

Carlos Farina de Souza
Marcus Venicius Cougo Pinto
Paulo Carrilho Soares Filho

Física 1A





Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Física 1A

Volume 1 - Módulo 1

Carlos Farina de Souza

Marcus Venicius Cougo Pinto

Paulo Carrilho Soares Filho



SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério
da Educação



Apoio:



Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 - Mangureira - Rio de Janeiro, RJ - CEP 20943-001
Tel.: (21) 2299-4565 Fax: (21) 2568-0725

Presidente

Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-Presidente de Educação Superior a Distância

Celso José da Costa

Diretor de Material Didático

Carlos Eduardo Bielschowsky

Coordenação do Curso de Física

Luiz Felipe Canto

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Carlos Farina de Souza
Marcus Venicius Cougo Pinto
Paulo Carrilho Soares Filho

EDITORA

Tereza Queiroz

COORDENAÇÃO EDITORIAL

Jane Castellani

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Ana Tereza de Andrade
Carmen Irene Correia de Oliveira
Leonardo Villela
José Meyohas

COORDENAÇÃO DE LINGUAGEM

Maria Angélica Alves

REVISÃO TIPOGRÁFICA

Equipe CEDERJ

COORDENAÇÃO GRÁFICA

Jorge Moura

PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas

ILUSTRAÇÃO

Equipe CEDERJ

CAPA

Eduardo de Oliveira Bordoni
Fabio Muniz

PRODUÇÃO GRÁFICA

Andréa Dias Fiães
Katy Araujo

Copyright © 2005, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

S729f

Souza, Carlos Farina de.

Física 1A. v.1 / Carlos Farina de Souza. – Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2007.
280p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 85-89200-67-1

1. Movimento retilíneo. 2. Movimento não-retilíneo.
3. Vetores. 4. Cinemática vetorial. I. Soares Filho, Paulo Carrilho. II. Pinto, Marcus Venicius C. III. Título.

CDD: 530.1

2007/1

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governadora
Rosinha Garotinho

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Wanderley de Souza

Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**
Reitor: Raimundo Braz Filho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Nival Nunes de Almeida

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Cícero Mauro Fialho Rodrigues

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO**
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL
DO RIO DE JANEIRO**
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO
DO RIO DE JANEIRO**
Reitora: Malvina Tania Tuttman

SUMÁRIO

Aula 1 - Noções básicas sobre o movimento	7
Aula 2 - A descrição matemática do movimento	21
Aula 3 - Deslocamento e velocidade média no movimento retilíneo	37
Aula 4 - Velocidade instantânea no movimento retilíneo	61
Aula 5 - De volta às funções-movimento	79
Aula 6 - Gráficos do movimento	107
Aula 7 - Aceleração no movimento retilíneo	137
Aula 8 - Movimentos não-retilíneos e vetores	163
Aula 9 - Cinemática vetorial	195
Aula 10 - Começando a praticar	225
Aula 11 - Exemplos de movimentos não-retilíneos	237
Aula 12 - Medindo o movimento	269
Anexo - Introdução ao tratamento de dados	277

Aula 1 – Noções básicas sobre o movimento

Objetivos

- Entender os conceitos de partícula, corpo rígido, eixos coordenados, referencial e posição de uma partícula.
- Entender como esses conceitos fundamentam o conceito de movimento usado em mecânica.

Introdução

Um pôr-de-sol é sempre belo e, em alguns dias do ano, pode ser um espetáculo maravilhoso. A cor do céu vai mudando do azul esmaecido para o rosado e o rubro, à medida que o disco solar vai desaparecendo na linha do horizonte. Enquanto ainda há claridade talvez um pássaro cruze o céu voando para longe e escutemos seu pio triste de tempos em tempos, até que sua silhueta alada se torne um pontinho e desapareça junto com os últimos raios de luz vespertina.

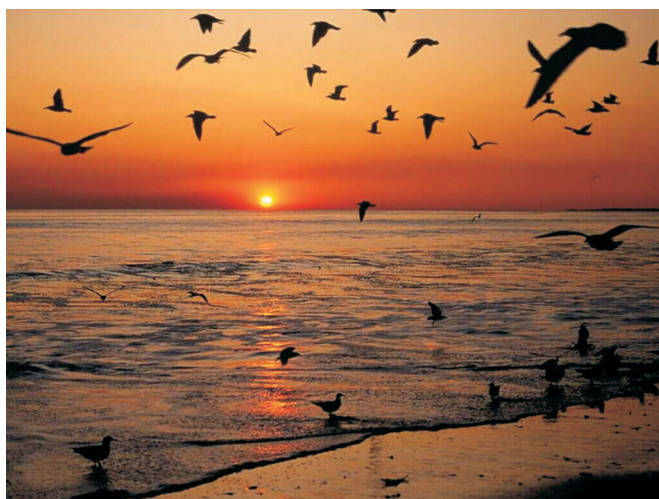


Figura 1.1: A natureza é movimento.

Em uma cena como essa, vemos a mudança de cor do céu e a mudança de posição do sol em relação ao horizonte. Vemos o movimento do pássaro e ouvimos o seu pio, que é uma forma de movimento, a vibração sonora que se processa no ar e que se propaga do pássaro até nossos ouvidos. Todas as luzes que percebemos são ondas vibratórias que se propagam do sol, do céu e de tudo que

vemos até nossos olhos. Tudo isso é mudança, é movimento. Mesmo uma rocha que nos parece imóvel é constituída de enorme quantidade de átomos em constante vibração, com seus elétrons em movimento em torno dos núcleos. A natureza é movimento e por isso os antigos chamavam o estudo da natureza de *estudo do ser móvel*. Também chamavam de Física o estudo da natureza. Hoje a ciência da Física se restringe às leis mais gerais e fundamentais da natureza, deixando para outras ciências, como a química e a biologia, os estudos de certos fenômenos mais específicos, no caso os químicos e biológicos. Mas a Física de hoje, como a antiga, ocupa-se essencialmente do estudo de movimentos e mudanças em geral.

Chamamos genericamente de mecânica o estudo dos movimentos dos corpos materiais. Na verdade, a mecânica que estudaremos aqui é a chamada mecânica clássica. Nela estudamos apenas os corpos macroscópicos, isto é, muito maiores do que as dimensões atômicas. O movimento de corpos pequeninos, como os átomos, é explicado não pela mecânica clássica, mas pela mecânica quântica, que você estudará em disciplinas mais avançadas.

Sabemos que um corpo está em movimento porque as distâncias entre ele e outros corpos vão mudando com o passar do tempo. Para estudarmos o movimento devemos então ser capazes de medir distâncias e intervalos de tempo, isto é, devemos dispor na prática de réguas e relógios. No estudo teórico da Mecânica fazemos a suposição de que dispomos de uma quantidade ilimitada de réguas e relógios em qualquer local que quisermos e, além disso, supomos que tais instrumentos têm uma precisão tão boa quanto desejarmos. Não é necessário dizer que essas suposições são idealizadas e otimistas ao máximo. Em uma situação concreta, quando fazemos uma medida experimental, há um número enorme de complicações e limitações, em especial o fato de que as réguas e relógios têm sempre uma precisão limitada (em geral menor do que a que gostaríamos de ter!). No entanto, no estudo teórico é necessário e mesmo conveniente fazer as suposições idealizadas que descrevemos acima sobre nossa capacidade de medir. É bom lembrar que supomos como dado o método correto de usar as réguas e relógios. Usaremos o **metro** como unidade de distância, ou comprimento. Quando conveniente também usaremos os seus múltiplos e submúltiplos decimais. Como unidade de tempo usaremos o **segundo** e seus múltiplos e submúltiplos decimais. Em alguns casos usaremos também seus múltiplos sexagesimais, o minuto e a hora. Essas são as unidades de comprimento e tempo do Sistema Internacional de Unidades, o SI. Quando nada for dito sobre a unidade usada subentendemos que é o metro para comprimento e o segundo para o tempo. Os movimentos que consideramos acima, o movimento do sol, do pássaro, ou o movimento das moléculas do ar que dão origem ao som, são muito complicados para começarmos por eles o estudo

da mecânica. Embora nosso objetivo na mecânica seja criar uma teoria capaz de descrever e entender, pelo menos em princípio, qualquer tipo de movimento, para chegar a esse objetivo ambicioso, vamos lançar mão de um método usado com maestria por Galileu, um dos pais da Física. Esse método consiste em abordar um fenômeno que se deseja estudar escolhendo objetos e situações as mais simples possíveis. Além disso, abstraímos dos objetos e das situações todas as características concretas que complicam o seu estudo. O que sobra é um modelo muito simples e idealizado da realidade. Depois de compreendermos a situação simples, introduzimos aos poucos as características concretas que julgarmos mais relevantes e vamos estudando situações cada vez mais complexas. O estudo começa então de um modo muito simples e idealizado e vai se tornando paulatinamente mais complexo e mais próximo das situações reais.

Dentro dessa estratégia, de começar com as questões mais simples, vamos inicialmente estudar como descrever fielmente os movimentos, para depois investigar a questão mais difícil, qual seja: quais são as causas desses movimentos. A parte da mecânica que estuda a descrição dos movimentos é chamada de **cinemática** e aquela que estuda as causas dos movimentos, de **dinâmica**. Começaremos pois, nosso estudo, pela cinemática.

Você notará que grande parte do nosso estudo inicial consistirá em criar um vocabulário. Dedicaremos muito tempo e espaço em definir o significado de certas palavras e em criar nomes para conceitos relacionados com o movimento. Não devemos subestimar essa parte de nosso estudo, pois as palavras são o instrumento do pensamento e da ciência e, quando bem definidas e escolhidas, tornam-se um instrumento afiado e preciso para a investigação científica.

Partículas

Consideremos, em primeiro lugar, o tipo de corpo mais simples que podemos imaginar. Trata-se de um corpo cujas dimensões são desprezíveis na situação em que vamos considerar. É pois um corpo que em uma situação específica pode ser considerado como um ponto geométrico, no que diz respeito às suas dimensões. Tal corpo é chamado **partícula** ou de **ponto material**. Um automóvel pode ser considerado como uma partícula, se queremos descrever uma viagem sua do Rio a São Paulo. Tome um mapa com essas duas cidades e tente representar nele o carro. Certamente você vai representá-lo por um pontinho. Por outro lado, se quisermos estudar os movimentos de manobra de um carro dentro de uma garagem não podemos considerá-lo como uma partícula, pois nessa situação suas dimensões são importantes. Deve ficar claro com esse exemplo que

Galileo Galilei, físico e astrônomo italiano (Pisa, 1564 - Arcetri, 1642). Foi um dos fundadores do método experimental em Física. Descobriu o isocronismo das pequenas oscilações do pêndulo e as leis da queda dos corpos, enunciou o princípio da inércia e a lei da composição das velocidades. Construiu lunetas e com elas fez descobertas fundamentais para a astronomia que o levaram à defesa do sistema planetário heliocêntrico de Copérnico. Essa defesa lhe trouxe problemas com a Inquisição, perante a qual teve de abjurar suas idéias em 1633.

um corpo pode ou não ser considerado como partícula, dependendo do problema em questão. Devemos levar em consideração o tamanho do corpo em relação a outros corpos, quão grandes são as distâncias que ele percorre e qual a precisão que desejamos ou de que dispomos para medir distâncias e intervalos de tempo. Por esse motivo é que não dizemos simplesmente que uma partícula é um corpo de dimensões desprezíveis, mas que partícula é um corpo de dimensões desprezíveis em um dado problema. Um outro exemplo que ilustra bem o conceito de partícula é o da Terra. Se o problema que desejamos estudar é o do movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo, movimento que causa a sucessão de dias e noites, não podemos considerar a Terra como uma partícula, pois uma partícula não tem partes que possam girar umas em torno das outras. Já para considerar o movimento anual da Terra em torno do sol, a mesma Terra pode ser considerada como uma partícula, pois ela tem um diâmetro que é oito centésimos de milésimos de sua distância ao sol e um milésimo da distância que percorre em um ano; seu tamanho é de fato desprezível no estudo de seu movimento anual. Para encerrar essa discussão do conceito de partícula convém notar que para dizermos que um corpo tem ou não dimensões desprezíveis é necessário o uso de uma régua para avaliar as ditas dimensões no problema em consideração. Esse é um motivo, entre outros, que faz com que seja necessário supor, no estudo da Mecânica, que dispomos de réguas para a medição de comprimentos.

Sistemas de partículas e corpos rígidos

Na seção anterior definimos o conceito de partícula. Considere agora um corpo qualquer cujas dimensões não sejam desprezíveis no problema em consideração. Ele não pode ser considerado como uma partícula. Ele pode, no entanto, ser considerado como um conjunto de partes tão pequenas, que cada uma delas pode ser considerada como uma partícula. Desse modo podemos dizer que todo corpo pode ser considerado como um conjunto de partículas. Olhe para uma folha de papel. Você pode mentalmente quadricular a folha em quadradinhos de um milímetro de lado. Pode ser que no problema que vamos estudar tais quadradinhos de papel possam ser considerados como partículas e teremos então que a folha de papel será, nesse problema, o conjunto dessas partículas. Por outro lado, consideremos a folha de papel em um problema mais delicado, no qual um milímetro é uma distância importante, embora um comprimento de, por exemplo, um centésimo de milímetro, já seja desprezível. Nesse caso consideramos a folha mentalmente dividida em quadradinhos de lados menores do que um centésimo de milímetro, para termos certeza de que suas dimensões sejam efetivamente des-

prezíveis no problema em tela. Novamente poderemos considerar a folha como um conjunto de partículas.

Qualquer parte do universo bem definida é chamada de **sistema físico**. Por bem definida entendemos que está exatamente estabelecido o que pertence a essa parte e o que não pertence. Em mecânica, um sistema físico é sempre constituído por um ou vários corpos. Como cada corpo é um conjunto de partículas, todo sistema físico em mecânica é um conjunto de partículas. O conjunto de partículas que forma um sistema qualquer é chamado também de **sistema de partículas**. Desse modo, em mecânica, estaremos sempre lidando com sistemas de partículas.

Quando o sistema físico que estamos considerando é constituído por apenas uma partícula, a rigor ele é um sistema de partículas com uma única partícula. No entanto, quando nos referimos a um sistema de partículas, o que normalmente estamos querendo dizer é que há mais de uma partícula no sistema.

Usando a idéia de que qualquer corpo é um conjunto de partículas vamos definir um **corpo rígido** como sendo um conjunto de partículas com a seguinte propriedade: a distância entre qualquer par de partículas do conjunto permanece sempre a mesma. Certamente essa definição está de acordo com o conceito que todos fazemos de um corpo rígido. A folha de papel que consideramos no exemplo anterior não é um corpo rígido. É fácil mudar a distância entre os diversos pontos da folha enrolando-a e dobrando-a. Um corpo perfeitamente rígido é uma idealização que não existe na natureza, pois qualquer corpo pode ser forçado a sofrer alguma deformação que altere a distância entre algum par de seus pontos. Na prática encontramos corpos que são aproximadamente rígidos, isto é, a distância entre qualquer par de partículas do corpo permanece aproximadamente a mesma. Um pedaço de granito, por exemplo, é praticamente um corpo rígido em um imenso número de situações, embora possa, em situações extremas, ser deformado ou quebrado e, portanto, deixar de ser um bom exemplo de corpo rígido. O importante é que dispomos na natureza de corpos cuja rigidez é boa o bastante para as finalidades de nosso estudo de mecânica. Um automóvel não é um corpo rígido, pois podemos, por exemplo, abrir suas portas ou mesmo pôr suas rodas em movimento. Nesses casos há variação das distâncias entre partículas do automóvel. Em contrapartida ele tem uma carcaça central razoavelmente rígida. Quando nos referirmos a objetos como automóveis, ônibus, trens ou aviões dizendo que são rígidos, estaremos considerando apenas as suas partes que são propriamente rígidas.

Um sistema qualquer de partículas, mesmo envolvendo vários corpos, é dito um **sistema rígido** se a distância entre qualquer par de suas partículas permanece sempre a mesma. O Cruzeiro do Sul, por exemplo, é constituído por cinco estrelas bem separadas. No entanto, elas mantêm distâncias relativas invariáveis (pelo menos há milhares de anos). Desse modo, o Cruzeiro do Sul pode ser chamado de um sistema rígido.

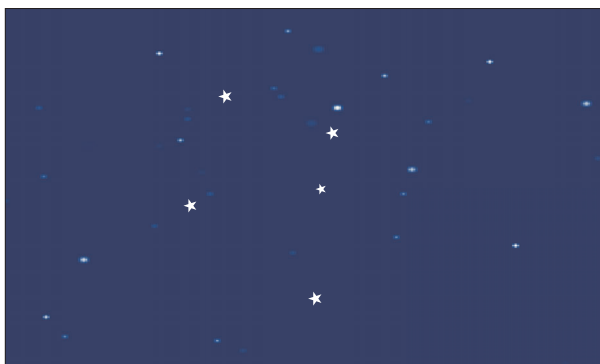


Figura 1.2: Cruzeiro do Sul.

Talvez você fique surpreso em saber que é comum chamar um sistema rígido de partículas de corpo rígido, mesmo quando o sistema é constituído por várias partes, separadas umas das outras, como no caso do Cruzeiro do Sul.

Veremos que os conceitos de corpo rígido e de sistema rígido de partículas desempenham um papel importante na mecânica. Na próxima seção, por exemplo, o conceito de rigidez será usado na definição de referencial.

Deve ser mais fácil estudar o movimento de uma partícula do que o de um corpo extenso ou de um sistema com várias partículas. Também deve ser mais fácil estudar o movimento de um corpo rígido do que o de um corpo deformável como os elásticos, plásticos e fluidos. Pretendemos estudar primeiramente o movimento de uma partícula e mais tarde o de um corpo rígido. Em disciplinas mais avançadas estudaremos também o movimento de corpos deformáveis, um assunto bem mais complicado.

Eixos coordenados e posição

Recordemos da geometria o conceito de eixo coordenado. Ele é definido da seguinte maneira: primeiramente, consideramos uma reta e escolhemos nela um ponto, que chamamos de origem. A reta fica dividida em duas semi-retas que começam na origem.



Figura 1.3: Eixo coordenado.

Escolhemos uma das semi-retas (pode ser qualquer uma das duas) para ser chamada de semi-eixo positivo e nela marcamos uma setinha para indicar nossa escolha, tal como está indicado na **Figura 1.3**, na qual a origem está representada pela letra \mathcal{O} . A outra semi-reta é chamada de semi-eixo negativo. A cada ponto do semi-eixo positivo associamos o número dado por sua distância até a origem. A cada ponto de semi-eixo negativo associamos o número dado por *menos* a sua distância até a origem e à própria origem \mathcal{O} associamos o número zero. Desse modo, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números reais: a cada ponto corresponde um único número e a cada número, um único ponto. A reta na qual foram especificadas a origem, os semi-eixos positivo e negativo e a correspondência entre números e pontos, conforme acabamos de descrever, é chamada de um **eixo coordenado**. O número que corresponde a um ponto do eixo é chamado de sua **coordenada** no eixo, ou em relação ao eixo. Dizemos que a coordenada de um ponto em relação a um eixo localiza o ponto em relação ao eixo. É claro que a origem tem coordenada zero, os pontos do semi-eixo positivo têm coordenadas positivas e os do semi-eixo negativo, coordenadas negativas (aliás, é apenas por isso que os semi-eixos são chamados de positivo e negativo). As coordenadas são dadas em unidade de comprimento, isto é em metro ou em algum de seus submúltiplos decimais, como, por exemplo, o centímetro. Se nada for dito sobre a unidade de comprimento de uma coordenada, fica subentendido que a unidade é o metro.

Note que a especificação de um eixo em uma situação concreta exige o uso de uma régua para medir distâncias e especificar coordenadas. Em mecânica esperamos poder definir eixos coordenados em situações concretas, graças à hipótese de que dispomos de régua.

Para identificar um eixo coordenado (o que é necessário quando vários são usados em um problema) usamos, além do \mathcal{O} da origem, uma outra letra, que é sempre escrita junto ao semi-eixo positivo. O eixo é identificado pelo par de letras. Por exemplo, se a segunda letra é \mathcal{X} , chamamos o eixo coordenado de eixo \mathcal{OX} . A **Figura 1.4** mostra um eixo coordenado \mathcal{OX} com um ponto arbitrário P e sua coordenada x .



Figura 1.4: Ponto P e sua coordenada x (positiva, nesse exemplo).

Considere agora três eixos coordenados \mathcal{OX} , \mathcal{OY} e \mathcal{OZ} , ortogonais entre si e com origem comum \mathcal{O} . Vamos chamar o conjunto constituído pelos três eixos coordenados ortogonais de sistema de eixos \mathcal{OXYZ} . Consideremos um ponto qualquer P do espaço. Existe um único plano perpendicular ao eixo \mathcal{OX} que passa por P ; esse plano intercepta o eixo \mathcal{OX} em um ponto bem determinado P_x cuja coordenada nesse eixo chamaremos de x . Usando planos perpendiculares a \mathcal{OY} e \mathcal{OZ} também obtemos nesses eixos pontos P_y e P_z com coordenadas y e z , respectivamente, conforme indicado na **Figura 1.5**.

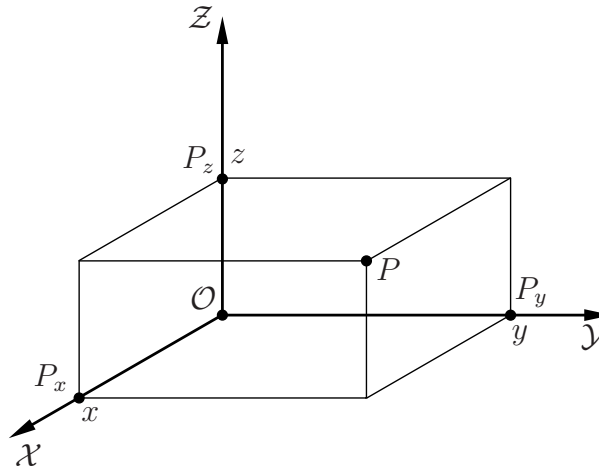


Figura 1.5: Sistema de eixos coordenados tri-ortogonais \mathcal{OXYZ} .

Por esse processo a cada ponto P do espaço fica associada uma única trinca (x, y, z) . Inversamente, dada uma trinca (x, y, z) tomamos nos eixos \mathcal{OX} , \mathcal{OY} e \mathcal{OZ} os pontos de coordenadas respectivas x , y e z e nesses pontos passamos planos perpendiculares aos eixos \mathcal{OX} , \mathcal{OY} e \mathcal{OZ} , respectivamente. Esses planos se interceptam em um único ponto P do espaço. Fica assim estabelecida uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e as trincas de coordenadas, isto é, a cada ponto P corresponde uma única trinca (x, y, z) e vice-versa. A trinca que corresponde desse modo a um ponto é chamada de trinca de coordenadas do ponto em relação ao sistema de eixos \mathcal{OXYZ} . Também chamamos a trinca simplesmente de coordenadas de P em relação a \mathcal{OXYZ} .

Note que as trincas que correspondem aos pontos do eixo \mathcal{OX} são da forma $(x, 0, 0)$. Qual a forma das trincas que correspondem aos eixos \mathcal{OY} e \mathcal{OZ} ? As trincas que correspondem ao plano \mathcal{OXY} são da forma $(x, y, 0)$. Qual a forma das trincas que correspondem ao plano \mathcal{OYZ} e ao plano \mathcal{OZX} ?

Uma partícula em cada instante ocupa um único ponto do espaço. As **coordenadas da partícula** em relação a um sistema de eixos \mathcal{OXYZ} são, por

definição, as coordenadas do ponto que ela ocupa. Desse modo, se a partícula está em um ponto cuja trinca de coordenadas em relação a \mathcal{OXYZ} é (x, y, z) então a trinca de coordenadas da partícula em relação a \mathcal{OXYZ} também é (x, y, z) . Dize-mos que a trinca de coordenadas dá a **posição da partícula** em relação a \mathcal{OXYZ} . Muitas vezes dizemos simplesmente que a trinca de coordenadas é a posição da partícula em relação a \mathcal{OXYZ} .

O sistema de eixos coordenados é uma estrutura rígida em relação à qual podemos especificar a posição de qualquer ponto do espaço ou de qualquer partícula. Também podemos especificar a posição de qualquer corpo em relação ao sistema de eixos coordenados, pois qualquer corpo pode ser considerado como um conjunto de partículas e cada partícula do conjunto pode ter sua posição especificada em relação ao sistema de eixos, conforme vimos acima. É claro que estamos entendendo que a posição de um corpo fica especificada quando especificamos as posições das partículas que o compõem.

O referencial e o movimento

Em princípio, podemos não somente determinar a posição de um corpo em relação a um sistema de eixos coordenados, como também determinar o instante em que o corpo ocupa a dita posição. De fato, fazemos a suposição de que, em mecânica, dispomos não somente de réguas mas também de relógios. Vamos supor que, associado a um sistema de eixos coordenados, temos uma quantidade ilimitada de relógios, tantos quantos forem necessários, todos sincronizados e em repouso em relação ao sistema de eixos. É claro que podemos determinar se um relógio está em repouso em relação ao sistema de eixos. Basta verificar que, à medida que o tempo passa, tal como indicado pelo relógio, a posição do próprio relógio não muda. O sistema de eixos coordenados, junto com as réguas e relógios, é uma estrutura para medir posições e instantes do tempo. Uma tal estrutura é chamada de sistema de referência ou de **referencial**. Podemos descrever brevemente um referencial dizendo que é um sistema de eixos coordenados munido de réguas e relógios. Um agente fixo em um referencial e capaz de realizar medições costuma ser chamado de **observador**. O observador pode ser uma pessoa ou aparelho programado para medir. É conveniente supor que os relógios estão sincronizados em um dado referencial para que haja um único instante do tempo atribuído a um dado evento. Por outro lado, a exigência de que os relógios estejam em repouso em relação ao sistema de eixos do referencial tem razões mais profundas que você examinará quando estudar a chamada relatividade restrita de Einstein.

O sistema de eixos coordenados é uma estrutura rígida, na qual cada eixo permanece perpendicular aos outros dois. Na prática, para garantir a rigidez dos eixos usamos algum corpo rígido, ou um sistema rígido de partículas, para neles fixar o sistema de eixos. Por exemplo, podemos considerar um sistema de eixos coordenados fixos nas paredes de uma sala.

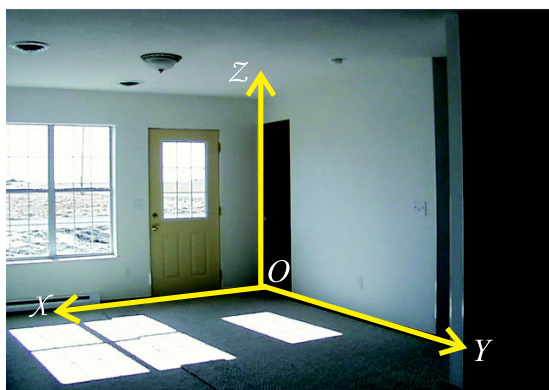


Figura 1.6: Sistema de eixos coordenados \mathcal{OXYZ} , fixo nas paredes de uma sala.

Podemos desenhar os eixos nas paredes como mostra a **Figura 6**. Nos estudos teóricos simplesmente imaginamos os eixos, como entidades matemáticas, fixos nas paredes. Neste exemplo diríamos que o referencial é fixo na sala, ou na Terra, pois sala e Terra formam um todo rígido. Podemos também imaginar um referencial fixo em um automóvel, como ilustrado na **Figura 1.7**.

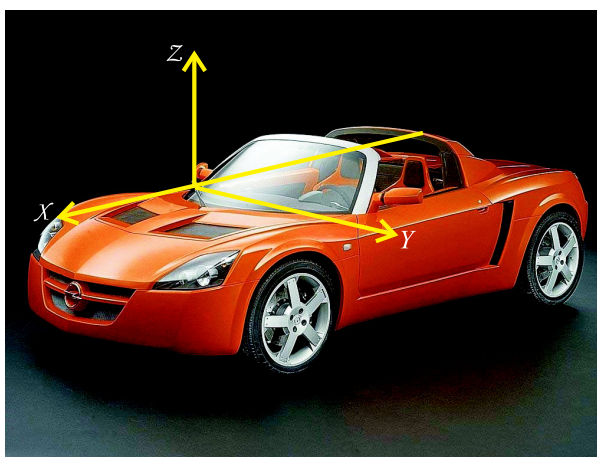


Figura 1.7: Sistema de eixos coordenados \mathcal{OXYZ} , fixo na estrutura rígida de um automóvel.

É comum não mencionar os relógios quando especificamos um referencial. Escolhemos um sistema de eixos e a existência dos relógios fica subentendida. É por esse motivo que, por simplicidade, nos referimos ao referencial como sendo o próprio sistema de eixos; dizemos algo como: seja o referencial \mathcal{OXYZ} ...

Deve ter ficado claro que o conceito de posição é *relativo* ao sistema de eixos coordenados que usamos. Por exemplo, em relação a um sistema de eixos, uma partícula tem uma posição dada por uma trinca de coordenadas, enquanto em relação a outro sistema de eixos a posição pode ser dada por outra trinca completamente diferente. A **Figura 8** mostra uma partícula e dois referenciais, representados por \mathcal{OXYZ} e $\mathcal{O'X'Y'Z'}$. Os eixos \mathcal{OZ} e $\mathcal{O'Z'}$ são perpendiculares ao plano desta folha e não aparecem no desenho. Os outros eixos estão todos no plano da figura, onde também situa-se a partícula.

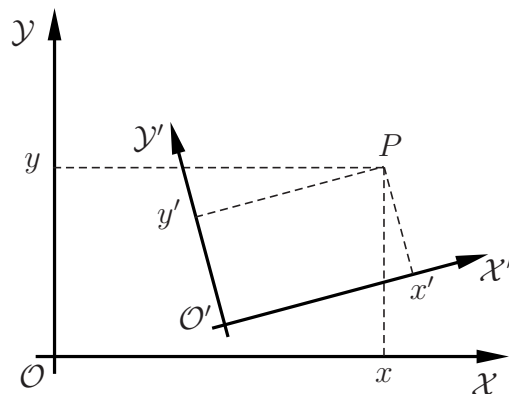


Figura 1.8: Uma mesma partícula pode ser localizada em relação a dois sistemas de eixos diferentes.

De acordo com o desenho a posição da partícula em relação ao referencial \mathcal{OXYZ} é $(x, y, 0)$, enquanto a posição da mesma partícula em relação ao referencial $\mathcal{O'X'Y'Z'}$ é $(x', y', 0)$.

Pelo que discutimos, dado um referencial podemos, em princípio, estabelecer a posição de uma partícula em relação a ele e também o instante em que ela está nessa posição. Também podemos estabelecer a posição de um corpo qualquer em relação ao referencial e o instante em que ele ocupa tal posição, mas vamos nos concentrar por enquanto no caso de uma partícula, que é mais simples de ser estudado. O movimento é conceituado em mecânica a partir dos conceitos de posição e de tempo. Por isso é um conceito que necessita da idéia de referencial para ser compreendido.

Dizemos que uma partícula está em **movimento** em relação a um referencial quando sua posição em relação ao referencial muda com o passar do tempo. É claro que a posição muda se pelo menos uma das coordenadas que determina a posição muda. No caso de um corpo, dizemos que ele está em movimento, em relação a um referencial, quando pelo menos uma das partículas que o compõem está em movimento em relação ao referencial. Se uma partícula, ou um corpo qualquer, não está em movimento em relação a um referencial dizemos que está em **repouso** em relação ao referencial.

De acordo com a definição anterior o conceito de movimento é sempre relativo a um referencial. Não faz sentido falar em movimento sem pressupor um referencial em relação ao qual ele está sendo conceituado. De fato, para falar em movimento é necessário falar em mudança de posição e o conceito de posição exige um referencial em relação ao qual a posição é definida. No linguajar comum falamos em movimento sem mencionar referenciais não porque eles sejam desnecessários, mas porque estão implicitamente pressupostos pelo hábito. Temos, por exemplo, o hábito de fixar inconscientemente referenciais na Terra. Assim, quando dizemos que uma pedra, ou um carro, ou o sol se movem, estamos normalmente usando um referencial fixo na Terra, embora não tenhamos consciência disso se nossa mente não estiver cientificamente alerta.

O movimento é o objeto fundamental de estudo da física e, em particular, da mecânica. Fizemos nosso estudo inicial sobre o movimento nesta aula, construindo paulatinamente os conceitos que lhe dão fundamento: os de réguas e relógios, de partículas e corpos rígidos e os de sistema de eixos coordenados e referencial. Como em qualquer parte da Física, para estudar o conceito de movimento precisamos também de usar uma linguagem matemática. Qual o conceito matemático que descreve com perfeição, em todos os seus detalhes, um dado movimento? Essa é uma questão muito profunda e a obtenção desse conceito matemático é praticamente uma definição do que entendemos por movimento. Esse é o assunto da próxima aula, que é o complemento necessário desta que encerramos agora.

Resumo

Um corpo em movimento pode mudar de lugar, rodar e até mesmo se deformar. O seu movimento pode ser muito complicado. Para estudar o movimento começamos pelo caso mais simples: o de um corpo cujas dimensões são desprezíveis no movimento em consideração. Tal corpo é chamado de **partícula**. Uma partícula é um ponto material. Partículas mudam de lugar, mas não faz

sentido dizer que rodam ou se deformam. De fato, para um corpo rodar ou se deformar é necessário ser constituído por diversas partes, e uma partícula, obviamente, não tem partes. Qualquer corpo extenso pode ser considerado como um **conjunto de partículas**. Se as distâncias entre elas permanecem constantes esse conjunto é chamado de **corpo rígido** ou **sistema rígido**. Um referencial é um corpo rígido no qual estão fixados um sistema de eixos coordenados e relógios. Em relação ao sistema de eixos determinamos a **posição** de qualquer partícula no espaço ou de qualquer ponto que desejarmos. A posição é definida pelas coordenadas da partícula ou do ponto, no sistema de eixos coordenados. **Movimento** de uma partícula em relação a um referencial é a mudança de sua posição com o tempo, em relação ao sistema de eixos do referencial. Portanto, movimento é um conceito sempre relativo a um referencial. É absurdo falar em movimento sem que haja um referencial em relação ao qual tal movimento é especificado.

Questionário

1. O que é uma partícula?
2. Explique porque qualquer corpo pode ser considerado como um conjunto de partículas.
3. O que é um corpo rígido?
4. O que é um sistema de partículas?
5. O que é um sistema rígido de partículas?
6. O que define a posição de uma partícula em relação a um sistema de eixos coordenados?
7. O que é um referencial?
8. Usando os conceitos de posição e de tempo explique o que entendemos por movimento de uma partícula e de um corpo.
9. Explique porque o conceito de movimento é sempre relativo a um dado referencial.
10. Nossa tendência natural é a de fixar referenciais na Terra. Descreva alguma situação na qual tomamos algum outro corpo como referencial para nossa percepção visual do movimento?

Problemas propostos

1. Compare as definições de partícula, corpo rígido, referencial e movimento, dadas nesta aula, com as dicionarísticas.
2. Descreva situações diferentes envolvendo um mesmo corpo de tal modo que em algumas delas o corpo possa ser considerado como uma partícula e em outras não.
3. Se você representasse o Sol por uma bolinha de gude de 1 cm de raio, a que distância dessa bolinha você deveria localizar a Terra para que as proporções relevantes no problema fossem mantidas? Se nessa situação a Terra também fosse representada por uma pequena esfera, qual seria o seu raio?

Auto-avaliação

Por tratar-se de aula introdutória, você deve ser capaz de responder ao questionário inteiro e de resolver todos os problemas propostos.

Aula 2 – A descrição matemática do movimento

Objetivo

- Entender o conceito de funções-movimento.

Introdução

Na aula anterior, definimos movimento de uma partícula em relação a um dado referencial como sendo a mudança de sua posição em relação a esse referencial, com o passar do tempo. Ressaltamos que o movimento é o objeto fundamental de estudo da Física e que necessitamos de sua conceituação matemática para aprofundarmos seu estudo. Passemos agora ao estudo dessa conceituação matemática.

O conceito de funções-movimento

Suponhamos que estejamos interessados no movimento que ocorre em um intervalo de tempo entre o instante t_i e o instante t_f . Esse intervalo é representado por (t_i, t_f) . Qual o conceito matemático que descreve completamente o movimento da partícula? Para chegar a ele, faremos a seguinte afirmação: conhecemos o movimento de uma partícula se sabemos qual é sua posição em cada instante do tempo no intervalo de interesse. Isso significa que em cada instante do intervalo (t_i, t_f) sabemos quais são as três coordenadas x , y e z que dão a posição da partícula. Portanto, o movimento fica completamente determinado se for dada uma regra que especifique a cada instante t qual a coordenada x da partícula; uma segunda regra que especifique a cada instante t qual a coordenada y ; e uma terceira regra que especifique qual a coordenada z a cada instante t . Em cada instante t , a partícula só tem um valor para a coordenada x , caso contrário, a partícula estaria nesse instante ocupando duas posições diferentes, o que é absurdo. Portanto, a regra que dá a coordenada x em cada instante t do intervalo (t_i, t_f) é o que, em matemática, recebe o nome de função. Vamos representar essa função por f_x . Em símbolos matemáticos:

$$\begin{aligned} f_x &: (t_i, t_f) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: t \longmapsto x . \end{aligned} \quad (2.1)$$

Também são funções as regras que determinam a cada instante t as coordenadas y e z . Representaremos por f_y a função que dá a coordenada y em cada

Recordemos a definição de intervalo aberto: $(t_i, t_f) = \{t \in \mathbb{R} \mid t_i < t < t_f\}$; a escolha de ser aberto é motivada por desejo de simplicidade matemática, mas não é necessário nos preocuparmos com isso no momento.

instante t do intervalo (t_i, t_f) e por f_z a função que dá a coordenada z em cada instante do mesmo intervalo:

$$\begin{aligned} f_y &: (t_i, t_f) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: t \longmapsto y \end{aligned} \quad (2.2)$$

e

$$\begin{aligned} f_z &: (t_i, t_f) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: t \longmapsto z . \end{aligned} \quad (2.3)$$

As três funções (2.1), (2.2) e (2.3) dão as três coordenadas x , y e z da partícula em cada instante do intervalo (t_i, t_f) . Elas especificam, portanto, a posição da partícula em cada instante do intervalo. As três funções f_x , f_y e f_z descrevem juntas o movimento da partícula no intervalo de tempo (t_i, t_f) . Elas são chamadas de **funções do movimento** da partícula. Elas dão a informação completa sobre o movimento da partícula.

As funções-movimento são o conceito matemático mais importante da mecânica. Encontrar as funções-movimento para uma partícula em uma dada situação é o problema fundamental da mecânica. Toda a teoria desenvolvida nessa ciência tem por fim criar métodos de obter as funções-movimento desconhecidas e de tirar informações daquelas que já são conhecidas.

Para expressar o fato de que as funções do movimento dão as coordenadas x , y e z da partícula em cada instante t , também escrevemos:

$$\begin{cases} x = f_x(t) , \\ y = f_y(t) , \\ z = f_z(t) . \end{cases} \quad (2.4)$$

Note que nessas equações o tempo é expresso em segundos e as coordenadas x , y e z em metros, a menos que explicitamente indique-se que alguma outra unidade deve ser considerada. Finalizamos a discussão dando a resposta à pergunta feita no começo desta seção: o conceito matemático que descreve com perfeição, em todos os seus detalhes, um dado movimento é o conceito de funções do movimento.

É comum expressar as funções-movimento na forma das equações (2.4), sem falar em domínio e contradomínio, como fizemos nas equações (2.1), (2.2) e (2.3). O motivo é simples. O contradomínio não precisa ser especificado, pois é sempre \mathbb{R} . De fato, cada coordenada x , y ou z é sempre um número real. Já

As funções-movimento são chamadas comumente de **equações horárias**. Elas são dadas em geral por equações da forma (2.4). Damos preferência ao uso de um símbolo x para representar o valor da função f_x no instante t e um outro símbolo, f_x , para representar a própria função. No entanto, é comum usar a mesma letra para representar a função e o valor da função, escrevendo, por exemplo, $x = x(t)$ no lugar de $x = f_x(t)$. Caso prefira, você pode usar essa notação e escrever no lugar de (2.4) as equações: $x = x(t)$, $y = y(t)$ e $z = z(t)$.

o intervalo de tempo (t_i, t_f) , durante o qual estamos interessados em estudar o movimento, fica em geral subentendido e, normalmente, não é importante especificá-lo. Algumas vezes estudamos movimentos supondo que eles são eternos, isto é, que o intervalo de tempo em que ocorrem é $(-\infty, +\infty)$. É claro que isso é apenas uma idealização extrema de situações em que o movimento dura, ou pode durar, um longo intervalo de tempo, desde um passado remoto até um futuro distante. Por exemplo, quando estudamos o movimento da Terra em torno do sol não há, normalmente, interesse em considerar se esse movimento tem começo ou fim.

À medida que o tempo corre, uma partícula em movimento vai passando por diversos pontos do espaço. O conjunto desses pontos forma uma linha contínua. Essa linha é chamada de **trajetória**. Uma pedra, quando solta, tem por trajetória um segmento de reta, até que ela atinja o chão. A ponta da hélice de um ventilador caseiro tem, durante seu movimento, uma trajetória circular. A **Figura 2.1** mostra uma trajetória mais genérica.

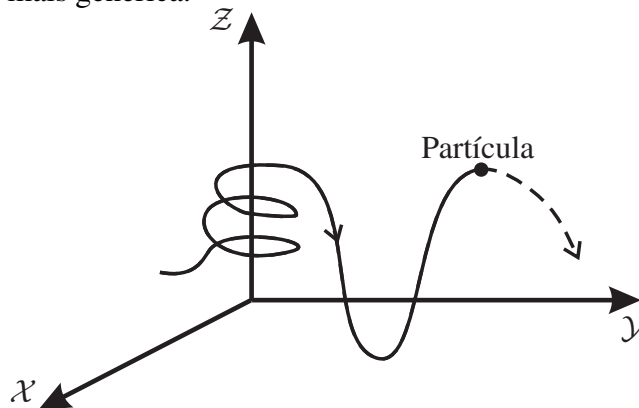


Figura 2.1: Trajetória é a curva que a partícula traça no espaço durante o movimento.

Vamos considerar a seguir alguns exemplos de funções-movimento.

Exemplos de funções-movimento.

Todos os movimentos da série de exemplos desta seção serão considerados em relação a um referencial \mathcal{OXYZ} . Nesses exemplos, todas as coordenadas são expressas em metros e o tempo sempre em segundos. As unidades serão escritas apenas nos dados iniciais e nas repostas finais de exemplos concretos, mas não nas fórmulas intermediárias. Os valores das coordenadas, dos instantes do tempo e demais quantidades serão considerados como exatos, pois não queremos nos preocupar por ora com a questão da precisão com que são dadas essas grandezas. Deve ficar claro que esse procedimento é provisório, pois as questões de precisão são muito importantes. Elas serão consideradas posteriormente.

Exemplo 2.1

Sejam as funções-movimento de uma partícula dadas por: $f_x(t) = 3t$, $f_y(t) = 0$ e $f_z(t) = 0$.

Nesse caso, a partícula está em movimento retilíneo ao longo do eixo \mathcal{OX} e sua coordenada x no instante t é dada por $x = 3t$. Note ainda que essa coordenada x cresce indefinidamente com o passar do tempo. A **Figura 2.2** mostra as posições da partícula nos instantes -2 , -1 , 0 , 1 , 2 e 3 segundos. No instante $t = -2$ segundos, temos $x = f_x(-2) = 3 \times (-2) = -6$, ou seja, a posição da partícula é, nesse instante, igual a -6 metros. Ela se encontra no semi-eixo negativo a 6 metros da origem. Nos outros instantes, as posições da partícula são calculadas de modo semelhante.

