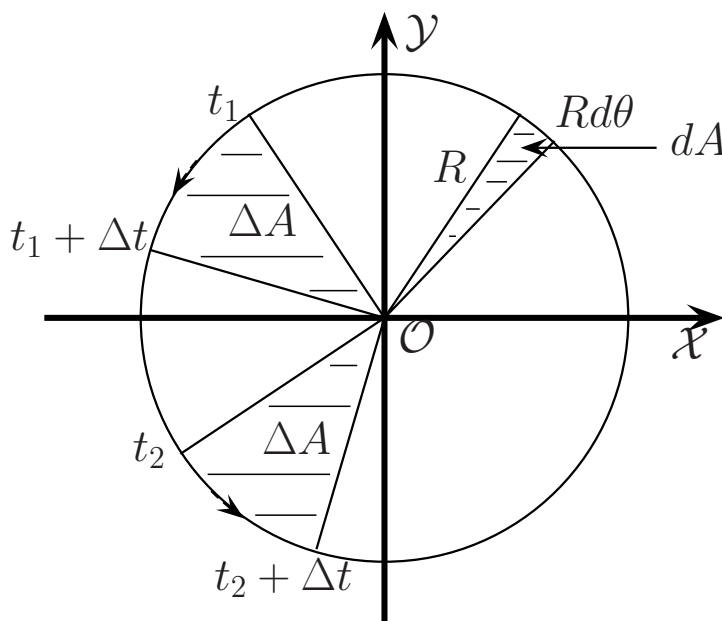


Figura 29.10: O triângulo hachurado infinitesimal é isóceles. Por ser $Rd\theta$ um comprimento de arco infinitesimal, podemos considerar R a altura desse triângulo e $Rd\theta$ o comprimento de sua base, de forma que sua área é $(1/2)R^2 d\theta$. As áreas varridas nos intervalos $[t_1, t_1 + \Delta t]$ e $[t_2, t_2 + \Delta t]$ são iguais, quaisquer que sejam os instantes t_1 e t_2 .

Uma vez que R e ω são constantes, a área ΔA varrida no intervalo finito $[t, t + \Delta t]$ é dada por

$$\Delta A = \int dA = \frac{1}{2} R^2 \omega \int_t^{t+\Delta t} dt' = \frac{1}{2} R^2 \omega \Delta t.$$

Analisando a expressão anterior, concluímos que num movimento circular uniforme, o vetor-posição da partícula varre áreas iguais em tempos iguais. Esse fato está ilustrado na Figura 29.10, onde estão hachuradas áreas varridas finitas em dois intervalos de tempo genéricos, mas de mesma duração Δt , um deles com

início no instante t_1 e o outro com início no instante t_2 , sendo t_1 e t_2 instantes de tempo quaisquer.

Exemplo 29.3

O objetivo deste exemplo é analisar o movimento de um pêndulo simples, supondo, para simplificar, que ele ocorra sempre no mesmo plano vertical, mas utilizando o Teorema do Momento Angular e Torque, isto é, usando a equação $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$, em lugar da Segunda Lei de Newton ($\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$). Com isso, estamos ilustrando o fato de que, no caso de movimentos de uma única partícula, estas equações são equivalentes.

A Figura 29.11 ilustra um instante genérico do movimento de um pêndulo simples formado por um fio ideal de comprimento ℓ e uma pequena esfera de massa m de dimensões desprezíveis. Seja θ o ângulo entre o fio e a vertical e \mathbf{T} a tração do fio no instante considerado. Por conveniência, escolhemos o eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$ com direção vertical, apontando para baixo e com a origem no ponto de suspensão do pêndulo. Na Figura 29.11 estão indicados, ainda, o arco percorrido na trajetória s , o vetor unitário na direção tangencial \mathbf{u}_t e o vetor unitário na direção radial \mathbf{u}_r .

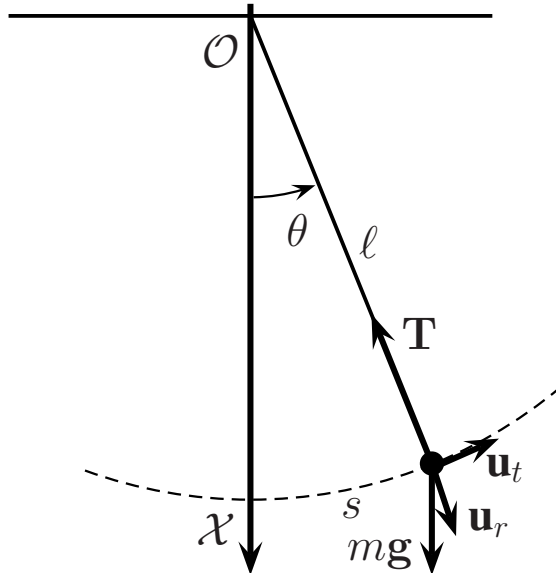


Figura 29.11: Pêndulo simples numa posição genérica de seu movimento.

Num instante genérico, o vetor-posição e a velocidade da esfera são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{r} = \ell \mathbf{u}_r \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \dot{s} \mathbf{u}_t = \ell \dot{\theta} \mathbf{u}_t ,$$

onde usamos o fato de que $s = \ell\theta$. A partir das expressões anteriores, podemos calcular o momento angular da esfera em relação à origem, isto é,

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\ell^2\dot{\theta}(\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_t) = m\ell^2\dot{\theta}\mathbf{u}_z,$$

onde definimos o vetor $\mathbf{u}_z = \mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_t$, unitário, perpendicular ao plano do movimento e apontando da figura para nossos olhos.

Derivando em relação ao tempo a expressão anterior, obtemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m\ell^2\ddot{\theta}\mathbf{u}_z. \quad (29.39)$$

Calculemos, agora, o torque da força total sobre a esfera em relação à origem. Por definição, ele é dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times (\mathbf{T} + m\mathbf{g}).$$

Como \mathbf{r} e \mathbf{T} são vetores paralelos entre si, temos $\mathbf{r} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$. Além disso, decompondo \mathbf{g} em suas componentes ao longo dos vetores unitários \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_t , obtemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \ell\mathbf{u}_r \times mg[\cos\theta\mathbf{u}_r - \sin\theta\mathbf{u}_t] \\ &= -mg\ell\sin\theta\mathbf{u}_z, \end{aligned} \quad (29.40)$$

onde usamos as relações $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$ e $\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_z$. Usando o Teorema do Momento Angular e Torque, isto é, a partir da equação $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ e das equações (29.39) e (29.40), temos

$$-mg\ell\sin\theta\mathbf{u}_z = m\ell^2\ddot{\theta}\mathbf{u}_z,$$

o que nos permite obter a seguinte equação diferencial para θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0. \quad (29.41)$$

Essa é exatamente a equação diferencial para θ , que teríamos obtido se tivéssemos usado diretamente a Segunda Lei de Newton. Trata-se de uma equação diferencial muito complicada para ser discutida neste curso, mas que se reduz a uma equação diferencial bem mais simples quando consideramos o caso particular em que $|\theta| \ll 1$, ou seja, pequenas amplitudes de oscilação. Nesse caso, $\sin\theta \approx \theta$ e a equação diferencial anterior se reduz à equação de um oscilador harmônico simples, isto é,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0,$$

cujas soluções gerais são dadas por $\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \alpha)$, sendo θ_0 e α duas constantes arbitrárias, determinadas pelas condições iniciais.

Deve ter ficado claro para você que, no estudo do movimento de uma única partícula, a aplicação da equação $\tau = dL/dt$ é totalmente equivalente à aplicação da Segunda Lei de Newton.

Resumo

Produto vetorial de um par ordenado de vetores não-colineares é o vetor cuja direção é perpendicular aos dois vetores, cujo sentido é o determinado pela regra da mão direita aplicada ao par e cujo módulo é o produto do módulo do primeiro vetor pelo módulo do segundo vetor e pelo seno do ângulo entre eles. O sentido, determinado pela regra da mão direita, é aquele em que aponta o polegar quando os demais dedos indicadores apontam no sentido que vai do primeiro vetor para o segundo, varrendo o ângulo entre os dois vetores. Se os dois vetores não são colineares, o seu produto vetorial é o vetor nulo, por definição. O produto vetorial de dois vetores é nulo se, e somente se, algum deles for nulo ou se forem paralelos entre si. O módulo do produto vetorial de dois vetores é a área do paralelogramo formado por eles. O produto vetorial de dois vetores é igual ao produto do primeiro pela projeção vetorial do segundo no plano perpendicular ao primeiro (não-nulo, por hipótese). Para determinar a projeção vetorial do segundo vetor no plano perpendicular ao primeiro, desenhamos os dois com a mesma origem e traçamos da extremidade final do segundo uma perpendicular ao plano que passa pela origem comum e é perpendicular ao primeiro. Essa projeção vetorial é o vetor que vai da origem comum ao pé da perpendicular traçada.