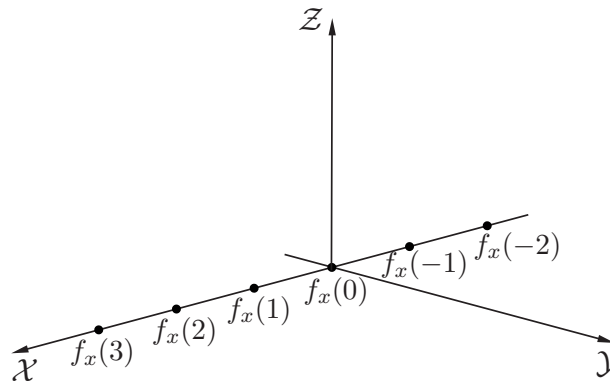


Figura 2.2: Movimento com distâncias percorridas iguais em intervalos de tempo iguais.

Observe que as distâncias entre duas posições consecutivas quaisquer marcadas na **Figura 2.2** são todas iguais.

Escrevendo as funções-movimento no formato das equações (2.4), obtemos:

$$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Exemplo 2.2

Considere as seguintes funções-movimento de uma partícula: $f_x(t) = 0$, $f_y(t) = 4t - t^2$ e $f_z(t) = 0$.

Como no exemplo anterior, a partícula também está em movimento retilíneo, mas neste caso ao longo do eixo \mathcal{OY} . A sua coordenada y no instante

t é dada por $y = 4t - t^2$. Note que a partícula passa pela origem no instante $t = 0$ segundo e retorna a ela no instante $t = 4$ segundos. A **Figura 2.3** mostra as posições da partícula nos instantes $-1, 0, 1, 2, 3, 4$, e 5 segundos.

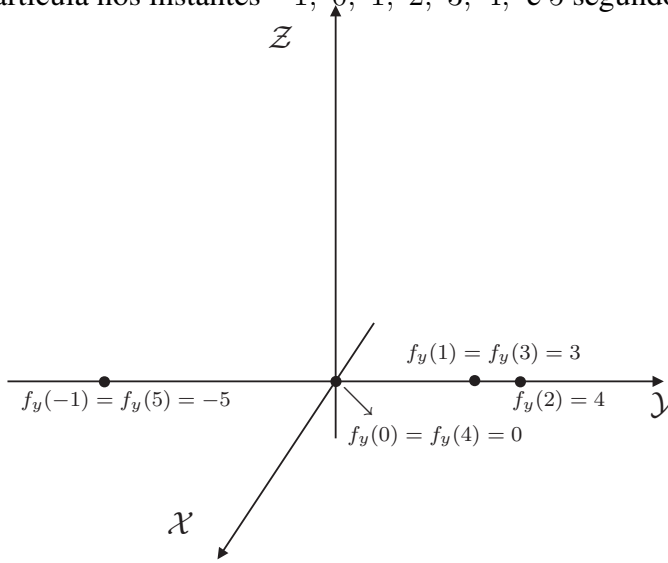


Figura 2.3: A partícula inverte o sentido de seu movimento em $t = 2s$.

Observe que as distâncias entre duas posições consecutivas quaisquer marcadas na **Figura 2.3** não são todas iguais, embora sejam iguais os intervalos de tempo entre elas.

Em um instante arbitrário t , a posição da partícula é dada por:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 4t - t^2, \\ z = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Exemplo 2.3

Considere as seguintes funções-movimento de uma partícula: $f_x(t) = 3$, $f_y(t) = 4$ e $f_z(t) = 20 - 5t^2$.

Novamente trata-se de um movimento retilíneo, mas ao longo da reta paralela ao eixo OZ e que intercepta o plano OXY no ponto desse plano de coordenadas $x = 3$ metros e $y = 4$ metros. Já que $-5t^2$ nunca assume valores positivos, o ponto mais alto da trajetória da partícula ocorre para $t = 0$ segundo, quando $z = 20$ metros. Note ainda que a partícula atinge o plano OXY ($z = 0$ metros) em $t = 2$ segundos.

A **Figura 2.4** mostra a trajetória retilínea da partícula e as suas posições nos instantes $t = 0$ segundo, $t = 0,5$ segundo, $t = 1$ segundo, $t = 1,5$ segundos e $t = 2$ segundos.

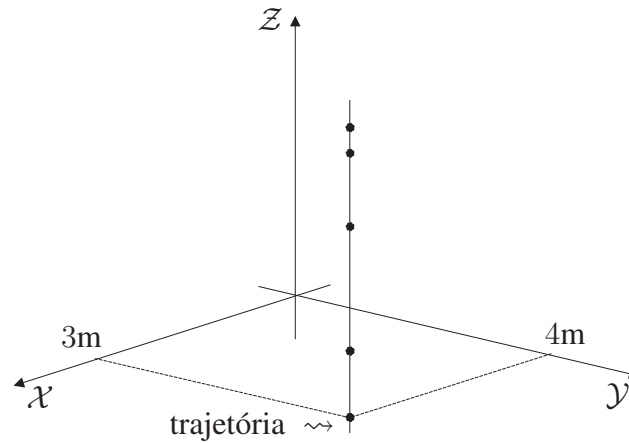


Figura 2.4: Movimento vertical não uniforme de uma partícula.

A posição da partícula é dada em qualquer instante t por:

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 4, \\ z = 20 - 5t^2. \end{cases} \quad (2.7)$$

A partir da **Figura 2.4**, constatamos que, durante intervalos consecutivos de 0,5 segundo de duração, a partícula percorre distâncias cada vez maiores.

Exemplo 2.4

Considere as seguintes funções-movimento de uma partícula: $f_x(t) = 0$, $f_y(t) = 5t$ e $f_z(t) = 20t - 5t^2$.

A partícula se move no plano \mathcal{OYZ} e em um instante qualquer t a sua posição é dada por

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 5t, \\ z = 20t - 5t^2. \end{cases} \quad (2.8)$$

A trajetória da partícula se encontra no plano \mathcal{OYZ} , pois temos sempre $x = 0$ metro. Eliminando t das duas últimas equações, em (2.8), obtemos:

$$z = 4y - \frac{y^2}{5},$$

que é a equação de uma parábola no plano \mathcal{OYZ} . Para encontrarmos os pontos em que a parábola intercepta o eixo \mathcal{OY} , basta impor que $x = 0$ metro e $z = 0$

metro. A primeira condição já está assegurada em (2.8) e a segunda nos leva, através da equação anterior, a buscar as raízes da equação de segundo grau:

$$4y - \frac{y^2}{5} = 0 .$$

Tais raízes são dadas por $y = 0$ metro e $y = 20$ metros. Isso significa que os pontos da trajetória parabólica que interceptam o eixo \mathcal{OY} são a origem $(0, 0, 0)$ e o ponto $(0, 20, 0)$.

Para descobrirmos em que instantes a partícula se encontra nesses dois pontos, recorreremos, como para tudo o mais, às funções-movimento, no caso, as funções dadas em (2.8). Substituindo em (2.8) os valores $x = 0$ metro, $y = 20$ metros e $z = 0$ metro, e resolvendo as equações resultantes, obtemos $t = 4$ segundos. Portanto, a partícula intercepta o eixo \mathcal{OY} a 20 metros da origem aos 4 segundos. Você pode descobrir por esse método os instantes em que a partícula passa por qualquer ponto dado. Experimente aplicá-lo para encontrar o instante em que a partícula intercepta o outro ponto do eixo \mathcal{OY} , a origem $(0, 0, 0)$. Se o seu conhecimento sobre parábolas estiver em dia, você constatará com facilidade que a partícula tem sua maior coordenada z no ponto $(0, 10, 20)$, no instante $t = 2$ segundos.

A **Figura 2.5** mostra a trajetória parabólica e as posições da partícula em intervalos de tempo de 1 segundo, desde o instante 0 segundo até o instante 4 segundos.

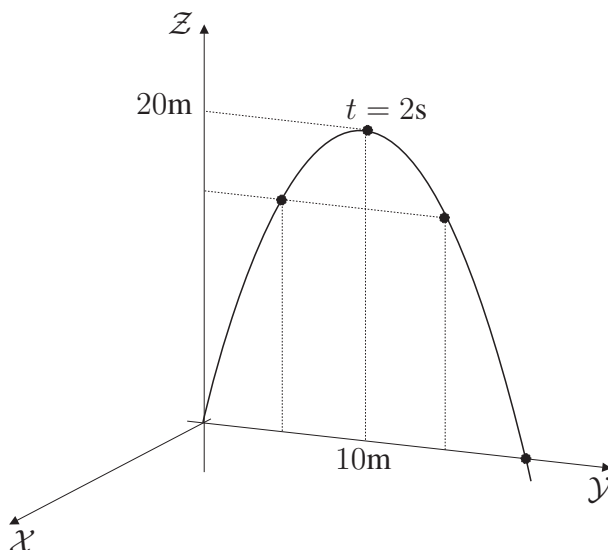


Figura 2.5: Trajetória parabólica de uma partícula.

Exemplo 2.5

Considere as seguintes funções-movimento de uma partícula: $f_x(t) = 6 + 5 \sin(2t)$, $f_y(t) = 7 + 5 \cos(2t)$ e $f_z(t) = 0$, nas quais os argumentos das funções trigonométricas são, naturalmente, dados em radianos.

A partícula se move no plano \mathcal{OXY} . Em um instante qualquer t , a sua posição é dada por

$$\begin{cases} x = 6 + 5 \sin(2t) , \\ y = 7 + 5 \cos(2t) , \\ z = 0 . \end{cases} \quad (2.9)$$

Eliminando t das duas primeiras equações em (2.9), e usando a identidade trigonométrica que afirma que a soma do quadrado do seno com o quadrado do cosseno é sempre igual a um, obtemos:

$$(x - 6)^2 + (y - 7)^2 = 5^2 [\sin^2(2t) + \cos^2(2t)] = 5^2 . \quad (2.10)$$

Esse resultado mostra que a trajetória é um círculo no plano \mathcal{OXY} , de raio 5 metros e centro no ponto de coordenada $x = 6$ metros e $y = 7$ metros. Como os valores do seno e do cosseno oscilam entre 1 e -1 , a coordenada x está sempre no intervalo $6 - 5 \leq x \leq 6 + 5$, isto é, no intervalo 1 metro $\leq x \leq 11$ metros, enquanto a coordenada y está sempre no intervalo 2 metros $\leq y \leq 12$ metros.

Em $t = 0$ segundo, a partícula está na posição:

$$\begin{cases} x = 6 + 5 \sin(0) = 6 \text{ metros} , \\ y = 7 + 5 \cos(0) = 12 \text{ metros} , \\ z = 0 \text{ metros} . \end{cases}$$

Já em $t = 0,5$ segundo, a partícula se encontra na posição:

$$\begin{cases} x = 6 + 5 \sin(2 \times 0,5) = 10,2073... , \text{ metros} \\ y = 7 + 5 \cos(2 \times 0,5) = 9,7015... \text{ metros} , \\ z = 0 \text{ metro} . \end{cases}$$

A **Figura 2.6** mostra a trajetória e as posições da partícula em intervalos de tempo de 0,5 segundo, desde o instante 0 segundo até o instante 2 segundos.

É fácil encontrar movimentos que são circulares em boa aproximação. Podemos citar os que ocorrem na hélice de um ventilador ou de um liquidificador. Um outro exemplo mais lento e majestoso é o das estrelas, que vemos percorrerem arcos de círculo quando as observamos durante as horas da noite.



Considere as seguintes funções-movimento de uma partícula:
 $f_x(t) = 5 \sin(2t)$, $f_y(t) = 5 \cos(2t)$ e $f_z(t) = 4t$.

$$\begin{cases} x = 5\text{sen}(2t) \text{ ,} \\ y = 5\text{cos}(2t) \text{ ,} \\ z = 4t \text{ .} \end{cases} \quad (2.11)$$

Imagine os eixos \mathcal{OX} e \mathcal{OY} fixos na superfície horizontal de uma mesa e o eixo \mathcal{OZ} saindo da mesa e apontando para cima. Com a ponta do indicador, faça um movimento circular sobre a superfície da mesa. Agora, sem interromper o movimento circular, movimente para cima sua mão na direção do eixo \mathcal{OZ} , no sentido de baixo para cima. Com esse procedimento, você poderá obter um movimento muito parecido com o descrito pelas funções-movimento (2.11), ilustrado na **Figura 2.7**.

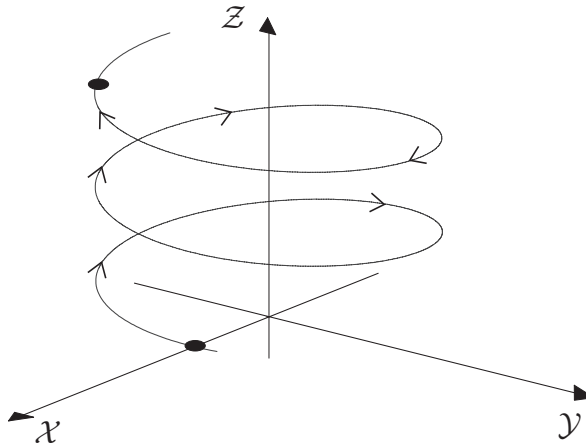


Figura 2.7: Trajetória helicoidal da partícula.

Exemplo 2.7

Considere as seguintes funções-movimento de uma partícula: $f_x(t) = 0$, $f_y(t) = \frac{\pi}{2}t - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ e $f_z(t) = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Em um instante qualquer t , a posição da partícula é dada por

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \frac{\pi}{2}t - \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right), \\ z = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right). \end{cases} \quad (2.12)$$

Essas equações descrevem um tipo de movimento, chamado ciclóide, cuja visualização está longe de ser óbvia e direta. Ainda assim vale a pena incluí-lo como um último exemplo. Primeiramente, para ficar claro que podemos estudar um movimento mesmo que não possamos visualizá-lo. Qualquer informação sobre o movimento está contida nas funções-movimento e a matemática nos leva muito além das nossas possibilidades de visualizaçãp. Em segundo lugar, demos esse exemplo para que permaneça o desafio de entendê-lo cada vez mais à medida que mais formos aprendendo. Finalmente, decidimos incluí-lo por envolver um tipo de curva que teve um papel importante na história da Física e também ocorre com frequência em muitos problemas do cotidiano. A **Figura 2.8** mostra a trajetória da partícula e suas posições em intervalos de tempo de 1 segundo, desde o instante 0 segundo até o instante 4 segundos.

Essa trajetória é uma curva chamada de ciclóide, nome dado por Galileu, considerado um dos descobridores dessa curva.

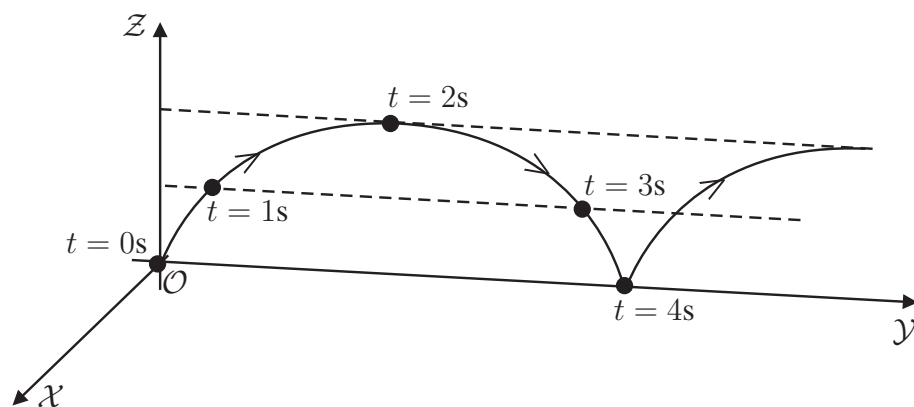


Figura 2.8: Trajetória cicloidal da partícula.

A cicloide foi descoberta independentemente pelo padre francês Mersenne, que lhe atribuía o nome *la roulette*. Um ponto na periferia de um pneu de um carro que se movimenta em linha reta traça uma curva desse tipo, se o pneu não derrapar durante o movimento.

Finalizamos esse exemplo com uma frase sobre essa curva do grande pensador, matemático e físico francês Blaise Pascal:

a cicloide é uma curva tão usual e corrente que depois da reta e da circunferência nenhuma outra curva é tão comumente encontrada. É descrita tão freqüentemente diante de nossos olhos que é surpreendente que não tenha sido considerada pelos antigos(...)

A história da cicloide é bastante interessante e em inúmeras ocasiões esteve misturada com a história da Física. Intimamente ligada à história dos relógios de pêndulo, a cicloide foi também tema de discussões científicas entre gigantes do século XVII, como ocorreu por exemplo numa disputa entre R. Descartes e P. Fermat, ou até mesmo tema de discórdia entre membros de uma mesma família, como ocorreu com os irmãos Jean e Jacques Bernoulli, no final desse mesmo século.

Para finalizar esta aula, imaginemos que as três coordenadas x , y e z de uma partícula sejam dadas pelas respectivas funções $f_x(t) = 2$, $f_y(t) = 4$ e $f_z(t) = 5$. Cada uma dessas funções é uma função constante, que associa a todos os instantes do tempo sempre o mesmo número. Consequentemente, essas funções descrevem a situação em que a partícula, em qualquer instante t , encontra-se na posição dada por $x = 2$ metros, $y = 4$ metros e $z = 5$ metros, isto é, a situação em que a partícula está em repouso nessa posição. Por comodidade, essas três funções serão também chamadas de funções-movimento, embora estejam descrevendo uma situação de repouso. Basta dar às funções-movimento o significado de funções que descrevem os estados de movimento e os estados de ausência de movimento. Sendo assim, continuaremos designando f_x , f_y e f_z por funções-movimento, mesmo quando as três forem constantes.

Resumo

O movimento de uma partícula é descrito matematicamente por três funções chamadas funções-movimento. Elas especificam as três coordenadas da partícula em cada instante do tempo. A trajetória da partícula é o conjunto dos pontos pelos quais ela passa durante o seu movimento. As funções-movimento determinam a trajetória da partícula e, além disso, em que ponto dela a partícula se encontra a cada instante. Essas funções descrevem completamente o movimento da partícula. Se as conhecemos, podemos, em princípio, responder a qualquer questão sobre o movimento da partícula. O problema fundamental da mecânica consiste em encontrar as funções-movimento de uma partícula em uma dada circunstância.

Questionário

1. O que são funções-movimento de uma partícula?
2. O que é trajetória de uma partícula?
3. Considere o movimento de duas partículas cujas trajetórias possuem alguns pontos em comum. Isso significa que elas irão obrigatoriamente encontrar-se em algum instante?
4. Suponha que duas partículas em movimento descrevam trajetórias circulares, de mesmo raio e centradas no mesmo ponto. Isso significa que elas possuem necessariamente as mesmas funções-movimento?

Problemas propostos

1. Considere quatro aviões da Esquadrilha da Fumaça que, durante uma exibição comemorativa, descrevem, todos eles, movimentos retilíneos com trajetórias horizontais paralelas. Nenhum avião se adianta em relação aos outros, de modo que a cada instante estão todos em um mesmo plano ortogonal às trajetórias. Além disso, os quatro aviões se localizam nos vértices de um quadrado com 20 metros de lado e com dois lados verticais e dois horizontais. Os aviões que voam mais baixo estão a 100 metros do solo. Vamos escolher um sistema de eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ fixo na Terra. O eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$ está no solo, paralelo às trajetórias e exatamente embaixo de duas delas, conforme ilustra a **Figura 2.9**, que mostra a esquadrilha em um certo instante $t > 0$.

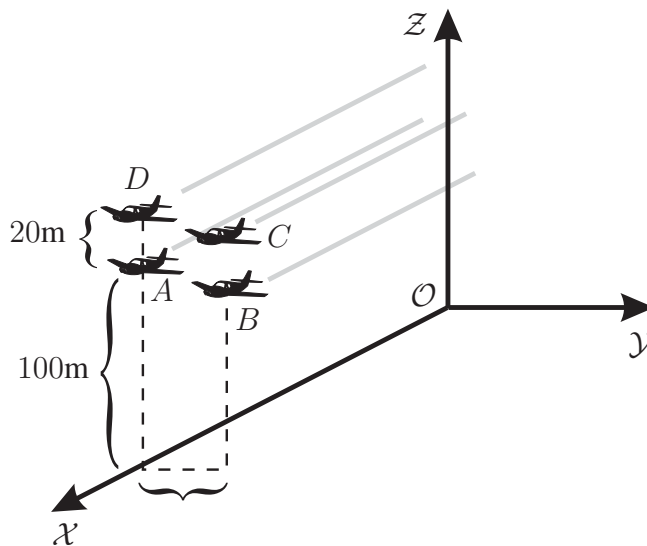


Figura 2.9: Formação da esquadrilha em um certo instante.

As funções-movimento de um dos aviões, identificado na figura como avião A, são dadas por: $f_x(t) = 40t$, $f_y(t) = 0$ e $f_z(t) = 100$. Note que essa última equação afirma que o avião A está a 100 metros de altitude e que a unidade, de acordo com nossa convenção provisória, não aparece na fórmula. Na solução do problema, siga também a convenção de não escrever as unidades, deixando-as subentendidas.

Escreva as funções-movimento para os outros três aviões, denotados na **Figura 2.9** como aviões B, C e D.

2. Considere o movimento descrito no exemplo 2.2 desta aula.
 - (a) Em que instantes a partícula passa pelo ponto do eixo OY de coordenada $y = -12$ metros? E de coordenada $y = 12$ metros?
 - (b) Demonstre que a partícula se encontra no semi-eixo positivo OY somente durante o intervalo de tempo entre 0 e 4 segundos e no semi-eixo negativo, somente nos instantes anteriores a 0 segundo ou posteriores a 4 segundos.
 - (c) Qual é o maior valor assumido pela coordenada y da partícula durante todo o seu movimento e em que instante isso ocorre?
 - (d) Demonstre que a partícula passa duas vezes por qualquer ponto de sua trajetória, com exceção de um, pelo qual ela passa uma única vez. Identifique esse ponto excepcional.
3. Nos três itens desta questão serão dadas as funções-movimento de duas partículas, que designaremos por partículas A e B, respectivamente. Como

você observará de imediato, em todos os itens, ambas descrevem movimentos retilíneos ao longo do eixo \mathcal{OX} . Pois bem, determine em cada item, separadamente, se as partículas se encontram e, em caso afirmativo, onde e em que instantes se encontram.

(a)

$$\begin{cases} x_A = 30 - 4t \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_B = 2t \\ y_B = 0 \\ z_B = 0 \end{cases} .$$

(b)

$$\begin{cases} x_A = 10 + t^2 \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_B = -2t^2 \\ y_B = 0 \\ z_B = 0 \end{cases} .$$

(c)

$$\begin{cases} x_A = -12 + 8t - t^2 \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_B = 2t - 4 \\ y_B = 0 \\ z_B = 0 \end{cases} .$$

4. Duas partículas, A e B , começam a movimentar-se a partir de $t = 0$ segundo com as seguintes funções-movimento:

$$\begin{cases} x_A = 80 - 4t^2 \\ y_A = 0 \\ z_A = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_B = t^2 \\ y_B = 0 \\ z_B = 0 \end{cases} .$$

Quantas vezes essas partículas se encontram e em que instantes isso ocorre? Onde elas se encontram?

5. Duas partículas, A e B , começam a movimentar-se a partir de $t = 0$ segundo com as seguintes funções-movimento:

$$\begin{cases} x_A = 2t \\ y_A = 2t \\ z_A = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_B = 5t \\ y_B = 20 - 5t \\ z_B = 0 \end{cases} .$$

- (a) Trace as trajetórias dessas partículas e determine o ponto de interseção entre elas.
- (b) Essas partículas irão encontrar-se nesse ponto?

6. Considere novamente duas partículas, A e B , que começam a movimentar-se a partir de $t = 0$ segundo, mas agora com as seguintes funções-movimento:

$$\begin{cases} x_A = 4t, \\ y_A = t, \\ z_A = 0; \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_B = 40, \\ y_B = Ct, \\ z_B = 0. \end{cases},$$

onde C é uma constante real.

- Trace as trajetórias das partículas e determine o ponto em que elas se interceptam (note que as coordenadas desse ponto não dependem do valor de C).
 - Qual deve ser a condição sobre os valores de C para que as partículas passem ao mesmo tempo pelo ponto de interseção das trajetórias?
 - Para que valores de C a partícula B passa pelo ponto de interseção antes que a partícula A ?
7. As funções-movimento de uma partícula são dadas por:

$$\begin{cases} x = 2 \cos(2t), \\ y = 4 \sin(2t), \\ z = 0. \end{cases}$$

- Eliminando t das equações anteriores, encontre a relação entre as coordenadas x e y que, juntamente com a condição $z = 0$ metro, dá a trajetória da partícula. Qual o nome da curva constituída por essa trajetória?
- Faça um desenho da trajetória no plano \mathcal{OXY} e marque as posições da partícula em intervalos de tempo de 0,5 segundo, desde o instante $t = 0$ segundo até o instante $t = 3$ segundos.

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de responder a todo o questionário. Além disso, você deve saber o caminho para resolver todos os problemas propostos, embora possa não conseguir terminá-los por dificuldades matemáticas ou por lhe escapar algum detalhe importante para prosseguir na solução. Observe que os problemas propostos aparecem em ordem crescente de dificuldade.

Aula 3 – Deslocamento e velocidade média no movimento retilíneo

Objetivos

- Entender os conceitos de deslocamento e velocidade média no movimento retilíneo.
- Saber calcular deslocamentos e velocidades médias em movimentos dados e, em particular, no caso do movimento retilíneo uniforme.

Introdução

Na aula anterior, você aprendeu o conceito de funções-movimento de uma partícula. Também foi dito que o problema fundamental da mecânica clássica consiste em encontrar as funções-movimento de uma partícula em cada situação apresentada. Para resolver esse problema, é necessário estudar certas características fundamentais do movimento, tais como velocidade e aceleração.

Nesta aula e nas próximas, vamos considerar o caso particular de movimentos retilíneos. Entendendo bem os conceitos fundamentais do movimento nesse caso, torna-se mais fácil entendê-los depois no caso de movimentos gerais. Note que os movimentos discutidos nos três primeiros exemplos da aula anterior são movimentos retilíneos. Na presente aula, vamos estudar os conceitos de deslocamento e velocidade média, que nos preparam para o estudo de velocidade e aceleração, tópicos das aulas seguintes.

Deslocamento

Consideremos uma partícula que pode mover-se apenas ao longo de uma reta. Tal movimento é dito retilíneo ou unidimensional. Vamos escolher o eixo \mathcal{OX} de nosso referencial ao longo dessa reta. Nesse caso, as coordenadas y e z da partícula serão sempre nulas e a posição da partícula fica determinada apenas por sua coordenada x . Por isso, muitas vezes chamamos a coordenada x de posição da partícula. As funções-movimento que dão as coordenadas y e z são, obviamente, as funções nulas: $f_y(t) = 0$, $f_z(t) = 0$. Para estudar um movimento, basta concentrarmo-nos na função f_x que dá a posição x em qualquer instante t durante o movimento:

$$x = f_x(t) . \quad (3.1)$$

Note que o intervalo em questão,

$[t_1, t_2] = \{t \in \mathbb{R} | t_1 \leq t \leq t_2\}$, é fechado, isto é, contém os extremos t_1 e t_2 . No contexto em que estamos, é bom usar o intervalo fechado para termos a liberdade de considerar ou não a situação particular em que $t_2 = t_1$. Nessa situação, o intervalo se reduz a um único instante, isto é: $[t_1, t_2] = \{t_1\}$.

Vamos supor que a partícula execute um movimento retilíneo descrito por uma dada função f_x , de acordo com (3.1). Vamos considerar um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, desde um instante t_1 até um instante t_2 , durante o movimento da partícula.

Seja x_1 a posição da partícula no instante t_1 e x_2 a sua posição no instante t_2 . A variação de posição da partícula, do instante t_1 ao instante t_2 , é a diferença $x_2 - x_1$. Essa variação é chamada de **deslocamento** da partícula do instante t_1 ao instante t_2 , ou de deslocamento da partícula no intervalo $[t_1, t_2]$. Para representar o deslocamento da partícula no intervalo $[t_1, t_2]$, podemos usar o símbolo $\Delta x[t_1, t_2]$, isto é:

$$\Delta x[t_1, t_2] = x_2 - x_1 . \quad (3.2)$$

O símbolo Δ significa variação da grandeza que está escrita logo após esse símbolo. Por exemplo, no caso da fórmula anterior, $\Delta x[t_1, t_2]$ significa variação da posição x (lembre-se de que o deslocamento é uma variação de posição), e o intervalo $[t_1, t_2]$ indica que a variação da posição x em questão é a que acontece durante o intervalo de tempo de t_1 a t_2 . Esse é um símbolo muito complicado e é conveniente utilizá-lo somente por enquanto, pois acabamos de definir o conceito de deslocamento e queremos que o seu símbolo mostre tudo o que é importante no conceito. Na prática, se o conceito já está claro, você pode trocar o símbolo $\Delta x[t_1, t_2]$ por algo mais simples como, por exemplo, Δx , deixando implícito o intervalo de tempo no qual estamos considerando o deslocamento.

A unidade de deslocamento é, naturalmente, a mesma da posição. Se exprimirmos as posições em metros, os deslocamentos serão dados também em metros.

O deslocamento de uma partícula em um intervalo de tempo, assim como quaisquer outras informações sobre o movimento, é fornecido pela função-movimento:

$$\Delta x[t_1, t_2] = x_2 - x_1 = f_x(t_2) - f_x(t_1) . \quad (3.3)$$

Um deslocamento é positivo se, e somente se, $x_2 > x_1$. Isso indica que o sentido da posição inicial x_1 para a final x_2 é o sentido positivo do eixo \mathcal{OX} , conforme mostra a **Figura 3.1**. Nesse caso, dizemos que o deslocamento ocorre no sentido positivo do eixo \mathcal{OX} .

Um deslocamento é negativo se, e somente se, $x_2 < x_1$. Isso indica que o sentido da posição inicial x_1 para a final x_2 é o sentido negativo do eixo \mathcal{OX} , conforme mostra a **Figura 3.2**. Nesse caso, dizemos que o deslocamento ocorre no sentido negativo do eixo \mathcal{OX} .

$$x_2 > x_1$$



Figura 3.1: Deslocamento positivo no eixo \mathcal{OX} .

$$x_2 < x_1$$



Figura 3.2: Deslocamento negativo no eixo \mathcal{OX} .

Durante um movimento qualquer, podem ocorrer deslocamentos no sentido positivo ou negativo do eixo \mathcal{OX} . No movimento de uma partícula, durante uma parte do tempo, também pode ocorrer que todos os deslocamentos sejam positivos, em qualquer intervalo de tempo que se considere dentro dessa parte. Nesse caso, dizemos que durante essa parte do tempo o movimento tem o **sentido positivo** do eixo dos \mathcal{OX} . Se, por outro lado, durante parte do tempo todos os deslocamentos são negativos, em qualquer intervalo de tempo que se considere dentro dessa parte, dizemos que o movimento tem o **sentido negativo** do eixo dos \mathcal{OX} . Pode ocorrer também que durante uma parte do tempo ocorram deslocamentos positivos e negativos. A **Figura 3.3** mostra as posições da partícula em quatro instantes consecutivos t_1, t', t'' e t_2 ($t_1 < t' < t'' < t_2$).

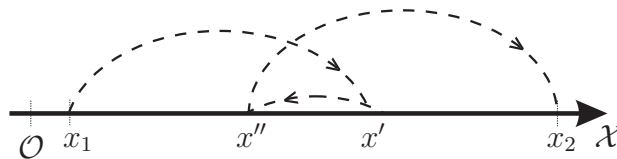


Figura 3.3: Posições de uma partícula em uma seqüência de quatro instantes.

No instante t_1 , a partícula passa por x_1 ; no instante t' , chega em x' , onde pára e volta até a posição x'' , onde chega no instante t'' . De x'' a partícula vai até x_2 , onde chega no instante t_2 . (Note que a partícula se move no eixo \mathcal{OX} , sendo as linhas tracejadas apenas indicações da seqüência em que os deslocamentos são realizados com o passar do tempo.) O movimento em consideração ocorreu no intervalo $[t_1, t_2]$, durante o qual a partícula sofre um deslocamento

$x_2 - x_1$ que é positivo. Embora no intervalo todo $[t_1, t_2]$ o deslocamento seja positivo, dentro desse intervalo ocorreram deslocamentos negativos. De fato, no intervalo $[t', t'']$ que está dentro do intervalo $[t_1, t_2]$, o deslocamento $x'' - x'$ é negativo. A conclusão é que: um deslocamento positivo em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ não significa necessariamente que só houve movimento no sentido positivo nesse intervalo. Na verdade, o deslocamento em um intervalo de tempo dá uma informação global e não detalhada sobre o movimento no intervalo. É claro que um deslocamento negativo no intervalo inteiro também não significa necessariamente que o movimento ocorreu sempre no sentido negativo durante o intervalo.

Um deslocamento é nulo se, e somente se, $x_2 = x_1$, isto é, a posição no final do intervalo $[t_1, t_2]$ é a mesma que no começo. Nesse caso, não devemos necessariamente concluir que a partícula tenha ficado parada em x_1 durante todo o intervalo de tempo. Ela pode ter ficado parada, mas também pode ter realizado um outro movimento qualquer, desde que tenha voltado no instante t_2 à mesma posição x_1 que ocupava no instante t_1 . Por exemplo, quando jogamos uma pedra verticalmente para cima, podemos observar um ponto de sua trajetória pelo qual a partícula passa duas vezes, na subida e na descida, conforme mostra a **Figura 3.4**.

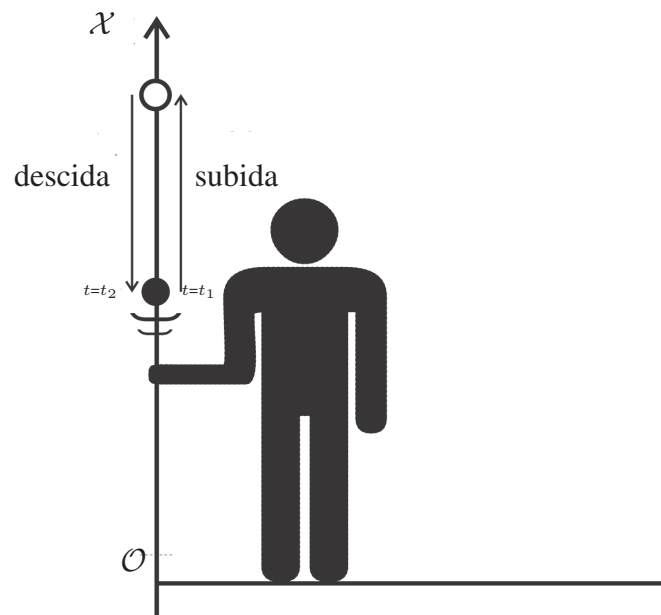


Figura 3.4: A partícula passa pelo mesmo ponto na subida e na descida.

Suponhamos que na subida ela tenha passado nesse ponto no instante t_1 e na descida no instante t_2 . Se usarmos um eixo \mathcal{OX} na vertical, ao longo da trajetória, podemos atribuir a esse ponto uma certa coordenada x_1 . Com isso, no instante t_2 a posição x_2 da partícula é igual a x_1 , de modo que no intervalo de t_1 a t_2 ,

o deslocamento da partícula foi nulo, $x_2 - x_1 = 0$, embora a partícula tenha se movido durante esse intervalo, subindo e descendo em sua trajetória.

Note que o deslocamento de uma partícula durante um certo intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ não é, obrigatoriamente, a distância percorrida por ela durante esse intervalo. No exemplo anterior, a variação de posição da pedra no intervalo $[t_1, t_2]$ é zero, enquanto a distância percorrida por ela no mesmo intervalo não é zero; é o dobro da altura que ela alcança acima da posição inicial x_1 , conforme indicado pela figura.

Como dissemos, o deslocamento em um intervalo de tempo não dá, em geral, informações detalhadas sobre o movimento da partícula durante o intervalo. Dá apenas uma idéia global sobre este movimento. Ainda assim, o conceito de deslocamento é útil para começar o estudo do movimento.

No intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, o tempo decorrido é evidentemente $t_2 - t_1$; o tempo decorrido é também chamado de **duração** do intervalo. Note que no lugar da expressão “intervalo de duração $t_2 - t_1$ ” é comum utilizar a expressão “intervalo $t_2 - t_1$ ”. Por exemplo, se o intervalo vai de 1 a 4 segundos, a duração é de $(4 - 1)$ segundos, isto é, de 3 segundos. Num linguajar preciso e rigoroso, dizemos “um intervalo de duração 3 segundos”. Já numa linguagem mais informal, dizemos “um intervalo de 3 segundos”. Esse tipo de linguagem informal não costuma causar nenhuma confusão.

Se x_1 é a posição da partícula no instante t_1 e x_2 é sua posição no instante t_2 , dizemos que $t_2 - t_1$ é o **tempo gasto** para ocorrer o deslocamento de x_1 para x_2 , ou que $t_2 - t_1$ é o tempo gasto pela partícula para sofrer o deslocamento de x_1 para x_2 . O tempo gasto em um deslocamento depende obviamente do movimento. Em um certo movimento, a partícula pode gastar um certo tempo para sofrer um deslocamento de x_1 para x_2 , mas pode ocorrer um outro movimento, no qual ela gasta menos tempo para sofrer o mesmo deslocamento.

Exemplo 3.1

Um atleta, em seu treinamento para uma corrida, utiliza uma pista retilínea de 1.500 metros de comprimento. No instante $t_0 = 0$ segundo, ele começa a correr a partir do início da pista. No instante $t_1 = 10$ minutos, ele atinge o final da pista, faz meia-volta e retorna ao início da pista, onde chega no instante $t_2 = 20$ minutos. Resolve seguir com seu treinamento e corre novamente até o final da pista, atingindo-o em $t_3 = 30$ minutos, retornando, por fim, ao ponto inicial em $t_4 = 40$ minutos.

Vamos escolher um eixo \mathcal{OX} ao longo da pista, com origem no início e sentido positivo do início ao fim da pista. O início da pista tem coordenada $x_0 = 0$ metro e o final, que chamaremos de ponto F , tem coordenada $x_F = 1.500$ metros. Embora não seja necessário, vamos expressar os instantes de tempo em nossa unidade favorita, o segundo. Temos: $t_0 = 0$ segundo, $t_1 = 600$ segundos, $t_2 = 1.200$ segundos, $t_3 = 1.800$ segundos e $t_4 = 2.400$ segundos. Chamaremos de f_x a função-movimento do atleta, que não supomos conhecida; do movimento só conhecemos as informações dadas acima, isto é, os instantes nos quais o atleta atinge as extremidades da pista.

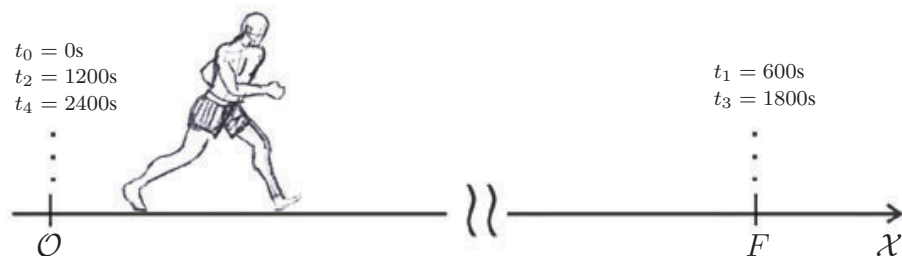


Figura 3.5: Posições na pista de atletismo.

Nos primeiros 600 segundos de treino, seu deslocamento foi de

$$\Delta x[0; 600] = f_x(600) - f_x(0) = 1.500 - 0 = 1.500 \text{ metros.}$$

O deslocamento do atleta entre 600 e 1.200 segundos foi de:

$$\Delta x[600; 1.200] = f_x(1.200) - f_x(600) = 0 - 1.500 = -1.500 \text{ metros.}$$

Já nos primeiros 1.200 segundos de movimento, seu deslocamento foi de:

$$\Delta x[0; 1.200] = f_x(1.200) - f_x(0) = 0 - 0 = 0 \text{ metro.}$$

Esse resultado já nos mostra que o deslocamento de uma partícula num dado intervalo de tempo é uma informação muito pobre no que diz respeito ao movimento da partícula nesse intervalo. Observe, por exemplo, que se soubéssemos apenas que $\Delta x[0; 1.200] = 0$ metro, não poderíamos afirmar que o atleta foi até o final da pista e voltou ao início, nesse intervalo de tempo, ou se ficou simplesmente parado no início, durante todo o intervalo $[0; 1.200]$. Sabemos que a primeira possibilidade é a que ocorreu de fato, porque na primeira metade do intervalo $[0; 1.200]$ o deslocamento é de 1.500 metros (foi ao final da pista) e na segunda metade é de -1.500 metros (voltou ao início).

Note ainda que $\Delta x[0; 1.200] = \Delta x[0; 600] + \Delta x[600; 1.200]$, isto é, o deslocamento no intervalo é a soma dos deslocamentos nos subintervalos que foram considerados. Esse resultado é consequência direta da definição de deslocamento. Voltaremos a ele em um dos exercícios propostos.

Como um último comentário, vale enfatizar que, embora o deslocamento do atleta nos primeiros 1.200 segundos de corrida tenha sido nulo, a distância percorrida por ele, nesse mesmo intervalo, não foi nula, mas igual a $2 \times 1.500 = 3.000$ metros. Fica patente a distinção entre distância percorrida, que é sempre positiva ou nula, e deslocamento, que pode ser positivo, negativo ou nulo, conforme o modo como se processa o movimento. Você pode agora calcular os deslocamentos e as respectivas distâncias percorridas nos intervalos $[1.200; 1.800]$, $[1.800; 2.400]$ e $[1.200; 2.400]$ e analisar os resultados de modo semelhante ao que fizemos para os primeiros 1.200 segundos.

Exemplo 3.2

Filma-se uma bolinha de aço descendo um plano inclinado. Após cuidadoso exame do filme, obtém-se que o movimento da bolinha é bem descrito pela função-movimento $x = 2t^2$, sendo $t = 0$ segundo o instante em que ela inicia seu movimento a partir do repouso e \mathcal{OX} , um eixo ao longo da trajetória retilínea da bolinha, com sentido positivo de cima para baixo no plano inclinado.

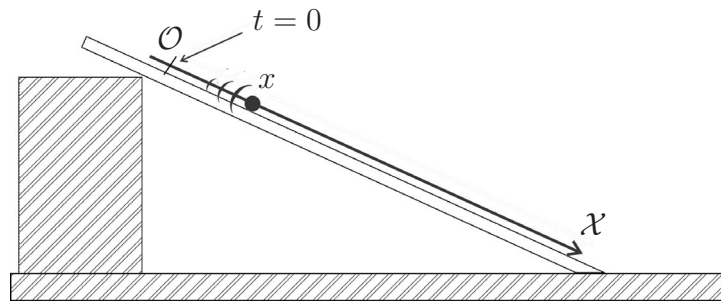


Figura 3.6: Bolinha descendo um plano inclinado.