O produto vetorial é anti-simétrico, distributivo em relação à adição, e fica multiplicado por um número se um dos fatores for multiplicado por esse número. O produto vetorial de dois vetores é um determinante 3 por 3, no qual a primeira coluna é constituída pelo unitário do eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$ e pelas componentes ao longo desse eixo do primeiro e do segundo vetor, nesta ordem; a segunda coluna é constituída pelos elementos análogos associados ao eixo $\mathcal{O}\mathcal{Y}$; a terceira coluna, pelos análogos do eixo $\mathcal{O}\mathcal{Z}$. Aplicando essa regra aos próprios unitários dos eixos, obtemos imediatamente os seus produtos vetoriais. A derivada do produto vetorial de dois vetores é a soma vetorial do produto vetorial da derivada do primeiro pelo segundo com o produto vetorial do primeiro pela derivada do segundo.

Vetor-posição de uma partícula relativo a um ponto fixo Q é o vetor que vai

de Q até a partícula e tem módulo igual à distância entre ela e Q . Momento angular de uma partícula relativo a um ponto fixo Q é o produto vetorial do vetor-posição da partícula relativo ao ponto Q pelo momento linear da partícula. Torque relativo a um ponto fixo Q de uma força que age sobre uma partícula é o produto vetorial do vetor-posição da partícula relativo ao ponto Q pela força. A taxa instantânea de variação do momento angular de uma partícula relativo a um ponto fixo Q é igual ao torque relativo a Q da força total que age sobre a partícula. Esse é o Teorema do Momento Angular e Torque. O Teorema da Conservação do Momento Angular de uma partícula afirma que seu momento linear se conserva se o torque da força total sobre ela for nulo. Se o momento angular de uma partícula é conservado, ela se move em um plano, com o vetor-posição varrendo áreas iguais em tempos iguais, e sempre no mesmo sentido.

Questionário

1. O que é produto vetorial?
2. Sob que condições é nulo o produto vetorial de dois vetores?
3. Qual é o significado geométrico do módulo do produto vetorial?
4. O que é projeção vetorial de um vetor no plano perpendicular a um vetor não-nulo?
5. Como se modifica o produto vetorial de dois vetores, quando o segundo é substituído pela sua projeção vetorial no plano perpendicular ao primeiro?
6. Quais são as propriedades algébricas elementares do produto vetorial?
7. Como o produto vetorial pode ser calculado por meio de um determinante?
8. Como se expressa a derivada do produto vetorial de dois vetores, em termos das derivadas dos vetores?
9. O que é vetor-posição de uma partícula, relativo a um ponto fixo?
10. O que é momento angular de uma partícula, relativo a um ponto fixo?
11. O que é torque relativo a um ponto fixo de uma força que age sobre uma determinada partícula?
12. Enuncie o Teorema do Momento Angular e Torque.

13. Enuncie o Teorema da Conservação do Momento Angular de uma partícula.
14. Que consequências tem a conservação do momento angular de uma partícula sobre seu movimento?

Problemas propostos

1. Sejam dois vetores não-nulos \mathbf{a} e \mathbf{b} . Faça um gráfico do módulo do produto vetorial de \mathbf{a} por \mathbf{b} versus o ângulo θ entre os vetores.
2. Considere os pontos $A(4, 3, 0)$ e $B(2, 3, 0)$ e sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} os vetores \vec{OA} e \vec{OB} , respectivamente, como indica a Figura 29.12.

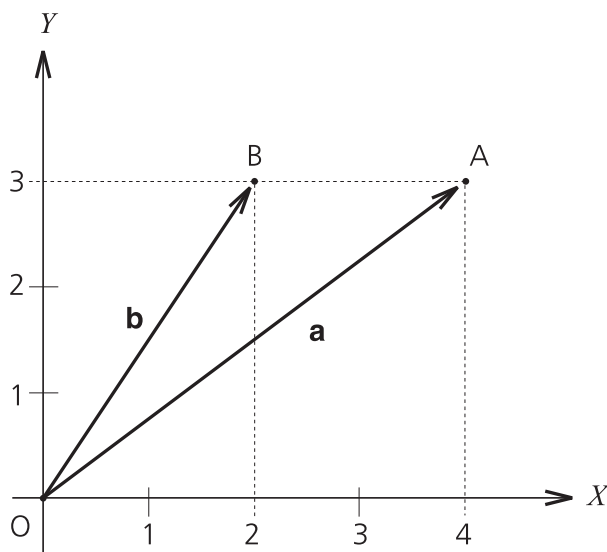


Figura 29.12: Triângulo formado pelos pontos O , A e B .

- (a) A partir da definição de produto vetorial entre dois vetores, calcule $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
- (b) Calcule novamente o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, mas utilizando agora as propriedades algébricas desse produto. Ou seja, escreva \mathbf{a} e \mathbf{b} como combinações lineares dos vetores unitários da base cartesiana; utilize a propriedade da distributividade do produto vetorial em relação à adição e use os resultados que você já conhece para os produtos vetoriais entre os vetores unitários dessa base. Confira o resultado com o encontrado no item anterior.

3. Usando a definição de produto vetorial entre dois vetores e seguindo um raciocínio análogo ao feito no texto, mostre que

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}_\perp \times \mathbf{b},$$

onde \mathbf{a}_\perp é a projeção vetorial do vetor \mathbf{a} no plano perpendicular ao vetor \mathbf{b} .

4. Considere o cubo de arestas de comprimento ℓ ilustrado na Figura 29.13. Nessa figura, estão desenhados os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} que começam na origem e terminam nos vértices A e B , respectivamente.
- (a) A partir da definição de produto vetorial, calcule $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, isto é, calcule o módulo, a direção e o sentido desse produto vetorial.
- (b) Calcule novamente o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, mas utilizando agora as propriedades algébricas desse produto. Ou seja, escreva \mathbf{a} e \mathbf{b} como combinações lineares dos vetores unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z , utilize a propriedade da distributividade do produto vetorial em relação à adição vetorial e use os resultados que você já conhece para os produtos vetoriais entre os vetores unitários dessa base. Confira o resultado com o encontrado no item anterior.

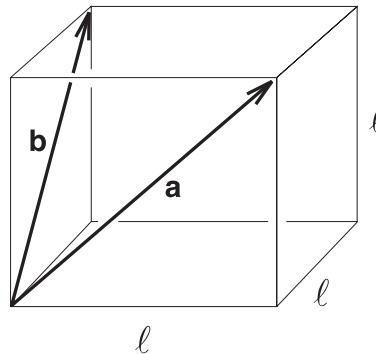


Figura 29.13: Cubo de arestas de comprimento ℓ e vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} ao longo de diagonais de dois de seus lados.

5. Sejam dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} não-colineares. Desenhe \mathbf{a} e \mathbf{b} com a mesma origem em um ponto P e trace uma reta paralela ao vetor \mathbf{a} que passe pela extremidade final do vetor \mathbf{b} . Seja \mathbf{b}' o vetor que vai da origem comum P até um ponto P' qualquer da reta. Demonstre que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}'$. Em que situação esse resultado se reduz à propriedade (29.7)?
6. Dados os vetores $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z$ e $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z$, calcule o produto vetorial $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ usando a fórmula das componentes e a fórmula do determinante. Confira os resultados.

7. Usando as propriedades do produto vetorial entre dois vetores que achar conveniente, demonstre que

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}.$$

8. A partir das definições de momento angular de uma partícula em relação a um ponto fixo genérico Q e torque da força total que age sobre ela em relação a esse mesmo ponto, mostre que

$$\frac{d\mathbf{L}_Q}{dt} = \boldsymbol{\tau}_Q.$$

9. Considere um hexágono cujos lados têm comprimento ℓ . Seus vértices estão localizados nos pontos O , A , B , C , D e E , sendo O a origem dos eixos cartesianos, como ilustra a Figura 29.14.