Diferentemente do exemplo anterior, no qual não conhecíamos a função-movimento do atleta, mas apenas suas posições em alguns instantes de tempo, neste exemplo conhecemos a função-movimento da bolinha. Portanto, podemos calcular seu deslocamento em qualquer intervalo de tempo durante o movimento. No entanto, por ora vamos calcular os deslocamentos em alguns poucos intervalos de tempo, todos eles com a duração de 1 segundo, a saber: $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$ e $[3, 4]$. Da definição de deslocamento, temos:

$$\begin{aligned}\Delta x[0, 1] &= 2 \times 1^2 - 2 \times 0^2 = 2 \text{ metros;} \\ \Delta x[1, 2] &= 2 \times 2^2 - 2 \times 1^2 = 6 \text{ metros;} \\ \Delta x[2, 3] &= 2 \times 3^2 - 2 \times 2^2 = 10 \text{ metros;} \\ \Delta x[3, 4] &= 2 \times 4^2 - 2 \times 3^2 = 14 \text{ metros.}\end{aligned}$$

Note que, ao contrário do que acontece no exemplo anterior, agora os deslocamentos são sempre positivos e, embora os intervalos de tempo consecutivos sejam iguais, as distâncias percorridas vão aumentando com o tempo. O modo como essas distâncias aumentam foi descoberto por Galileu. É um resultado simples e belo que você será convidado a redescobrir no terceiro problema proposto desta aula.

Vamos finalizar essa seção sobre deslocamento, considerando o caso muito especial de um intervalo $[t_1, t_2]$ com $t_2 = t_1$. De fato, não é proibido considerar $t_2 = t_1$, é apenas um caso particular muito especial. Nesse caso, o intervalo se reduz a um único instante t_1 e o tempo decorrido é zero. Temos então $x_2 = x_1$, pois a função-movimento não pode associar duas posições diferentes a um único instante t_1 . A variação de posição $x_2 - x_1$ é, portanto, nula. Em um intervalo de tempo de duração nula não há deslocamento. Nenhuma surpresa, não é mesmo?

Velocidade média

Considere um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ com $t_2 \neq t_1$. Nesse caso, a duração $t_2 - t_1$ do intervalo é diferente de zero. Seja x_1 a posição da partícula no instante t_1 e x_2 , sua posição no instante t_2 . O deslocamento da partícula no intervalo de t_1 a t_2 é $x_2 - x_1$ e o tempo gasto nesse deslocamento é $t_2 - t_1$. A razão entre o deslocamento da partícula no intervalo de t_1 a t_2 e o tempo gasto nesse deslocamento é chamada de **velocidade média** da partícula no intervalo $[t_1, t_2]$. A velocidade média no intervalo $[t_1, t_2]$ é dada por: $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$. A velocidade média é uma fração, e como toda fração ela não pode ter denominador zero. É por esse motivo que fizemos a ressalva de que $t_2 \neq t_1$. Portanto, o conceito de velocidade média só existe para intervalos de tempo $[t_1, t_2]$ que têm alguma duração, isto é, com $t_2 - t_1$ maior do que zero. A duração pode ser tão pequena quanto se queira, porém jamais nula. Se $t_2 = t_1$, o intervalo se reduz ao instante t_1 e para um único instante não é possível usar o conceito de velocidade média.

Para representar a velocidade média da partícula no intervalo de t_1 a t_2 , usaremos o símbolo $\langle v_x \rangle [t_1, t_2]$ que, de acordo com a definição de velocidade média, tem o significado:

$$\langle v_x \rangle [t_1, t_2] = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (t_2 \neq t_1) . \quad (3.4)$$

No símbolo $\langle v_x \rangle [t_1, t_2]$, o v significa “velocidade” e o sub-índice “ x ”, na letra v , significa que estamos considerando o movimento no eixo \mathcal{OX} . Os símbolos \langle à esquerda e \rangle , à direita, são comumente usados para significar “média”. O “[t_1, t_2]” especifica que a velocidade média está sendo calculada no intervalo de tempo de t_1 a t_2 . Esse é um símbolo muito complicado e para ele valem os mesmos comentários feitos para o símbolo de deslocamento em (3.2). Na prática, você pode trocar o símbolo $\langle v_x \rangle [t_1, t_2]$ por algo mais simples como, por exemplo, $\langle v \rangle$, deixando implícito o eixo do movimento e o intervalo no qual se calcula a velocidade média. É muito comum escrever a definição de velocidade média (3.4) da maneira simplificada:

$$\langle v_x \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} , \quad (3.5)$$

onde Δx é o deslocamento e Δt é o tempo gasto no deslocamento; com essa notação, o intervalo de tempo em que ocorreu o deslocamento fica implícito.

Sendo a velocidade média a razão entre um deslocamento e um intervalo de tempo, a sua unidade será a razão entre as unidades de comprimento e de tempo que forem usadas. Se usamos o metro para os deslocamentos e o segundo para o tempo, a unidade de velocidade média é o metro por segundo, usualmente escrita como m/s.

Uma vez que a duração $t_2 - t_1$ do intervalo é positiva, a velocidade média é positiva se, e somente se, o deslocamento da partícula no intervalo de t_1 a t_2 é positivo, isto é, se ele ocorre no sentido positivo do eixo \mathcal{OX} . Do mesmo modo, a velocidade média é negativa se, e somente se, o deslocamento ocorre no sentido negativo do eixo. Finalmente, o caso de velocidade média nula no intervalo t_1 a t_2 corresponde a duas situações possíveis: ou a partícula fica parada durante todo o intervalo de tempo ou ela se move de modo a voltar à mesma posição que ocupava no começo do intervalo.

A velocidade média no intervalo de t_1 a t_2 é dada, a partir da função-movimento, por:

$$\langle v_x \rangle [t_1, t_2] = \frac{f_x(t_2) - f_x(t_1)}{t_2 - t_1}. \quad (3.6)$$

Do mesmo modo que o deslocamento, a velocidade média em um intervalo de tempo não dá, em geral, informações precisas sobre o movimento da partícula no intervalo. Na verdade, a velocidade média é um bom conceito, principalmente para nos preparar para o conceito de velocidade instantânea, que abordaremos na próxima aula.

Exemplo 3.3

Reconsideremos o primeiro exemplo desta aula e calculemos algumas velocidades médias durante os primeiros 20 minutos de treinamento do atleta. Da definição de velocidade média, temos para os 600 segundos iniciais:

$$\langle v \rangle [0, 600] = \frac{f_x(600) - f_x(0)}{600 - 0} = \frac{1.500}{600} = 2,5 \text{ m/s}.$$

Nos 600 minutos seguintes, temos:

$$\langle v \rangle [600, 1.200] = \frac{f_x(1.200) - f_x(600)}{1.200 - 600} = \frac{0 - 1.500}{600} = -2,5 \text{ m/s}.$$

A velocidade média na volta tem o mesmo módulo que a velocidade média na ida. Elas têm sinais opostos por um motivo óbvio: os respectivos deslocamentos têm sentidos opostos. É imediato mostrar ainda que é nula a velocidade média no intervalo de tempo $[0, 1.200]$. É claro que ela é nula nesse intervalo porque

o deslocamento também o é. Para certificar-se de que entendeu os cálculos anteriores, determine as velocidades médias do atleta nos intervalos $[1.200, 1.800]$, $[1.800, 2.400]$ e $[1.200, 2.400]$.

Exemplo 3.4

Considere o movimento de uma partícula descrito pela função-movimento: $x = f_x(t) = t^3 - 4t$, $t \in \mathbb{R}$. Podemos extrair da função-movimento qualquer informação sobre o movimento da partícula, em particular, podemos calcular a sua velocidade média em qualquer intervalo de tempo que desejarmos. Vamos, no entanto, escolher alguns poucos intervalos de tempo e, neles, calcular a velocidade média da partícula para entender que tipo de informação ela dá sobre o movimento.

No intervalo $[-2, -1]$, temos:

$$\langle v \rangle[-2, -1] = \frac{f_x(-1) - f_x(-2)}{-1 - (-2)} \quad (3.7)$$

$$= \frac{[(-1)^3 - 4(-1)] - [(-2)^3 - 4(-2)]}{-1 - (-2)} \quad (3.8)$$

$$= \frac{3}{1} = 3 \text{ m/s} . \quad (3.9)$$

Para o intervalo $[0, 2]$, temos:

$$\langle v \rangle[0, 2] = \frac{f_x(2) - f_x(0)}{2 - 0} = 0 \text{ m/s} .$$

O resultado nulo para a velocidade média no intervalo $[0, 2]$ não significa, necessariamente, que a partícula tenha permanecido em repouso durante todo esse intervalo. Vamos tentar descobrir se, de fato, ela se moveu nesse intervalo de tempo, calculando as velocidades médias nas duas metades do intervalo $[0, 2]$, isto é, nos intervalos $[0, 1]$ e $[1, 2]$:

$$\langle v \rangle[0, 1] = \frac{f_x(1) - f_x(0)}{1 - 0} = -3 \text{ m/s} .$$

$$\langle v \rangle[1, 2] = \frac{f_x(2) - f_x(1)}{2 - 1} = 3 \text{ m/s} .$$

Ou seja, na primeira metade do intervalo $[0, 2]$, a partícula tem velocidade média negativa e na segunda metade, positiva. Isso mostra que ela se move durante o intervalo $[0, 2]$, embora tenha nele uma velocidade média nula. Esse valor nulo apenas expressa o fato de que no instante final do intervalo a partícula voltou a ocupar a mesma posição que tinha no instante inicial.

Exemplo 3.5

Um estudante em viagem pela estrada Belo Horizonte-Brasília passa por um trecho da rodovia que é retilíneo e muito longo. Ele observa os marcos quilométricos e registra que em 3 minutos o carro percorre 4 quilômetros e nos 3 minutos seguintes percorre mais 3 quilômetros. Ao final da viagem, após um banho reconfortante e um jantar delicioso, ele fica em dúvida se deve sair para farrear ou ficar em casa estudando física. Extremamente esperto, ele decide por estudar física e começa a analisar os registros da viagem.

Em primeiro lugar, ele expressa os intervalos de tempo em horas. Desse modo, o primeiro intervalo tem duração de $\Delta t_1 = 3 \text{ minutos} = 0,05 \text{ hora}$, durante o qual o deslocamento do carro foi $\Delta x_1 = 4 \text{ quilômetros}$. O segundo intervalo tem duração de $\Delta t_2 = 0,05 \text{ hora}$, mas nele o carro sofreu o deslocamento $\Delta x_2 = 3 \text{ quilômetros}$. No primeiro intervalo a velocidade média é, portanto,

$$\langle v \rangle_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta t_1} = \frac{4}{0,05} = 80 \text{ km/h} ,$$

enquanto no segundo, é dada por:

$$\langle v \rangle_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta t_2} = \frac{3}{0,05} = 60 \text{ km/h} .$$

Já o intervalo inteiro, em que foram feitos os registros, teve a duração de $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 6 \text{ minutos}$, ou seja, $\Delta t = 0,10 \text{ horas}$. Nesse intervalo, o deslocamento do carro foi de $\Delta x = 7 \text{ quilômetros}$. Portanto, no intervalo total, a velocidade média foi:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{7}{0,10} = 70 \text{ km/h} .$$

Note que a velocidade média encontrada para o intervalo total é a média aritmética das velocidades médias nos dois subintervalos de tempo. Essa igualdade acontece somente porque os subintervalos têm a mesma duração, no caso de 3 minutos.

Para encerrar a prazerosa noite, o estudante se pergunta quanto tempo teria gasto para percorrer os mesmos 7 quilômetros, todo ele com a velocidade média dos primeiros 3 minutos, isto é, de 80 quilômetros por hora. Ele obtém:

$$\Delta t' = \frac{7}{80} = 0,0875 \text{ hora} ,$$

isto é, $\Delta t' = 5,25 \text{ minutos}$. É claro que o carro, de fato, gastou mais do que esse tempo (gastou 6 minutos), porque a velocidade média em todo o percurso foi de

70 quilômetros por hora, que é menor do que a velocidade média dos 3 primeiros minutos, isto é, de 80 quilômetros por hora. Em contrapartida, se todos os 7 quilômetros fossem percorridos com a velocidade média dos últimos 3 minutos, isto é, de 60 quilômetros por hora, o carro teria gasto um tempo maior do que os 6 minutos que de fato gastou. Você pode mostrar que, nesse caso, teria gasto 7 minutos. Ao final de tantos estudos e reflexões, o estudante resolveu divertir-se um pouco para continuar a viagem no dia seguinte.

Exemplo 3.6

Em dias de fortes tormentas é difícil não parar por alguns minutos para contemplar a beleza dramática dos relâmpagos e trovões, alternando-se no céu cinzento. É de conhecimento comum que a luz provocada por um relâmpago chega aos nossos olhos antes do que o som desse mesmo relâmpago chegue aos nossos ouvidos. Sabendo-se a velocidade do som e da luz na atmosfera e contando o tempo entre vermos a luz e ouvirmos o som do relâmpago, é possível fazermos uma estimativa da distância d entre nós e o relâmpago. Vamos fazer essa estimativa calculando a distância que o som do trovão percorre até atingir nossos ouvidos.



Figura 3.7: Relâmpagos em dia de tormenta.

Antes de tudo, fazemos a hipótese de que a luz e o trovão sejam provenientes do mesmo lugar. Em condições atmosféricas usuais, a velocidade média de propagação do som no ar é aproximadamente de $v_S = 340$ metros por segundo. Já a velocidade da luz no ar é $v_L = 3 \times 10^8$ metros por segundo. A distância que o som percorre até nossos ouvidos é igual à distância que percorre até o instante em que a luz atinge nossos olhos, somada à distância que percorre desde esse instante até o instante em que o próprio som chega aos nossos ouvidos. A primeira distância é desprezível em comparação à segunda, pois a velocidade da luz é muitas ordens de grandeza superior à do som (estime você mesmo quantas

vezes). Resta-nos, pois, calcular a segunda distância, que nos dá:

$$d \approx v_S \times \Delta t ,$$

onde Δt é o intervalo de tempo entre vermos a luz e ouvirmos o som do relâmpago.

Por exemplo, se após percebermos o clarão provocado por um raio o som do trovão demorar 3 segundos para chegar aos nossos ouvidos, esse relâmpago terá ocorrido a uma distância de nós de aproximadamente $340 \times 3 = 1.020$ metros. Caso o tempo observado entre o clarão e o som do relâmpago seja de 0,5 segundo, a distância terá sido de $340 \times 0,5 = 170$ metros.

Com esse modelo simplificado, nos próximos dias de tormenta, além de apreciar esse espetáculo da natureza, você também será capaz de fazer seus próprios cálculos e avaliar a que distâncias de você estarão ocorrendo os relâmpagos.

Movimento retilíneo uniforme

Vamos considerar nesta seção o único tipo de movimento que é perfeitamente descrito pelo conceito de velocidade média. É o chamado **movimento uniforme**: aquele no qual a velocidade média tem o mesmo valor em qualquer intervalo de tempo (intervalo com alguma duração, é claro, caso contrário não estaríamos falando em velocidade média). Lembre-se que estamos considerando neste capítulo apenas movimentos retilíneos, de modo que o movimento uniforme que mencionamos é também retilíneo. Portanto, estamos nos referindo ao chamado **movimento retilíneo uniforme**, comumente abreviado por MRU. Por definição, ele é o movimento em linha reta no qual a velocidade média é a mesma em qualquer intervalo de tempo. Usaremos o conceito de velocidade média para explorar as características desse movimento. A velocidade média tem o mesmo valor em qualquer intervalo de tempo e vamos representar esse valor constante simplesmente por v . Temos então para a velocidade média em qualquer intervalo $[t_1, t_2]$:

$$\langle v_x \rangle [t_1, t_2] = v . \quad (3.10)$$

Usando a definição (3.4) de velocidade média, obtemos:

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = v , \quad (3.11)$$

onde, naturalmente, x_1 e x_2 são as respectivas posições da partícula nos instantes t_1 e t_2 . Já que essa fórmula vale para qualquer intervalo, vamos tomar o intervalo no qual o instante inicial é $t_1 = 0$ e o instante final é um instante qualquer durante

o movimento. Vamos chamar esse instante final simplesmente de t , de tal modo que $t_2 = t$ e o intervalo em questão é representado por $[0, t]$. Para esse intervalo, a equação (3.11) toma a forma:

$$\frac{x - x_0}{t - 0} = v, \quad (3.12)$$

onde, naturalmente, x_0 é a posição da partícula no instante 0 e x é a sua posição no instante t . A posição x_0 , no instante fixo t_0 , é chamada de **posição inicial**. Da equação anterior, obtemos:

$$x = x_0 + v t. \quad (3.13)$$

Se soubermos a posição x_0 da partícula no instante inicial e o valor v da velocidade média, essa equação permite encontrar a posição da partícula em qualquer instante t que desejarmos. Essa equação (3.13) dá, na verdade, a função-movimento do MRU cuja velocidade média é v e cuja posição no instante 0 é x_0 . A função-movimento f_x de qualquer MRU tem, portanto, a forma:

$$f_x(t) = x_0 + v t. \quad (3.14)$$

Como $x = f_x(t)$ é claro que (3.13) e (3.14) são equações perfeitamente equivalentes, de modo que podemos chamar a relação entre t e x dada em (3.13) de função-movimento. A função-movimento é especificada na forma (3.14), principalmente para explorar os conceitos fundamentais sobre o movimento. Na prática é mais conveniente trabalhar com equações como a (3.13).

Para obter (3.13) e (3.14), escolhemos o instante inicial como sendo zero. Poderíamos ter escolhido qualquer outro instante fixo para ser o inicial, digamos, um instante t_0 . Consideremos então que a partícula esteja em x_0 no instante inicial t_0 e que no instante arbitrário t ela tenha posição x . Nesse caso, a fórmula (3.11) nos fornece a função-movimento:

$$x = x_0 + v (t - t_0). \quad (3.15)$$

É claro que essa função-movimento se reduz à anterior (3.13) no caso da escolha $t_0 = 0$. A função-movimento na forma (3.15) é útil na análise de várias situações, mas nessa seção não teremos necessidade dela; vamos continuar a usar a função-movimento na forma (3.13).

Dada a função-movimento (3.13), podemos, é claro, obter qualquer informação que quisermos sobre o MRU que ela descreve. Vamos então explorar esse tipo de movimento, usando (3.13). Consideremos primeiramente o caso em que a velocidade média é nula: $v = 0$. A função-movimento (3.13) mostra que, nesse

caso, a partícula está em repouso (na posição x_0). É claro que isso é uma trivialidade no caso do MRU, mas devemos nos lembrar que no caso de outros movimentos uma velocidade média nula em um intervalo de tempo não implica que a partícula tenha permanecido em repouso durante esse intervalo, como foi discutido anteriormente. Suponhamos agora que a velocidade média seja maior do que zero: $v > 0$. Nesse caso, o deslocamento em qualquer intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é dado por:

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1), \quad (3.16)$$

conforme pode ser verificado usando a função-movimento (3.13). Sendo $t_2 - t_1$ positivo e v positiva, o deslocamento $x_2 - x_1$ é sempre positivo. Como o intervalo em questão é arbitrário, concluímos que qualquer deslocamento no MRU se processa no sentido positivo se a velocidade média é positiva. De modo semelhante, concluímos que qualquer deslocamento no MRU é negativo se a velocidade média é negativa.

Em suma: todos os deslocamentos em um dado MRU têm o mesmo sentido, ou são sempre positivos, ou são sempre negativos. Em qualquer MRU a partícula nunca inverte o sentido do movimento, de modo a retornar a um ponto pelo qual já tenha passado.

Uma vez que no MRU os deslocamentos não mudam de sentido, o módulo do deslocamento em um intervalo de tempo é igual à distância percorrida pela partícula nesse intervalo. Temos de falar em módulo porque no caso de velocidade média negativa o deslocamento é sempre negativo e torna-se necessário tomar o seu módulo para obter a distância percorrida.

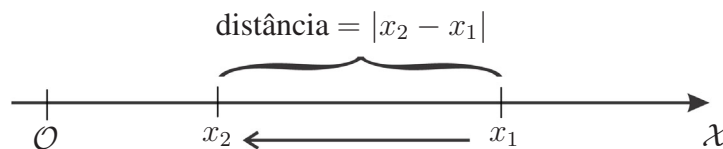


Figura 3.8: Em um deslocamento negativo, tanto como em um positivo, a distância percorrida é positiva.

Lembremo-nos que o módulo $|x|$ de um número real x é igual a x se x é positivo ou nulo e é igual a $-x$ se x é negativo; dessa maneira o módulo de um número jamais é negativo.

A **Figura 3.8** mostra um deslocamento negativo, de x_1 para x_2 ($x_2 < x_1$). Nesse caso, o deslocamento $x_2 - x_1$ é um número negativo, enquanto a distância percorrida é o número positivo $|x_2 - x_1|$.

Lembremo-nos que a igualdade entre o módulo do deslocamento em um certo intervalo de tempo e a distância percorrida nesse intervalo não é sempre verdadeira para qualquer tipo de movimento, como discutimos acima. Ela ocorre para o MRU e para outros movimentos que se processam sem mudar o sentido.

Tomemos agora dois intervalos, $[t_1, t_2]$ e $[t'_1, t'_2]$, com durações iguais: $t'_2 - t'_1 = t_2 - t_1$. Usando a função-movimento (3.13), ou simplesmente o fato de que no MRU a velocidade média é a mesma em qualquer intervalo de tempo, obtemos:

$$\frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad (3.17)$$

onde $x_2 - x_1$ é o deslocamento no intervalo $[t_1, t_2]$ e $x'_2 - x'_1$, o deslocamento no intervalo $[t'_1, t'_2]$. Usando o fato de que as durações dos intervalos são iguais, obtemos da equação anterior que os respectivos deslocamentos são iguais:

$$x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1. \quad (3.18)$$

Dessa equação concluímos que, em intervalos de tempo com a mesma duração, a partícula em MRU percorre distâncias iguais. Essa propriedade costuma ser enunciada na seguinte forma: “no MRU a partícula percorre distâncias iguais em tempos iguais” (“tempos” aí significa, é claro, durações de intervalos).

Vamos finalizar esse estudo do MRU comparando dois movimentos retilíneos uniformes com velocidades médias diferentes. Para simplificar a análise, vamos considerar as duas como positivas, mas se considerássemos outras situações, obteríamos as mesmas conclusões. Sejam os movimentos das duas partículas dados pelas funções-movimento:

$$x = x_0 + v t \quad \text{e} \quad x' = x'_0 + v' t, \quad (3.19)$$

com a condição:

$$v' > v. \quad (3.20)$$

Você não estaria longe da verdade se dissesse que o conceito de módulo de um número real foi inventado para tratar situações desse tipo.

A posição da partícula de menor velocidade média é representada por x e sua posição inicial por x_0 . Já a posição da partícula de maior velocidade média é representada por x' e sua posição inicial por x'_0 . Primeiramente, vamos comparar os deslocamentos das partículas em um dado intervalo de tempo $[t_1, t_2]$. Usando (3.19), obtemos que a razão entre eles é dada por:

$$\frac{x'_2 - x'_1}{x_2 - x_1} = \frac{v'(t_2 - t_1)}{v(t_2 - t_1)} = \frac{v'}{v}. \quad (3.21)$$

Sendo $v' > v$, concluímos que $v'/v > 1$ e, conseqüentemente, obtemos da equação (3.21) que a partícula de maior velocidade sofre o maior deslocamento. Como estamos considerando que os movimentos são do tipo MRU, podemos dizer que a partícula de maior velocidade percorre uma distância maior. Podemos então enunciar esse resultado do seguinte modo: “a distância percorrida por uma partícula em MRU, em um dado intervalo de tempo, é tanto maior quanto maior for a sua velocidade média”.

Vamos agora comparar o tempo gasto pelas duas partículas para percorrer uma mesma distância. Como estamos considerando que os movimentos são do tipo MRU, a igualdade das distâncias percorridas é dada por $x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1$. Sejam t_1 e t_2 os respectivos instantes inicial e final do deslocamento da primeira partícula e t'_1 e t'_2 os respectivos instantes inicial e final do deslocamento da segunda partícula. Usando (3.19), obtemos que a razão entre os tempos gastos nos deslocamentos é:

$$\frac{t'_2 - t'_1}{t_2 - t_1} = \frac{v}{v'}. \quad (3.22)$$

Essa equação mostra que: “no MRU, o tempo gasto para uma partícula percorrer uma dada distância é tanto maior quanto menor for a sua velocidade média”. Essas duas propriedades elementares do MRU é que dão fundamento à noção intuitiva de **rapidez**. O MRU mais rápido é aquele no qual se percorre uma distância maior em um dado intervalo de tempo, ou no qual se gasta menos tempo para se percorrer um dado deslocamento. É claro, pela análise simples que fizemos acima, que o MRU mais rápido é o de maior velocidade média. Desse modo, é o conceito de velocidade média que mede a rapidez dos movimentos retilíneos uniformes. Para descrever a rapidez com que se processam também os outros tipos de movimento, vamos precisar de um conceito mais sofisticado, que veremos na próxima aula: o de velocidade instantânea.

Resumo

O deslocamento de uma partícula em um dado intervalo de tempo é a variação de sua posição nesse intervalo. A velocidade média da partícula em um dado intervalo é a razão entre o deslocamento no intervalo e a duração do intervalo ou, como também se diz, a velocidade média é o deslocamento por unidade de tempo. Tanto o deslocamento quanto a velocidade média em um intervalo de tempo dão uma idéia global, não detalhada, sobre o movimento no intervalo. Entretanto, são conceitos úteis para chegarmos a outros conceitos que descrevem melhor o movimento. Um MRU é um movimento retilíneo no qual a velocidade média da partícula é a mesma em qualquer intervalo de tempo. Num MRU, a partícula percorre distâncias iguais em tempos iguais e nunca muda o sentido do movimento. Além disso, num MRU, a distância percorrida pela partícula em um dado intervalo de tempo é tanto maior quanto maior for a sua velocidade média. Por outro lado, o tempo gasto para uma partícula percorrer uma dada distância é tanto maior quanto menor for a sua velocidade média.

Questionário

1. O que é deslocamento de uma partícula em um dado intervalo de tempo?
2. O que é velocidade média de uma partícula em um dado intervalo de tempo?
3. O que é movimento retilíneo uniforme?
4. A distância percorrida por uma partícula em movimento retilíneo é necessariamente nula se o seu deslocamento for nulo? E o deslocamento é necessariamente nulo se a distância percorrida for nula?
5. Responda à questão anterior para o caso em que o movimento retilíneo é uniforme.
6. Em um MRU, as distâncias percorridas estão na razão direta ou inversa aos tempos gastos para percorrê-las?
7. Para percorrer uma dada distância, os tempos gastos em diversos movimentos retilíneos uniformes estão na razão direta ou inversa às velocidades médias?

Problemas propostos

1. Demonstre que $\Delta x[t_i, t] + \Delta x[t, t_f] = \Delta x[t_i, t_f]$. Generalize esse resultado demonstrando que:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta x[t_n, t_{n+1}] = \Delta x[t_0, t_N],$$

onde N é um inteiro positivo arbitrário.

2. Reconsidere o movimento do atleta tratado no exemplo 3.1 desta aula, mas suponha agora que ele vá de um extremo ao outro inúmeras vezes e de tal forma que ele só mude o sentido de seu movimento quando atinge um dos extremos (o ponto O no início da pista ou o ponto F no final da mesma). Suponha ainda que em $t = t_0$ ele inicie seu movimento de O , que em $t = t_1$ ele atinja pela primeira vez o ponto F , que em $t = t_2$ ele atinja o ponto O pela segunda vez (a primeira vez foi em $t = t_0$) e assim sucessivamente, de modo que em $t = t_{2n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, ele se encontre em F , pela n -ésima vez, e em $t = t_{2n-2}$, ele se encontre em O , pela n -ésima vez.

- Calcule o deslocamento do atleta nos intervalos: $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_0, t_2]$, $[t_0, t_7]$ e $[t_1, t_8]$.
- Calcule a distância percorrida em cada um desses intervalos.
- Calcule o deslocamento do atleta no intervalo $[t_n, t_{n+n'}]$; discuta separadamente os casos em que n' é par e n' é ímpar.
- Quantas vezes o atleta deve percorrer a pista, isto é, mover-se de um extremo ao outro, para que tenha percorrido uma distância de 42km (aproximadamente a distância total percorrida por um atleta que termine a maratona)?

3. Considere uma partícula em movimento retilíneo cuja função-movimento seja dada por $x = C t^2$, onde C é uma constante. Demonstre que nesse movimento, em intervalos de tempo sucessivos de mesma duração, contados a partir do instante $t = 0$, os deslocamentos da partícula são proporcionais aos números ímpares sucessivos. Em outras palavras, se a duração de todos os intervalos é Δt , temos:

$$\frac{\Delta x[0, \Delta t]}{1} = \frac{\Delta x[\Delta t, 2\Delta t]}{3} = \frac{\Delta x[2\Delta t, 3\Delta t]}{5} = \dots = \frac{\Delta x[n\Delta t, (n+1)\Delta t]}{2n+1}.$$

4. Na seção 4, desta aula, você demonstrou que se a velocidade média de uma partícula num movimento retilíneo ao longo do eixo \mathcal{OX} for igual ao mesmo valor v para qualquer intervalo de tempo do movimento em questão, então o movimento dessa partícula será descrito por $x = x_0 + v(t - t_0)$. Demonstre a recíproca: se o movimento de uma partícula é dado por $x = x_0 + v(t - t_0)$, então a velocidade média em qualquer intervalo de tempo é igual a v .
5. Um dispositivo muito utilizado pelas prefeituras das cidades para multar os motoristas que estiverem conduzindo seus carros com rapidez excessiva está ilustrado na **Figura 3.9**.

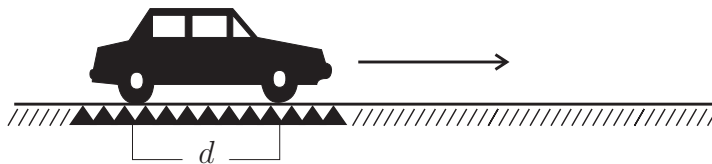


Figura 3.9: Dispositivo para medir a velocidade.

Sensores em locais convenientes da pista indicam qual a separação entre os pneus dianteiros e traseiros e quanto tempo depois dos pneus dianteiros os traseiros passam pelo mesmo ponto da pista. Explique como esses dados permitem calcular a velocidade do carro.

6. Uma pedra lançada para cima atinge uma altura máxima em 2 segundos e desce ao ponto de lançamento realizando um movimento retilíneo. Tomando-se um eixo \mathcal{OX} vertical apontando para cima e com a origem no ponto de lançamento da pedra, foi encontrado que sua função-movimento é dada por $x = 20t - 5t^2$, na qual o tempo t foi contado a partir do instante de lançamento.
- Calcule a velocidade média de subida e a velocidade média de descida.
 - Quais as velocidades médias no primeiro segundo da subida? E no segundo seguinte?
 - Responda o item anterior para o movimento de descida.
 - Qual a velocidade média no intervalo $[0, 4]$?

7. Considere o movimento retilíneo de uma partícula descrito pela função-movimento: $x = A \sin(\pi t/2)$. Indique três intervalos de tempo para os quais a velocidade média da partícula é nula, três intervalos de tempo para os quais sua velocidade média é positiva e outros três intervalos de tempo para os quais sua velocidade média é negativa.
8. Considere um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ dividido em dois subintervalos $[t_1, t']$ e $[t', t_2]$, de durações Δt_1 e Δt_2 , respectivamente. Suponha que as respectivas velocidades médias nesses subintervalos sejam v_1 e v_2 .
- (a) Calcule a velocidade média $\langle v \rangle$ no intervalo $[t_1, t_2]$ em função das velocidades médias v_1 e v_2 e das durações Δt_1 e Δt_2 .
 - (b) Mostre que, no caso em que os dois subintervalos têm a mesma duração, $\langle v \rangle$ é a média aritmética de v_1 e v_2 (isso ocorreu no exemplo 3.5).
9. Uma partícula em movimento retilíneo no eixo \mathcal{OX} passa pelas posições x_1 , x' e x_2 , realizando os deslocamentos sucessivos: $\Delta x_1 = x' - x_1$ e $\Delta x_2 = x_2 - x'$. Suponha que no primeiro deslocamento a velocidade média seja v_1 , e no segundo, v_2 .
- (a) Calcule a velocidade média $\langle v \rangle$ no deslocamento de x_1 a x_2 em função das velocidades médias v_1 e v_2 e dos deslocamentos Δx_1 e Δx_2 .
 - (b) Mostre que, no caso em que os dois deslocamentos são iguais, temos:
$$\langle v \rangle = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2} .$$
 - (c) Mostre que, no caso do item anterior, se v_1 e v_2 forem ambas positivas, então $\langle v \rangle$ será sempre menor do que a média aritmética de v_1 e v_2 . Interprete esse resultado.

Auto-avaliação

Você deve ter observado que os problemas propostos nesta aula são bastante heterogêneos. Você se deparou com pequenas demonstrações, como aquelas dos problemas 1, 3, 4 e alguns dos itens dos problemas 8 e 9; com problemas relacionados direta ou indiretamente a alguns exemplos discutidos no texto da aula, como acontece com os problemas 2 e 8 e, finalmente, com problemas diferentes dos que apresentamos na aula.

Embora você não esteja muito familiarizado em fazer demonstrações, já é hora de começar. Mesmo com alguma dificuldade, você deve ser capaz de fazer todas as demonstrações propostas aqui. Você não deve passar para a próxima aula sem demonstrá-las, pois elas envolvem conceitos fundamentais que devem estar bem entendidos por você antes de seguir em frente. Caso não consiga fazê-las, procure a ajuda dos tutores locais. Quanto aos demais problemas, mesmo com alguma dificuldade, você deve ser capaz de fazê-los, exceto os problemas 8 e 9, que são os mais difíceis dessa lista. No entanto, não conseguir fazer esses dois últimos problemas não deve impedi-lo de seguir em frente. Mas lembre-se, não é bom deixar para trás problemas não resolvidos. Quando tiver um tempinho sobrando, procure os colegas ou o tutor para tirar todas as suas dúvidas sobre a aula e os problemas propostos.

Aula 4 – Velocidade instantânea no movimento retilíneo

Objetivo

- Adquirir as primeiras noções sobre o conceito de velocidade instantânea.

Introdução

Na aula anterior, vimos o conceito de velocidade média de uma partícula em um dado intervalo de tempo. Ela indica a rapidez com que a posição dessa partícula muda nesse intervalo. Nesta aula, estudaremos o conceito de velocidade instantânea no movimento retilíneo. A velocidade instantânea de uma partícula em um dado instante dá, nesse preciso instante, a rapidez com que sua posição muda. Quem usa a informação fornecida pelo velocímetro de um automóvel tem uma noção intuitiva do que seja a velocidade instantânea do carro. Entendemos que o velocímetro indica a velocidade do automóvel em cada instante durante o movimento. Se procurarmos investigar o mecanismo de funcionamento de um velocímetro, veremos que ele indica, na verdade, a velocidade média do carro em intervalos de tempo pequenos. No entanto, cada um desses intervalos é tão pequeno, que o consideramos como um único instante. De qualquer modo, o velocímetro nos indica o que intuitivamente entendemos por velocidade instantânea. O conceito de velocidade instantânea é um conceito sofisticado e importantíssimo no estudo da mecânica.

Velocidade instantânea

Consideremos um movimento qualquer de uma partícula no eixo \mathcal{OX} . Seja f_x sua função-movimento:

$$x = f_x(t) . \quad (4.1)$$

Como foi discutido na aula anterior, a velocidade média da partícula em um intervalo de tempo dá pouca informação sobre o movimento nesse intervalo, exceto no caso em que o movimento é um MRU. Em um certo intervalo de tempo $[t_a, t_b]$ existe uma infinidade de movimentos possíveis que têm a mesma velocidade média no intervalo. Isso é fácil de perceber considerando um exemplo simples de dois movimentos diferentes com a mesma velocidade média em $[t_a, t_b]$. Considere o instante $t_m = (t_a + t_b)/2$ no meio do intervalo. Imagine um primeiro

movimento que tem uma velocidade média $\langle V \rangle$ na primeira metade do intervalo, isto é, no subintervalo $[t_a, t_m]$, e outra velocidade média menor $\langle v \rangle$ na segunda metade do intervalo, isto é, no subintervalo $[t_m, t_b]$. É fácil calcular a velocidade média no intervalo inteiro $[t_a, t_b]$. Ela é igual a $(\langle V \rangle + \langle v \rangle)/2$, como você mesmo demonstrou em um exercício proposto na aula anterior.

Imagine agora um outro movimento com a velocidade média $\langle v \rangle$ na primeira metade do intervalo e com a velocidade média $\langle V \rangle$ na segunda metade. Esse segundo movimento é diferente do primeiro, pois sua velocidade média maior ocorre na segunda metade do intervalo, enquanto no primeiro movimento $\langle V \rangle$ ocorre na primeira metade. Apesar de o segundo movimento ser diferente do primeiro, sua velocidade média no intervalo inteiro $[t_a, t_b]$ é igual à do primeiro, como é fácil verificar. Ela tem o mesmo valor $(\langle V \rangle + \langle v \rangle)/2$.

Não seria possível distinguir um movimento do outro se soubéssemos apenas as suas velocidades médias no intervalo $[t_a, t_b]$, pois ambas são iguais a $(\langle V \rangle + \langle v \rangle)/2$. Podemos distinguir um movimento do outro porque sabemos as suas velocidades nos dois subintervalos menores $[t_a, t_m]$ e $[t_m, t_b]$. Um tem velocidade média maior no primeiro subintervalo e menor no segundo e com o outro acontece o contrário. Concluimos então o seguinte: saber as velocidades médias em vários subintervalos pequeninos que formam um intervalo $[t_a, t_b]$ nos dá mais informações sobre o movimento do que saber apenas a velocidade média no intervalo inteiro.

Vamos partir o intervalo $[t_a, t_b]$ em n subintervalos. Consideramos então os instantes intermediários $t'_1, t'_2, \dots, t'_{n-1}$, com $t_a < t'_1 < t'_2 < \dots < t'_{n-1} < t_b$. O intervalo total $[t_a, t_b]$ é a união dos subintervalos menores $[t_a, t'_1], [t'_1, t'_2], \dots, [t'_{n-1}, t_b]$. Calculando as n velocidades médias nesses subintervalos, obtemos mais informações sobre o movimento do que calculando a velocidade média apenas no intervalo inteiro $[t_a, t_b]$. Quanto maior o número n de subintervalos e quanto menor a duração dos subintervalos, mais detalhada é a informação sobre o movimento. Surge a pergunta: quão longe podemos ir em nossa procura por mais informação? Mais especificamente: quão pequenino pode ser cada subintervalo? Quão pequena pode ser a duração de um intervalo no qual queremos obter a velocidade média? A resposta leva a uma das idéias mais profundas e úteis da Matemática e da Física: podemos tomar qualquer duração, não importa quão pequena ela seja, desde que não seja igual a zero. A seguir, examinamos em detalhe essa idéia.

Considere uma partícula em movimento e dois instantes t e $t + \Delta t$ durante o movimento, onde Δt é uma quantidade de tempo que vamos considerar cada vez mais próxima de zero sem, contudo, jamais ser igual a zero. Nesses dois

instantes as posições da partícula são dadas pela função-movimento: $x = f_x(t)$ e $x' = f_x(t + \Delta t)$. Vamos chamar de Δx a diferença entre x' e x : $\Delta x = x' - x$. Desse modo, a posição x' no instante $t + \Delta t$ pode ser escrita como $x + \Delta x$. Temos então:

$$x = f_x(t) \quad \text{e} \quad x + \Delta x = f_x(t + \Delta t) . \quad (4.2)$$

Uma vez que $\Delta t \neq 0$, podemos formar a fração:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f_x(t + \Delta t) - f_x(t)}{\Delta t} . \quad (4.3)$$

No membro esquerdo dessa igualdade, temos o símbolo abreviado $\Delta x / \Delta t$ para a fração que aparece no membro direito da igualdade. Examinando com cuidado a definição de velocidade média dada em (3.6), podemos concluir que essa fração é uma velocidade média. Se $\Delta t > 0$, o instante $t + \Delta t$ é posterior a t , e a fração é a velocidade média no intervalo $[t, t + \Delta t]$ que começa no instante t . Se $\Delta t < 0$, o instante $t + \Delta t$ é anterior a t , e a fração é a velocidade média no intervalo $[t + \Delta t, t]$ que termina no instante t . Não podemos tomar $\Delta t = 0$, mas podemos perguntar o que acontece quando Δt se aproxima indefinidamente de zero. O intervalo com extremos em t e $t + \Delta t$ torna-se cada vez mais próximo de um único instante $\{t\}$. E quanto à fração $\Delta x / \Delta t$ em (4.3)? Ela se aproxima de um valor que chamamos de **velocidade instantânea** no instante t . Vamos representá-la por v_x . A velocidade instantânea v_x é o valor do qual a fração $\Delta x / \Delta t$ em (4.3) aproxima-se quando Δt se aproxima de zero. Para expressar esse fato, usamos a seguinte simbologia:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(t + \Delta t) - f_x(t)}{\Delta t} , \quad (4.4)$$

ou, empregando o símbolo abreviado da fração (4.3):

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} . \quad (4.5)$$

A velocidade instantânea no instante t mede a rapidez com que a posição da partícula está mudando nesse instante. O nome velocidade instantânea é bem descritivo. De fato, o nome velocidade é apropriado para v_x em (4.4) ou (4.5), pois v_x é obtida dividindo-se o deslocamento em um intervalo de tempo pela duração do intervalo, como fizemos para obter a velocidade média. Porém, no caso da velocidade instantânea, tomamos o limite em que a duração vai a zero e o intervalo se reduz a um instante. Daí ser apropriado dar o qualificativo instantâneo à grandeza obtida. O limite que aparece nas equações (4.4) e (4.5) são representados também

pelo símbolo dx/dt , de modo que podemos escrever:

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} . \quad (4.6)$$

Essa é uma notação muito comum. Note que nela cada letra Δ é substituída por um d quando se toma o limite em que o intervalo Δt vai a zero. Usando essa notação, podemos reescrever a equação (4.5) sob a forma:

$$v_x = \frac{dx}{dt} . \quad (4.7)$$

A velocidade instantânea é igual ao valor limite de velocidades médias (em intervalos de tempo cada vez menores) e a unidade de velocidade instantânea será, como a de velocidade média, uma unidade de comprimento dividida por uma de tempo. Assim como a velocidade média, a velocidade instantânea também é expressa em metros por segundo, ou em seus submúltiplos, pois tanto uma como a outra têm de possuir a dimensão física de velocidade.

Quando na fração $\Delta x/\Delta t$, em (4.5), tomamos intervalos Δt cada vez menores, a fração se aproxima cada vez mais da velocidade instantânea v_x . Em situações práticas, os instrumentos de medida não detectam durações menores do que um certo tempo mínimo δt . Para os instrumentos, intervalos de duração menores do que δt não têm duração e são detectados como se fossem um único instante. Nessas situações práticas, quando Δt chega ao valor δt , consideramos que a fração $\Delta x/\Delta t$ já é a velocidade instantânea, para as exigências de precisão. O rigor absoluto da matemática exige, contudo, que Δt se torne menor do que δt e continue diminuindo indefinidamente para que se obtenha o valor limite v_x em (4.5), que é a velocidade instantânea para as exigências teóricas da matemática. Embora uma definição prática menos precisa de velocidade instantânea seja suficiente para fazermos medições, para formularmos a teoria da mecânica e, com isso, entendermos a natureza do movimento, torna-se necessária a definição matemática de velocidade instantânea, como dada em (4.5).

O símbolo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \quad (4.8)$$

é chamado de símbolo de limite e se lê da seguinte maneira: “*limite quando Δt tende a zero de*” e aí dizemos o que está adiante do símbolo. O membro esquerdo da igualdade (4.5), por exemplo, se lê: “*limite quando Δt tende a zero de Δx sobre Δt* ”. Esse símbolo de limite indica que devemos considerar Δt aproximando-se indefinidamente de 0, sem jamais atingir esse valor, e identificar de qual valor a fração em frente ao símbolo se aproxima. Você pode se perguntar: como é possível saber de qual valor a fração se aproxima quando Δt se aproxima de zero, se não podemos fazer $\Delta t = 0$? É fácil ver que isso é possível se considerarmos um exemplo simples. Tomemos a quantidade $3 + h$, onde h é um número real. É claro que podemos fazer $h = 0$, de modo que $3 + h$ se torne igual a 3. Agora, sem tomar h igual a zero vamos perguntar: se h se aproxima de zero, a quantidade $3 + h$ se aproxima de quê? É claro que, intuitivamente, vamos responder que se aproxima de 3. É isso que significa o símbolo $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$. Essa idéia, aplicada à definição de velocidade instantânea, como dada em (4.4), indica que devemos perguntar: se Δt se aproxima de zero, sem se tornar igual a zero, a fração

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f_x(t + \Delta t) - f_x(t)}{\Delta t} \quad (4.9)$$

se aproxima de que valor?

O valor encontrado é o que representamos por v_x e chamamos de velocidade instantânea no instante t . Note que, na fração anterior, se apenas o denominador Δt se aproximasse de zero, a fração aumentaria indefinidamente de valor, sem se aproximar de nenhum valor fixo. Se apenas o numerador Δx se aproximasse de zero, a fração se aproximaria indefinidamente de zero, sempre. O que acontece, na verdade, é que ambos, numerador Δx e denominador Δt , se aproximam de zero, pois quando o tempo disponível tende a zero, o deslocamento que a partícula sofre também tende a zero. Quando ambos, numerador e denominador, diminuem, aproximando-se de zero, a fração se aproxima de algum valor limite, que depende da maneira como eles diminuem. Para descobrir esse valor limite, é necessário fazer o cálculo. Para avançarmos na compreensão desse conceito de limite, nada melhor do que um exemplo.

Exemplo 4.1

Vamos tomar o movimento descrito por $f_x(t) = 2 + 5t^2$, isto é,

$$x = 2 + 5t^2. \quad (4.10)$$

Calculemos a velocidade da partícula no instante $t = 3$ segundos. Para calcular a posição da partícula nesse instante, basta usar a função-movimento (4.10): $x = 2 + 5 \times 3^2 = 47$, isto é, a partícula está a 47 metros da origem, no semi-eixo positivo. Para calcular a velocidade da partícula nessa posição, no instante $t = 3$ segundos, começamos pela fração (4.3) que será usada na fórmula (4.4) para a velocidade instantânea. No instante $t = 3$ segundos, a fração é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{f_x(3 + \Delta t) - f_x(t)}{\Delta t} &= \frac{[2 + 5(3 + \Delta t)^2] - [2 + 5 \times 3^2]}{\Delta t} \\ &= \frac{30 \Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= 30 + 5\Delta t . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Se Δt se aproxima de zero, essa expressão se aproxima de 30 metros:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(t + \Delta t) - f_x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (30 + 5\Delta t) = 30 \text{ m} . \quad (4.12)$$

Desse modo, no movimento (4.10), a velocidade instantânea v_x no instante $t = 3$ s é dada, de acordo com a definição (4.4), por:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(t + \Delta t) - f_x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (30 + 5\Delta t) = 30 \text{ m} , \quad (4.13)$$

isto é,

$$v_x = 30 \text{ m/s} \quad \text{no instante} \quad t = 3 \text{ s} . \quad (4.14)$$

Calculamos a velocidade instantânea, no instante $t = 3$ segundos, usando a definição (4.4). Essa definição permite, é claro, repetir o cálculo para qualquer outro instante particular do tempo. Contudo, é mais prático se obter de uma vez a velocidade instantânea em um instante arbitrário t , como veremos na seção intitulada “Função-velocidade”.

O método intuitivo que usamos para calcular a velocidade instantânea é suficiente para os nossos propósitos nessas aulas iniciais. Você aprenderá a fazer cálculos mais complicados e rigorosos envolvendo o conceito de limite na disciplina de Cálculo I.

O conceito de velocidade instantânea é um conceito sofisticado. Normalmente, não dá para entendê-lo de um dia para o outro. Desde as primeiras investigações sobre o movimento até se chegar ao conceito de velocidade instantânea passaram-se uns dois mil anos. Em geral, adquirimos uma compreensão completa depois de algum tempo, prosseguindo no estudo, fazendo exercícios, estudando exemplos, aprendendo certas propriedades da velocidade instantânea e, principalmente, meditando sobre a sua definição (4.4). Devemos insistir na idéia de que a

velocidade instantânea em um instante t mede a rapidez com que a posição está mudando no exato instante t , devido ao movimento da partícula. Se no instante t a velocidade instantânea é zero, dizemos que a partícula está **instantaneamente em repouso**. Isso acontece, por exemplo, no ponto mais alto atingido por uma pedra jogada verticalmente para cima em movimento retilíneo. Se a velocidade instantânea é positiva no instante t , o movimento nesse instante ocorre no sentido positivo do eixo \mathcal{OX} . Se é negativa, o movimento nesse instante ocorre no sentido negativo. Deixando de lado o sinal e considerando o módulo da velocidade instantânea, podemos afirmar que o movimento da partícula é tanto mais **rápido** no instante t quanto maior for o módulo de sua velocidade instantânea no instante t .

A velocidade instantânea é de tal modo importante no estudo do movimento que é chamada simplesmente **velocidade**, sem a necessidade do qualificativo instantânea. Ele foi usado para enfatizar que a velocidade instantânea é associada a um dado instante do tempo, enquanto a velocidade média é associada a um dado intervalo de tempo com duração diferente de zero.

Função-velocidade

Voltemos ao exemplo 4.1. Nele, calculamos a velocidade em um instante particular, $t = 3\text{s}$. No entanto, ao invés de calcular a velocidade em qualquer instante particular, podemos calculá-la em um instante arbitrário t . Nesse caso, a fração (4.3) é igual a:

$$\begin{aligned}\frac{f_x(t + \Delta t) - f_x(t)}{\Delta t} &= \frac{[2 + 5(t + \Delta t)^2] - [2 + 5t^2]}{\Delta t} \\ &= \frac{10t\Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= 10t + 5\Delta t.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Se Δt se aproxima de zero, essa expressão se aproxima de $10t$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(t + \Delta t) - f_x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (10t + 5\Delta t) = 10t. \quad (4.16)$$

Desse modo, no movimento (4.10), a velocidade instantânea v_x no instante t é dada, de acordo com a definição (4.4), por:

$$v_x = 10t. \quad (4.17)$$

Temos então a velocidade instantânea em um instante arbitrário t , o que é um resultado bem mais completo do que saber apenas a velocidade instantânea em

um instante particular. Com a expressão (4.17), podemos saber qual é a velocidade instantânea em qualquer instante particular. Por exemplo, no instante $t = 3\text{s}$ temos, a partir de (4.17): $v_x = 10 \times 3 = 30$, que é a resposta que havíamos encontrado em (4.14). A expressão (4.17) de fato nos dá uma função que, para cada instante t , fornece a velocidade instantânea v_x nesse instante.

O que fizemos nesse exemplo particular pode ser feito para qualquer movimento. Dada qualquer função-movimento f_x , podemos usar (4.4) para calcular a velocidade instantânea em um instante t arbitrário. A definição (4.4) associa a cada instante t o valor da velocidade nesse instante. Com efeito, ao tomarmos o limite quando Δt tende a zero na expressão (4.4), o membro direito da igualdade se torna uma função apenas do instante t , o Δt desaparece. Desse modo, a velocidade instantânea v_x é dada em (4.4) como função do tempo t . Vamos representar essa função, que dá a velocidade instantânea, por \dot{f}_x (observe o ponto sobre a letra f). Assim, a equação (4.4) pode ser escrita como

$$v_x = \dot{f}_x(t), \quad (4.18)$$

onde $\dot{f}_x(t)$ representa o valor dado no lado direito de (4.4), isto é:

$$\dot{f}_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f_x(t + \Delta t) - f_x(t)}{\Delta t}. \quad (4.19)$$

Vemos que a função \dot{f}_x , que dá a velocidade instantânea v_x em qualquer instante t do movimento, é obtida a partir da função-movimento f_x . Vamos chamar a função \dot{f}_x de **função-velocidade** do movimento considerado. No exemplo que discutimos acima, obtivemos em (4.17) a função-velocidade $v_x = 10t$, ou seja $\dot{f}_x(t) = 10t$.

Exemplo 4.2

Vamos calcular a função velocidade do movimento dado por

$$f_x(t) = 2t^3 + 5. \quad (4.20)$$

Usando a expansão binomial de Newton, podemos escrever:

$$\begin{aligned} f_x(t + \Delta t) - f_x(t) &= [2(t + \Delta t)^3 + 5] - [2t^3 + 5] = \\ &= 2[3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3]. \end{aligned}$$

Substituindo esse resultado em (4.19), obtemos:

$$\begin{aligned}\dot{f}_x(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2[3t^2\Delta t + 3t(\Delta t)^2 + (\Delta t)^3]}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2[3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2] = \\ &= 6t^2,\end{aligned}$$

isto é:

$$\dot{f}_x(t) = 6t^2. \quad (4.21)$$

Da função-movimento

$$f_x(t) = at^3 + b, \quad (4.22)$$

onde a e b são constantes, você obtém a seguinte função-velocidade:

$$\dot{f}_x(t) = 3at^2. \quad (4.23)$$

Naturalmente, (4.20) e (4.21) são apenas casos particulares de (4.22) e (4.23).

No lado direito da equação (4.19) está indicado um processo de limite a ser realizado com uma função f_x . O resultado desse processo é uma função que em matemática é chamada de **função derivada de f_x** . A equação (4.19) afirma, portanto, que a função-velocidade \dot{f}_x é a derivada da função-movimento f_x . No exemplo 4.1, obtivemos o fato de que $\dot{f}_x(t) = 10t$ dá a função derivada da função $f_x(t) = 2 + 5t^2$.

Agora já temos duas funções para estudar um movimento. A primeira é a função-movimento f_x , que é a mais fundamental e especifica exatamente qual é o movimento. A segunda é a função-velocidade, que é obtida da função-movimento e que especifica a velocidade da partícula a cada instante. Vamos escrevê-las juntas:

$$\begin{cases} x = f_x(t) , \\ v_x = \dot{f}_x(t) . \end{cases} \quad (4.24)$$

No caso do movimento dado em (4.10), partimos de $x = 2 + 5t^2$ e obtivemos $v_x = 10t$ em (4.17), de modo que temos o exemplo:

$$\begin{cases} x = 2 + 5t^2 , \\ v_x = 10t . \end{cases} \quad (4.25)$$

Um outro exemplo do par de funções (4.24) é dado por

$$\begin{cases} x = 3t^2 + 5t , \\ v_x = 6t + 5 . \end{cases} \quad (4.26)$$

Usando a definição (4.4), você obterá a segunda função a partir da primeira. Mãos à obra!

Para finalizar essa seção, vamos considerar novamente o MRU. A função-movimento é nesse caso dada pela equação (3.13) da aula anterior, na qual usamos a letra v para representar a velocidade média constante do MRU. Para enfatizar o fato de que se trata de velocidade média, vamos escrevê-la aqui como $\langle v_x \rangle$, de modo que a equação (3.13) toma a forma: $x = x_0 + \langle v_x \rangle t$. Usando nessa função-movimento a definição de velocidade instantânea (4.4), vemos que, no MRU, a velocidade instantânea v_x em qualquer instante t é dada por:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x_0 + \langle v_x \rangle (t + \Delta t)] - [x_0 + \langle v_x \rangle t]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle v_x \rangle . \quad (4.27)$$

A velocidade média $\langle v_x \rangle$ no MRU é uma constante, isto é, não depende do tempo e, conseqüentemente, não se altera ao tomarmos o limite em que Δt tende a zero. Obtemos então:

$$v_x = \langle v_x \rangle , \quad (4.28)$$

ou seja, a velocidade instantânea no MRU é constante e tem o mesmo valor que a velocidade média do MRU. Temos, pois, para o MRU:

$$\begin{cases} x = x_0 + \langle v_x \rangle t , \\ v_x = \langle v_x \rangle . \end{cases} \quad (4.29)$$

Memorizemos o resultado: “no MRU a velocidade instantânea é igual à velocidade média”.

Movimento em pequenos intervalos de tempo

Vimos que a velocidade instantânea v_x é dada em qualquer instante t pela função-velocidade \dot{f}_x , o que é expresso pela igualdade:

$$v_x = \dot{f}_x(t) . \quad (4.30)$$

A função-velocidade \dot{f}_x determina a maneira como varia a velocidade instantânea com o passar do tempo. Vamos considerar um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$. Sua duração é, portanto, $t_2 - t_1$. De um modo geral, a velocidade varia quando passamos de um instante a outro dentro desse intervalo. Acontece que os movimentos têm normalmente uma propriedade muito importante, que pode ser expressa

de modo informal: se a duração de um intervalo é muito pequena, a velocidade praticamente não varia no intervalo, isto é, ela é praticamente constante no intervalo. Podemos expressar esse fato de modo pitoresco, dizendo que um intervalo pode ter duração tão pequena que nele a partícula não “tem tempo” para mudar sua velocidade de modo significativo. Uma maneira mais precisa de expressar essa propriedade é a seguinte: a variação da velocidade em um intervalo de tempo pode ser tão pequena quanto se desejar, se tomarmos o intervalo de tempo com uma duração $t_2 - t_1$ suficientemente pequena. Temos então:

$$v_x \approx \text{constante em um intervalo de tempo suficientemente pequeno.} \quad (4.31)$$

Embora v_x não seja exatamente constante no intervalo, mas apenas aproximadamente constante, é importante notar que o erro cometido em considerar v_x constante pode ser tão pequeno quanto se queira, bastando para isso tomar o intervalo com duração suficientemente pequena. Na verdade, o erro desaparece no limite em que a duração do intervalo tende a zero. De fato, no intervalo $[t_1, t_2]$, o fato de a duração tender a zero significa que t_2 vai para t_1 e nesse limite o intervalo se resume a um único instante t_1 : $[t_1, t_1] = \{t_1\}$. Nesse instante t_1 , a velocidade tem, é claro, um único valor e torna-se óbvio dizer que a velocidade não muda nesse intervalo, isto é, que ela é constante. Desse modo, se a duração do intervalo vai a zero, a afirmação (4.31), de que v_x é constante, deixa de ser uma aproximação e passa a ser exata. Em resumo:

a velocidade pode ser considerada aproximadamente constante em um intervalo de tempo suficientemente pequeno. Essa aproximação é tanto melhor quanto menor for o intervalo e pode ser tão boa quanto se queira, bastando tomar o intervalo suficientemente pequeno. Se o intervalo é de duração nula, essa aproximação vira uma igualdade exata.

Para analisar o movimento, podemos usar a aproximação (4.31) e, posteriormente, tomar o limite em que a duração do intervalo tende a zero para que o resultado final não seja apenas aproximado, mas exato. Veremos em alguns exemplos mais adiante como fazer isso.

O fato de a variação da velocidade v_x em um intervalo de tempo ser arbitrariamente pequena, desde que o intervalo seja suficientemente pequeno, é uma propriedade da função \dot{f}_x , que relaciona a velocidade com o tempo: $v_x = \dot{f}_x(t)$. Essa propriedade é chamada de **continuidade** da função-velocidade \dot{f}_x . Qualquer função é chamada de **contínua** se tem essa propriedade: a variação de seu

valor em um intervalo do domínio pode ser arbitrariamente pequena, tomando-se o intervalo suficientemente pequeno. Postulamos que a função-movimento f_x também é contínua. De fato, ela dá a relação $x = f_x(t)$ entre a posição e o tempo, e supomos que em qualquer movimento a variação de posição em um intervalo de tempo pode ser arbitrariamente pequena, desde que o intervalo seja suficientemente pequeno. Como dissemos para a função-velocidade, a função-movimento “não tem tempo” para mudar significativamente seu valor em um intervalo de tempo muito pequeno.

Dissemos anteriormente que normalmente a função-velocidade é contínua. Contudo, em certas situações especiais, pode ser conveniente fazer uma idealização na qual a função-velocidade não é contínua em um dado instante singular. A partir desse instante, teríamos, então, o fato de que a variação da função em um intervalo não é pequena, mesmo que o intervalo seja arbitrariamente pequeno. Um exemplo desse instante singular seria o instante em que ocorre o choque entre dois corpos muito rígidos. Essa idealização será explicada em mais detalhes no momento oportuno. Normalmente, as funções que estudamos em Física são contínuas e avisamos os casos excepcionais em que não são.

Vamos agora examinar a relação entre velocidade instantânea e velocidade média em um intervalo arbitrariamente pequeno. Voltemos a nossa atenção novamente para a definição de velocidade instantânea dada em (4.5):

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (4.32)$$

Nessa expressão, a fração $\Delta x/\Delta t$ vai se aproximando do valor v_x à medida que Δt vai se aproximando de zero. O valor da fração pode ficar tão próximo de v_x quanto quisermos, desde que tomemos Δt suficientemente próximo de zero. Isso significa que temos uma aproximação

$$v_x \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{em um intervalo } \Delta t \text{ suficientemente pequeno.} \quad (4.33)$$

Essa aproximação é tanto melhor quanto menor for Δt . A igualdade só ocorre no limite em que Δt tende a zero. Para analisar o movimento, também podemos usar essa aproximação (4.33) e posteriormente tomar o limite em que Δt tende a zero para que o resultado final não seja apenas aproximado, mas exato. Uma vez que $\Delta x/\Delta t$ é a velocidade média no intervalo de duração Δt , a equação (4.33) pode ser descrita do seguinte modo:

a velocidade média em um dado intervalo de tempo é aproximadamente igual à velocidade instantânea em um instante qualquer desse intervalo, desde que o intervalo seja suficientemente pequeno.

Vamos agora tomar um intervalo de tempo Δt pequeno o bastante para que ambas aproximações (4.31) e (4.33) sejam válidas. Nesse intervalo a velocidade é aproximadamente constante e é aproximadamente igual à velocidade média, isto é:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx v_x \approx \text{constante} , \quad (4.34)$$

em um intervalo Δt suficientemente pequeno. Vamos representar por t_0 e t o início e o final do intervalo de tempo, respectivamente. Representamos por x_0 e x as respectivas posições no início e no final do intervalo. Temos então: $x_0 = f_x(t_0)$ e $x = f_x(t)$. Com esses símbolos, a equação (4.34) assume a forma:

$$\frac{x - x_0}{t - t_0} \approx v_x \approx \text{constante} , \quad (4.35)$$

ou seja,

$$x \approx x_0 + v_x(t - t_0) \quad \text{e} \quad v_x \approx \text{constante} , \quad (4.36)$$

se $t - t_0$ é suficientemente pequeno. Essas equações dizem que em um intervalo de tempo pequeno o movimento da partícula é aproximadamente um MRU com velocidade média v_x . Uma vez que estamos considerando um movimento retilíneo qualquer da partícula, esse resultado é muito importante. É tão importante que vamos repeti-lo detalhadamente:

em um intervalo de tempo suficientemente pequeno, qualquer movimento retilíneo é aproximadamente igual a um MRU, cuja velocidade média é igual à velocidade da partícula em algum instante do intervalo (o instante não é importante, pois a velocidade é aproximadamente constante no intervalo).

Sabemos que a aproximação se torna tanto melhor quanto menor for o intervalo, e no limite em que o intervalo tende a zero todo erro desaparece. É claro que nesse limite, quando t tende para t_0 , o intervalo se torna um único instante e obtemos em (4.36) o resultado $x = x_0$, que é exato, mas sem utilidade. Isso mostra que tal limite, em que a igualdade aproximada se torna uma igualdade exata, tem de ser tomado de um modo apropriado para obtermos algo que seja interessante. Na próxima aula, daremos um exemplo de como se faz isso. Agora, ao invés de considerarmos o limite matemático em que a duração do intervalo Δt vai a zero, vamos considerar, no exemplo que segue, algo mais concreto, como intervalos de um décimo ou um centésimo de segundo.

Exemplo 4.3

Consideremos o movimento retilíneo dado pela função-movimento

$$f_x(t) = 10 + 5t + 2t^2 . \quad (4.37)$$

A função-velocidade dessa partícula é dada por $\dot{f}_x(t) = 5 + 4t$. É claro que a velocidade não é constante e, portanto, o movimento não é um MRU. Consideremos um intervalo de tempo com duração de um décimo de segundo, digamos de $t_1 = 1,0$ segundo até $t_2 = 1,1$ segundos. Vejamos de que modo o movimento nesse intervalo é aproximadamente um MRU. A posição no início do intervalo é $f_x(1,0) = 17\text{m}$ e a velocidade $\dot{f}_x(1,0) = 9\text{m/s}$. Se essa velocidade permanecesse constante no intervalo $[t_1, t_2]$, teríamos como movimento o MRU:

$$f_{MRU}(t) = 8 + 9t . \quad (4.38)$$

De fato, uma partícula que possuísse esse MRU teria a velocidade de 9m/s e estaria no instante $1,0\text{ s}$ na posição $f_{MRU}(1,0) = 17\text{m}$. Para verificar se no intervalo $[t_1, t_2]$ o movimento f_x é aproximadamente o f_{MRU} , calculemos o deslocamento total no intervalo $[t_1, t_2]$. No movimento verdadeiro, temos o deslocamento:

$$\begin{aligned} \Delta x &= f_x(1,1) - f_x(1,0) = \\ &= [10 + 5 \times 1,1 + 2(1,1)^2] - [10 + 5 \times 1,0 + 2(1,0)^2] = \\ &= 0,92 \text{ m} . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Já no MRU, que simula esse movimento, temos o deslocamento:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= f_{MRU}(1,1) - f_{MRU}(1,0) = \\ &= [8 + 9 \times 1,1] - [8 + 9 \times 1,0] = \\ &= 9 \times 0,1 = 0,90 \text{ m} . \end{aligned} \quad (4.40)$$

A diferença entre o deslocamento verdadeiro e o deslocamento calculado, supondo que no pequeno intervalo o movimento é aproximadamente um MRU, é $\Delta x - \Delta x' = 0,02 \text{ m}$, de modo que o erro relativo é de:

$$\frac{\Delta x - \Delta x'}{\Delta x} = \frac{0,02}{0,92} \approx 2\% . \quad (4.41)$$

Se você repetir essa análise em um intervalo de tempo de $t_1 = 1,0$ segundo a $t_2 = 0,01$ segundo, você encontrará no deslocamento total um erro relativo de aproximadamente $0,2\%$.

Resumo

A velocidade instantânea em um movimento retilíneo é uma medida da rapidez com que a partícula está se deslocando a cada instante. A velocidade instantânea costuma ser chamada simplesmente de velocidade. A cada instante, o sinal da velocidade indica o sentido do movimento e o módulo indica a rapidez do movimento. A velocidade é obtida usando-se o conceito matemático de limite. Ela é o limite de velocidades médias quando as durações dos intervalos tendem a zero.

Dada a função-movimento da partícula, é possível determinar a velocidade em cada instante do movimento. Temos então uma função que chamamos de função-velocidade. Ela associa a cada instante do movimento o valor da velocidade nesse instante. A função-velocidade é a derivada da função-movimento.

As funções-movimento e de velocidade são funções contínuas, isto é, suas mudanças em um intervalo de tempo podem ser tão pequenas quanto se queira, desde que tomemos um intervalo suficientemente pequeno. A continuidade da função-velocidade implica no fato de que em intervalos de tempo suficientemente pequenos todo movimento retilíneo é aproximadamente um MRU.

Questionário

1. O que é velocidade instantânea de uma partícula em movimento retilíneo?
2. O que é função-velocidade de uma partícula em movimento retilíneo?
3. Como a função-velocidade pode ser obtida a partir da função-movimento?
4. Qual a propriedade que qualquer movimento retilíneo possui, em intervalos de tempo suficientemente pequenos, em decorrência da continuidade da função-movimento?

5. É possível que em dois movimentos diferentes a função-velocidade seja a mesma? Em caso afirmativo, dê um exemplo de como isso pode ocorrer.
6. Dê argumentos para não aceitar que a função-movimento seja descontínua em algum instante.

Problemas propostos

1. A função-movimento de uma partícula é dada por $f_x(t) = 8 + Bt - 2t^2$, onde B é uma constante. Sabendo que a partícula inverte o sentido de seu movimento no instante $t = 5$ segundos, determine o valor da constante B .
2. Seja a função-movimento $f_x(t) = A + Bt + Ct^2$, onde A , B e C são três constantes. Considere as quatro possibilidades:
 - (a) B e C positivas;
 - (b) B e C negativas;
 - (c) B positiva e C negativa;
 - (d) B negativa e C positiva;
 - (e) Em quais desses casos ocorre inversão do sentido do movimento?
3. Seja novamente a função-movimento $f_x(t) = A + Bt + Ct^2$. Vamos chamar x_0 e v_{x0} , respectivamente, a posição e a velocidade da partícula no instante $t = 0$, isto é, $x_0 = f_x(0)$ e $v_{x0} = \dot{f}_x(0)$.
 - (a) Expresse as constantes A e B em termos das constantes x_0 e v_{x0} . Suponha também que seja dada informação de que durante um certo intervalo de tempo Δt a variação da velocidade da partícula seja Δv_x .
 - (b) Expresse a constante C em termos das constantes Δt e Δv_x .
 - (c) Escreva a função-movimento em termos das constantes x_0 , v_{x0} , Δt e Δv_x .
4. Continuando com a função-movimento estudada nos problemas anteriores, $f_x(t) = A + Bt + Ct^2$, consideraremos uma propriedade notável que ela apresenta: para o tipo de movimento que ela descreve, a velocidade média em qualquer intervalo de tempo é igual ao valor da velocidade instantânea no meio do intervalo. Representando o intervalo arbitrário por $[t_1, t_2]$, temos:

$$\langle v_x \rangle [t_1, t_2] = \dot{f}_x \left(\frac{t_1 + t_2}{2} \right). \quad (4.42)$$

Demonstre essa propriedade.

5. Considere a função-movimento $f_x(t) = C t^n$, onde C e n são duas constantes, sendo n um inteiro positivo. Demonstre que a função-velocidade desse movimento é dada por $\dot{f}_x(t) = n C t^{n-1}$.

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de responder às quatro primeiras perguntas do questionário e resolver os três primeiros problemas propostos. Isso não quer dizer que você não deva tentar responder a todas as questões e fazer todos os problemas propostos. Por que você não organiza com seus colegas e até mesmo com o tutor local um grupo de estudos para discutir os conceitos de cada aula e fazer os problemas mais difíceis?

Aula 5 – De volta às funções-movimento

Objetivos

- Entender que a função-velocidade de uma partícula e a sua posição em um único instante determinam a função-movimento dessa partícula.
- Entender que a função-movimento de uma partícula é obtida, nesse caso, por meio do conceito matemático de integral.

Introdução

Dadas as velocidades da partícula em todos os instantes do movimento e a posição que ela ocupa em um dado instante particular, é possível descobrir qual é o movimento realizado pela partícula. Dito de outro modo: a função-velocidade da partícula e sua posição em um instante particular determinam a função-movimento. A função-movimento é obtida, nesse caso, por meio do conceito matemático de integral.

Na aula anterior, aprendemos a obter a função-velocidade quando dispomos da função-movimento, usando o conceito matemático de derivada. Se esse conceito é o que permite passar da função-movimento para a função-velocidade, o conceito matemático de integral é aquele que permite voltar da função-velocidade para a função-movimento. Saber qual o caminho de ida e volta para passar de uma dessas funções para a outra é importante.

Nesta aula, vamos supor que conhecemos as funções-velocidade e aprender o caminho de volta às funções-movimento.

A função-movimento a partir da função-velocidade

Esta seção será algo longa. Para facilitar o seu estudo, vamos subdividi-la em cinco partes:

1. O **problema** a ser resolvido.
2. O **cálculo** que resolve o problema.

3. **Comentários** sobre o cálculo feito e o resultado obtido.
4. A **solução** do problema, fornecida pelo resultado do cálculo.
5. Um **exemplo** concreto, no qual mostraremos como funciona a solução do problema proposto.

Vale a pena ler e reler essas cinco partes para entender bem o conteúdo desta seção. O problema proposto e a solução obtida são exemplos das belas aquisições do conhecimento humano que surgem quando Física e Matemática se relacionam.

O PROBLEMA

A função-movimento f_x de uma partícula dá a sua posição x em qualquer instante de tempo t . No entanto, a fim de estabelecer o problema, vamos imaginar que não conhecemos a função-movimento da partícula, mas sim a sua posição em um particular instante. Vamos chamar esse instante de t_0 e essa posição de x_0 . Em resumo, estamos supondo aqui que não sabemos quais são as posições ocupadas pela partícula em todos os instantes do movimento. Sabemos apenas qual é a sua posição em um dado instante do movimento: no instante t_0 a partícula está em x_0 . Além disso, vamos supor que conhecemos qual é a velocidade da partícula em qualquer instante do movimento, isto é, que conhecemos a função-velocidade \dot{f}_x . Sabemos que essa função nos dá as velocidades da partícula em todos os instantes do movimento: em cada instante t , a velocidade v_x é dada por $v_x = \dot{f}_x(t)$. Vamos, a seguir, mostrar como a partir desses dados podemos determinar a função-movimento. O problema que vamos resolver é o seguinte:

conhecendo-se a velocidade de uma partícula em qualquer instante do movimento e a sua posição em um certo instante, determinar o seu movimento.

Em termos mais matemáticos, esse problema pode ser assim enunciado:

dada a posição x_0 de uma partícula em um instante t_0 e a sua função-velocidade \dot{f}_x , determinar a sua função-movimento.

O CÁLCULO

Para resolver esse problema tomamos um instante arbitrário t e um intervalo de tempo $[t_0, t]$. Sabemos a posição x_0 no instante t_0 e desejamos descobrir qual é a posição x em um instante arbitrário t . Vamos dividir esse intervalo em subintervalos suficientemente pequenos para que, em cada um deles, possamos fazer a aproximação (4.36). Conseqüentemente, em cada subintervalo, o movimento será aproximadamente um MRU. Vamos partir o intervalo $[t_0, t]$ em n subintervalos, como indicado na **Figura 5.1**. Para isso, consideramos os instantes intermediários $t'_1, t'_2, \dots, t'_{n-1}$, com $t_0 < t'_1 < t'_2 < \dots < t'_{n-1} < t$.

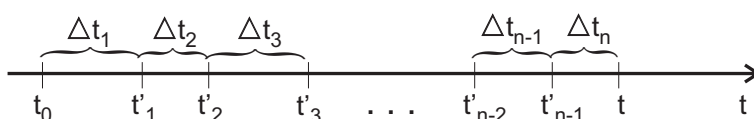


Figura 5.1: Uma partição do intervalo $[t_0, t]$ em n subintervalos.

O intervalo total $[t_0, t]$ é a união dos subintervalos menores $[t_0, t'_1], [t'_1, t'_2], \dots, [t'_{n-1}, t]$. As durações desses subintervalos são dadas, respectivamente, por:

$$\Delta t_1 = t'_1 - t_0 ; \quad \Delta t_2 = t'_2 - t'_1 ; \dots ; \Delta t_n = t - t'_{n-1} .$$

As posições nos instantes intermediários t'_1, t'_2, \dots e t'_{n-1} serão chamadas de x'_1, x'_2, \dots e x'_{n-1} , respectivamente. Note que x_0, x'_1, x'_2, \dots e x'_{n-1} são as posições nos instantes iniciais de cada subintervalo. Por hipótese, a partição do intervalo foi feita de modo que os subintervalos tenham durações $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ suficientemente pequenas, a fim de que possamos usar, em cada subintervalo, a aproximação de que o movimento é um MRU, tal como descrito em (4.36).

Começemos pelo subintervalo $[t_0, t'_1]$. Nele, $[t_0, t'_1]$ escolhemos algum instante t_1 e nesse instante designamos a velocidade da partícula por v_{x1} . Temos, é claro, $v_{x1} = \dot{f}_x(t_1)$. Lembre-se que supomos conhecida a função \dot{f}_x e que, portanto, conhecemos a velocidade da partícula no instante t_1 ou em qualquer outro instante. Uma vez que o subintervalo é suficientemente pequeno, a velocidade é nele aproximadamente constante e, conseqüentemente, se escolhêssemos um outro instante dentro de $[t_0, t'_1]$, obteríamos aproximadamente a mesma velocidade v_{x1} . Portanto, não é importante qual o instante t_1 que é escolhido dentro de $[t_0, t'_1]$.

Lembre-se que particionar um conjunto significa subdividi-lo em subconjuntos tais que a interseção entre quaisquer dois deles seja nula e a união de todos eles dê o conjunto original.

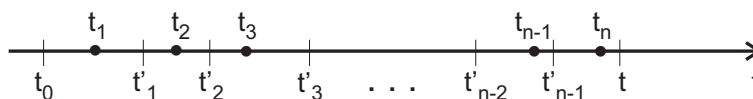


Figura 5.2: Escolha de um instante t_1 dentro do subintervalo $[t_0, t'_1]$ e de instantes t_2, \dots, t_n dentro dos demais subintervalos.

Usando então em $[t_0, t'_1]$ a aproximação (4.36), escrevemos:

$$x'_1 \approx x_0 + v_{x1}(t'_1 - t_0) = x_0 + v_{x1} \Delta t_1 ,$$

onde $v_{x1} = \dot{f}_x(t_1)$ e x_0 é a posição inicial no primeiro subintervalo. De modo semelhante, escolhemos no segundo subintervalo $[t'_1, t'_2]$ um instante t_2 . Temos nesse instante a velocidade $v_{x2} = \dot{f}_x(t_2)$ e aplicamos a aproximação (4.36) para obter:

$$x'_2 \approx x'_1 + v_{x2}(t'_2 - t'_1) = x'_1 + v_{x2} \Delta t_2 ,$$

onde $v_{x2} = \dot{f}_x(t_2)$ e x'_1 é a posição inicial no segundo subintervalo. Prosseguimos com o terceiro subintervalo e os seguintes, sucessivamente, até o último subintervalo, o n -ésimo, para o qual obtemos:

$$x \approx x'_{n-1} + v_{xn}(t - t'_{n-1}) = x'_{n-1} + v_{xn} \Delta t_n ,$$

onde $v_{xn} = \dot{f}_x(t_n)$ e x'_{n-1} é a posição inicial nesse último subintervalo. Desse modo, chegamos ao seguinte conjunto de n igualdades aproximadas:

$$\begin{cases} x'_1 \approx x_0 + v_{x1} \Delta t_1 , \\ x'_2 \approx x'_1 + v_{x2} \Delta t_2 , \\ \vdots \\ x \approx x'_{n-1} + v_{xn} \Delta t_n . \end{cases} \quad (5.1)$$

Agora somamos essas equações e, ao fazê-lo, todas as posições intermediárias $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n-1}$ se cancelam. Temos então:

$$x - x_0 \approx v_{x1} \Delta t_1 + v_{x2} \Delta t_2 + \dots + v_{xn} \Delta t_n , \quad (5.2)$$

onde x_0 foi passado para o primeiro membro da igualdade aproximada. Nessa soma, $v_{x1}, v_{x2}, \dots, v_{xn}$ são as velocidades nos instantes t_1, t_2, \dots, t_n , respectivamente, que escolhemos dentro dos subintervalos. Ou seja, temos: $v_{x1} = \dot{f}_x(t_1)$, $v_{x2} = \dot{f}_x(t_2)$, \dots , $v_{xn} = \dot{f}_x(t_n)$. Desse modo, (5.2) pode ser escrita como:

$$x - x_0 \approx \dot{f}_x(t_1) \Delta t_1 + \dot{f}_x(t_2) \Delta t_2 + \dots + \dot{f}_x(t_n) \Delta t_n . \quad (5.3)$$

Pois bem, sabemos que as aproximações (5.1) se tornam igualdades exatas somente no limite em que as durações dos intervalos tendem a zero. Para tornar exato o resultado (5.3), as durações $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ devem todas tender a zero. Ao mesmo tempo, a duração total do intervalo já está fixada como sendo $t - t_0$ e, portanto, devemos ter sempre: $\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n = t - t_0$. A única maneira de diminuir a duração de todos os subintervalos mantendo a soma deles igual a $t - t_0$ é aumentando o número de subintervalos, isto é, considerando n cada vez maior. Então fazemos o seguinte: consideramos que o intervalo é “particionado” em um número n cada vez maior de subintervalos com durações cada vez menores, como indicado na **Figura 5.3**.

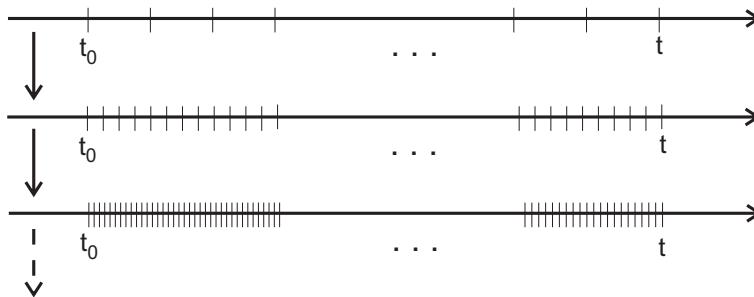


Figura 5.3: Intervalo $[t_0, t]$ “particionado” em um número cada vez maior de subintervalos; tais subintervalos, por sua vez, são cada vez menores.

Para que a duração de cada intervalo vá a zero, é necessário que o número de subdivisões cresça indefinidamente, ou como se diz em matemática, é necessário que o número n vá a infinito. No limite em que n vai a infinito e a duração Δt_i de cada subintervalo vai a zero, obtemos de (5.3) uma igualdade exata:

$$x - x_0 = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} [\dot{f}_x(t_1)\Delta t_1 + \dot{f}_x(t_2)\Delta t_2 + \dots + \dot{f}_x(t_n)\Delta t_n] , \quad (5.4)$$

onde o símbolo em frente à soma indica o processo de limite que tomamos. Para as funções-velocidade, esse processo de limite leva a um resultado bem determinado. Ele não depende da maneira como são feitas as partições do intervalo $[t_0, t]$ em subintervalos e também não depende de quais instantes t_1, t_2, \dots, t_n foram escolhidos dentro dos subintervalos para formar as somas em (5.4). O limite de somas no lado direito de (5.4) é expresso da seguinte maneira:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} [\dot{f}_x(t_1)\Delta t_1 + \dot{f}_x(t_2)\Delta t_2 + \dots + \dot{f}_x(t_n)\Delta t_n] = \int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' \quad (5.5)$$

O símbolo de integral pode parecer esquisito à primeira vista, mas com o tempo ele se mostrará conveniente.

e é chamado de **integral** da função \dot{f}_x no intervalo de t_0 a t . Desse modo, o resultado (5.4) é escrito como:

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' \quad (5.6)$$

e dizemos que o deslocamento no intervalo de tempo de t_0 a t é igual à integral da função-velocidade no intervalo de t_0 a t . Também dizemos, de modo mais simplificado, que o deslocamento no intervalo de tempo de t_0 a t é igual à integral da velocidade no intervalo de t_0 a t .

COMENTÁRIOS

- No símbolo de integral usado em (5.5), $\int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt'$, o \int é a letra “S” estilizada da palavra soma, para lembrar que a integral é obtida como o limite de somas;
- os instantes t_0 e t , que representam, naturalmente, os extremos do intervalo de tempo, são chamados de limite inferior e limite superior da integral, respectivamente;
- o t' é na verdade um símbolo sem muita necessidade, mas que é normalmente usado. Ele representa os instantes no interior do intervalo de t_0 a t . Do mesmo modo, o dt' serve para lembrar que nas somas os valores da velocidade no interior do intervalo são multiplicados pelas durações $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots$, sendo que o Δ é substituído pelo d para indicar que tomamos o limite expresso em (5.5);
- o $\dot{f}_x(t')$ representa o valor da velocidade no instante t' dentro do intervalo. Note que usamos t' para representar um instante no interior do intervalo de tempo $[t_0, t]$, porque a letra t já está sendo usada para representar o extremo superior desse intervalo. Na verdade, você pode representar um instante no interior do intervalo por t' ou por qualquer outra letra que não cause confusão.

Se você está achando complicado calcular a integral como o limite de somas indicado em (5.5), você acertou em cheio: de um modo geral, o limite das somas é muito difícil de ser calculado. Mas não se preocupe com isso, pois no momento temos apenas duas necessidades. Uma é ter sempre em mente a idéia de que a integral obtida no trabalhoso processo de limite de somas dá o valor exato do deslocamento, como está indicado na equação (5.6). A outra é saber obter o limite

das somas em alguns casos muito simples; nesses casos, o cálculo de (5.5) não será muito difícil. Além do mais, você aprenderá a calcular integrais mais complicadas em suas aulas de Cálculo.

A SOLUÇÃO

Vamos reescrever a equação (5.6) na forma:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' . \quad (5.7)$$

Observe o lado direito dessa equação. Nele conhecemos, por hipótese, a função-velocidade \dot{f}_x e os valores fixos de t_0 e x_0 , isto é, o instante escolhido como inicial e a posição da partícula nesse instante. No lado direito da equação, temos o instante t arbitrário, que podemos escolher como sendo qualquer instante. Para qualquer instante t escolhido, o lado direito da equação dá um valor bem definido, igual a x_0 mais a integral de \dot{f}_x no intervalo de t_0 a t , calculada de acordo com (5.5). O resultado final, de acordo com (5.7), é a posição x da partícula no instante t . Ora, o que dá a posição da partícula em qualquer instante t é a função-movimento e, conseqüentemente, o lado direito da equação (5.7) determina a função-movimento f_x procurada:

$$f_x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' . \quad (5.8)$$

Logo, a função-movimento num instante genérico, $f_x(t)$, é dada pela soma da função-movimento num dado instante t_0 , isto é, $f_x(t_0) = x_0$, com a integral da função-velocidade de t_0 a t . Esse resultado deve ser comparado com o da equação (4.19) que afirma ser a função-velocidade dada pela derivada da função-movimento.

Está, portanto, resolvido o problema que havíamos enunciado no começo desta seção:

determinar a função-movimento conhecendo-se a função-velocidades \dot{f}_x e a posição x_0 em um instante t_0 tem como solução a equação (5.8).

UM EXEMPLO

Vejam os um exemplo de como funciona a fórmula (5.8). Na aula anterior, apresentamos no Exemplo 7 a função-movimento $x = 2 + 5t^2$ e encontramos a função-velocidade $v_x = 10t$. Suponhamos agora que a função-movimento seja desconhecida e que desejemos encontrá-la a partir dos seguintes dados: a função-velocidade $v_x = 10t$ e a posição da partícula no instante $t_0 = 0$ s, que é $x_0 = 2$ m. Como estamos supondo que a função-movimento ainda seja desconhecida, a posição inicial $x_0 = 2$ m foi obtida de outras fontes, por exemplo, por observação experimental. Usando esses dados na equação (5.8), obtemos:

$$f_x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' = 2 + \int_0^t 10t' dt'. \quad (5.9)$$

Como aprenderemos mais adiante, nessa fórmula, a integral é dada por:

$$\int_0^t 10t' dt' = 5t^2, \quad (5.10)$$

de modo que (5.9) reduz-se a

$$f_x(t) = 2 + 5t^2, \quad (5.11)$$

que dá a função-movimento procurada. Como dissemos, não é importante por ora saber fazer o cálculo da integral que indicamos em (5.10). Basta agora entender a idéia de que existe um processo para se obter a função-movimento a partir da função-velocidade. De qualquer modo, você verá ainda nessa aula como obter o resultado (5.10).