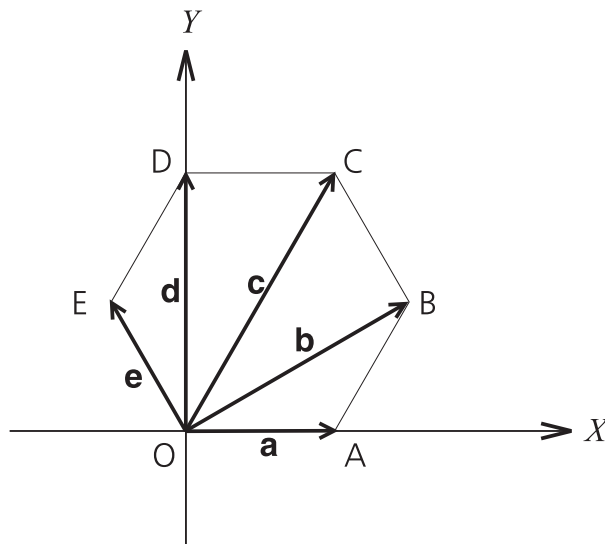


Figura 29.14: Hexágono de vértices localizados nos pontos O , A , B , C , D e E .

Defina, agora, os vetores:

$$\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}; \quad \mathbf{b} = \overrightarrow{OB}; \quad \mathbf{c} = \overrightarrow{OC}; \quad \mathbf{d} = \overrightarrow{OD} \quad \text{e} \quad \mathbf{e} = \overrightarrow{OE}.$$

Calcule os produtos vetoriais $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$; $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$ e $\mathbf{d} \times \mathbf{e}$ e interprete os resultados encontrados.

10. A função-movimento de uma partícula de massa m é dada por $\mathbf{r} = b \mathbf{u}_y - v_0 t \mathbf{u}_x$, onde b e v_0 são constantes positivas.
- (a) Desenhe a trajetória da partícula e descreva seu movimento de uma forma sucinta.

- (b) Calcule o momento angular L da partícula em relação à origem e verifique que se trata de uma quantidade conservada.
- (c) Verifique, nesse caso particular, a validade do Teorema do Momento Angular e Torque.
- (d) Uma vez que L é uma constante de movimento, verifique as propriedades que decorrem desse fato, ou seja, que o movimento é plano, que o sentido de giro em torno da origem não muda e, por fim, que vale a lei das áreas.

11. Considere o movimento de um projétil de massa m que é lançado, no instante $t_0 = 0$, a partir de um ponto P situado no solo com uma velocidade v_0 . Seja g a aceleração da gravidade e despreze, nesta questão, a força de resistência do ar.

- (a) Calcule o momento angular L do projétil em relação ao ponto P em um instante qualquer t entre o inicial e aquele no qual o projétil toca o solo pela primeira vez. Escreva a sua resposta em função de t e dos vetores v_0 e g .
- (b) Calcule o torque da força total que atua sobre o projétil em relação ao ponto P no instante genérico t .
- (c) Verifique a validade do Teorema do Momento Angular e Torque.
- (d) O vetor-posição do projétil varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais? Justifique sua resposta.

12. Uma partícula de massa m se aproxima de uma esfera homogênea de raio R e massa M . A partícula vem do infinito com velocidade inicial v_0 e parâmetro de impacto b . Suponha que a única interação entre a partícula e a esfera seja a gravitacional e, ainda, que a esfera esteja em repouso num referencial inercial, com seu centro coincidindo com a origem dos eixos cartesianos, como ilustra a Figura 29.15.

- (a) Explique por que a energia mecânica da partícula, E , e o seu momento angular em relação à origem, L , são quantidades conservadas no problema em consideração.
- (b) Utilizando as leis de conservação de E e de L , determine o valor mínimo do parâmetro de impacto (b_{min}), abaixo do qual a partícula colidirá, necessariamente, com a esfera.

Nesse problema, o parâmetro de impacto é definido como a distância entre a partícula e uma reta paralela à sua velocidade inicial e que passa pelo centro da esfera, como indica a Figura 29.15.