Dissemos anteriormente que, de um modo geral, é complicado o cálculo de uma integral, como definida na expressão (5.5). Também dissemos que há situações em que o cálculo é relativamente simples. Vamos considerar essas situações simples nas próximas seções.

MRU: o movimento da velocidade invariável

Uma situação na qual o cálculo da integral em (5.5) é extremamente simples é quando a velocidade instantânea da partícula é constante, isto é, invariável. Se a partícula tem uma velocidade v_{x0} no instante inicial t_0 e a velocidade é invariável, então ela tem em qualquer instante t a mesma velocidade v_{x0} . Portanto, sua função-velocidade é dada por:

$$\dot{f}_x(t) = v_{x0} = \text{constante} \quad (5.12)$$

Para determinar a função-movimento, devemos aplicar a fórmula (5.7), que nesse caso toma a forma:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t v_{x0} dt' . \quad (5.13)$$

Nosso problema se resume, pois, em calcular essa integral e para isso dispomos da definição (5.5). Na soma que aparece em (5.5), temos para os instantes escolhidos no interior do intervalo: $\dot{f}_x(t_1) = \dot{f}_x(t_2) = \dots = \dot{f}_x(t_n) = v_{x0}$, de modo que (5.5), nesse caso, nos leva a:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' &= \int_{t_0}^t v_{x0} dt' = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} (v_{x0} \Delta t_1 + v_{x0} \Delta t_2 + \dots + v_{x0} \Delta t_n) \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} v_{x0} (\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_n) \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} v_{x0} (t - t_0) , \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde a última igualdade foi obtida usando-se o fato de que as durações dos subintervalos somadas, igualam a duração do intervalo total, que é $t - t_0$. Notemos agora que na última linha em (5.14) a quantidade $v_{x0} (t - t_0)$ é a velocidade constante da partícula vezes a duração do intervalo total. É um número fixo que nada tem a ver com as subdivisões que fizemos no intervalo. Conseqüentemente, essa quantidade é um valor que não se altera com o limite que está indicado:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} v_{x0} (t - t_0) = v_{x0} (t - t_0) . \quad (5.15)$$

Substituindo esse resultado em (5.14), obtemos então:

$$\int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' = \int_{t_0}^t v_0 dt' = v_0 (t - t_0) . \quad (5.16)$$

Levando o resultado dessa integral em (5.13), obtemos, para o movimento de velocidade constante, a seguinte função-movimento:

$$x = x_0 + v_{x0} (t - t_0) , \quad (5.17)$$

que é a função-movimento de um MRU. Portanto, o movimento retilíneo cuja velocidade instantânea é constante é o MRU. É importante recordar que havíamos definido o MRU como sendo o movimento retilíneo cuja velocidade média é a mesma em qualquer intervalo. Posteriormente, obtivemos o fato de que, no MRU, a velocidade instantânea é igual à velocidade média e, portanto, é constante. Chegamos então a: $MRU \implies v_x = \text{constante}$. O que acabamos de obter em (5.17) é que a recíproca dessa implicação também é verdadeira, ou seja:

$v_x = \text{constante} \implies MRU$. Juntando essas duas implicações lógicas, obtemos $MRU \iff v_x = \text{constante}$. Sintetizando: o movimento retilíneo de velocidade média constante em qualquer intervalo que se considere e o movimento retilíneo de velocidade instantânea constante são a mesma coisa.

Exemplo 5.1

Suponha que a função-velocidade de uma partícula seja dada por $v_x = 5 \text{ m/s}$ e que a sua posição no instante $t = 4 \text{ s}$ seja 20 m . Vamos supor, ainda, que o movimento dessa partícula esteja definido para $t \geq 0$. Determinemos, pois, a sua função-movimento usando o conceito de integral.

A partir do que foi exposto acima, podemos escrever:

$$x = 10 + \int_4^t 5 dt' = 10 + 5(t - 4) ; \implies x = 5t - 10 .$$

Observe que se derivarmos essa expressão obtemos, como esperado, a velocidade da partícula:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5t - 10) = 5 \text{ m/s} .$$

Note que o conhecimento da função-velocidade de uma partícula não é suficiente para obtermos a sua função-movimento. Foi necessário também fornecer a posição da partícula em um dado instante de tempo, no caso, em $t = 4 \text{ s}$. Poderíamos ter dado a posição em um outro instante, por exemplo, poderíamos ter dito que para $t = 0 \text{ s}$ a partícula se encontra na posição -10 m , ou que em $t = 2 \text{ s}$ ela se encontra na origem. O importante a ser enfatizado aqui é que dada a função-velocidade da partícula e apenas a sua posição ocupada em um único instante, não importa qual, sua função-movimento estará univocamente determinada (verifique, a título de exercício, que com as posições dadas em $t = 0 \text{ s}$ ou $t = 2 \text{ s}$ obteríamos a mesma função-movimento).

MRUV: o movimento da velocidade uniformemente variável

Consideramos agora o movimento retilíneo no qual a velocidade varia uniformemente com o tempo. Dito de outro modo: a velocidade é uma função do tempo da forma: $v_x = at + b$, onde a e b são duas constantes. Para simplificar, vamos primeiramente considerar a situação em que a constante b é zero. Nesse caso, a velocidade é proporcional ao tempo decorrido e a função-velocidade é dada por:

$$\dot{f}_x(t) = at. \quad (5.18)$$

Vamos aplicar a definição de integral (5.5) à função dada em (5.18), para descobrir qual a função-movimento que leva a partícula a ter as velocidades dadas por (5.18). Começamos por calcular a soma em (5.5). Devemos nos recordar de que o valor do limite em (5.5) não depende da maneira como são feitas as partições do intervalo $[t_0, t]$ em subintervalos. Também não depende de quais instantes t_1, t_2, \dots, t_n foram escolhidos dentro dos subintervalos para formar as somas em (5.5). Vamos nos aproveitar dessa propriedade para escolher os mencionados intervalos e instantes de um modo bem simples. Os n subintervalos serão todos de mesma duração Δt ,

$$\Delta t_1 = \Delta t, \quad \Delta t_2 = \Delta t, \quad \Delta t_3 = \Delta t, \quad \dots, \quad \Delta t_n = \Delta t, \quad (5.19)$$

de modo que $\Delta t = (t - t_0)/n$, ou seja:

$$t - t_0 = n \Delta t. \quad (5.20)$$

Os instantes t_1, t_2, \dots, t_n serão escolhidos como os instantes finais dos respectivos intervalos, como indicado na **Figura 5.4**.



Figura 5.4: Subintervalos usados no cálculo da integral da função (5.18).

Temos, então,

$$t_1 = t_0 + \Delta t, \quad t_2 = t_0 + 2\Delta t, \quad \dots, \quad t_n = t_0 + n\Delta t. \quad (5.21)$$

Nesses instantes, a função (5.18) assume os valores:

$$\dot{f}_x(t_1) = a(t_0 + \Delta t), \quad \dot{f}_x(t_2) = a(t_0 + 2\Delta t), \quad \dots, \quad \dot{f}_x(t_n) = a(t_0 + n\Delta t). \quad (5.22)$$

Note que a constante a tem dimensão de comprimento pelo quadrado de tempo; isso para que, ao ser multiplicada por um tempo t , resulte em uma quantidade com dimensão de comprimento dividido por tempo, que é a dimensão da velocidade $\dot{f}_x(t)$ no lado esquerdo da equação (5.18). No SI a é dada em m/s^2 .

Substituindo (5.19) e (5.22) na soma (5.5), que define a integral, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{f}_x(t_1)\Delta t_1 + \dot{f}_x(t_2)\Delta t_2 + \cdots + \dot{f}_x(t_n)\Delta t_n &= \\ &= (at_0 + a\Delta t)\Delta t + (at_0 + a2\Delta t)\Delta t + \cdots + (at_0 + an\Delta t)\Delta t = \\ &= na t_0 \Delta t + a(\Delta t)^2[1 + 2 + \cdots + n] . \end{aligned} \quad (5.23)$$

No lado direito da última igualdade, aparece a soma da progressão aritmética 1, 2, 3,..., n , cujo valor é $n(1+n)/2$. Levando esse resultado em (5.23), obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{f}_x(t_1)\Delta t_1 + \dot{f}_x(t_2)\Delta t_2 + \cdots + \dot{f}_x(t_n)\Delta t_n &= \\ &= na t_0 \Delta t + a(\Delta t)^2 n \left(\frac{1+n}{2} \right) = \\ &= a t_0 (n\Delta t) + \frac{1}{2}a [(n\Delta t)^2 + (n\Delta t)\Delta t] . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Levando em conta, nessa última expressão, a igualdade $n\Delta t = t - t_0$, conforme estabelecemos em (5.20), podemos escrever:

$$\begin{aligned} \dot{f}_x(t_1)\Delta t_1 + \dot{f}_x(t_2)\Delta t_2 + \cdots + \dot{f}_x(t_n)\Delta t_n &= \\ &= a t_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}a [(t - t_0)^2 + (t - t_0)\Delta t] . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Substituímos, finalmente, essa soma na definição de integral (5.5), para obter a integral de $\dot{f}_x(t) = at$, que é dada por

$$\int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' = \int_{t_0}^t a t' dt' = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{1}{2}a [(t^2 - t_0^2) + (t - t_0)\Delta t] . \quad (5.26)$$

Nessa expressão, a é uma constante dada e $t - t_0$ é a duração do intervalo total; essas grandezas nada têm a ver com as subdivisões que fazemos do intervalo. Conseqüentemente, permanecem fixas ao tomarmos o limite indicado em (5.26). Por outro lado, ao tomarmos o limite em que Δt vai a zero, o último termo em (5.26) desaparece. Conseqüentemente, obtemos

$$\int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' = \int_{t_0}^t a t' dt' = \frac{1}{2}a (t^2 - t_0^2) . \quad (5.27)$$

Essa integral nos diz qual a função-movimento que corresponde à função-velocidade (5.18). De fato, substituindo (5.27) em (5.7), obtemos a função-movimento:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}a (t^2 - t_0^2) . \quad (5.28)$$

Agora você sabe como pode ser calculada a integral (5.10). Ela é o caso particular de (5.27) em que $a = 10$ e $t_0 = 0$.

Vamos agora voltar à situação na qual a velocidade é uma função do tempo da forma:

$$v_x = a t + b, \quad (5.29)$$

e a constante b pode ser diferente de zero. Chamando v_{x0} a velocidade no instante $t = t_0$, obtemos: $v_{x0} = a t_0 + b$, isto é, a constante b é dada por:

$$b = v_{x0} - a t_0. \quad (5.30)$$

Substituindo (5.30) em (5.29), podemos escrever a função-velocidade na forma:

$$v_x = \dot{f}_x(t) = v_{0x} + a(t - t_0). \quad (5.31)$$

A integral dessa função-velocidade é:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' &= \int_{t_0}^t \left[v_{0x} + a(t' - t_0) \right] dt' = \\ &= v_{0x}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Deixaremos a obtenção dessa integral como um exercício para você fazer. Você simplificará o seu trabalho seguindo algumas recomendações. A primeira é que você deve usar a expressão da velocidade em termos da constante b , como na equação (5.29). Calcule, portanto, a integral:

$$\int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' = \int_{t_0}^t (b + a t') dt'. \quad (5.33)$$

Na resposta final, use (5.30) para eliminar a constante b em favor de v_{0x} e t_0 e chegar ao resultado (5.32). A segunda recomendação é que você deve tomar como modelo para seus cálculos o procedimento que seguimos para obter (5.16) e (5.27). Finalmente, observe que, ao calcular (5.33), você pode organizar os seus resultados de modo a obter duas somas: uma igual à que aparece no cálculo de (5.27) e outra igual à que aparece no cálculo de (5.16).

Substituindo (5.33) em (5.7), obtemos a função-movimento que corresponde à função-velocidade (5.31):

$$x = x_0 + v_{x0}(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2. \quad (5.34)$$

Observe que as duas primeiras integrais que calculamos são casos particulares da (5.32). De fato, fazendo $a = 0$ em (5.32), obtemos o resultado (5.16), e fazendo $v_{x0} = 0$ em (5.32), obtemos o resultado (5.27).

A função-movimento dada em (5.34) descreve o movimento retilíneo no qual as velocidades são dadas pela função (5.31). O movimento retilíneo descrito pela função (5.34) é chamado **movimento retilíneo uniformemente variado**, ou MRUV. Quando uma pedra cai de uma altura não muito grande, ou quando uma bolinha rola abaixo em um plano inclinado, os movimentos observados são, pelo menos aproximadamente, do tipo MRUV. Na equação (5.34), que especifica esse movimento, temos, além de t e x , as seguintes constantes: t_0 , x_0 , v_{x0} e a . Sabemos que t_0 é o instante que escolhemos para chamar de instante inicial e x_0 e v_{x0} são, respectivamente, a posição e a velocidade no instante inicial t_0 . Para entender o significado da constante a voltemos à equação (5.31). Dela obtemos o fato de que, durante um tempo $t - t_0$, a velocidade da partícula no MRUV tem uma variação $v_x - v_{x0}$ dada por $a(t - t_0)$. Quanto maior o módulo da constante a , maior a variação da velocidade no intervalo de t_0 a t . Desse modo, a determina quão rápido varia a velocidade da partícula. Na aula 7, estudaremos como se descreve a rapidez com que varia a velocidade de um movimento. Voltaremos então a considerar o significado da constante a da função-movimento (5.34), que descreve o MRUV.

Para finalizar esta seção, note que tomando o instante inicial $t_0 = 0$, a função-movimento (5.34) do MRUV assume a forma:

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}at^2. \quad (5.35)$$

Exemplo 5.2

Suponha que a função-velocidade de uma partícula seja dada por $v_x = 4t + 3$ e que a sua posição no instante $t = 0$ s seja 1m. Vamos supor ainda que o movimento dessa partícula esteja definido para $t \geq 0$. Determinemos, pois, a sua função-movimento usando o conceito de integral.

O deslocamento da partícula entre $t = 0$ s e um instante arbitrário t são dados por:

$$x - x_0 = \int_0^t (4t' + 3) dt' = 2t^2 + 3t \implies x = 1 + 3t + 2t^2.$$

Novamente aqui é imediato verificar que se derivarmos a função-movimento, obteremos a função-velocidade:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(1 + 3t + 2t^2) = 3 + 4t.$$

Você já deve estar começando a se familiarizar com a idéia de que para obtermos a função-velocidade a partir da função-movimento, usamos o conceito

matemático de derivada, enquanto para voltarmos à função-movimento a partir da função-velocidade, usamos o conceito matemático de integral. Mas cuidado, não se esqueça que, conhecida a função-velocidade, podemos obter somente o deslocamento da partícula em um intervalo de tempo qualquer, mas não a sua função-movimento.

Derivadas e integrais

Nesta seção, faremos uma pausa em nosso estudo do movimento retilíneo para fazer um balanço dos resultados matemáticos que obtivemos até agora. Aproveitaremos para apresentar mais alguns resultados que facilitarão nosso estudo do movimento.

O que faremos, antes de tudo, é observar que a operação que fizemos ao passar da função-movimento f_x para a função-velocidade \dot{f}_x pode ser feita com outras funções. Essa operação chama-se **derivação** da função-movimento e a função resultante é chamada de **função derivada** da função original. Por isso já havíamos dito que a função-velocidade é a derivada da função-movimento. Também a operação que fizemos, para voltar da função-velocidade \dot{f}_x para a função-movimento f_x , pode ser feita para outras funções. Essa operação chama-se **integração** da função-velocidade e a função resultante é chamada de **função integral** da função original. Podemos dizer, portanto, que a função-movimento é a função integral da função-velocidade. Vejamos como as idéias de derivação e integração se aplicam a outras funções além de f_x e \dot{f}_x .

Vamos considerar uma função qualquer do tipo:

$$\begin{aligned} f &: (u_i, u_f) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: u \longmapsto w, \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde u_i e u_f são dois números reais e (u_i, u_f) é o intervalo aberto entre u_i e u_f . Esse intervalo é o domínio da função f . Tal função faz corresponder a cada número u , no intervalo (u_i, u_f) , um único número real w . É claro que, no caso da função-movimento, u representa um instante do tempo e w representa a posição da partícula nesse instante. Agora, contudo, não queremos atribuir nenhum significado particular a f . Ela pode ser a função-movimento, mas também pode ser uma outra função como, por exemplo, a função que associa a cada temperatura u a pressão w de um gás com volume constante. Dê uma olhada agora na definição de derivada da função-movimento, a equação (4.19) da aula anterior. Podemos

também, para uma função f arbitrária, definir derivada de f em u como sendo o limite:

$$\frac{dw}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}. \quad (5.37)$$

Se esse limite dá um valor bem determinado, dizemos que a função f tem derivada em u e que tal derivada é igual ao valor dw/du encontrado como resultado do limite. A quantidade dw/du também é chamada de derivada de w em relação a u . Vários símbolos são usados para representar esta derivada. É apenas uma questão de conveniência ou de gosto qual deles é usado. Listamos abaixo três desses símbolos:

$$\frac{dw}{du} = \frac{d}{du}w = w' \quad (5.38)$$

Se para cada ponto do domínio (u_i, u_f) de f temos uma derivada, então temos uma função. Ela associa ao valor u a derivada dw/du encontrada em (5.37). Essa função costuma ser representada por f' , de modo que podemos escrever:

$$\frac{dw}{du} = f'(u). \quad (5.39)$$

Portanto, a derivada de f em u é o valor da função f' em u . A função f' é chamada de **função derivada** de f . Desse modo, podemos dizer que a derivada em u é o valor da função derivada em u .

É claro que obtemos a função derivada de f a partir da definição (5.37):

$$f'(u) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{f(u + \Delta u) - f(u)}{\Delta u}. \quad (5.40)$$

Você notou que representamos a função derivada de f pela letra f seguida de uma plica: f' (lê-se: f linha). Quando a variável u do domínio é o tempo t , no lugar da plica também se usa um pontinho em cima da letra. É o que temos feito ao representar por \dot{f}_x a função derivada da função-movimento f_x .

Note que na definição de derivada dada em (5.37), temos a diferença Δu e a diferença $f(u + \Delta u) - f(u)$, que podemos representar por Δw . Desse modo, a definição (5.37) pode ser escrita abreviadamente da seguinte maneira:

$$\frac{dw}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta u}. \quad (5.41)$$

A fração $\Delta w/\Delta u$ é a variação de w por unidade de variação de u . Expressa quão rápido w varia em um intervalo de u até $u + \Delta u$. No limite em que Δu tende a zero, obtemos a derivada dw/du , que mede quão rápido w varia com u .

em um certo valor de u . O significado da derivada dw/du depende do significado das grandezas w e u . Já sabemos que no caso em que w é a posição da partícula em uma reta e u é o tempo, a derivada dw/du tem o significado de velocidade instantânea, isto é, de rapidez com que a posição varia com o tempo em um dado instante do tempo. No caso de w representar a pressão de um gás com volume mantido constante e u sua temperatura, dw/du representa a rapidez com que a pressão varia com a temperatura, a uma dada temperatura. Os exemplos podem multiplicar-se, mas é melhor procurar entender cada um, à medida que se fizer necessário. Guardemos por enquanto apenas a idéia de que dw/du dá a rapidez com que w varia com u para um preciso valor de u .

Já calculamos derivadas de diversas funções-movimento, de modo que não é necessário agora considerar exemplos de cálculo de derivadas. No último problema proposto na aula anterior, por exemplo, você aprendeu que a derivada da função $f_x(t) = t^n$ (n é um inteiro positivo e uma constante C foi igualada a 1) é dada por $\dot{f}_x(t) = n t^{n-1}$. Esse resultado não depende do fato de que a função considerada é uma função-movimento, de modo que, usando os símbolos gerais desta seção, podemos escrever o resultado supracitado como:

$$\frac{d}{du}u^n = n u^{n-1}, \quad (5.42)$$

isto é, a derivada de uma potência inteira é igual ao expoente multiplicado pela potência inteira de grau imediatamente inferior.

Embora possa parecer estranho ou inútil (de fato não é uma coisa nem outra) é perfeitamente possível definir **função constante**. É uma função como em (5.36), que associa a qualquer valor de u um mesmo valor w , que, nesse contexto, preferimos chamar de c , isto é: $f(u) = c$, para qualquer u . Por exemplo: se $f(u) = 7$, f é a função constante que associa a qualquer valor de u o número 7. Pois bem, aplicando à função constante a definição de derivada (5.37), obtemos que sua derivada é zero: $f'(u) = 0$. Escrevemos esse resultado como:

$$\frac{d}{du}c = 0 \quad (5.43)$$

e o memorizamos como: a derivada de uma constante é zero. No seu curso de Cálculo, você aprenderá que a derivada tem diversas propriedades importantes, que facilitam imensamente o cálculo das derivadas de diversas funções. Vamos citar algumas dessas propriedades, deixando para o curso de Cálculo as suas demonstrações.

Começemos com uma função $w = f(u)$. Suponhamos que você multiplique o valor w da função por uma constante c : $cw = cf(u)$. Dizer que c é constante significa que c não depende de u , ao contrário de w . Nesse caso, temos:

$$\frac{d}{du}(cw) = c \frac{dw}{du}, \quad (5.44)$$

isto é, a derivada de uma constante vezes uma função é igual à constante vezes a derivada da função. Por exemplo:

$$\frac{d}{du}(5u^3) = 5 \frac{d}{du}u^3 = 5 \cdot 3u^2 = 15u^2. \quad (5.45)$$

Consideremos duas funções f_1 e f_2 da mesma variável u e representemos os seus valores, para um mesmo u , por w_1 e w_2 , respectivamente: $w_1 = f_1(u)$ $w_2 = f_2(u)$. Temos então:

$$\frac{d}{du}(w_1 + w_2) = \frac{dw_1}{du} + \frac{dw_2}{du}, \quad (5.46)$$

isto é, a derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas das funções. Por exemplo:

$$\frac{d}{du}(u^3 + u^5) = \frac{d}{du}u^3 + \frac{d}{du}u^5 = 3u^2 + 5u^4. \quad (5.47)$$

Se em vez de somar as duas funções nós as multiplicarmos, obtemos:

$$\frac{d}{du}(w_1 \cdot w_2) = \frac{dw_1}{du} \cdot w_2 + w_1 \cdot \frac{dw_2}{du}, \quad (5.48)$$

isto é, a derivada do produto de duas funções é igual à derivada da primeira vezes a segunda, mais a primeira vezes a derivada da segunda.

Você não deve se preocupar em decorar essas regras. Recorra a elas no futuro, à medida que se fizerem necessárias.

Passemos agora à integral de uma função genérica, como f , definida em (5.36). É oportuno, nesse momento, dar uma olhada na definição de integral da função-movimento, a equação (5.5) desta aula. Podemos, também, para uma função f arbitrária, definir integral de f , no intervalo de u_0 a u , como sendo o limite:

$$\int_{u_0}^u f(u') du' = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta u \rightarrow 0}} [f(u_1)\Delta u_1 + f(u_2)\Delta u_2 + \cdots + f(u_n)\Delta u_n], \quad (5.49)$$

onde todos os símbolos têm significados similares aos da definição (5.5).

Isso significa que foram dados quatro passos. Em primeiro lugar, o intervalo $[u_0, u]$ foi “particionado” em n subintervalos de comprimentos $\Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n$.

Em segundo lugar, dentro dos subintervalos, foram escolhidos os respectivos valores u_1, u_2, \dots, u_n . Em terceiro lugar, formou-se a soma:

$$f(u_1)\Delta u_1 + f(u_2)\Delta u_2 + \dots + f(u_n)\Delta u_n .$$

Finalmente, tomou-se o limite dessa soma, quando o número n de subdivisões cresce indefinidamente e o comprimento de cada intervalo da partição vai a zero. Quando esses passos nos levam a um valor bem determinado, não importando a maneira como foram realizados (por exemplo, como os valores u_1, u_2, \dots, u_n foram escolhidos dentro de cada subintervalo), dizemos que existe a integral de f no intervalo $[u_0, u]$.

Um exemplo é dado pela integral da função $f(u) = u$ no intervalo de 0 a u :

$$\int_0^u f(u') du' = \int_0^u u' du' = \frac{u^2}{2} . \quad (5.50)$$

Na verdade, já calculamos essa integral, como você pode verificar tomando, na equação (5.32), $v_{x0} = 0$, $t_0 = 0$ e $a = 1$.

Partindo-se da definição de integral (5.49), é possível demonstrar diversas propriedades que são muito úteis para fazer cálculos. Vamos citar algumas dessas propriedades.

- Se u_1, u_2 e u_3 são três números no domínio da função f , então:

$$\int_{u_1}^{u_2} f(u') du' + \int_{u_2}^{u_3} f(u') du' = \int_{u_1}^{u_3} f(u') du' . \quad (5.51)$$

- Se c é uma constante, então:

$$\int_{u_1}^{u_2} c f(u') du' = c \int_{u_1}^{u_2} f(u') du' , \quad (5.52)$$

em qualquer intervalo $[u_1, u_2]$ no domínio de f , isto é, a integral de uma constante vezes uma função é igual à constante vezes a integral da função.

- Se f e g são duas funções da mesma variável u , então:

$$\int_{u_1}^{u_2} [f(u') + g(u')] du' = \int_{u_1}^{u_2} f(u') du' + \int_{u_1}^{u_2} g(u') du' , \quad (5.53)$$

em qualquer intervalo $[u_1, u_2]$ contido nos domínios de f e g , isto é, a integral da soma de duas funções é a soma das integrais das funções.

Deixamos por último a propriedade mais importante da integral, por isso mesmo chamada **teorema fundamental do cálculo integral**. Para entender o que afirma esse teorema, comecemos por considerar como dada a função f em (5.36). Uma função F é chamada de **primitiva** de f se a sua derivada é igual a f :

$$F'(u) = f(u) . \quad (5.54)$$

Por exemplo: uma primitiva de $f(u) = u^2$ é $F(u) = u^3/3$, pois a derivada de F é f : $F'(u) = u^2$. Note que uma função nunca tem apenas uma primitiva, pois somando-se uma constante a uma primitiva, a função resultante também é primitiva. No caso de $f(u) = u^2$ e sua primitiva $F(u) = u^3/3$, que acabamos de considerar, note que $F_1(u) = 1 + u^3/3$ também é primitiva de f , pois a derivada de F_1 é igual a f . Pois bem, o teorema fundamental do cálculo integral afirma que, se F é uma primitiva de f , então a integral de f no intervalo $[u_1, u_2]$ é igual à variação da primitiva F nesse intervalo:

$$\int_{u_1}^{u_2} f(u') du' = F(u_2) - F(u_1) . \quad (5.55)$$

Em geral, esse teorema simplifica enormemente o cálculo de uma integral, pois a obtenção de uma primitiva é normalmente mais simples do que o cálculo do limite de somas que aparece na definição (5.49) de integral. Um exemplo desse teorema é dado na equação (5.50). Nesse caso, uma primitiva da função $f(u) = u$ é a função $F(u) = u^2/2$, de modo que a equação (5.50) é a aplicação do teorema (5.55) ao caso dessas funções.

Você verá as demonstrações dessas propriedades da integral em seu curso de cálculo. Prestando bastante atenção no resultado que obtivemos em (5.8), vemos que, de algum modo, já demonstramos o teorema fundamental do cálculo integral. De fato, isso fica claro após mudarmos em (5.8) alguns símbolos. Primeiramente, note que, em (5.8), x_0 é igual a $f_x(t_0)$. Reescreva então (5.8) substituindo x_0 por $f_x(t_0)$. Agora observe que, sendo f_x a função-movimento, sua derivada dá a função-velocidade \dot{f}_x , isto é, a função-movimento é uma primitiva da função-velocidade. Substitua então, em (5.8), \dot{f}_x por f e f_x por F . Finalmente, troque o nome da variável t para u . A fórmula final é o teorema fundamental do cálculo integral (5.55)!

Exemplo 5.3

É muito comum encontrar sistemas físicos com movimentos vibratórios, como por exemplo: as cordas de um violão ou de um piano; os pêndulos de relógios de parede, as grandes pontes ou grandes arranha-céus, ou mesmo os átomos de um cristal devido à agitação térmica. Alguns dentre os movimentos vibratórios são periódicos, ou seja, se repetem com perfeita regularidade. Um movimento periódico de extrema importância é o chamado movimento harmônico (você estudará detalhadamente esse movimento mais adiante, no curso de Física II). Esse exemplo ilustra alguns aspectos do movimento harmônico em uma dimensão.

Seja a velocidade de uma partícula dada por $v_x = B \cos(\omega t)$, onde B e ω são constantes reais (a constante B , nesse caso, nada mais é do que a velocidade inicial da partícula). Considere ainda que ω esteja dada em radianos por segundo, de modo que ωt seja uma quantidade adimensional, cujo valor corresponda ao argumento do cosseno em radianos. Para calcular o deslocamento da partícula no intervalo $[0, t]$, temos de encontrar uma primitiva da função: $f : t \mapsto f(t) = B \cos(\omega t)$. Usando então o fato de que:

$$\frac{d}{dt}[B \sin(\omega t)] = \omega B \cos(\omega t) ,$$

podemos escrever para o deslocamento:

$$x - x_0 = \int_0^t B \cos(\omega t') dt' = \left\{ \frac{B}{\omega} \sin(\omega t') \right\} \Big|_0^t = \frac{B}{\omega} \sin(\omega t) .$$

Para determinarmos a função de movimento, necessitamos ainda dar a posição da partícula em algum instante. Vale enfatizar aqui que as constantes B e ω são consideradas como dados do problema. Apenas a constante x_0 não foi especificada ainda. Para que não haja dúvidas quanto a isso, vamos dar valores numéricos para as constantes B e ω . Por exemplo, consideremos que $B = 8\text{m}$ e $\omega = 2\text{rad/s}$. Com isso, temos:

$$x - x_0 = 4 \sin(2t) .$$

Novamente ficou claro que o conhecimento da função-velocidade determina somente os deslocamentos da partícula, mas não a sua função-movimento. No entanto, se dermos a sua posição em um único instante, seremos capazes de determinar sua posição em qualquer outro instante. Por exemplo, suponha que em $t = (\pi/4)\text{s}$ a partícula esteja na origem. Com isso, podemos determinar o valor de x_0 :

$$0 = x_0 + 4 \sin(\pi/2) \implies x_0 = -4\text{m} .$$

Substituindo esse valor na expressão anterior para o deslocamento, encontramos:

$$x = -4 + 4 \operatorname{sen}(2t) = 4[\operatorname{sen}(2t) - 1] .$$

Uma vez que $|\operatorname{sen}(2t)| \leq 1$, concluímos que a partícula oscila entre as posições -8m e 0m . Analisando as funções de posição e de velocidade da partícula, concluímos também que a cada π segundos ela retorna à mesma posição com a mesma velocidade (pense na periodicidade das funções seno e cosseno). O **período** do movimento é, nesse caso, igual a π segundos.

Exemplo 5.4

Nesse exemplo, vamos ilustrar movimentos de partículas cujas velocidades vão diminuindo, mas de um modo cada vez mais lento. Especificamente, vamos considerar um decaimento exponencial para a velocidade, dado por:

$$v_x = v_0 e^{-t/\tau} ,$$

onde a constante v_0 corresponde à velocidade inicial da partícula e τ é uma constante com dimensão de tempo característica do problema.

Novamente, para não confundirmos as constantes conhecidas do problema (v_0 e τ) com a constante desconhecida que surge no processo de integração, vamos dar valores numéricos para v_0 e τ . Considere então que $v_0 = 5\text{m/s}$ e $\tau = 10\text{s}$, de modo que:

$$v_x = 5 e^{-t/10} .$$

Para determinarmos o deslocamento da partícula num intervalo qualquer, devemos encontrar uma primitiva da função exponencial. Usando então o fato de que:

$$\frac{d}{dt} (e^{At}) = A e^{At} ,$$

onde A é uma constante, obtemos para o deslocamento no intervalo $[0, t]$:

$$x - x_0 = \int_0^t 5 e^{-t'/10} dt' = 5 \times (-10) \left\{ e^{-t'/10} \right\} \Big|_0^t = 50 \{ 1 - e^{-t/10} \} .$$

O deslocamento total da partícula, supondo que o movimento tenha iniciado em $t = 0\text{s}$, é de 50m , pois quando $t \rightarrow \infty$, a exponencial escrita acima se anula.

A determinação da constante x_0 (posição inicial da partícula) só é possível se a sua posição em algum instante for dada. Por exemplo, se em $t = \infty$ a partícula estiver na origem, temos:

$$0 - x_0 = 50 \{ 1 - e^{-\infty/10} \} = 50 \implies x_0 = -50\text{m} .$$

Esse tipo de movimento pode simular com boa aproximação, por exemplo, o movimento retilíneo de um barco num lago que, devido à resistência oferecida pela água, diminui gradativamente a sua velocidade.

Nesse caso, a função-movimento da partícula é dada por:

$$x = -50 e^{-t/10}.$$

Exemplo 5.5

Nesse exemplo, vamos utilizar o teorema fundamental do cálculo para resolver explicitamente uma integral e aproveitar a oportunidade para verificar uma importante propriedade do processo de integração. Consideremos a integral

$$\int_0^3 \left(\frac{2}{3}t + 4t^3 \right) dt.$$

Pelo teorema fundamental do cálculo, para resolvê-la devemos encontrar uma função primitiva da função que está sendo integrada. Em outras palavras, devemos encontrar alguma função F cuja derivada nos forneça a função $f : t \mapsto f(t) = (2/3)t + 4t^3$. Não é difícil perceber que uma possibilidade é a seguinte (você saberia encontrar uma outra?):

$$F : t \mapsto F(t) = \frac{t^2}{3} + t^4.$$

Conseqüentemente, o valor da integral é dado por:

$$\int_0^3 \left(\frac{2}{3}t + 4t^3 \right) dt = \left\{ \frac{t^2}{3} + t^4 \right\} \Big|_0^3 = 3 + 81 = 84.$$

Vamos agora recalcular essa integral, mas usando uma de suas propriedades enunciadas no texto, a saber:

$$\int_0^3 \left(\frac{2}{3}t + 4t^3 \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}t + 4t^3 \right) dt + \int_1^3 \left(\frac{2}{3}t + 4t^3 \right) dt$$

Resolvendo cada uma das integrais que aparece no lado direito da última equação de modo análogo ao que acabamos de fazer, obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^3 \left(\frac{2}{3}t + 4t^3 \right) dt &= \left\{ \frac{t^2}{3} + t^4 \right\} \Big|_0^1 + \left\{ \frac{t^2}{3} + t^4 \right\} \Big|_1^3 = \\ &= \frac{1}{3} + 1 + \frac{9-1}{3} + 81 - 1 = \\ &= 84, \end{aligned} \tag{5.56}$$

de acordo com o cálculo anterior. Note que essa propriedade da integração fica completamente óbvia se, em lugar de pensar na integral como o limite de uma soma, utilizarmos o teorema fundamental do cálculo.

Resumo

Dada a função-velocidade de uma partícula e a sua posição em um instante particular, é possível obter a sua função-movimento, ou seja, é possível descobrir o seu movimento. A passagem da função-velocidade para a função-movimento é feita por meio do conceito matemático de integral. Ter a mesma velocidade média em qualquer intervalo de tempo e ter velocidade instantânea constante são propriedades equivalentes que determinam ser o movimento retilíneo e uniforme. Obtivemos a função-movimento do MRU e do MRUV usando explicitamente o conceito matemático de integral. Finalizamos a aula com uma seção sobre derivadas e integral, onde, entre outras coisas, apresentamos o teorema fundamental do cálculo.

Questionário

1. A partir da função-movimento de uma partícula, podemos obter a sua função-velocidade. E a recíproca é verdadeira, ou seja, conhecendo-se a função-velocidade de uma partícula podemos obter a sua função-movimento?
2. Duas partículas que tenham funções-movimento idênticas terão obrigatoriamente funções-velocidade também idênticas. Mas se duas partículas possuírem funções-velocidade idênticas terão obrigatoriamente as mesmas funções-movimento?
3. O que significa, do ponto de vista matemático, a integral de uma função $F : t \mapsto F(t)$ de t_1 a t_2 ?
4. Como o deslocamento de uma partícula entre os instantes t_1 e t_2 pode ser obtido a partir de sua função-velocidade?

5. Qual é a definição de MRU usando o conceito de velocidade média e qual é a sua definição usando o conceito de velocidade instantânea?
6. Defina função primitiva de uma função f e crie você mesmo dois exemplos, isto é, defina duas funções f_1 e f_2 e encontre para cada uma delas uma primitiva.
7. Quantas funções primitivas de uma dada função f existem?
8. Enuncie o teorema fundamental do cálculo e utilize-o para calcular as integrais: $\int_1^3 5 \, dt$ e $\int_2^7 10t \, dt$.

Problemas propostos

1. Duas partículas, 1 e 2, possuem a mesma função-velocidade \dot{f}_x , mas suas posições num mesmo instante, t_0 , são dadas, respectivamente, por 10m e 15m. Embora seja bastante intuitivo perceber que a distância entre elas permaneça inalterada com o passar do tempo, demonstre esse fato matematicamente.
2. Considere a função-velocidade de uma partícula $v_x = 4 + 2t$. Sabendo que a sua posição inicial é $x_0 = 10\text{m}$, determine a sua função-movimento utilizando os métodos sugeridos:
 - (a) Por integração direta da função-velocidade.
 - (b) Usando o fato de que no MRUV a velocidade média num dado intervalo é a média dos valores que a velocidade possui nos extremos desse intervalo.
3. A função-velocidade de uma partícula é dada por $v_x = -2 + 3t^2$. Sabe-se ainda que em $t = 2\text{s}$ a sua posição é -16m .
 - (a) Encontre a sua função-movimento.
 - (b) Determine as posições da partícula nos instantes $t = 0\text{s}$ e $t = 3\text{s}$.
4. Considere a mesma função-velocidade do problema anterior. Encontre a correspondente função-movimento supondo que a posição da partícula em $t = 3\text{s}$ é -7m . Verifique que o seu resultado coincide com o encontrado no item (a) do problema anterior e explique o porquê.

5. Para cada uma das funções-velocidade escritas abaixo, encontre os respectivos deslocamentos no intervalo $[0, t]$.

(a) $v_x = 5 + t$.

(b) $v_x = 3 - 2t$.

(c) $v_x = -5 + 4t$.

(d) $v_x = 1 + t + t^2$.

6. A função-velocidade de uma partícula num certo movimento periódico é dada por $v_x = 20[\cos(4t) - \sin(4t)]$. Sabendo que a sua posição inicial é $x_0 = 0\text{m}$ e usando as derivadas

$$\frac{d}{dt}[\cos(At)] = -A \sin(At)$$

e

$$\frac{d}{dt}[\sin(At)] = A \cos(At) ,$$

onde A é uma constante, determine a função-movimento da partícula. Determine ainda o período do movimento (lembre-se que o período de um movimento periódico é o menor intervalo de tempo para que a posição e a velocidade da partícula se repitam).

7. Considere que a velocidade de uma partícula seja dada por $v_x = 3(1 - e^{-2t})$.

- (a) Descreva qualitativamente como varia a velocidade com o passar do tempo.
- (b) Qual é a interpretação, nesse problema, da velocidade de 3m/s ?
- (c) Supondo que $x_0 = 0$, determine a função-movimento da partícula.

8. Considere as funções-movimento de duas partículas, 1 e 2, escritas abaixo:

$$\begin{aligned}x_1 &= f_{x1}(t) = 2t^2 + 10 \\x_2 &= f_{x2}(t) = 2t^2 - 20t + 60 .\end{aligned}$$

- (a) Verifique inicialmente que $f_{x2}(t) = f_{x1}(t - 5)$ e interprete o resultado.
- (b) Baseado na resposta do item anterior, o que significa trocar t por $t - t_0$ numa dada função-movimento? E trocar t por $t + t_0$?
- (c) Determine as respectivas funções-velocidade e mostre que $\dot{f}_{x2}(t) = \dot{f}_{x1}(t - 5)$. Interprete o resultado.

9. Utilizando o teorema fundamental do cálculo, demonstre que:

$$\int_{t_i}^{t_1} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t) dt + \int_{t_n}^{t_f} f(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} f(t) dt .$$

Auto-avaliação

Esta aula foi bastante longa e nela você aprendeu como obter a função-movimento de uma partícula a partir da sua função-velocidade e do conhecimento de sua posição num dado instante. Você viu que foi necessário aprender um conceito matemático novo, o conceito de integral de uma função. Portanto, não se preocupe se você teve de ler muitas vezes alguns trechos da aula para compreender cada conceito que estava sendo exposto. No entanto, após o estudo desta aula, você deve ser capaz de responder a todo o questionário, ainda que tenha alguma dificuldade em uma ou outra questão e solucionar, sem passar aperto, os cinco primeiros problemas propostos (isso não quer dizer que você não deva tentar os quatro últimos; pelo contrário, faça-os e se estiverem um pouco difíceis, encare-os como pequenos desafios).

Aula 6 – Gráficos do movimento

Objetivos

- Aprender a usar gráficos de funções para analisar movimentos retilíneos.
- Saber, em particular, como interpretar graficamente a velocidade instantânea de uma partícula a partir do gráfico de sua posição *versus* tempo.
- Saber como determinar o deslocamento de uma partícula num dado intervalo de tempo a partir do gráfico de sua velocidade *versus* tempo.

Introdução

Recordemos o conceito de gráfico de uma função. Considere uma função qualquer do tipo:

$$\begin{aligned} f &: (u_i, u_f) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &: u \longmapsto w, \end{aligned} \quad (6.1)$$

onde u_i e u_f são dois números reais e (u_i, u_f) é o intervalo aberto entre u_i e u_f . Esse intervalo é o domínio da função f . O contradomínio da função é \mathbb{R} . Essa função faz corresponder a cada número u no domínio (u_i, u_f) um único número real w no contradomínio. Para fazer um gráfico dessa função, precisamos de dois eixos perpendiculares. Em um desses eixos, que desenhemos normalmente na horizontal e apontando para a direita, os pontos são usados para representar os valores da variável u , a variável do domínio da função, também chamada de **variável independente**. No outro eixo, que desenhemos normalmente na vertical e apontando para a cima, os pontos são usados para representar os valores da variável w , a variável do contra-domínio da função, também chamada de **variável dependente**. O eixo da variável do domínio, no caso u , é chamado de eixo das **abscissas**; o eixo da variável do contra-domínio, no caso w , é chamado de eixo das **ordenadas**. O valor da variável que corresponde a um ponto de um eixo é chamada coordenada do ponto e os dois eixos são chamados coletivamente eixos de **coordenadas**. Os eixos de coordenadas costumam ser identificados pela letra que representa a variável representada no eixo. Assim, por exemplo, escrevemos uma letra u próxima à extremidade do eixo das abscissas e o chamamos de eixo de u . O procedimento usual, que adotaremos, é tomar os dois eixos cruzando-se em suas origens, isto é, o ponto de cruzamento dos eixos representa simultaneamente o va-

lor zero da variável independente e o valor zero da variável dependente. A função é representada por uma curva no plano desses dois eixos.

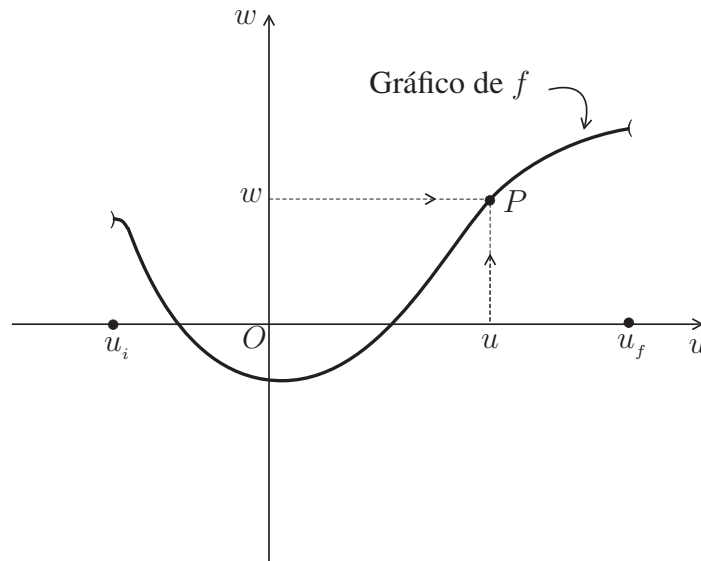


Figura 6.1: Construção do gráfico de uma função $f : u \mapsto w$; cada par de valores u e w , relacionados pela função, determina um ponto P do gráfico.

Para ver como se obtém essa curva, considere um valor u no domínio da função. A esse valor u a função f faz corresponder um único valor $f(u)$, que chamamos de w , isto é, $w = f(u)$. O valor u é representado por um ponto no eixo das abcissas e por ele fazemos passar uma reta perpendicular ao próprio eixo das abcissas. Já o valor w é representado por um ponto no eixo das ordenadas e por ele fazemos passar uma reta perpendicular ao próprio eixo das ordenadas. Essas duas retas se encontram em um único ponto P do plano dos eixos, como indicado na **Figura 6.1**.

Desse modo, a cada par de valores (u, w) relacionado pela função f , corresponde um único ponto P no plano dos eixos. Considerando todos os possíveis valores de u , os pontos que lhes correspondem formam uma curva que chamamos de **gráfico** da função f . Vemos que a função determina seu gráfico. Reciprocamente, o gráfico determina a função, ou seja, dado o gráfico da função, podemos determinar exatamente qual é a função que lhe dá origem, exceto por uma certa liberdade natural que temos de escolher o contradomínio da função. Observando o exemplo dado na **Figura 6.1**, é fácil entender como se recupera a função a partir do gráfico. Vamos repetir esse gráfico na **Figura 6.2**, que usaremos no raciocínio que segue.

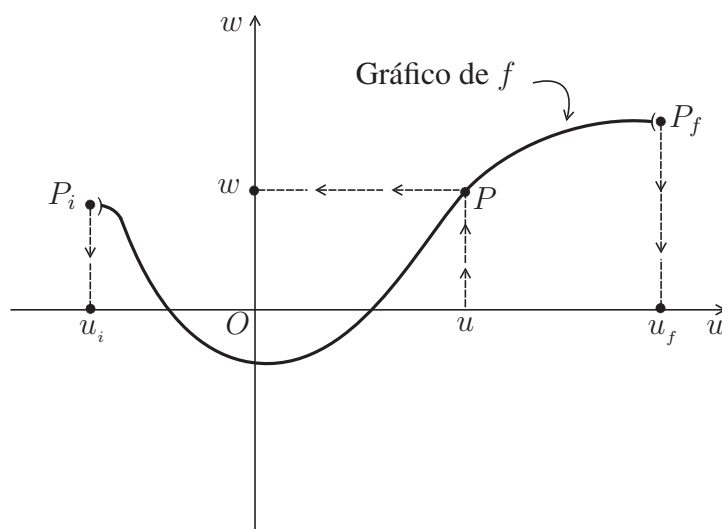


Figura 6.2: Função $f : u \mapsto w$ sendo determinada a partir do gráfico; o gráfico determina qual valor w corresponde a cada valor u .

Nesse caso, o gráfico tem dois pontos extremos: P_i e P_f . Baixando, desses pontos, retas perpendiculares ao eixo das abscissas, elas o encontram nos pontos $u = u_i$ e $u = u_f$, de modo que o domínio da função é o intervalo (u_i, u_f) . Seja um valor qualquer u dentro desse intervalo. Do ponto no eixo das abscissas associado a esse valor levantamos uma perpendicular que encontra o gráfico em algum ponto P . Desse ponto P , traçamos agora uma perpendicular ao eixo das ordenadas que encontra esse eixo em um ponto bem determinado. Tal ponto dará o valor w que a função faz corresponder ao valor u do domínio. O valor w é a imagem de u pela função f , isto é: $w = f(u)$. Note que a perpendicular ao eixo das abscissas, levantada de u , só pode encontrar o gráfico em um único ponto, pois a cada valor de u uma função só faz corresponder um único valor w . Seguindo o procedimento de levantar perpendiculares a partir do eixo das abscissas até um ponto do gráfico e desse ponto traçar uma perpendicular ao eixo das ordenadas, determinamos o valor da função para todos os valores de seu domínio. Isso significa que a função está determinada, exceto por uma certa liberdade que temos de escolher o contradomínio da função. O contradomínio tem de ter todos os valores que a função pode assumir. Como os valores das funções que consideramos são números reais, podemos simplesmente escolher o contradomínio como sendo o conjunto dos reais. Com isso, recuperamos completamente a função f a partir do seu gráfico. Devido ao fato de o gráfico conter uma informação completa sobre a função, é comum indicá-lo com a mesma letra que simboliza a função, exatamente como fazemos na **Figura 6.3** que aparece a seguir.

Exemplo 6.1

Um exercício instrutivo para se fazer com o gráfico de uma função f , do tipo (6.1), consiste em imaginar a variável u do domínio varrendo todos os seus valores e acompanhar as variações correspondentes do valor w da função.

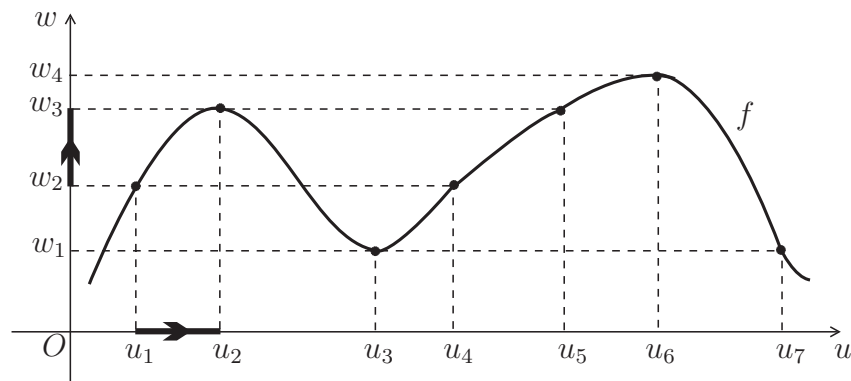


Figura 6.3: Variações de u provocam variações de w .

Vamos usar a **Figura 6.3** para fazer um tal exercício. Para identificar algumas variações, marcamos 7 valores no domínio, $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ e u_7 , bem como 4 valores no contradomínio, w_1, w_2, w_3 e w_4 . Imaginemos u crescendo de u_1 a u_7 e vejamos como varia o valor da função nesse intervalo. Quando u vai de u_1 a u_2 , o valor da função cresce de w_2 até w_3 . Continuando u a crescer de u_2 a u_3 , temos agora o valor da função diminuindo, de w_3 até w_1 . De u_3 a u_4 , o valor da função volta a crescer e continua a crescer até u chegar ao valor u_6 . Note que de u_4 a u_5 a variação do valor da função é $w_3 - w_2$, a mesma variação que ocorreu no intervalo de u_1 a u_2 . No entanto, a variação da função no intervalo $[u_1, u_2]$ foi mais rápida do que no intervalo $[u_4, u_5]$, uma vez que o primeiro intervalo é menor do que o segundo. Depois de atingir um valor máximo w_4 , em $u = u_6$, a função volta a diminuir de valor, até atingir novamente o valor w_1 em $u = u_7$. Escolhemos 7 pontos no domínio e 4 no contradomínio que julgamos interessantes. Você está convidado a fazer sua própria escolha nos diversos gráficos que forem surgindo.

Gráfico da função-movimento

Para estudar o movimento retilíneo, escolhemos um eixo ao longo de sua trajetória, por exemplo, o eixo \mathcal{OX} . Nesse eixo, temos os pontos que a partícula pode ocupar durante seu movimento. Esses pontos são as posições possíveis da

partícula. Cada ponto do eixo tem uma coordenada x que determina a posição da partícula quando ela se encontra nesse ponto. O movimento da partícula é dado pela função-movimento, que dá a posição em cada instante do mesmo. Essa função, que relaciona posição com tempo, pode ser representada por um gráfico cartesiano, com dois eixos ortogonais: o eixo das coordenadas de posição e o eixo dos instantes do tempo. Esse último costuma ser chamado de **eixo dos tempos**. Para representar, nos desenhos, o eixo dos tempos, escrevemos o símbolo de tempo t próximo ao eixo. O eixo dos tempos é o das abscissas e o eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$, onde ocorre o movimento, o das ordenadas.

Os intervalos no eixo das ordenadas (eixo das posições) representam deslocamentos e os intervalos no eixo das abscissas (eixo dos tempos) representam durações. Uma vez que estamos usando o sistema SI de unidades, os deslocamentos são dados em metros e as durações em segundos, a menos que se diga explicitamente que outras unidades estão sendo usadas.

A **Figura 6.4** mostra um gráfico de uma função-movimento f_x . É interessante observar como estão representadas nessa figura os três conceitos que aparecem na equação $x = f_x(t)$. Um instante t é representado por um ponto no eixo dos tempos, uma posição x é representada por um ponto no eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$ e a função-movimento f_x é representada pela curva que chamamos de gráfico da função.

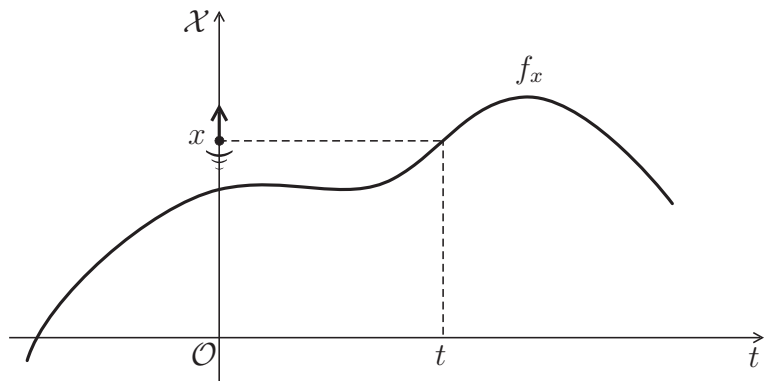


Figura 6.4: Gráfico de uma função-movimento f_x .

Note que nesse gráfico apenas o eixo vertical é um eixo de posições. O outro eixo é o eixo dos tempos. A partícula se move no eixo das posições. A trajetória da partícula é retilínea e está nesse eixo. Ela não deve ser confundida com o gráfico da função-movimento, que é uma curva que representa a função-movimento e não a trajetória da partícula. Embora o gráfico seja desenhado em um plano, com um eixo de posições e outro de tempos, ele representa um movimento retilíneo no eixo das posições. Uma outra coisa são os dois eixos de posição, digamos os eixos

\mathcal{OX} e \mathcal{OY} , usados para representar um movimento não retilíneo que se processa no plano \mathcal{OXY} desses eixos, como o movimento descrito no exemplo 5 da Aula 2. Aqui não estamos tratando dessa situação, já que estamos considerando apenas movimentos retilíneos.

Vamos analisar o movimento representado na **Figura 6.5**. Nesta figura, aparecem as posições x_1 , x_2 e x_3 em três instantes respectivos t_1 , t_2 e t_3 . Note que no instante t_1 a partícula está avançando no sentido positivo do eixo \mathcal{OX} e no instante t_2 ela está recuando, movendo-se no sentido negativo do eixo. Já no instante t_3 a partícula está na posição x_3 e está revertendo seu movimento. Ela se aproxima da posição x_3 , movendo-se no sentido positivo e se afasta de x_3 movendo-se no sentido negativo. Essas e outras informações podem ser obtidas com um exame atento do gráfico da função-movimento.

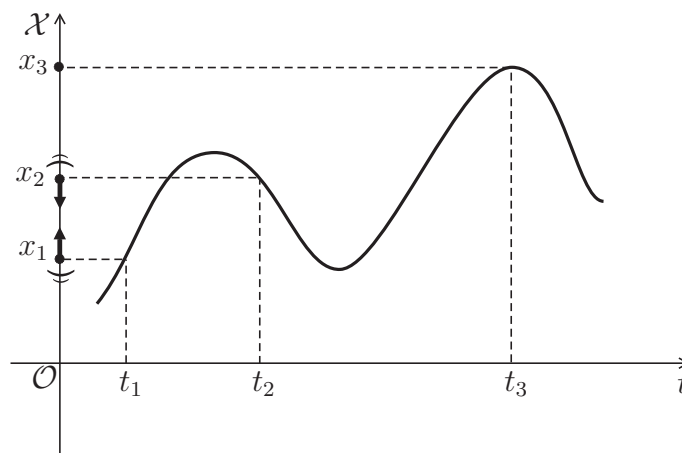


Figura 6.5: O gráfico mostra o sentido em que a partícula se move e os pontos de retorno, nos quais se inverte o sentido do movimento.

O gráfico da **Figura 6.6** representa um exemplo concreto de função-movimento, a dada em (4.10). Se os seus conhecimentos de funções de segundo grau estiverem em dia, você não terá dificuldades para entender como foi desenhado o gráfico a partir da função-movimento $x = 2 + 5t^2$. Examinando-o, podemos afirmar que, à medida que o tempo foi passando, a partícula foi se aproximando da origem, movendo-se no sentido negativo do eixo \mathcal{OX} , atingiu uma distância de 2 metros da origem, quando reverteu seu movimento e prosseguiu, a partir de então, em um movimento no sentido positivo do eixo \mathcal{OX} , afastando-se sempre da origem.

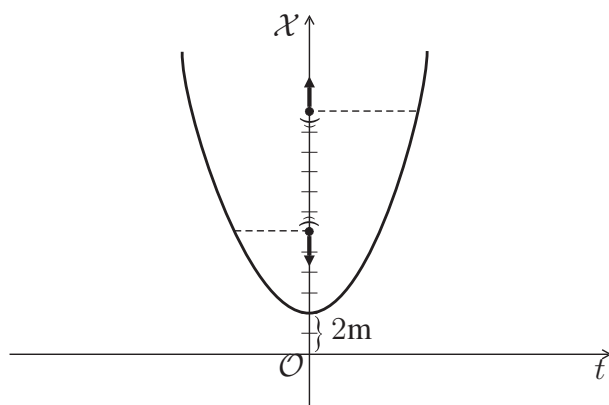


Figura 6.6: Gráfico da função-movimento $x = 2 + 5t^2$.

Gráfico do MRU

Examinemos agora o gráfico da função-movimento de um MRU. Ele é muito simples, mas também muito importante. Seja a função-movimento do MRU:

$$x = x_0 + v_{x0} t. \quad (6.2)$$

O gráfico dessa função é uma reta, como a que aparece na **Figura 6.7**, pois é uma função linear do tempo (note que essa reta, que representa a função-movimento, não é a trajetória da partícula, que se encontra no eixo \mathcal{OX}).

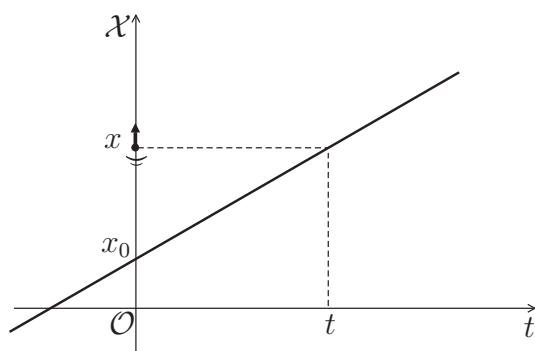


Figura 6.7: Gráfico de $x = x_0 + v_{x0} t$.

Se $t = 0$ s, obtemos $x = x_0$ e, portanto, x_0 é o chamado **coeficiente linear da reta**, isto é, a ordenada do ponto em que ela corta o eixo vertical. Em um gráfico do MRU, o coeficiente linear da reta é a posição da partícula no instante $t = 0$ s. O coeficiente linear da reta pode ser positivo, indicando que no instante $t = 0$ s a partícula se encontra no semi-eixo positivo; negativo, indicando que nesse instante ela se encontra no semi-eixo negativo e nulo, indicando que, nesse instante, ela se encontra na origem.

Coefficiente angular da reta é a constante que multiplica a variável t , isto é, a velocidade v_{x0} do MRU, que também é igual à sua velocidade média (lembre-se que no MRU as velocidades média e instantânea são constantes e iguais).

De fato, para calcular o coeficiente angular de uma reta, formamos em qualquer ponto dela um triângulo retângulo com um cateto horizontal, um cateto vertical e uma hipotenusa dada por um segmento da reta, como o triângulo P_1QP_2 indicado na **Figura 6.8**. A medida do cateto horizontal é a duração $t_2 - t_1$, e a medida do deslocamento vertical é o deslocamento correspondente $x_2 - x_1$. O coeficiente angular da reta é dado pela razão entre o cateto oposto e o adjacente: $(x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$.

Ora, essa razão é exatamente a velocidade média do MRU, que na função-movimento (6.2) é representada por v_{x0} . É óbvio que o valor do coeficiente angular não depende do particular triângulo utilizado no seu cálculo. Na **Figura 6.8**, aparecem outros triângulos que poderiam ser utilizados.

O cateto oposto é um intervalo no eixo vertical das posições; é um deslocamento dado em unidade de comprimento, digamos em metros. O cateto adjacente é um intervalo no eixo horizontal dos tempos; é dado em unidades de tempo, digamos em segundos. Portanto, o coeficiente angular tem unidade de metro por segundo.

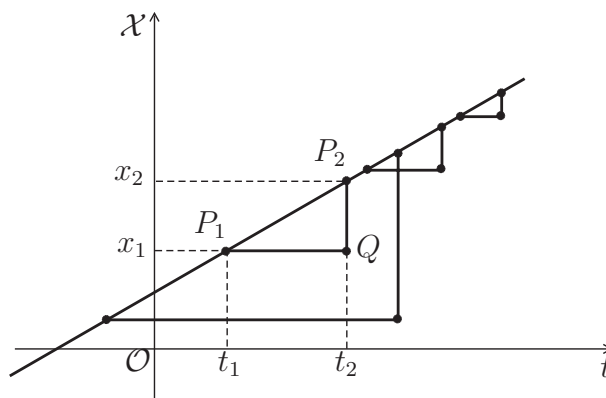


Figura 6.8: Alguns triângulos utilizáveis no cálculo do coeficiente angular do gráfico do MRU.

Para representar o coeficiente angular, é comum usar um par de catetos pequeninos, como o que aparece à direita na **Figura 6.9**. Ao lado dos catetos pequeninos, podemos exibir o valor do coeficiente angular, no caso, o valor v_{x0} da velocidade do MRU. Na **Figura 6.9**, estão especificados os coeficientes linear e angular da do gráfico do MRU (6.2). O coeficiente angular da reta pode ser positivo, negativo ou nulo. Se o coeficiente angular é nulo, a reta é paralela ao eixo dos tempos. Nesse caso, a velocidade da partícula é sempre nula e ela se encontra em repouso no ponto x_0 . Se girarmos essa reta no sentido anti-horário, sem que

ela chegue a ficar perpendicular ao eixo dos tempos, o coeficiente angular vai aumentando e tem valores sempre positivos. Nesse caso, temos sempre um MRU no sentido positivo do eixo \mathcal{OX} , tanto mais rápido quanto mais girarmos a reta.

Imaginando novamente que o gráfico é uma reta paralela ao eixo dos tempos, se a girarmos no sentido horário, sem que ela fique perpendicular ao eixo dos tempos, teremos o seu coeficiente angular negativo e aumentando em módulo. O MRU é, nesse caso, no sentido negativo do eixo \mathcal{OX} , tanto mais rápido quanto maior for o módulo do coeficiente angular, isto é, quanto mais girarmos a reta no sentido horário.

No questionário, pede-se o motivo pelo qual a reta não pode ser perpendicular ao eixo dos tempos.

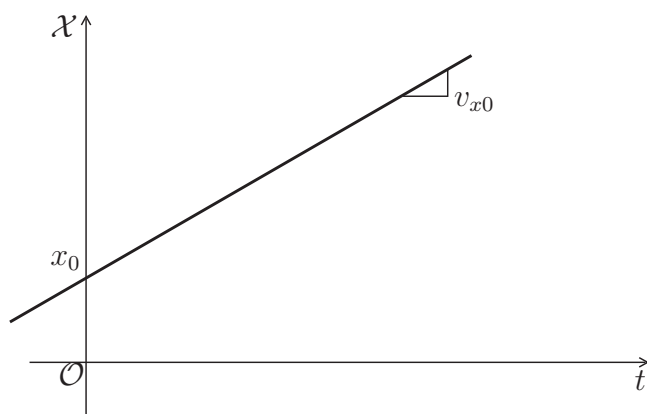


Figura 6.9: No gráfico da função-movimento do MRU, $x = x_0 + v_{x0} t$, a velocidade v_{x0} é o coeficiente angular da reta; nesta figura estão indicados o coeficiente angular v_{x0} e o coeficiente linear x_0 .

Exemplo 6.2

A **Figura 6.10** mostra os gráficos de cinco movimentos retilíneos uniformes. Levando em conta as informações adquiridas anteriormente sobre o sinal do coeficiente angular e o fato de que a velocidade de cada MRU é o coeficiente angular de seu gráfico, vejamos o que podemos concluir sobre esses movimentos.

Examinando então os gráficos da **Figura 6.10**, podemos dizer que os movimentos f_{xA} e f_{xB} se processam no sentido positivo do eixo \mathcal{OX} , sendo f_{xA} mais rápido do que f_{xB} ; os movimentos f_{xC} e f_{xD} ocorrem no sentido negativo do eixo \mathcal{OX} , com f_{xC} mais rápido do que f_{xD} . Finalmente, o gráfico de f_{xE} descreve uma partícula em repouso no ponto P_E do eixo \mathcal{OX} .

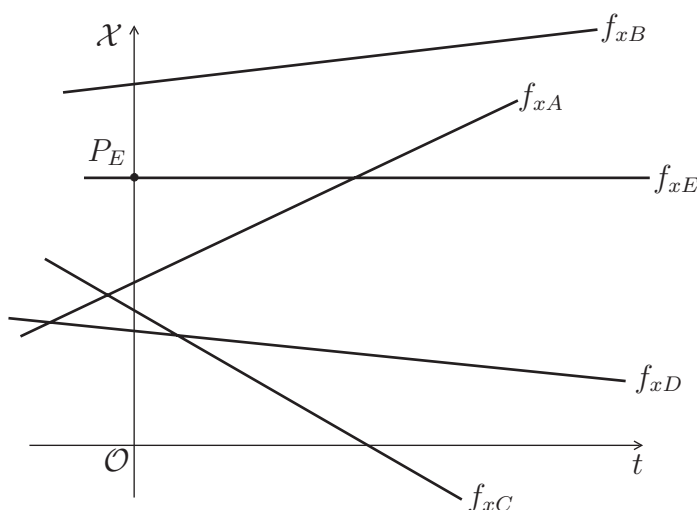


Figura 6.10: Gráficos de cinco movimentos retilíneos uniformes: f_{xA} , f_{xB} , f_{xC} , f_{xD} e f_{xE} .

Note que o coeficiente angular de uma reta é comumente chamado de **inclinação da reta**. Devemos guardar esse nome porque é muito usado, mas não é um nome muito bom. De fato, inclinação significa primariamente desvio em relação à vertical, que é bem diferente de um desvio em relação à horizontal (embora no linguajar comum digamos que uma rua tem grande inclinação para significar que sua direção se desvia muito da horizontal e pouco da vertical). Seria talvez mais apropriado chamar o coeficiente angular da reta de elevação da reta, mas infelizmente esse termo não é comum. Em nossas aulas, daremos preferência à designação coeficiente angular.

Resumindo nossa análise do gráfico do MRU:

dada a função-movimento $x = x_0 + v_{x0} t$ para um MRU, podemos dizer que seu gráfico é uma reta cujo coeficiente linear é igual à posição inicial x_0 e o coeficiente angular é igual à velocidade v_{x0} .

Velocidade no gráfico da função-movimento

Consideremos agora um movimento retilíneo arbitrário, digamos o que tem função-movimento f_x dada no gráfico da **Figura 6.11**.

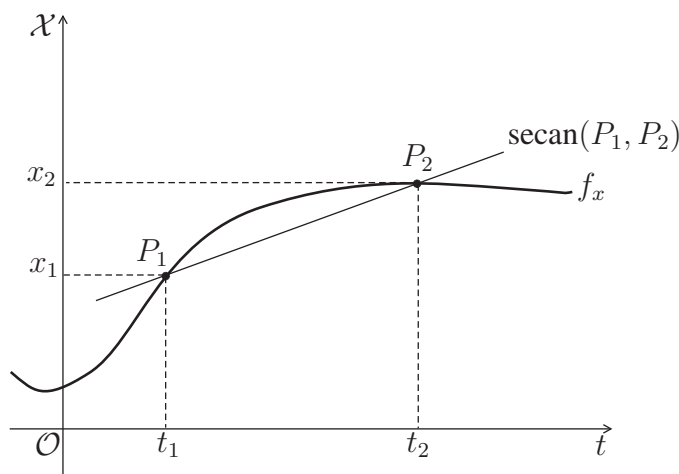


Figura 6.11: Reta secante que passa pelos pontos P_1 e P_2 do gráfico da função-movimento f_x .

Ela também mostra um intervalo $[t_1, t_2]$ com duração $t_2 - t_1$ e o deslocamento $x_2 - x_1$ que a partícula sofre nesse intervalo. O ponto P_1 do gráfico relaciona o instante t_1 com a posição x_1 da partícula nesse instante. Analogamente, ponto P_2 diz que no instante t_2 a partícula está em x_2 . Por P_1 e P_2 passa uma reta secante. Vamos chamar $\text{secan}(P_1, P_2)$ a reta secante que passa pelos pontos P_1 e P_2 de uma curva; esse símbolo aparece na **Figura 6.11**. Usando a definição de velocidade média, é fácil verificar que o coeficiente angular dessa secante é a velocidade média da partícula no intervalo $[t_1, t_2]$.

Para encontrar no gráfico da função-movimento a velocidade média em um certo intervalo, passamos uma reta secante pelos pontos do gráfico que correspondem aos extremos do intervalo. A velocidade média é o coeficiente angular da reta secante.

A definição (4.4) de velocidade instantânea também pode ser representada no gráfico da função-movimento f_x . A **Figura 6.12** ilustra o caso em que Δt é positivo; você pode fazer uma figura análoga para ilustrar o caso em que Δt é negativo.

O ponto P do gráfico relaciona o instante t com a posição da partícula nesse instante. O ponto P' do gráfico relaciona o instante $t + \Delta t$ com a posição da partícula nesse instante posterior. O ponto P' pode ficar tão próximo do ponto P quanto quisermos; basta para isso tomar o intervalo de tempo Δt suficientemente pequeno. Vemos que, quando Δt tende a zero, o ponto P' tende para o ponto P e a reta secante $\text{secan}(P, P')$, que passa por P e P' , transforma-se na reta tangente ao gráfico de f_x no ponto P . Vamos chamar $\text{tang}(P)$ a reta tangente a uma curva

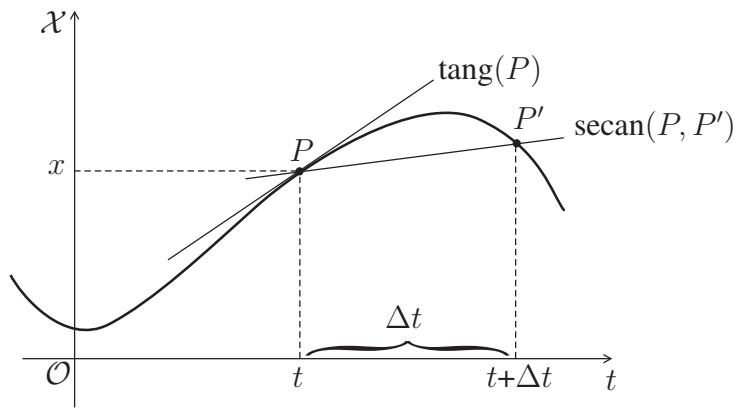


Figura 6.12: No limite em que P' tende para P a reta secante $\text{secan}(P, P')$ se transforma na reta tangente ao gráfico de f_x no ponto P .

no ponto P ; esse símbolo é usado na **Figura 6.12**. O coeficiente angular da reta secante é a razão

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f_x(t + \Delta t) - f_x(t)}{\Delta t}, \quad (6.3)$$

que aparece na definição (4.4). Quando Δt tende a zero, temos, por um lado, que esse coeficiente angular $\Delta x/\Delta t$ se transforma no coeficiente angular da reta tangente. Por outro lado, quando Δt tende a zero na definição (4.4), a razão (6.3) se torna a velocidade da partícula no instante t .

Para encontrar no gráfico da função-movimento a velocidade instantânea em um certo instante, passamos uma reta tangente pelo ponto do gráfico que corresponde a esse instante. A velocidade instantânea é o coeficiente angular da reta tangente.

O coeficiente angular da reta tangente a uma curva é chamado também de **coeficiente angular da curva** no ponto de tangência. Sabendo o coeficiente angular da curva em um ponto, podemos de imediato dizer, no instante correspondente, qual o sentido e a rapidez do movimento nesse instante. O sentido é dado pelo sinal do coeficiente angular, e a rapidez, pelo módulo do coeficiente angular.

Exemplo 6.3

Tomemos o exemplo da **Figura 6.13** e analisemos as velocidades instantâneas em alguns instantes.

A **Figura 6.13** mostra as retas tangentes ao gráfico de uma função-movimento f_x nos instantes $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ e t_7 . Em t_3 e t_7 , os coeficientes angulares são

negativos, indicando que a velocidade instantânea é negativa, e que a partícula está, nesses instantes, movendo-se no sentido negativo do eixo \mathcal{OX} . Nos instantes t_2 , t_4 e t_6 , o coeficiente angular é nulo, a partícula tem velocidade nula e nesse exemplo ela está de fato revertendo o sentido do movimento nesses instantes. Nos instantes t_1 e t_5 , a partícula tem velocidade positiva. Note que a velocidade é positiva em qualquer instante entre t_1 e t_2 e entre t_4 e t_6 ; é negativa entre t_2 e t_4 e entre t_6 e t_7 .

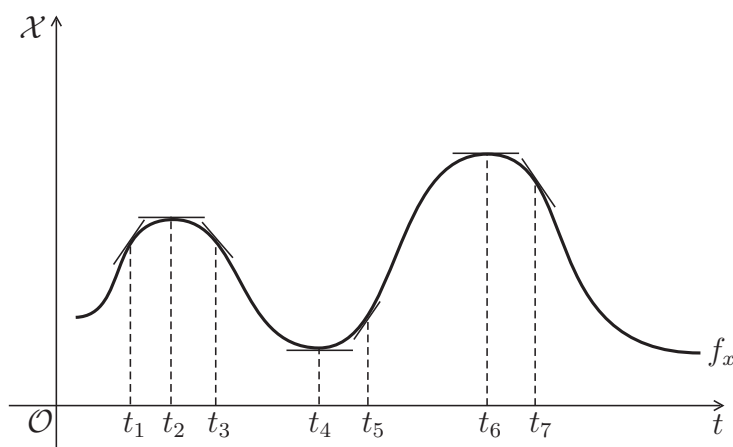


Figura 6.13: Retas tangentes ao gráfico de uma função-movimento f_x em sete instantes diferentes.

Gráfico da função-velocidade

Do mesmo modo que obtemos o gráfico de uma função-movimento f_x usando o eixo das abscissas para representar os instantes do tempo e o eixo das ordenadas para representar as posições da partícula, também obtemos o gráfico da função-velocidade \dot{f}_x usando novamente o eixo das abscissas para representar os instantes do tempo e o eixo das ordenadas para representar as velocidades que a partícula tem durante o seu movimento. O eixo das abscissas continua sendo o eixo dos tempos, enquanto o das ordenadas é chamado nesse caso de **eixo das velocidades**. Para representar, nos desenhos, o eixo das velocidades, escrevemos o símbolo de velocidade v_x próximo ao eixo. Os pontos que representam a velocidade nula, no eixo das velocidades, e o instante zero, no eixo dos tempos, são em geral coincidentes.

Do mesmo modo que um intervalo unitário no eixo dos tempos representa uma unidade de tempo, que no caso é o segundo, um intervalo unitário no eixo das velocidades representa uma unidade de velocidade, que no SI é o metro por segundo. Você será alertado se algum outro tipo de unidade for usada.

A função-velocidade \dot{f}_x dá a velocidade v_x da partícula a cada instante t : $v_x = \dot{f}_x(t)$. Ela determina pares (t, v_x) nos quais v_x é a velocidade no instante t . Levantando de t uma perpendicular ao eixo dos tempos e traçando de $v_x = \dot{f}_x(t)$ uma perpendicular ao eixo das velocidades, elas se cruzam em um único ponto. Imagine que esse procedimento seja feito para todos os instantes do movimento, determinando assim todos os pares (t, v_x) correspondentes a esse movimento. O lugar geométrico de todos pontos de cruzamento, ou seja, o conjunto de todos esses pares ordenados é o que chamamos de gráfico da função-velocidade \dot{f}_x . A **Figura 6.14** mostra um exemplo de gráfico de função-velocidade \dot{f}_x e indica que no instante t_1 , t_2 e t_3 a partícula tem velocidades v_{x1} , v_{x2} e v_{x3} , respectivamente. Note que o gráfico da função-velocidade é indicado pela mesma letra que simboliza a função-velocidade, como aparece na **Figura 6.14**.

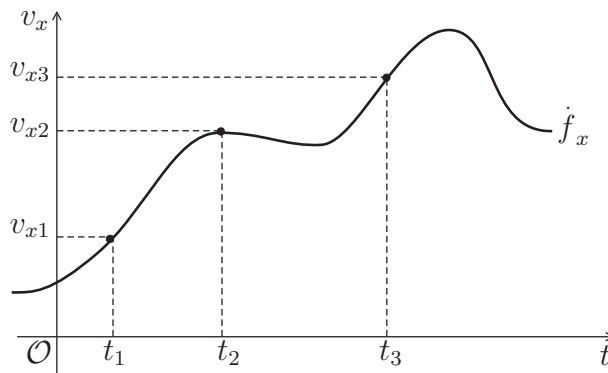


Figura 6.14: Gráfico da função-velocidade.

Quando definimos velocidade instantânea, vimos que, dada uma função-movimento f_x , obtemos a função que dá a velocidade instantânea em qualquer instante, a função-velocidade \dot{f}_x . É natural, portanto, que a partir do gráfico da função-movimento possamos obter o gráfico da função-velocidade. Suponhamos então que o gráfico de f_x seja dado e que o gráfico de \dot{f}_x ainda não tenha sido traçado em relação aos eixos dos tempos e das velocidades. Consideremos o mesmo instante t nos dois eixos dos tempos, o usado para o gráfico de f_x e o que será usado para obter o gráfico de \dot{f}_x . Levantamos uma perpendicular ao eixo dos tempos do gráfico de f_x até que ela encontre esse gráfico, digamos, no ponto P indicado na parte superior da **Figura 6.15**. Nesse ponto, traçamos a reta tangente ao gráfico de f_x e medimos o coeficiente angular da reta. Ele é a velocidade v_x no instante t . Especificamos no eixo das velocidades o ponto correspondente ao valor obtido para v_x e, desse ponto, traçamos uma perpendicular a esse eixo. Ela encontra a perpendicular ao eixo dos tempos levantada de t em um ponto do gráfico de \dot{f}_x . Repetindo esse procedimento para todos os instantes do tempo, ob-

temos todos os pontos do gráfico de \dot{f}_x . Quando não dispomos dos valores exatos dos coeficientes das retas tangentes ao gráfico de f_x não podemos obter o gráfico exato de \dot{f}_x . Mesmo nesse caso, devemos ser capazes de pelo menos esboçar o gráfico da função-velocidade a partir da forma do gráfico da função-movimento. Para isso, é suficiente encontrar no gráfico de f_x os intervalos em que os coeficientes angulares das retas tangentes são positivos, negativos ou nulos. Na **Figura 6.15**, a partir do gráfico de f_x (gráfico superior), você deve ser capaz de esboçar o gráfico de \dot{f}_x e obter uma curva como a mostrada no gráfico inferior dessa mesma figura.

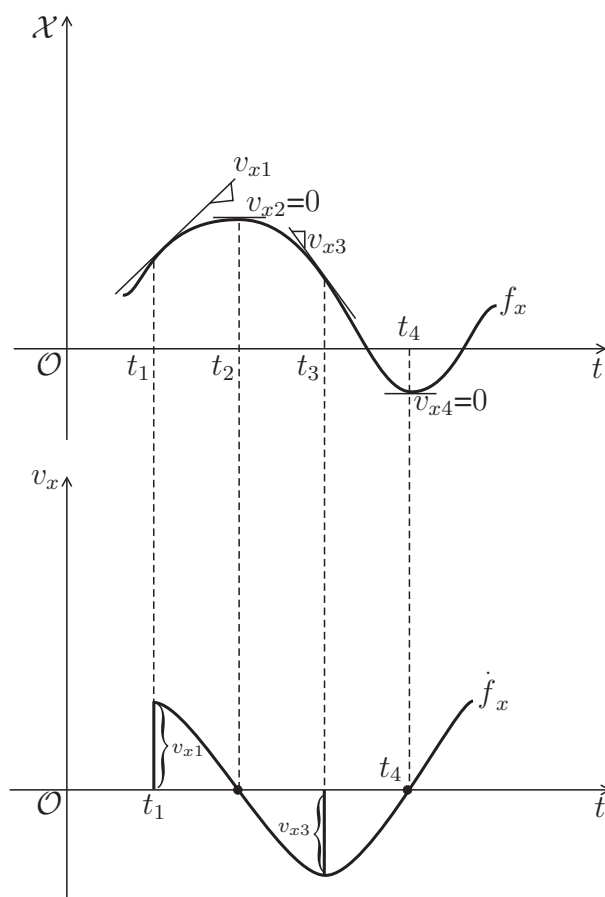


Figura 6.15: O gráfico da função-velocidade \dot{f}_x obtido do gráfico da função-movimento f_x .

É também possível fazer o caminho inverso, isto é, obter o gráfico da função-movimento quando é conhecido o gráfico da função-velocidade, desde que saibamos também a posição da partícula em um dado instante. Veremos isso na próxima seção.

Determinando o gráfico da função-movimento a partir do gráfico da função-velocidade

Na aula anterior, vimos que, dada a função-velocidade \dot{f}_x e a posição da partícula em um instante particular, podemos obter a sua função-movimento f_x . Essa propriedade se reflete no fato de que a partir do gráfico da função-velocidades podemos recuperar o gráfico da função-movimento f_x , se soubermos a posição da partícula em um particular instante. Para verificar esse fato, vamos investigar como a posição da partícula aparece no gráfico da função-velocidade. Voltemos inicialmente à fórmula (5.3) que expressa, de forma aproximada, o deslocamento em termos da função-velocidade \dot{f}_x ; ela dá aproximadamente o deslocamento $x - x_0$ em um intervalo de tempo de t_0 a t :

$$x - x_0 \approx \dot{f}_x(t_1)\Delta t_1 + \dot{f}_x(t_2)\Delta t_2 + \cdots \dot{f}_x(t_n)\Delta t_n. \quad (6.4)$$

Cada termo da soma à direita é o produto da duração Δt_i de um intervalo de tempo pelo valor $\dot{f}_x(t_i)$ da velocidade em um instante t_i dentro do intervalo. Na **Figura 6.16**, aparece o gráfico de \dot{f}_x em um trecho em que as velocidades são positivas e $t_0 < t$.

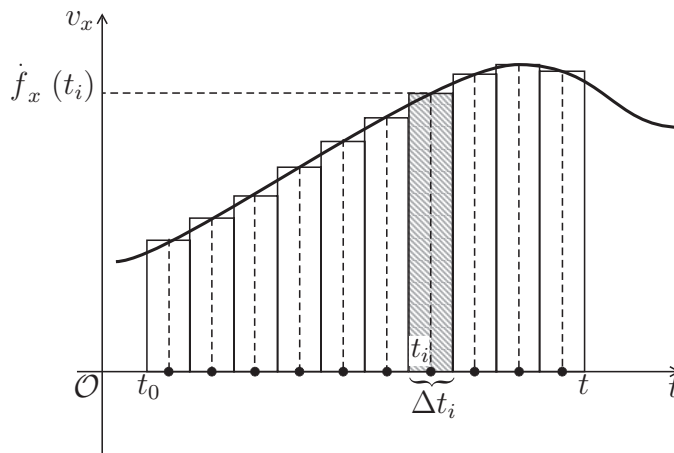


Figura 6.16: Áreas de retângulos que representam a soma no membro direito da equação (6.4); para fazer a figura, consideramos $n = 10$ e chamamos a atenção para o retângulo de número $i = 7$.

Nessa figura, o produto $\dot{f}_x(t_i)\Delta t_i$ é a área de um retângulo com as seguintes características: a base do retângulo é o intervalo de tempo de duração Δt_i e a altura é o valor $\dot{f}_x(t_i)$ da velocidade no instante t_i . Portanto, a soma inteira em (6.4) é a soma das áreas de todos os retângulos da figura. Vemos ainda que a soma das áreas dos retângulos é aproximadamente o que chamamos de área

A base do retângulo tem unidade de tempo, digamos segundo, e a altura tem unidade de velocidade, digamos metro por segundo. Portanto, a área do retângulo tem unidade de deslocamento, que é dada em metros. No plano onde um dos eixos é o eixo dos tempos e o outro, o das velocidades, qualquer área tem dimensão de deslocamento.

sob o gráfico de \dot{f}_x entre t_0 e t . Essa área sob o gráfico é precisamente a área delimitada acima pelo gráfico de \dot{f}_x , abaixo pelo eixo dos tempos, à esquerda, pela perpendicular ao eixo dos tempos levantada de t_0 , e à direita, pela perpendicular ao eixo dos tempos levantada de t .

Tomando-se o número n de subdivisões em (6.4) cada vez maior e a duração de todos os intervalos de tempo cada vez menor, obtemos uma seqüência de figuras como a que está indicada na **Figura 6.17**.

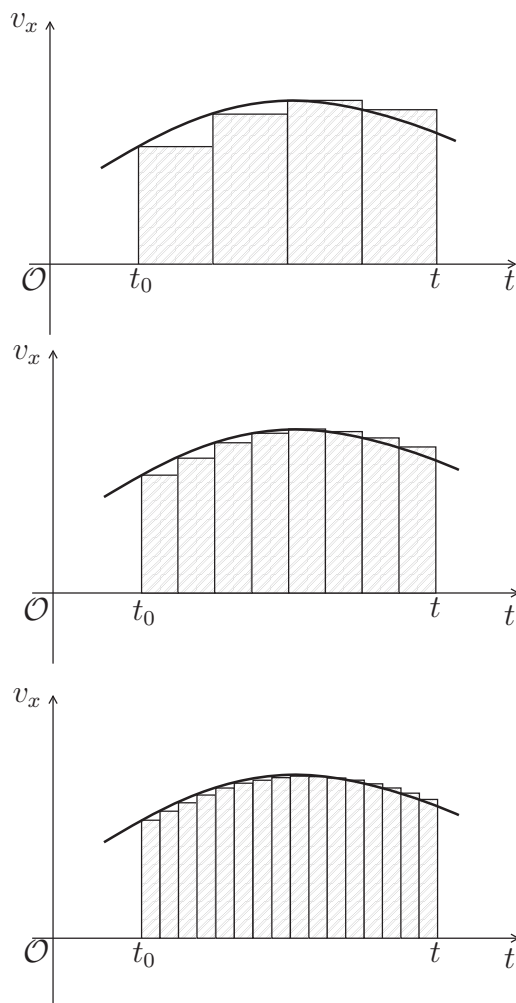


Figura 6.17: Se o número de retângulos aumenta e suas larguras diminuem, a área dos retângulos torna-se mais próxima da área sob o gráfico da função.