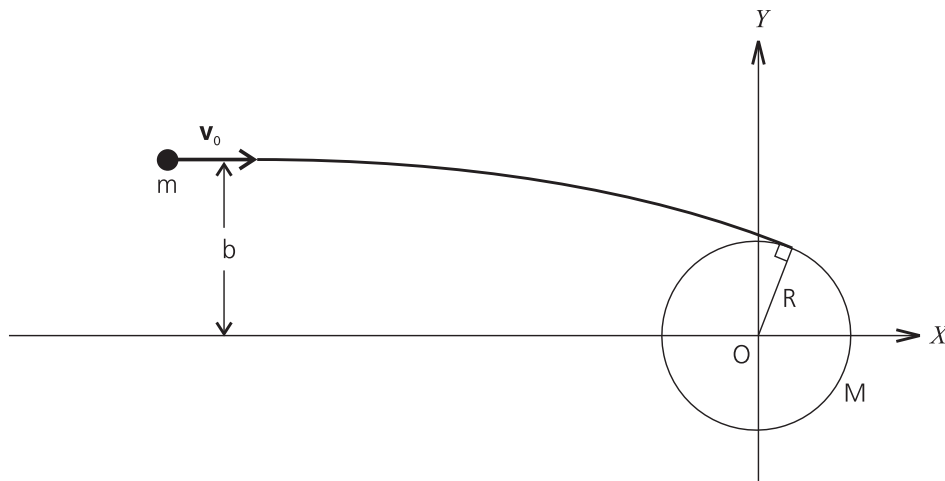


Figura 29.15: Partícula de massa m incidindo sobre uma esfera homogênea de raio R e massa M .

13. A primeira lei de Kepler afirma que as trajetórias dos planetas em torno do Sol são elípticas, com o Sol em um de seus focos. A Figura 29.16 mostra a trajetória elíptica de uma partícula de massa m em torno de uma outra, de massa M , com a qual interage apenas gravitacionalmente. Por hipótese, a partícula de massa M está fixa num referencial inercial e sua posição coincide com a origem do sistema de eixos cartesianos. Nessa figura, estão mostrados ainda os pontos A e P , assim como as respectivas distâncias r_a e r_p desses pontos à origem.

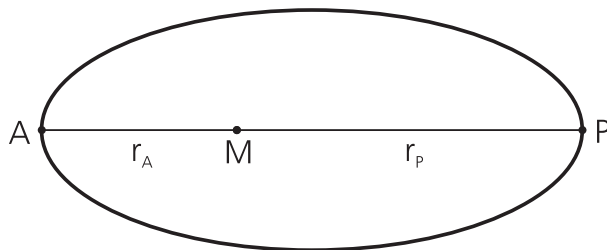


Figura 29.16: Trajetória elíptica de uma partícula de massa m em torno e outra, fixa e de massa M , situada num dos focos da elipse.

- (a) Explique por que a energia mecânica da partícula (E) e o seu momento angular em relação à origem (L) são quantidades conservadas no problema em consideração.
- (b) Aplicando as leis de conservação de E e de L às posições A e P , mostre que a energia mecânica da partícula é dada por

$$E = -\frac{GMm}{r_A + r_P} = -\frac{GMm}{2a},$$

onde a é o semi-eixo maior da elipse.

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de responder a todo o questionário. Note que ele contém muitas questões, pois esta foi uma aula longa, devido à necessidade de introduzirmos a definição de produto vetorial entre dois vetores e suas principais propriedades. É importante que você só passe para os problemas propostos após ter respondido realmente a todas as questões. Observe, também, que os nove primeiros problemas se referem ao produto vetorial entre dois vetores. Este é um dos tópicos de Matemática no qual os alunos têm mais dúvidas. Por esse motivo, tente resolver os nove problemas. Todos exigem a compreensão da definição de produto vetorial, assim como algumas de suas propriedades. Alguns são mais difíceis do que outros, como, por exemplo, o problema 4, que exige uma visualização geométrica da situação. Dos quatro problemas restantes, o problema 10 é simples, o problema 11 é de dificuldade média e os dois últimos são os mais complicados. Caso você não consiga resolvê-los numa primeira tentativa, pode seguir adiante e entrar no Módulo 4, pois você não será prejudicado. No entanto, sempre que sobrar algum tempo, tente resolver os dois últimos problemas desta aula, como um desafio.

ISBN 85-7648-047-6



9 788576 480471



UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense



SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ministério
da Educação