Intuitivamente, vemos que nessa seqüência as somas em (6.4) aproximam-se mais e mais da área sob a curva entre t_0 e t . Na verdade, podemos obter somas tão próximas da área sob a curva quanto quisermos, bastando tomar n suficientemente

grande e as durações suficientemente pequenas. Isso significa que o limite

$$x - x_0 = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} [\dot{f}_x(t_1)\Delta t_1 + \dot{f}_x(t_2)\Delta t_2 + \cdots \dot{f}_x(t_n)\Delta t_n] \quad (6.5)$$

é exatamente a área sob o gráfico de \dot{f}_x entre t_0 e t . Uma vez que esse limite é o deslocamento $x - x_0$, chegamos ao resultado em que o deslocamento da partícula no intervalo de t_0 a t é igual à área sob o gráfico da função-velocidade entre t_0 e t . Essa igualdade entre deslocamento e área sob o gráfico foi obtida no caso em que o deslocamento é positivo. Foi por isso que supusemos $t_0 < t$ e que o gráfico de \dot{f}_x tivesse somente velocidades positivas no intervalo. Deslocamentos também podem ser negativos ou nulos, enquanto a área é, normalmente, considerada como uma grandeza positiva. Entretanto, é possível definir uma grandeza denominada **área algébrica**, que pode ser positiva, negativa ou nula, e que permite estender a igualdade anterior, entre deslocamento e área sob o gráfico das velocidades, aos casos em que o deslocamento não é positivo. Passemos à definição desse novo conceito.

Seja o plano onde estão os eixos do tempo e das velocidades. Nesse plano, consideremos a região delimitada pelo gráfico de \dot{f}_x , pelas perpendiculares ao eixo dos tempos levantadas de t_0 e de t , e pelo próprio eixo dos tempos. A essa região associamos uma grandeza que chamamos de área algébrica sob o gráfico de \dot{f}_x entre t_0 e t . Ela é representada por $A[\dot{f}_x]_{t_0}^t$ e definida por quatro prescrições que iremos apresentar no parágrafo seguinte. Note que nas três primeiras prescrições vamos considerar o instante t posterior ao instante t_0 , isto é, $t > t_0$. Na quarta prescrição, consideramos t anterior a t_0 . Para entender facilmente as prescrições que serão dadas, você deve olhar as suas ilustrações na **Figura 6.18**.

- (i) Se $t_0 < t$ e \dot{f}_x é sempre positiva ou sempre nula, de t_0 a t , então a área algébrica $A[\dot{f}_x]_{t_0}^t$ é simplesmente a área da região; neste caso, a área algébrica é positiva ou nula.
- (ii) Se $t_0 < t$ e \dot{f}_x é sempre negativa, de t_0 a t , então a área algébrica $A[\dot{f}_x]_{t_0}^t$ é negativa, valendo menos a área da região. Por exemplo, se o valor numérico da área for 7, então a área algébrica correspondente valerá -7.

(iii) Se $t_0 < t$ e \dot{f}_x muda de sinal no intervalo de t_0 a t , então repartimos esse intervalo em subintervalos nos quais a função não muda de sinal. Em cada subintervalo podemos usar as regras anteriores para calcular sua área algébrica. Somando as áreas algébricas dos subintervalos, obtemos a área algébrica do intervalo total, isto é, de t_0 a t .

(iv) Se $t_0 > t$, usamos as três regras anteriores para calcular $A[\dot{f}_x]_t^{t_0}$ e definimos $A[\dot{f}_x]_{t_0}^t$ como sendo o negativo de $A[\dot{f}_x]_t^{t_0}$, isto é,

$$A[\dot{f}_x]_{t_0}^t = -A[\dot{f}_x]_t^{t_0}.$$

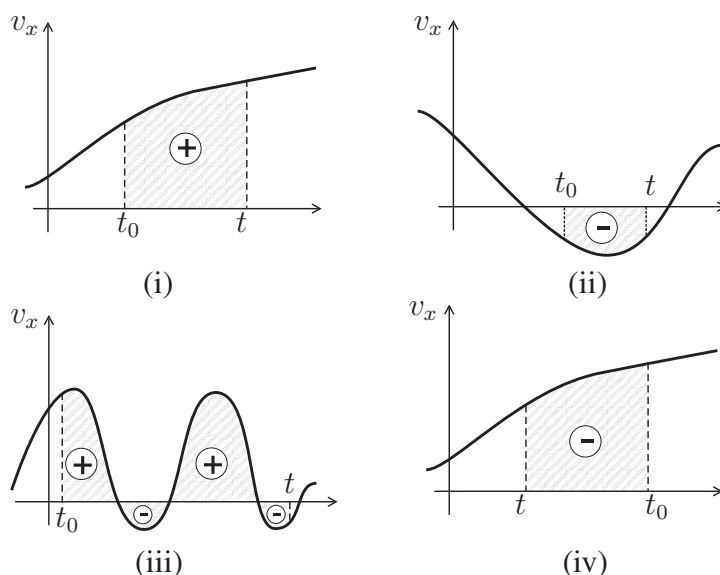


Figura 6.18: (i) Área algébrica positiva. (ii) Área algébrica negativa. (iii) Área algébrica que é soma de algumas positivas e algumas negativas. (iv) Área algébrica com $t_0 > t$; neste caso, ela é negativa.

O conceito de área ágebrica tem essa longa definição com quatro prescrições, mas pode ser entendido com facilidade se aplicarmos as quatro prescrições a alguns exemplos. A **Figura 6.19** mostra o gráfico de uma função-velocidade \dot{f}_x e vários instantes de tempo. O gráfico é uma curva composta de cinco segmentos de reta. Esse gráfico pode parecer meio esquisito porque foi arbitrariamente escolhido para que suas áreas sejam facilmente calculáveis. Você não terá dificuldade em constatar que a área algébrica $A[\dot{f}_x]_0^{12}$ é igual a 5,5 metros.

Lembre-se de que no plano do gráfico de uma função-velocidade *versus* tempo, as áreas são dadas em unidade de comprimento e não de comprimento ao quadrado.

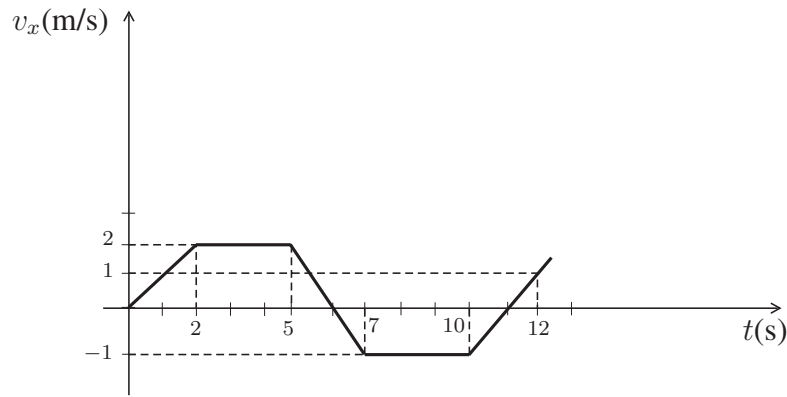


Figura 6.19: Área algébrica $A[\dot{f}_x]_{t_0}^{t_1} = 5,5$ metros.

Como dissemos anteriormente, o conceito de área algébrica foi construído com a finalidade de podermos afirmar que, em qualquer caso:

o deslocamento da partícula no intervalo de t_0 a t é igual à área algébrica sob o gráfico da função-velocidade entre t_0 e t .

Em símbolos:

$$x - x_0 = A[\dot{f}_x]_{t_0}^t . \quad (6.6)$$

Já fizemos a demonstração dessa propriedade para o caso de deslocamento positivo. A demonstração para os outros casos é praticamente a mesma se usarmos a definição de área algébrica. Por isso, não nos deteremos nessa demonstração.

Sabemos que o deslocamento $x - x_0$ no intervalo de t_0 a t é dado pela integral da função-velocidade de t_0 a t :

$$x - x_0 = \int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' . \quad (6.7)$$

Comparando essa equação com a equação (6.6), verificamos que a área algébrica sob o gráfico de \dot{f}_x entre t_0 e t é igual à integral de \dot{f}_x de t_0 e t :

$$A[\dot{f}_x]_{t_0}^t = \int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' . \quad (6.8)$$

Desse modo, a área algébrica sob o gráfico da função-velocidade representa a integral da função-velocidade.

Voltemos agora à equação (6.6) que dá o deslocamento como área algébrica sob o gráfico da função-velocidade. Ela pode ser escrita como:

$$x = x_0 + A[\dot{f}_x]_{t_0}^t . \quad (6.9)$$

Essa última fórmula permite resolver o problema proposto no começo da seção: como recuperar o gráfico da função-movimento f_x a partir do gráfico da função-velocidade e do conhecimento da posição da partícula em um instante particular. Chamemos de instante inicial t_0 aquele em que conhecemos a posição da partícula, de modo que a posição conhecida seja representada por x_0 . Suponhamos então que o gráfico de \dot{f}_x seja dado e que desejemos obter o gráfico de f_x . A **Figura 6.20** mostra à esquerda um gráfico de \dot{f}_x . No lado direito da figura, aparecem os eixos em relação aos quais desejamos obter o gráfico de f_x , quais sejam, os eixo \mathcal{OX} e o eixo dos tempos.

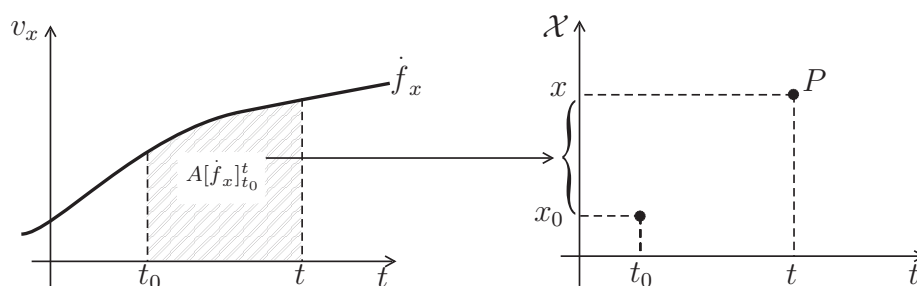


Figura 6.20: Determinação do gráfico de f_x , a partir do gráfico de \dot{f}_x , por meio da equação (6.9): $x = x_0 + A[\dot{f}_x]_{t_0}^t$.

No eixo dos tempos do gráfico de \dot{f}_x , levantamos uma perpendicular em t_0 e outra em um instante arbitrário t . A partir do gráfico de \dot{f}_x podemos então determinar a área algébrica $A[\dot{f}_x]_{t_0}^t$ entre t_0 e t . Substituindo o valor encontrado para essa área em (6.9), encontramos a posição x da partícula no instante t . Agora vamos ao sistema de eixos à direita e marcamos no eixo dos tempos o instante t , e no eixo \mathcal{OX} o valor de x obtido. A esse par (t, x) corresponde um ponto P no gráfico de f_x . Repetindo o procedimento para todos os instantes t , obtemos o gráfico inteiro da função-movimento. Vemos com isso que, de fato, o gráfico da função-movimento é obtido do gráfico da função-velocidade e do conhecimento da posição da partícula em um instante particular. Em geral não sabemos os valores exatos das áreas sob o gráfico de \dot{f}_x , de modo que não podemos obter o gráfico exato de f_x . No entanto, o que é importante em nosso estudo é saber esboçar, pelo menos em algumas situações mais simples, o gráfico da função movimento a partir da forma do gráfico da função-velocidade (e do conhecimento da posição da partícula em um instante particular).

Exemplo 6.4

A **Figura 6.21** mostra, à esquerda, o gráfico de uma função-velocidade \dot{f}_x e à direita, o esboço do correspondente gráfico da função-movimento f_x . Vejamos como ele foi obtido por meio da análise que segue.

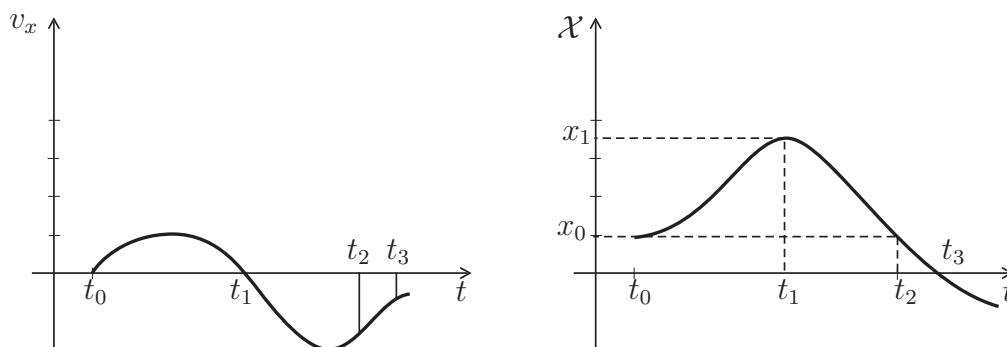


Figura 6.21: À direita temos um esboço do gráfico de f_x a partir do gráfico de \dot{f}_x , que aparece à esquerda.

Ao reconstruirmos o gráfico de f_x a partir do gráfico de \dot{f}_x , devemos também ter em mente que o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f_x , no instante t , deve coincidir com a velocidade $v_x = \dot{f}_x(t)$ da partícula nesse instante.

Primeiramente, marcamos nos eixos à direita a posição conhecida e o instante correspondente, que chamamos de x_0 e t_0 , respectivamente. Consideremos no gráfico de \dot{f}_x , à esquerda, a área algébrica $A[\dot{f}_x]_{t_0}^{t_1}$ com t variando de t_0 a t_1 . Nesse intervalo, temos uma área algébrica que cresce de zero ao valor positivo $A[\dot{f}_x]_{t_0}^{t_1}$. Por isso, o gráfico de f_x , à direita, foi desenhado como uma curva que cresce de x_0 até um valor $x_1 = x_0 + A[\dot{f}_x]_{t_0}^{t_1}$, que é maior do que x_0 . Quando t se torna maior do que t_1 , uma área algébrica negativa começa a ser adicionada à área algébrica de t_0 a t_1 , de modo que a área total vai diminuindo. Por isso, o gráfico à direita é uma curva que começa a decrescer a partir do ponto em que $t = t_1$. No gráfico à esquerda, temos o fato de que em algum instante t_2 , a área algébrica negativa de t_1 a t_2 cancela a positiva de t_0 a t_1 . No gráfico à direita, temos então a função retomando o valor x_0 no instante t_2 . A partir de t_2 , a área algébrica sob a curva de \dot{f}_x continua a receber mais contribuições negativas e, portanto, continua a diminuir. Conseqüentemente, também diminui no gráfico à direita o valor de $f_x(t)$ quando t se torna maior do que t_2 . Em algum instante t_3 , a área algébrica negativa entre t_2 e t_3 cancela o valor x_0 , de modo que a partícula esteja em $x = 0$ no instante $t = t_3$; a função f_x corta, nesse instante, o eixo horizontal. Com esse tipo de análise, pode-se obter o formato aproximado do resto do gráfico de f_x .

Vamos finalizar esta aula com uma observação sobre a propriedade (6.8). Na verdade, ela não é uma propriedade exclusiva da função-velocidade \dot{f}_x . De fato, definindo área algébrica sob o gráfico de uma função qualquer do mesmo modo que definimos anteriormente para a função-velocidade, obtemos:

a área algébrica sob o gráfico de uma função qualquer em um certo intervalo do domínio é igual à integral da função nesse intervalo.

No caso de uma função arbitrária, podemos verificar facilmente essa propriedade com o mesmo método usado para verificá-la com a função-velocidade.

Resumo

Nesta aula, você aprendeu como desenhar gráficos de funções de uma forma geral. Particularmente, você viu como traçar os gráficos da função-movimento f_x e da função-velocidade \dot{f}_x versus tempo. Aprendeu a extrair informações importantes de ambos os gráficos. Por exemplo, você aprendeu que a velocidade média de uma partícula no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ pode ser obtida a partir do gráfico da função-movimento, simplesmente, pelo coeficiente angular da reta secante que liga os pontos $(t_1, f_x(t_1))$ e $(t_2, f_x(t_2))$ desse gráfico. Já a velocidade instantânea da partícula num instante t' pode ser obtida desse mesmo gráfico, pelo coeficiente angular da reta tangente a esse gráfico no ponto $(t', f_x(t'))$. Em relação ao gráfico da função-velocidade versus tempo, você aprendeu que a área algébrica sob esse gráfico, em um certo intervalo $[t_1, t_2]$, corresponde ao deslocamento da partícula nesse intervalo. De um modo geral, a área algébrica sob o gráfico de uma função em um certo intervalo é a integral da função nesse intervalo.

Questionário

1. Dado um gráfico da posição de uma partícula versus o tempo, como se obtém graficamente a velocidade média da partícula no intervalo $[t_a, t_b]$?
2. Dado um gráfico da posição de uma partícula versus o tempo, como se obtém graficamente a velocidade da partícula num certo instante t_1 ?
3. Dado um gráfico da posição de uma partícula versus o tempo, explique como traçar o gráfico correspondente da função-velocidade versus o tempo.

4. Seja t_i o instante em que uma partícula inverte o sentido de seu movimento. O que podemos dizer sobre o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de posição *versus* tempo, no ponto do gráfico dado por $(t_i, f_x(t_i))$?
5. O que significa área algébrica sob o gráfico de uma função num certo intervalo da variável independente?
6. Dado um gráfico da função-velocidade *versus* tempo de uma partícula, como se obtém graficamente o deslocamento da partícula entre os instantes t_1 e t_2 ?
7. Dado somente o gráfico da velocidade *versus* tempo de uma partícula, podemos obter o gráfico da função de posição *versus* tempo da partícula?

Problemas propostos

1. Considere o MRU dado por $x = a + bt$. Trace em cada caso indicado abaixo o gráfico de posição *versus* tempo correspondente, indicando na figura os significados das grandezas a e b : (i) $a > 0$ e $b > 0$, (ii) $a > 0$ e $b < 0$, (iii) $a > 0$ e $b = 0$; (iv) $a < 0$ e $b > 0$, (v) $a < 0$ e $b < 0$, (vi) $a < 0$ e $b = 0$; (vii) $a = 0$ e $b > 0$, (viii) $a = 0$ e $b < 0$, (ix) $a = 0$ e $b = 0$.
2. Considere que o MRU descrito por uma partícula seja dado por $x = x_0 + v_x(t - t_0)$, onde $x_0 < 0$, $v_x > 0$ e $t_0 > 0$.
 - (a) Trace o gráfico de posição *versus* tempo desse MRU, indicando na figura todas as grandezas que aparecem nessa equação.
 - (b) Determine as coordenadas do ponto de interseção entre o gráfico e o eixo das ordenadas (eixo das posições). Determine também as coordenadas do ponto de interseção entre o gráfico e o eixo das abscissas (eixo dos tempos).

3. Quais dentre os gráficos de velocidade *versus* tempo mostrados representam um MRU?

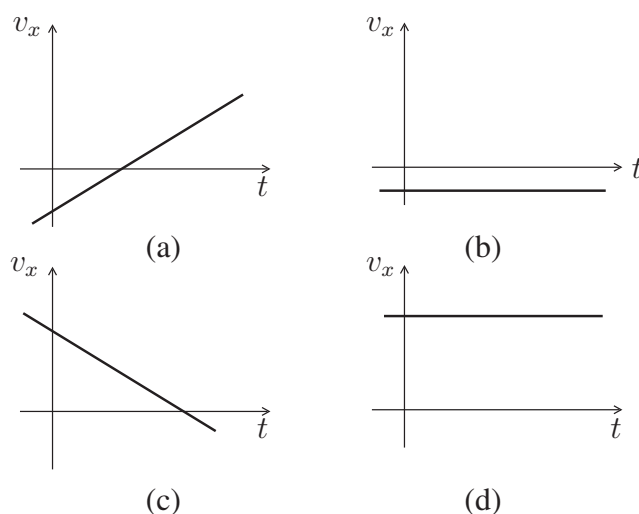


Figura 6.22: Gráficos de velocidade *versus* tempo do problema 3.

4. Dado o gráfico da posição *versus* tempo de uma partícula:

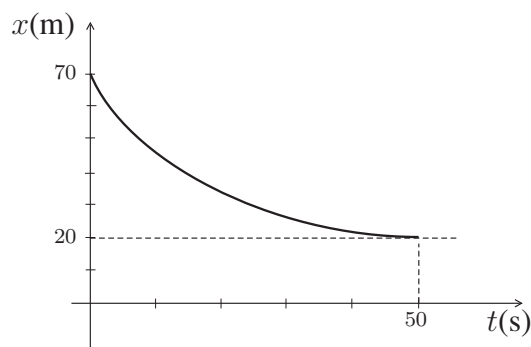


Figura 6.23: Gráfico da posição *versus* tempo da partícula no problema 4.

- (a) Esboce o gráfico da velocidade *versus* tempo dessa partícula no intervalo $[0, 50]$.
- (b) Determine a área algébrica sob o gráfico de velocidade *versus* tempo no intervalo $[0, 50]$.
5. Dado o gráfico da posição *versus* tempo de uma partícula:
- (a) Esboce o gráfico de velocidade *versus* tempo dessa partícula no intervalo $[0, 50]$.

- (b) Quanto vale a área algébrica sob esse gráfico de velocidade *versus* tempo no intervalo $[0, t_1]$?
- (c) Quanto vale a área algébrica sob esse gráfico no intervalo $[0, 50]$?

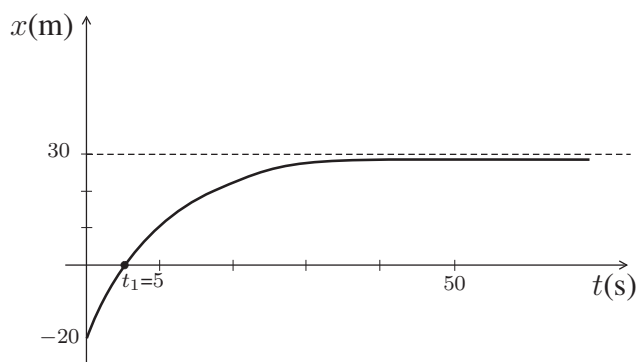


Figura 6.24: Gráfico da posição *versus* tempo da partícula no problema 5.

6. A **Figura 6.25** mostra o gráfico da função-movimento *versus* tempo de uma certa partícula. Nele estão marcados os instantes t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 . Os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico são máximos, em módulo, nos instantes t_1, t_3 e t_5 e valem, respectivamente, $v_0, -v_0$ e v_0 ($v_0 > 0$).

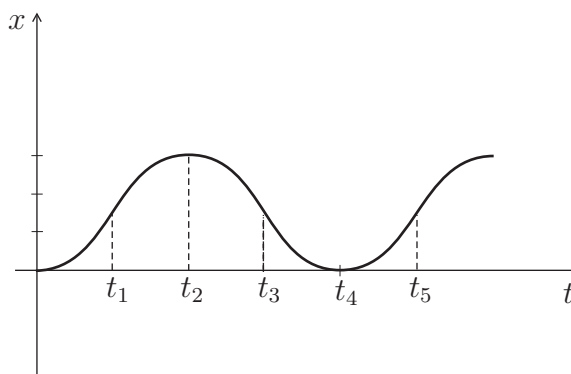


Figura 6.25: Gráfico da posição *versus* tempo da partícula no problema 6.

Esboce o gráfico de velocidade *versus* tempo dessa partícula. Marque nesse gráfico os instantes t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 , assim como os respectivos valores para a velocidade da partícula nesses instantes.

7. A **Figura 6.26** mostra o gráfico da velocidade *versus* tempo de uma partícula. Nesse gráfico estão marcados os instantes $t_1 = 10\text{s}$ e $t_2 = 20\text{s}$, assim como os respectivos valores da velocidade da partícula nesses instantes. Sabe-se ainda que a posição inicial da partícula é dada por $x_0 = 0\text{m}$.

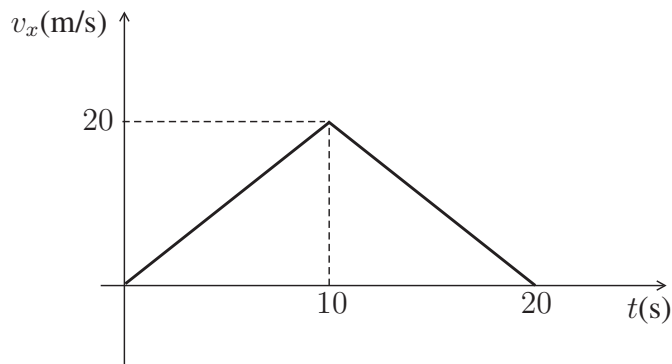


Figura 6.26: Gráfico da velocidade *versus* tempo da partícula no problema 7.

- (a) Determine as posições da partícula nos instantes t_1 e t_2 .
- (b) Trace o gráfico da posição da partícula *versus* tempo.

8. A **Figura 6.27** mostra o gráfico da velocidade *versus* tempo de uma partícula. Nesse gráfico estão marcados os instantes $t_1 = 5$ s, $t_2 = 15$ s, $t_3 = 20$ s, $t_4 = 25$ s e $t_5 = 30$ s, assim como os respectivos valores da velocidade da partícula nesses instantes. Sabe-se ainda que a partícula em $t = 0$ se encontra na origem.

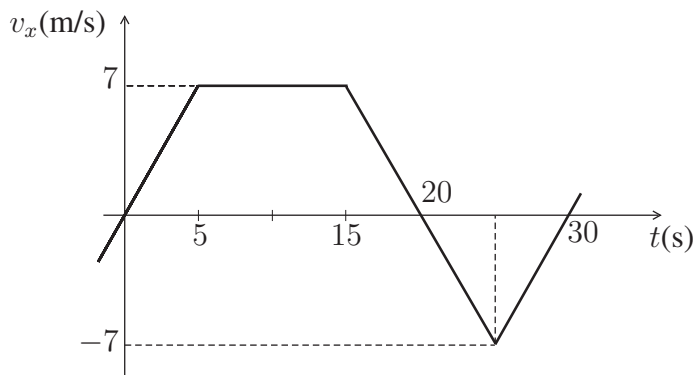


Figura 6.27: Gráfico da velocidade *versus* tempo da partícula no problema 8.

- (a) Determine as posições da partícula nos instantes t_1, t_2, t_3, t_4 e t_5 .
- (b) Trace o gráfico da posição da partícula *versus* tempo.

9. Considere o gráfico da velocidade de uma partícula *versus* tempo ilustrado na figura a seguir. Nele estão marcados os instantes $t_1 = 10\text{s}$, $t_2 = 20\text{s}$, $t_3 = 30\text{s}$, $t_4 = 50\text{s}$, $t_5 = 60\text{s}$, $t_6 = 70\text{s}$ e $t_7 = 80\text{s}$.

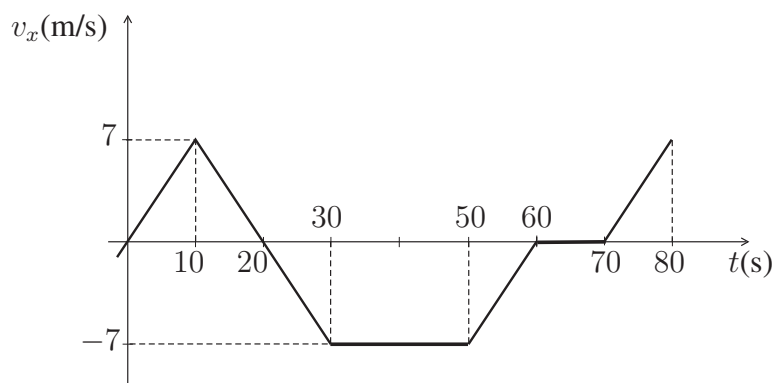


Figura 6.28: Gráfico da velocidade *versus* tempo da partícula no problema 9.

- (a) Em quais intervalos de tempo a partícula está em repouso, em MRU com velocidade diferente de zero e em MRUV?
- (b) Sabendo que em $t = 0\text{s}$ a partícula está na posição 10m, determine as posições da partícula nos instantes $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6$ e t_7 .
- (c) Trace o gráfico da posição *versus* tempo da partícula, indicando nele as posições calculadas no item anterior.
10. Dado o gráfico da velocidade *versus* tempo de uma partícula ilustrado na **Figura 6.29**, determine em quais instantes a partícula volta à posição inicial. Para resolver esse problema **não** é necessário saber a posição inicial da partícula. Em particular, com o gráfico de velocidade *versus* tempo que foi dado, sequer é necessário o valor de v_0 . Explique por quê.

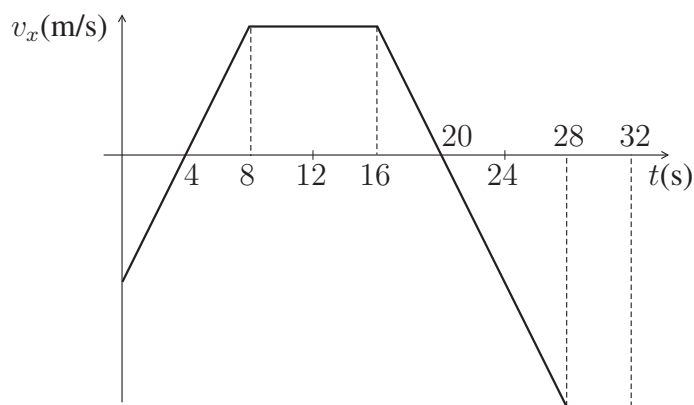


Figura 6.29: Gráfico da velocidade *versus* tempo da partícula no problema 10.

11. Suponha que no problema anterior $v_0 = -10\text{m/s}$ e que $x_0 = 20\text{m}$.
- Calcule a posição da partícula no instante $t = 32\text{s}$.
 - Calcule a posição da partícula em todos os instantes marcados no gráfico do problema anterior.
 - Trace o gráfico da posição *versus* tempo indicando, nesse gráfico, as posições da partícula nos instantes marcados no gráfico mostrado no problema anterior.
12. Considere as funções-movimento escritas abaixo:
- $x = \alpha e^{-\beta t}$, com α e β constantes.
 - $x = \alpha [1 - e^{-\beta t}]$, com α e β constantes.
 - $x = \alpha \sin(2\pi t/\beta)$, com α e β constantes.

Em cada caso, dê o significado das constantes α e β , determine por derivação direta as respectivas funções-velocidade e esboce seus gráficos (velocidade *versus* tempo).

13. Dois pára-quedistas, Pedro e Raquel, saltam de um helicóptero que se encontra em repouso a uma grande altitude do solo. Pedro salta no instante $t = 0\text{s}$, enquanto Raquel, no instante $t = t_1$. Por simplicidade, vamos supor que o movimento dos dois seja retilíneo. O sentido positivo das velocidades foi escolhido para baixo, por conveniência. A **Figura 6.30** mostra as funções-velocidade *versus* tempo tanto de Pedro quanto de Raquel. Nessa figura, estão marcadas as áreas A , A' , a e a' , além de vários instantes de

tempo. O instante t_e corresponde ao instante em que Raquel atinge Pedro em sua queda; o instante t_3 é o instante em que ela atinge o solo e o instante t_4 , aquele em que Pedro atinge o solo.

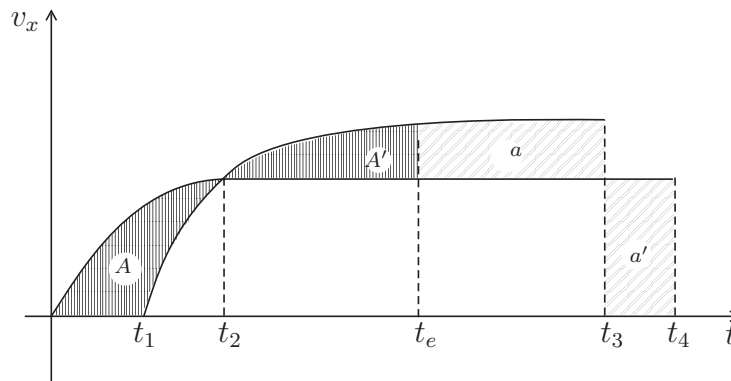


Figura 6.30: Gráfico de velocidade *versus* tempo dos dois pára-quedistas.

- Compare as áreas A e A' .
- O que significa o instante t_2 ?
- Em $t = t_e$, Pedro e Raquel possuem a mesma velocidade?
- Compare as áreas a e a' .
- Qual o tipo de movimento dos pára-quedistas quando estão muito próximos ao solo?

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de responder ao questionário todo e resolver pelo menos à metade inicial dos problemas propostos. Um domínio completo dos gráficos como instrumentos de análise das funções somente se adquire com o tempo, à medida que se vai praticando. Você poderá adquirir mais prática nas aulas seguintes.

Aula 7 – Aceleração no movimento retilíneo

Objetivos

- Entender os conceitos de aceleração média e aceleração instantânea em um movimento retilíneo.
- Aprender a interpretar graficamente a aceleração média e a aceleração instantânea de uma partícula no gráfico de sua velocidade *versus* tempo.
- Aprender a determinar a variação de velocidade de uma partícula num dado intervalo de tempo a partir de seu gráfico de aceleração *versus* tempo.

Introdução

Nesta aula, estudamos o conceito de aceleração em um movimento retilíneo. Como veremos, ele descreve quão rapidamente varia a velocidade durante um tal movimento. Já estamos habituados ao uso coloquial desse conceito. Todos nós entendemos o que significa dizer que um automóvel está acelerando; significa que a velocidade do automóvel está aumentando, isto é, mudando para valores cada vez maiores. Se dissermos que a aceleração é grande, entende-se que a velocidade está variando rapidamente, ou seja, em um certo intervalo de tempo a velocidade varia em uma quantidade que está sendo considerada grande. Se um automóvel é freado, sua velocidade também varia, só que a valores menores. Nesse caso, diz-se que o automóvel foi desacelerado. Em linguagem coloquial, variações positivas de velocidade são chamadas de acelerações, e variações negativas, de desacelerações. Em Física, o conceito de aceleração num movimento retilíneo é de uma grandeza que pode ser positiva, negativa ou nula. É positiva se descreve um aumento de velocidade e negativa se descreve uma diminuição. Desse modo, o que usualmente se chama de desaceleração, é chamado em Física de uma aceleração negativa. Por aceleração nula entende-se, é claro, a ausência de aceleração.

De um certo modo, percebemos acelerações com mais facilidade do que velocidades. Imagine que você esteja de olhos fechados viajando em um automóvel de janelas fechadas, que percorre uma estrada horizontal e reta. Suponha, além disso, que a estrada esteja em bom estado, que o carro seja bom e o motorista também. Seu corpo sentirá pouca diferença entre uma velocidade mais alta, mais baixa ou nula. Já as mudanças de velocidade, isto é, as acelerações serão facilmente percebidas. Se o carro acelera, você sente o banco do carro pressionando as suas costas. Se a aceleração é negativa, isto é, se o carro desacelera, você sente

Como veremos ainda nesse primeiro módulo, a aceleração é uma grandeza vetorial e, como tal, não tem sentido falar em aceleração positiva ou negativa. No entanto, num movimento unidimensional, não há a necessidade de tratá-la vetorialmente. Esse comentário vale também para deslocamentos e velocidades.

agora o cinto de segurança pressionando o seu peito para trás (sendo uma pessoa inteligente, você certamente estará usando o cinto de segurança).

Para entender o conceito de aceleração em Física, que em sua formulação precisa é um conceito também matemático, você deve ter entendido muito bem o conceito de velocidade, e isto por dois motivos. O primeiro já deve estar claro: aceleração é rapidez na variação de velocidade; você não pode entender variação de velocidade sem entender o que é velocidade. O segundo é que a própria velocidade é uma rapidez de variação: é a rapidez com que varia a posição. Por analogia, você entenderá como a aceleração descreve a rapidez da variação da velocidade se você já entendeu como a velocidade descreve a rapidez com que varia a posição.

Faremos a suposição de que você já tenha estudado e entendido bem os conceitos de velocidade e de derivada para apresentarmos aqui um tratamento mais rápido do conceito de aceleração. Por esse motivo, pode ser necessário ler o texto mais de uma vez. Você deverá trabalhar com atenção os exemplos dados, tentar resolver os problemas propostos e voltar a ler o texto da aula. Seguindo essa sequência uma ou mais vezes, você deverá atingir os objetivos desta aula e resolver a maioria dos problemas propostos.

Acelerações média e instantânea

Consideremos um movimento qualquer de uma partícula no eixo \mathcal{OX} . Seja f_x sua função-movimento:

$$x = f_x(t) . \quad (7.1)$$

Derivando essa função, achamos a função-velocidade \dot{f}_x , que dá a velocidade v_x da partícula em um instante qualquer t do movimento:

$$v_x = \dot{f}_x(t) . \quad (7.2)$$

Considere um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ com $t_2 \neq t_1$. Seja v_{x1} a velocidade da partícula no instante t_1 e v_{x2} sua velocidade no instante t_2 . A variação da velocidade da partícula no intervalo de t_1 a t_2 é

$$\Delta v_x = v_{x2} - v_{x1} \quad (7.3)$$

e o tempo gasto nessa variação é

$$\Delta t = t_2 - t_1 . \quad (7.4)$$

A razão entre a variação da velocidade no intervalo de t_1 a t_2 e o tempo gasto nessa variação é chamada de **aceleração média** da partícula no intervalo $[t_1, t_2]$. Vamos representar a aceleração média da partícula no intervalo de t_1 a t_2 pelo símbolo $\langle a_x \rangle [t_1, t_2]$. Temos então:

$$\langle a_x \rangle [t_1, t_2] = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x2} - v_{x1}}{t_2 - t_1} \quad (t_2 \neq t_1) . \quad (7.5)$$

Uma variação de velocidade é expressa, naturalmente, em unidade de velocidade, isto é, em unidade de comprimento dividida por unidade de tempo. Sendo a aceleração média a razão entre uma variação de velocidade e um intervalo de tempo, a sua unidade será a de velocidade dividida pela unidade de tempo. Portanto, a unidade de aceleração média é uma unidade de comprimento dividida pelo quadrado de uma unidade de tempo. No SI a unidade de aceleração média é o metro por segundo por segundo, isto é, m/s^2 .

Sendo a duração $t_2 - t_1$ do intervalo uma grandeza positiva, concluímos que a aceleração média é positiva se, e somente se, a variação da velocidade da partícula no intervalo de t_1 a t_2 é positiva, isto é, se a velocidade aumenta nesse intervalo de tempo. A aceleração média é negativa se, e somente se, a velocidade diminui no intervalo. Finalmente, o caso de aceleração média nula no intervalo t_1 a t_2 corresponde à situação em que a velocidade da partícula em t_2 é exatamente igual à sua velocidade em t_1 . Observe, porém, que isso não significa necessariamente que durante esse intervalo a velocidade da partícula tenha permanecido constante. Isso pode ou não ter acontecido, mas apenas com a informação da aceleração média nesse intervalo nada podemos afirmar.

Usando a definição de aceleração média (7.5) e o conceito de função-velocidade (7.2), vemos que a aceleração média em um intervalo de t_1 a t_2 é dada por:

$$\langle a_x \rangle [t_1, t_2] = \frac{\dot{f}_x(t_2) - \dot{f}_x(t_1)}{t_2 - t_1} . \quad (7.6)$$

Exemplo 7.1

Para ilustrar o conceito de aceleração média definido anteriormente, considere um carro que, partindo do repouso no instante inicial, atinge a velocidade de 72km/h após 10s e retorna ao repouso meio minuto após ter iniciado a sua arrancada. Calculemos a aceleração média desse carro em diversos intervalos.

Deliberadamente, utilizamos nesse exemplo inicial unidades variadas, de modo que para expressar nossas respostas no SI teremos de fazer mudanças de unidades. Uma unidade muito comum para a velocidade, e utilizada nos velocímetros dos automóveis em geral, é o km/h. Vejamos então como converter

essa unidade para m/s. Como $1\text{km}=1.000\text{m}$ e $1\text{h}=3.600\text{s}$, temos:

$$1\text{km/h} = \frac{1.000}{3.600}\text{m/s} = \frac{1,0}{3,6}\text{m/s} \quad \text{ou seja} \quad 1,0\text{m/s} = 3,6\text{km/h} .$$

Desse modo, temos $72\text{km/h}=20\text{m/s}$. A aceleração média nos primeiros dez segundos é dada então por:

$$\langle a_x \rangle [0, 10] = \frac{20 - 0}{10 - 0} = \frac{20\text{m/s}}{10\text{s}} = 2\text{m/s}^2 .$$

Já no intervalo que vai de 10s até o instante em que o carro retorna ao repouso, isto é, o instante 30s (lembre-se que $1\text{min}=60\text{s}$), temos:

$$\langle a_x \rangle [10, 30] = \frac{0 - 20}{30 - 10} = -\frac{20\text{m/s}}{20\text{s}} = -1\text{m/s}^2 .$$

O sinal negativo indica que o carro desacelerou para atingir o repouso. Finalmente, a aceleração média no intervalo total $[0, 30]$ é nula, já que a variação da velocidade nesse intervalo é nula (o carro saiu do repouso no instante inicial e retornou ao repouso no instante 30s).

A aceleração média dá apenas uma idéia global de como varia a velocidade em um intervalo. Relembrando, uma aceleração média nula em um intervalo não significa necessariamente que a velocidade tenha permanecido constante no intervalo. Ela pode ter variado de modo a voltar, no final do intervalo, ao valor que tinha no início, como foi ilustrado em nosso primeiro exemplo (neste exemplo o carro acelerou até atingir uma velocidade de 72km/h e depois desacelerou até atingir o repouso novamente, mas mesmo assim sua aceleração média no intervalo de tempo total foi nula).

Para ter uma informação mais detalhada sobre a rapidez de variação da velocidade, devemos considerar o conceito de aceleração instantânea. Para definir esse conceito, consideremos um instante t durante o movimento e a velocidade que a partícula tem nesse instante. Ela é dada por $\dot{f}_x(t)$. Seja um outro instante $t + \Delta t$ durante o movimento, diferente de t , isto é, com $\Delta t \neq 0$. Nesse outro instante, a velocidade é dada por $\dot{f}_x(t + \Delta t)$. A variação da velocidade que ocorre entre esses dois instantes é:

$$\Delta v_x = \dot{f}_x(t + \Delta t) - \dot{f}_x(t) . \quad (7.7)$$

A rapidez com que tal variação ocorre é dada por

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\dot{f}_x(t + \Delta t) - \dot{f}_x(t)}{\Delta t} . \quad (7.8)$$

Aceleração instantânea da partícula no instante t é o limite dessa razão quando Δt tende a zero. Representando a aceleração instantânea por a_x , temos então:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{f}_x(t + \Delta t) - \dot{f}_x(t)}{\Delta t} . \quad (7.9)$$

A aceleração instantânea é, em geral, chamada simplesmente aceleração.

Pelo que já sabemos sobre velocidade e derivadas, fica claro que a aceleração em um instante t é a derivada da função-velocidade nesse instante. De acordo com a simbologia usual, podemos então escrever (7.9) como:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \dot{f}_x(t) . \quad (7.10)$$

Essa definição de aceleração instantânea permite obter a aceleração em qualquer instante t do movimento. Isso significa que temos uma função que associa a cada instante t o valor a_x da aceleração nesse instante, chamada **função-aceleração** e a representamos por \ddot{f}_x :

$$a_x = \ddot{f}_x(t) . \quad (7.11)$$

Desse modo, a aceleração da partícula em um instante t é o valor da função-aceleração nesse instante. De acordo com a definição (7.10), a função-aceleração é dada pela derivada da função-velocidade:

$$\ddot{f}_x(t) = \frac{d}{dt} \dot{f}_x(t) . \quad (7.12)$$

Exemplo 7.2

Consideremos os movimentos retilíneos de duas partículas (1 e 2), cujas funções-movimento estão escritas abaixo, e calculemos as suas respectivas funções-aceleração:

$$\begin{cases} f_{1x} : t \mapsto x_1 = 5t^2 \\ f_{2x} : t \mapsto x_2 = 8t + 5t^2 . \end{cases}$$

Como a função-aceleração é a derivada temporal da função-velocidade, devemos inicialmente calcular as funções-velocidade das partículas. Calculando então as derivadas necessárias, temos:

$$\begin{cases} \dot{f}_{1x} : t \mapsto v_{1x} = 10t \\ \dot{f}_{2x} : t \mapsto v_{2x} = 8 + 10t . \end{cases}$$

De posse das funções-velocidade, basta derivar uma vez mais para obtermos as respectivas funções-aceleração das partículas:

$$\begin{cases} \ddot{f}_{1x} : t \mapsto a_{1x} = 10\text{m/s}^2 \\ \ddot{f}_{2x} : t \mapsto a_{2x} = 10\text{m/s}^2 . \end{cases}$$

Note que as funções-aceleração das duas partículas são as mesmas, muito embora suas funções-movimento e suas funções-velocidade sejam diferentes uma da outra.

Exemplo 7.3

Consideremos nesse exemplo algumas funções-movimento um pouco mais complicadas, a saber (note que tais funções já foram consideradas na aula anterior, num dos problemas propostos):

$$\begin{cases} x_1 = \alpha e^{-\beta t} ; \\ x_2 = \alpha [1 - e^{-\beta t}] ; \\ x_3 = \alpha \sin(2\pi/\beta t) , \end{cases}$$

onde α e β são constantes. Calculemos, pois, as respectivas funções de aceleração. Para isso, devemos derivar cada uma dessas funções-movimento duas vezes em relação ao tempo. Após a primeira derivada, obtemos as respectivas funções-velocidade:

$$\begin{cases} v_1 = -\beta \alpha e^{-\beta t} ; \\ v_2 = +\beta \alpha e^{-\beta t} ; \\ v_3 = \frac{2\pi}{\beta} \alpha \cos(2\pi/\beta t) , \end{cases}$$

Observe que esse é um bom momento para você verificar se fez corretamente o exercício proposto na aula anterior, pelo menos no que diz respeito ao cálculo das derivadas.

Calculando então a derivada temporal das funções-velocidade escritas acima, obtemos finalmente as acelerações nos três casos desejados:

$$\begin{cases} a_1 = +\beta^2 \alpha e^{-\beta t} ; \\ a_2 = -\beta^2 \alpha e^{-\beta t} ; \\ a_3 = -\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^2 \alpha \sin(2\pi/\beta t) . \end{cases}$$

Na aula 4, vimos que a função-velocidade é obtida como a derivada da função-movimento, e na aula 5, vimos que a função-movimento pode ser recuperada a partir da função-velocidade, se dispusermos de uma informação suplementar: a posição da partícula em um instante particular. Para recuperar a função-movimento, temos de integrar a função-velocidade, conforme o que foi visto na equação (5.7). Agora que obtivemos a função-aceleração como a derivada da função-velocidade, podemos perguntar: será que podemos recuperar a função-velocidade a partir da função de aceleração? A resposta é sim. Se soubermos a função-aceleração e o valor da velocidade em algum instante fixo, podemos obter a velocidade em um instante qualquer, isto é, podemos obter a função-velocidade. O método para recuperar a função-velocidade a partir da função-aceleração é exatamente igual ao método que desenvolvemos, na aula 5, para recuperar a função-movimento a partir da função-velocidade. Por isso não há necessidade de repeti-lo aqui, vamos apenas dar a resposta final:

dada a função-aceleração \ddot{f}_x e a velocidade v_{x0} da partícula em um instante particular t_0 , a velocidade da partícula em um instante t qualquer é dada por:

$$v_x = v_{x0} + \int_{t_0}^t \ddot{f}_x(t') dt' . \quad (7.13)$$

Essa fórmula deve ser atentamente comparada com a fórmula (5.7).

Uma vez que a velocidade v_x em um instante arbitrário t é dada pela função-velocidade: $v_x = \dot{f}_x(t)$, a equação (7.13) nos conduz a

$$\dot{f}_x(t) = v_{x0} + \int_{t_0}^t \ddot{f}_x(t') dt' , \quad (7.14)$$

que mostra a função-velocidade \dot{f}_x obtida a partir da função-aceleração \ddot{f}_x .

Nesse ponto, convém repetir que não se espera que você seja um perito em calcular derivadas e integrais; essa perícia você irá adquirir com a prática e o tempo. Esperamos que você entenda que existem operações matemáticas para obter derivadas e integrais, que você entenda o significado básico dessas operações, tais como explicadas nas aulas 4 e 5, e que você saiba calcular algumas derivadas e integrais muito simples. De fato, aquelas que já foram dadas como exemplos e problemas propostos. Com isso, você estará apto a lidar com os conceitos de movimento, velocidade e aceleração ao longo desse curso introdutório de mecânica.

Exemplo 7.4

O objetivo desse exemplo é enfatizar uma vez mais que, conhecida a função-aceleração de uma partícula e a sua velocidade em um único instante, podemos determinar univocamente a sua função-velocidade. Suponha então que a função-aceleração de uma partícula seja dada por:

$$\ddot{f}_x : t \longmapsto a_x = 2t + 3t^2$$

e que a sua velocidade no instante $t = 2\text{s}$ seja igual a 20m/s . Calculemos a sua velocidade num instante qualquer.

Para cumprir tal objetivo, basta integrar a função-aceleração escolhendo adequadamente os limites de integração:

$$v_x - 20 = \int_2^t a_x(t') dt' ,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} v_x &= 20 + \int_2^t (2t' + 3t'^2) dt' , \\ &= 20 + \left\{ t'^2 + t'^3 \right\}_2^t , \\ &= 20 + \{ t^2 - 4 + t^3 - 8 \} , \\ &= t^2 + t^3 + 8 . \end{aligned}$$

Essa expressão nos dá a velocidade da partícula em qualquer instante de seu movimento. Por exemplo, no instante inicial a sua velocidade é 8m/s , enquanto no instante 1s ela vale 10m/s . A propósito, você saberia refazer esse exemplo supondo conhecida não velocidade no instante 2s , mas sim no instante inicial (ou também no instante 1s)? Se você não tem certeza de que é capaz de responder a

essa pergunta, mais um motivo para tentar fazer isso agora mesmo e conferir o seu resultado com o obtido nesse exemplo.

Com a definição de função-aceleração, temos agora **três funções** para estudar um movimento. A **primeira** é a função-movimento f_x , que é a mais fundamental e especifica exatamente qual é o movimento. A **segunda** é a função-velocidade, que é a derivada da função-movimento e que especifica a cada instante a velocidade da partícula. A **terceira** é a função-aceleração, que é a derivada da função-velocidade e que especifica a cada instante a aceleração da partícula. Vamos listar essas três funções usadas no estudo do movimento:

$$\begin{cases} x = f_x(t) , \\ v_x = \dot{f}_x(t) , \\ a_x = \ddot{f}_x(t) \end{cases} \quad (7.15)$$

e escrever novamente as relações fundamentais que existem entre elas. Efetuando derivadas, passamos da função-movimento para a de velocidade, e da função-velocidade para a função-aceleração:

$$\dot{f}_x(t) = \frac{d}{dt} f_x(t) , \quad \ddot{f}_x(t) = \frac{d}{dt} \dot{f}_x(t) . \quad (7.16)$$

Naturalmente, essas equações também podem ser escritas na forma resumida:

$$v_x = \frac{dx}{dt} , \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} . \quad (7.17)$$

Efetuando integrais, passamos da função-aceleração para a função-velocidade e da função-velocidade para a função-movimento:

$$\dot{f}_x(t) = v_{x0} + \int_{t_0}^t \ddot{f}_x(t') dt' , \quad f_x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \dot{f}_x(t') dt' . \quad (7.18)$$

Essas equações também podem ser escritas na forma resumida:

$$v_x = v_{x0} + \int_{t_0}^t a_x dt' , \quad x = x_0 + \int_{t_0}^t v_x dt' . \quad (7.19)$$

Exemplo 7.5

Consideremos as funções-movimento, de velocidade e de aceleração de uma partícula, dadas, respectivamente, por:

$$\begin{cases} x = 7 - 5t + 3t^2 - t^3 , \\ v_x = -5 + 6t - 3t^2 , \\ a_x = 6 - 6t . \end{cases} \quad (7.20)$$

Para nos exercitarmos um pouco mais na passagem de uma dessas funções para outra, vamos *fingir* que conhecemos apenas uma delas e então tentar obter as demais. Vamos inicialmente supor que conhecemos apenas a função-movimento: $x = 7 - 5t + 3t^2 - t^3$. A partir dela, podemos usar a primeira equação em (7.17) para obter:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(7 - 5t + 3t^2 - t^3) = -5 + 6t - 3t^2 .$$

Usando essa expressão na segunda equação em (7.17), obtemos:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-5 + 6t - 3t^2) = 6 - 6t .$$

Agora que obtivemos a função-velocidade e a função-aceleração a partir da função-movimento, vamos seguir o caminho inverso. Vamos supor que conhecemos a função-aceleração $a_x = 6 - 6t$ e queremos descobrir a função-velocidade e a função-movimento. Pelo que já estudamos, sabemos que não basta a função-aceleração para descobrirmos a função-velocidade. Para descobrir a função que dá a velocidade em qualquer instante, é necessário saber, além da função-aceleração também o valor da velocidade em um instante particular. Digamos que tenha sido dada a velocidade no instante $t = 0$ s: $v_{x0} = -5$ m/s. Usando a primeira equação em (7.19), obtemos:

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} + \int_{t_0}^t a_x dt' \\ &= -5 + \int_0^t (6 - 6t') dt' \\ &= -5 + 6t - 3t^2 . \end{aligned}$$

Com esse resultado, temos a função-velocidade $v_x = -5 + 6t - 3t^2$. Suponhamos também que tenha sido dada a posição da partícula no instante particular $t = 0$ s: $x_0 = 7$ m. Com essas informações, podemos então usar a segunda equação em (7.19) para obter a posição em um instante qualquer:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_{t_0}^t v_x dt' \\ &= 7 + \int_0^t (-5 + 6t' - 3t'^2) dt' \\ &= 7 - 5t + 3t^2 - t^3 . \end{aligned}$$

Para finalizar essa seção, vamos considerar o MRUV. Conforme a equação (5.35) da aula 5, sua função-movimento pode ser escrita como

$$x = x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a t^2 , \quad (7.21)$$

onde x_0 e v_{x0} são, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula no instante $t = 0$ s, e a é uma constante dada. Quando estudamos o MRU, na aula 5, não tínhamos um nome especial para essa constante a , mas sabíamos que ela mede quanto rápido varia a velocidade no MRUV. Agora podemos verificar que este a é exatamente a aceleração da partícula. Usando a primeira equação em (7.17), obtemos de (7.21) a função-velocidade no MRUV:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a t^2 \right) = v_{x0} + \frac{1}{2} a 2 t = v_{x0} + a t .$$

Usando essa função-velocidade na segunda equação em (7.17), obtemos

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} (v_{x0} + a t) = a ,$$

conforme havíamos dito: a aceleração no MRUV é a constante a que aparece na função-movimento (7.21). Podemos então dizer que:

todo MRUV é um movimento retilíneo de aceleração constante não nula.

É natural então perguntar: todo movimento retilíneo com aceleração constante é um MRUV? Perguntando de modo mais explícito: se a aceleração em um movimento retilíneo é constante e diferente de zero, sua função-movimento será a função (7.21) do MRUV? Para responder a essa questão, usamos as equações em (7.19) para o caso $t_0 = 0$. Na primeira dessas equações, supondo que a_x seja igual a uma constante não nula a , podemos retirar essa constante para fora da integral e obter:

$$v_x = v_{x0} + \int_0^t a_x dt' \quad (7.22)$$

$$= v_{x0} + a \int_0^t dt' \quad (7.23)$$

$$= v_{x0} + a t . \quad (7.24)$$

Usando essa expressão para a função-velocidade na segunda equação em (7.19), obtemos:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \int_0^t v_x dt' \\ &= x_0 + \int_0^t (v_{x0} + a t') dt' \\ &= x_0 + v_{x0} t + \frac{1}{2} a t^2 . \end{aligned}$$

Esse resultado mostra que a função-movimento f_x associada a um movimento retilíneo de aceleração constante, que chamamos de a , é exatamente a função-movimento (7.21) do MRUV. Portanto, a pergunta que fizemos tem resposta afirmativa:

todo movimento retilíneo de aceleração constante não nula é um MRUV.

Como conclusão final, podemos dizer que

um movimento retilíneo tem aceleração constante não nula se, e somente se, é um MRUV.

Devido a essa propriedade, ao invés de definir um MRUV como aquele cuja função-movimento é dada por (7.21) (foi assim que o definimos na aula 5), você pode defini-lo como sendo um movimento retilíneo de aceleração constante não nula.

Representação da aceleração em gráficos

Na aula 6, aprendemos como representar em gráficos as funções-movimento e de velocidade de uma partícula em movimento retilíneo. As idéias e regras que então aprendemos podem ser facilmente adaptadas para representar em gráficos a aceleração da partícula.

Primeiramente, vejamos no gráfico da função-velocidade de um movimento retilíneo qual o significado de aceleração média e de aceleração instantânea. Na equação (7.5), definimos aceleração média em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ como sendo a grandeza:

$$\langle a_x \rangle [t_1, t_2] = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x2} - v_{x1}}{t_2 - t_1} \quad (t_2 \neq t_1) . \quad (7.25)$$

Em um gráfico da velocidade da partícula *versus* o tempo, essa aceleração média é representada pelo coeficiente angular de uma reta secante ao gráfico da velocidade. De fato, examinemos a **Figura 7.1**, que mostra o gráfico da função-velocidade \dot{f}_x de um certo movimento retilíneo. O ponto P_1 do gráfico corresponde à velocidade v_{x1} no instante t_1 , e o ponto P_2 corresponde à velocidade v_{x2} no instante t_2 . O coeficiente angular da reta secante $\secan(P_1, P_2)$ que passa por esses pontos é o valor $v_{x2} - v_{x1}$ do cateto oposto QP_2 dividido pelo valor $t_2 - t_1$ do cateto adjacente QP_1 . A razão obtida é $(v_{x2} - v_{x1})/(t_2 - t_1)$, que é exatamente a aceleração média (7.1), como havíamos antecipado.

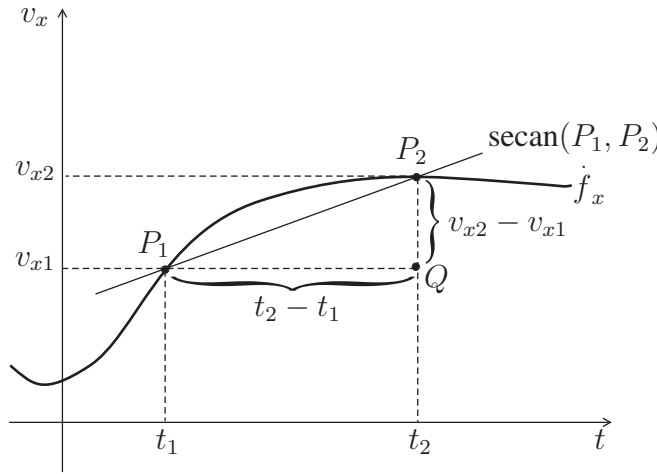


Figura 7.1: A aceleração média é o coeficiente angular da reta secante ao gráfico da velocidade *versus* o tempo.

A aceleração instantânea a_x , em um instante t , foi definida em (7.9), como sendo o limite

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{f}_x(t + \Delta t) - \dot{f}_x(t)}{\Delta t}. \quad (7.26)$$

Consideremos novamente o gráfico da função-velocidade \dot{f}_x de um certo movimento retilíneo, conforme ilustrado na **Figura 7.2**.

No instante t , no qual queremos calcular a aceleração, a partícula tem uma velocidade $v_x = \dot{f}_x(t)$. A esse instante t corresponde o ponto P do gráfico de \dot{f}_x , conforme mostra a **Figura 7.2**. A um outro instante $t + \Delta t$ corresponde um outro ponto P' . A fração

$$\frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{\dot{f}_x(t + \Delta t) - \dot{f}_x(t)}{\Delta t}, \quad (7.27)$$

que aparece na definição (7.26) é o coeficiente angular da reta secante ao gráfico, que passa pelos pontos P e P' . No limite em que Δt tende a zero, conforme indicado em (7.26), o ponto P' tende para o ponto P , a reta secante $secan(P, P')$ tende para a reta tangente $tang(P)$ e, conseqüentemente, o coeficiente angular $\Delta v_x / \Delta t$ da reta secante tende para o coeficiente angular dv_x / dt da reta tangente, que é a aceleração da partícula.

Portanto, no gráfico da velocidade *versus* o tempo, a aceleração da partícula em um certo instante é representada pelo coeficiente angular da reta que é tangente ao ponto do gráfico correspondente ao instante considerado.

Para obter o gráfico da função-aceleração, lançamos os instantes do tempo no eixo horizontal e as acelerações no eixo vertical. A **Figura 7.3** mostra um

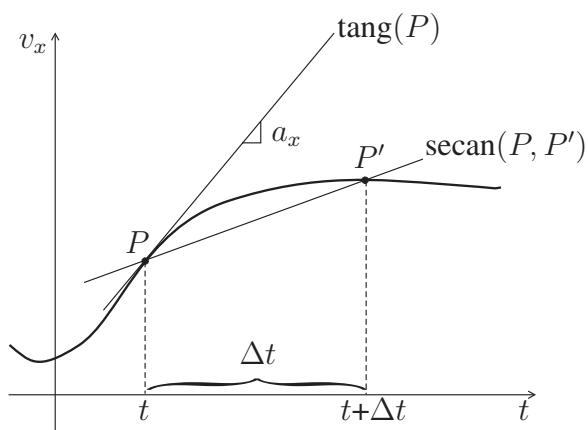


Figura 7.2: A aceleração instantânea é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da velocidade *versus* o tempo.

exemplo de gráfico de uma função-aceleração (gráfico inferior). Nesse gráfico, em qualquer instante t o valor da função, isto é, a ordenada no gráfico, é a aceleração da partícula nesse instante. No gráfico da função-velocidade, essa mesma aceleração é dada pelo coeficiente angular do gráfico no ponto correspondente ao instante t . A **Figura 7.3** mostra os gráficos da velocidade e da aceleração de um mesmo movimento. Em alguns instantes escolhidos, a aceleração é indicada nos dois gráficos.

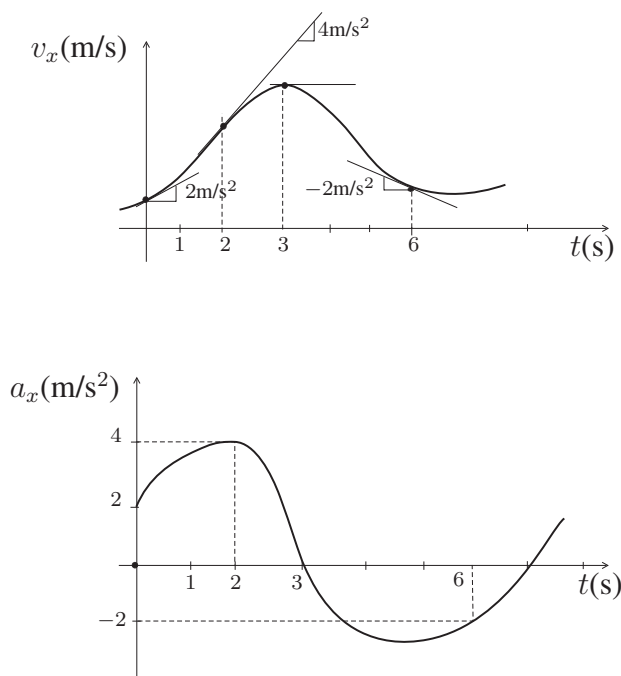


Figura 7.3: A aceleração, que é uma ordenada no gráfico da aceleração *versus* tempo, é ao mesmo tempo um coeficiente angular no gráfico da velocidade *versus* o tempo.

Na aula 6, aprendemos também que a área algébrica sob o gráfico de velocidade *versus* tempo de uma partícula nos fornece o seu deslocamento no intervalo de tempo considerado, uma vez que a velocidade é a derivada da posição. Do mesmo modo, podemos afirmar que a área algébrica sob o gráfico de aceleração *versus* tempo de uma partícula nos dará a variação de sua velocidade no intervalo de tempo considerado. Essa propriedade é consequência direta da equação (7.13), que dá a velocidade a partir da função-aceleração. De fato, nessa equação, a integral é dada pela área sob o gráfico da função-aceleração entre os instantes t_0 e t . Essa área é representada pelo símbolo $A[\ddot{f}_x]_{t_0}^t$ e está indicada na **Figura 7.4**.

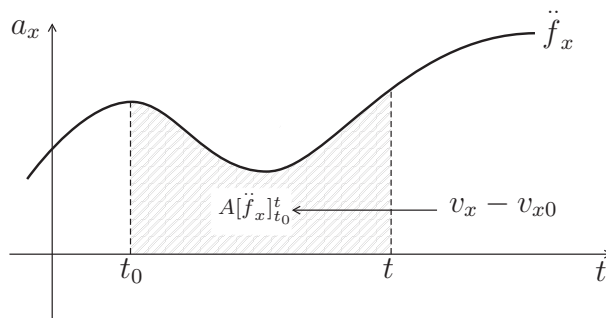


Figura 7.4: A variação de velocidade num certo instante é dada, no gráfico da aceleração *versus* o tempo, pela área algébrica sob o gráfico nesse mesmo intervalo.

De acordo com a equação (7.13), essa área $A[\ddot{f}_x]_{t_0}^t$ é igual à diferença $v_x - v_{x0}$. Portanto, a velocidade v_x em um instante t qualquer é obtida adicionando-se essa área ao valor v_{x0} da velocidade em um instante particular t_0 : $v_x = v_{x0} + A[\ddot{f}_x]_{t_0}^t$. Em suma: sabendo-se a velocidade em um único instante, e medindo áreas sob o gráfico da função-aceleração, podemos determinar a velocidade em um instante qualquer.

Exemplo 7.6

A **Figura 7.5** mostra o gráfico da aceleração *versus* o tempo de um certo movimento.

Suponha que seja conhecida a velocidade da partícula no instante $t = 0$ s; digamos que ela seja dada por $v_{x0} = 2$ m/s. Examinando a figura, você poderá encontrar o valor da velocidade em qualquer instante que desejar. Por exemplo, nos instantes 1 s, 2 s, 3 s, 4 s, 5 s, 6 s, 7 s, 8 s, 9 s e 10 s, as velocidades são, respectivamente, 3 m/s, 5 m/s, 6 m/s, 6 m/s, 5,5 m/s, 4,5 m/s, 4 m/s, 4,5 m/s, 5,5 m/s e 6,5 m/s. O aspecto algo esquisito desse gráfico tem por finalidade facilitar o cálculo das áreas, sem ter de recorrer a integrais para isso.

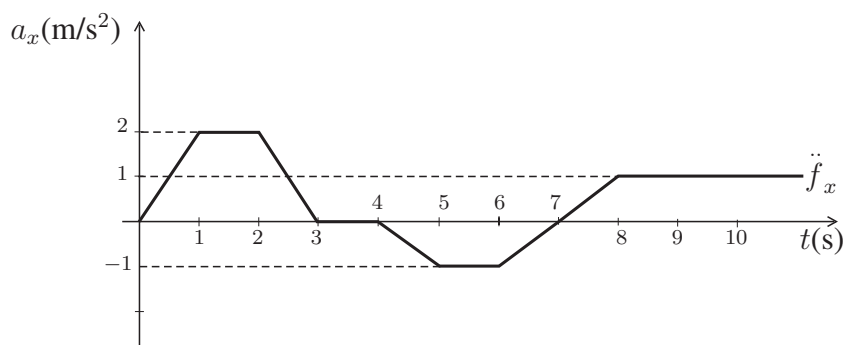


Figura 7.5: As áreas sob este gráfico da aceleração *versus* o tempo permitem obter facilmente a variação da velocidade em qualquer intervalo do tempo.

Movimento de queda livre

Nesta seção, vamos estudar um caso particular de movimento, com o qual todos nós estamos muito familiarizados. Este tipo de movimento faz parte do cotidiano de cada um de nós e, sob certas circunstâncias, é aproximadamente um MRUV: trata-se do **movimento de queda livre** dos corpos. De uma forma genérica, dizemos que um corpo está executando um movimento de queda livre se o seu movimento for vertical, isto é, se tiver a direção que passe pelo centro da Terra, e se não sofrer nenhuma ação que não seja a da força gravitacional da Terra e a da resistência oferecida pelo ar que está a sua volta. Por exemplo, quando uma pedra é abandonada próxima à superfície da Terra, ou mesmo quando é lançada verticalmente para cima, ela irá descrever um movimento de queda livre.

No entanto, se não impusermos algumas restrições a esse tipo de movimento, ele pode tornar-se extremamente complicado. Levar em consideração a resistência oferecida pelo ar na queda livre de um corpo é uma tarefa muito complicada, uma vez que tal resistência é uma função, entre outras coisas, da velocidade do corpo e da sua forma (veremos que a resistência do ar aumenta com a velocidade do corpo). Portanto, se restringirmos nosso estudo a movimentos com velocidades suficientemente baixas, poderemos, numa primeira aproximação, desprezar o efeito da resistência do ar, tornando assim o nosso problema bem mais simples de ser resolvido.

Quando dizemos que estamos desprezando a resistência do ar, significa também que estamos supondo que não haja ventos fortes que possam alterar o movimento do corpo ou mesmo desviá-lo de sua trajetória retilínea.

Além disso, se considerarmos apenas os movimentos de queda livre próximos à superfície da Terra, a ação gravitacional da Terra sobre o corpo em questão fica mais simples de ser levada em conta. Verifica-se experimentalmente que sob tais circunstâncias o movimento de queda livre dos corpos é com grande precisão um MRUV.

Mais ainda, verifica-se que todos os corpos em queda livre próximos à superfície da Terra e com baixas velocidades possuem exatamente a mesma aceleração, de módulo igual a $9,8\text{m/s}^2$. Tal aceleração é sempre no sentido do centro da Terra (a Terra atrai os corpos, como veremos mais adiante). Portanto, o movimento de uma pedra abandonada a uma certa altura será acelerado até atingir o solo, enquanto o movimento de uma pedra lançada para cima a partir do solo será desacelerado durante a subida e acelerado na descida, mas sempre com a mesma aceleração.

Galileu Galilei foi o primeiro a estudar sistematicamente o movimento de queda livre dos corpos. Astutamente, o fez por meio de planos inclinados sem atrito, pois dessa forma conseguia movimentos análogos aos da queda livre, porém, com uma aceleração menor, facilitando assim as suas medidas. Logrou em descrever corretamente o movimento como um MRUV.

Costuma-se usar a letra g para designar o módulo da aceleração gravitacional, ou seja, $g = 9,8\text{m/s}^2$. Para muitos propósitos, pode-se considerar $g \approx 10\text{m/s}^2$. Nesse curso, sempre que nada for dito sobre o valor de g , estará implícito o valor $g = 10\text{m/s}^2$. A seguir, aplicaremos os conhecimentos adquiridos até aqui para escrever as funções-aceleração, de velocidade e de movimento correspondentes a um movimento de queda livre.

Função-aceleração, função-velocidade e função-movimento na queda livre

Antes de tudo, vamos escolher a origem do eixo vertical, sobre o qual irá ocorrer o movimento de queda livre a ser estudado. Por conveniência futura (quando estivermos estudando movimentos não retilíneos, como por exemplo o movimento de projéteis com inclinações arbitrárias em relação ao plano horizontal), vamos designar por eixo \mathcal{OY} o eixo vertical, situar a origem no solo e escolher o sentido positivo do eixo para cima. Desse modo, a função-aceleração no movimento de queda livre é dada por:

$$\ddot{f}_y(t) = -g ,$$

ou simplesmente

$$a_y = -g ,$$

pois, como vimos, a aceleração dos corpos em queda livre é constante no tempo. Para obter a função-velocidade, temos de conhecer a velocidade em um dado instante. Suponhamos que no instante inicial, $t = 0\text{s}$, a velocidade seja v_{y0} . Com isso, integrando no tempo, obtemos:

$$v_y = v_{y0} + \int_0^t (-g) dt' \implies v_y = v_{y0} - gt.$$

Supondo ainda conhecida a posição inicial, dada por y_0 , integramos uma vez mais para obter finalmente a função-movimento da queda livre:

$$y = y_0 + \int_0^t (v_{y0} - gt') dt' \implies y = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Vale a pena reunir essas três funções, pois com elas é que resolveremos nossos problemas de queda livre:

$$\begin{cases} a_y &= -g \\ v_y &= v_{y0} - gt \\ y &= y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

De posse dessas equações, podemos calcular, por exemplo, o tempo gasto para o corpo atingir o ponto mais alto de sua trajetória, muitas vezes referido como tempo de subida, e verificar que ele é igual ao tempo gasto para o corpo retornar ao ponto de partida (de lançamento), referido muitas vezes como tempo de descida. Vejamos como isso pode ser feito.

Supondo que o corpo seja lançado do solo em $t = 0\text{s}$, temos $y_0 = 0\text{m}$. Designando por t_s o instante em que o corpo atinge a altura máxima, vemos que t_s é o tempo de subida. Para determiná-lo, basta igualar a função-velocidade a zero, pois nesse instante o corpo está invertendo o sentido de seu movimento:

$$v_y = 0 \implies v_{y0} - gt_s = 0 \implies t_s = \frac{v_{y0}}{g}. \quad (7.28)$$

Para encontramos o instante em que o corpo retorna ao solo, basta igualar a posição do corpo a zero e, após descartar a raiz que corresponde ao instante de lançamento, identificar o instante desejado. Vejamos:

$$y = 0 \implies v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \implies t \left(v_{y0} - \frac{1}{2}gt \right) = 0.$$

Essa equação do segundo grau em t possui duas raízes. No entanto, a raiz $t = 0\text{s}$ corresponde ao instante de lançamento. Desse modo, concluímos que o

instante em que o corpo retorna ao solo, muitas vezes chamado de instante de queda, designado por t_q , é dado por:

$$\left(v_{yo} - \frac{1}{2}gt_q\right) = 0 \implies t_q = \frac{2v_{yo}}{g}. \quad (7.29)$$

Comparando as equações (7.28) e (7.29) vemos que $t_q = 2t_s$, o que nos permite concluir que o tempo de subida é igual ao tempo de descida.

Se quisermos saber agora qual é a altura máxima atingida por um corpo, basta calcular a posição do corpo em $t = t_s$. Designando a altura máxima por y_{max} , temos:

$$y_{max} = f_y(t_s) = v_{yo}t_s - \frac{1}{2}g(t_s)^2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} y_{max} &= v_{yo}\frac{v_{yo}}{g} - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_{yo}}{g}\right)^2 \\ &= \frac{v_{yo}^2}{2g}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Finalmente, podemos calcular a velocidade com que o corpo retorna ao solo e verificar que ela possui o mesmo módulo que a velocidade de lançamento, mas sentido oposto, obviamente. Para isso, basta calcular a velocidade em $t = t_q$. Designando tal velocidade por v_q , temos:

$$v_q = v_{yo} - gt_q = v_{yo} - g\left(\frac{2v_{yo}}{g}\right) \implies v_q = -v_{yo}.$$

Esse resultado já era esperado, uma vez que o tempo de subida é igual ao tempo de descida e a desaceleração na subida tem o mesmo módulo que a aceleração na descida. Como um comentário final, note que supusemos $y_0 = 0\text{m}$ e, conseqüentemente, $v_{yo} > 0\text{m/s}$ (já que a origem está no solo), mas as equações escritas acima para y e v_y podem ser adaptadas para outras situações (você encontrará situações desse tipo nos exercícios).

Exemplo 7.7

Uma partícula é lançada verticalmente para cima a partir do solo com velocidade igual a 20m/s . Seja $t = 0\text{s}$ o instante de lançamento. Vamos então aplicar as fórmulas anteriores para determinar a altura máxima atingida pela partícula e o instante em que ela retorna ao solo.

Nessas condições, a função-movimento da partícula é dada por:

$$y = 20t - 5t^2.$$

Conseqüentemente, a sua velocidade é:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 20 - 10t .$$

Para obter o instante em que ela atinge a altura máxima, basta igualar a função-velocidade a zero para obter (veja a equação (7.28)):

$$t_s = \frac{20}{10} = 2s .$$

Nesse instante, a partícula se encontra na posição:

$$y_{max} = 20 \times 2 - 5(2)^2 = 20m .$$

Esse mesmo resultado poderia ter sido obtido aplicando-se diretamente a equação (7.30), isto é:

$$y_{max} = \frac{20^2}{2 \times 10} = 20m .$$

Quanto ao instante em que a partícula retorna ao solo, basta lembrar que o tempo de descida é igual ao tempo de subida, de modo que ela retorna ao solo no instante (tempo de queda):

$$t_q = 2t_s = 4s .$$

Resumo

Nesta aula, você aprendeu os conceitos de aceleração média e aceleração instantânea de uma partícula num movimento retilíneo. Em termos de derivadas, vimos que a função-aceleração de uma partícula é a derivada temporal da função-velocidade, ou ainda a segunda derivada temporal da função de posição. O processo inverso, isto é, o de obter a função-velocidade a partir da função-aceleração é feito por meio de uma integração. No entanto, para determinarmos univocamente a função-velocidade a partir da função-aceleração, é necessário ainda conhecer a velocidade da partícula em um instante qualquer.

Graficamente, em analogia com o que foi feito na aula 6, vimos que a aceleração média num certo intervalo temporal $[t_1, t_2]$ corresponde ao coeficiente angular da reta secante ao gráfico de velocidade *versus* tempo, passando pelos pontos $(t_1, \dot{f}_x(t_1))$ e $(t_2, \dot{f}_x(t_2))$. Já a aceleração num instante genérico t é dada graficamente pelo coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de velocidade *versus* tempo no ponto $(t, \dot{f}_x(t))$. Vimos ainda que a área algébrica sob o gráfico de aceleração *versus* tempo, num dado intervalo temporal, corresponde à variação da velocidade da partícula nesse intervalo.

Finalmente, discutimos um caso particular de movimento com aceleração constante não nula, a saber, o movimento de queda livre dos corpos. Esse movimento teve uma importância histórica muito grande no desenvolvimento da mecânica.

Questionário

1. Dado um gráfico da velocidade de uma partícula *versus* o tempo, como se obtém graficamente a aceleração média da partícula no intervalo $[t_a, t_b]$?
2. Dado um gráfico da velocidade de uma partícula *versus* o tempo, como se obtém graficamente a aceleração da partícula num certo instante t_1 ?
3. Dado um gráfico da velocidade de uma partícula *versus* o tempo, explique como traçar o gráfico correspondente da função-aceleração *versus* o tempo.
4. Usando o conceito de aceleração, defina MRUV.
5. Sabemos que se a velocidade de uma partícula for negativa durante um certo intervalo de tempo o seu deslocamento nesse intervalo será necessariamente negativo. E se a aceleração de uma partícula for negativa durante um certo intervalo de tempo o seu deslocamento será necessariamente negativo?
6. Uma partícula que se movimenta com aceleração constante não nula pode inverter o sentido de seu movimento? Tente ilustrar a sua resposta elaborando um ou dois exemplos.
7. Dado um gráfico da função-aceleração *versus* tempo de uma partícula, como obter graficamente a variação da velocidade da partícula entre os instantes t_1 e t_2 ?
8. Dado somente o gráfico da aceleração *versus* tempo de uma partícula, podemos obter o gráfico da função-velocidade *versus* tempo da partícula?

Problemas propostos

1. A **Figura 7.6** mostra o gráfico de uma função-movimento. Esboce os gráficos da função-velocidade e da função-aceleração correspondentes.

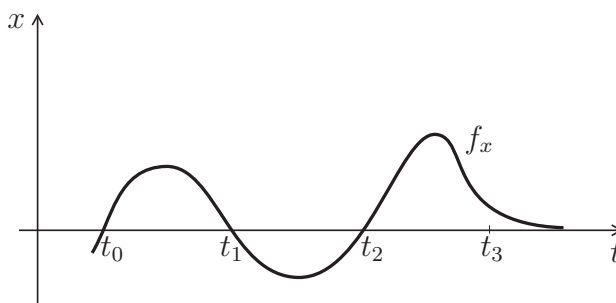


Figura 7.6: Gráfico de função-movimento da partícula referente ao problema 1.

2. Na **Figura 7.5**, do exemplo 7.6, é dada a função-aceleração de um certo movimento. Desenhe os gráficos das correspondentes funções-velocidade e de movimento supondo que no instante inicial a partícula encontra-se em repouso na origem.
3. Considere o lançamento vertical de uma determinada partícula. Demonstre graficamente que o tempo de subida é igual ao tempo de descida (utilize o gráfico de velocidade *versus* tempo).
4. Uma partícula é lançada verticalmente para cima a partir do solo. Transcorrido um intervalo de tempo igual à metade do tempo de subida, mostre que ela terá percorrido $3/4$ da altura máxima a ser atingida em seu movimento, qualquer que seja a sua velocidade inicial.
5. Considere novamente o lançamento vertical de uma certa partícula. Seja P um ponto genérico da trajetória da partícula e h a altura desse ponto medida a partir do solo (ponto de lançamento). Mostre que o módulo da velocidade da partícula quando ela passa por P na subida é o mesmo que o módulo de sua velocidade quando ela passa por esse mesmo ponto, mas na descida.
6. Para ilustrar as demonstrações feitas nos dois problemas anteriores, considere o lançamento vertical de uma partícula cuja função-movimento é dada por $y = 20t - 5t^2$.
 - (a) Calcule t_s e a altura máxima atingida pela partícula e, em seguida, verifique que a posição da partícula no instante $(1/2)t_s$ corresponde realmente a $3/4$ de sua altura máxima.
 - (b) Verifique que em $t_1 = (1/2)t_s$ e $t_2 = (3/2)t_s$ as velocidades têm o mesmo módulo.

7. Uma partícula é abandonada de uma altura $h = 20\text{m}$ acima do solo a partir do repouso. Seja $t = 0\text{s}$ o instante em que ela é abandonada.
- (a) Em que instante e com que velocidade a partícula atinge o solo?
 - (b) Com qual velocidade ela deve ser lançada (deixe claro qual o sentido do lançamento, se para cima ou para baixo) para que o tempo gasto por ela para atingir o solo seja a metade do encontrado no item anterior?
 - (c) Com que velocidade ela deve ser lançada a fim de que o tempo gasto para atingir o solo seja o dobro do encontrado no primeiro item desse problema?
8. Considerando o problema anterior:
- (a) Trace os gráficos de posição, velocidade e aceleração *versus* tempo do movimento de queda livre descrito no problema anterior.
 - (b) Calcule as áreas algébricas sob os gráficos de velocidade e aceleração *versus* tempo no intervalo de tempo que vai de 0s ao instante em que a partícula toca o solo e verifique que os resultados estão coerentes com a solução encontrada no problema anterior.
9. A partícula 1 é abandonada, a partir do repouso, de uma altura em relação ao solo igual a 80m . No instante em que essa partícula é abandonada, uma outra, a partícula 2, é lançada verticalmente para cima com uma velocidade cujo módulo é igual à velocidade com que a primeira atinge o solo.
- (a) Em que instante as partículas estão a uma mesma altura do solo? E qual é essa altura? (Você consegue perceber alguma relação entre esse problema e o problema 4?)
 - (b) Trace os gráficos de posição e velocidade *versus* tempo das duas partículas.
10. Um procedimento simples para se estimar a altura de um prédio é o seguinte: abandona-se uma partícula num certo instante do alto do prédio cuja altura se deseja determinar. Ao colidir com o solo, uma onda sonora irá se propagar em todas as direções, em particular, na direção de onde a partícula foi abandonada. Sabendo-se a velocidade do som no ar, medindo-se o intervalo de tempo entre o início do movimento da partícula e o instante em que se ouve o som da colisão desta com o solo e utilizando-se as fórmulas do movimento de queda livre, pode-se calcular a altura desejada.

- (a) Sendo v_s a velocidade do som no ar e Δt o intervalo de tempo medido num determinado prédio, calcule, usando o procedimento descrito anteriormente, a altura H desse prédio em função de v_s , Δt e g .
- (b) Utilize esse procedimento para medir a altura de algum prédio que você frequente e verifique se a fórmula funcionou bem. Mas cuidado para não colocar ninguém em perigo. Faça a experiência quando você tiver certeza de que não haverá ninguém por perto do ponto de colisão. Além disso, escolha apropriadamente a sua partícula.
11. Dado o gráfico de aceleração *versus* tempo de uma partícula mostrado na **Figura 7.7** (figura abaixo), e supondo que, no instante inicial, ela esteja em repouso na origem, desenhe os correspondentes gráficos de velocidade e posição *versus* tempo.

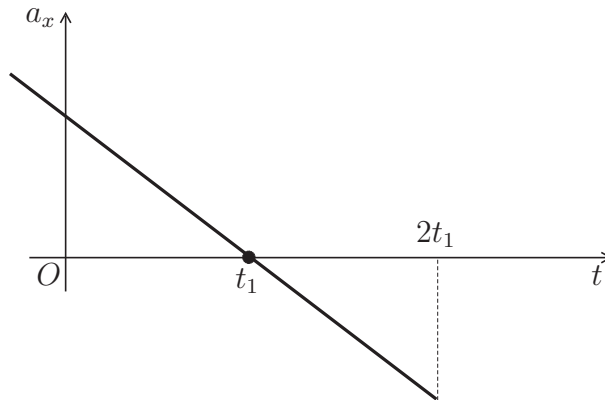


Figura 7.7: Gráfico da aceleração *versus* tempo da partícula no problema 11.

12. Considere um MRUV no qual a aceleração da partícula em qualquer instante de tempo valha a . Sejam t_1 e $t_2 > t_1$ dois instantes genéricos. Demonstre o seguinte resultado, conhecido por fórmula de Torricelli:

$$v_{x2}^2 - v_{x1}^2 = 2a(x_2 - x_1) .$$

Desafio: você saberia generalizar o resultado anterior para o caso em que a aceleração da partícula varia à medida que ela se movimenta? Tente mostrar então que no caso geral vale a fórmula:

$$v_{x2}^2 - v_{x1}^2 = 2 \int_{x_1}^{x_2} \ddot{f}_x(x) dx .$$

13. Um carro de fórmula 1 está fazendo testes numa longa pista retilínea e estão sendo medidos os intervalos de tempo gastos para que ele percorra uma distância d . Suponha que ele inicie seu movimento a partir do repouso e que, após percorrer essa distância, ele retorne ao repouso. Sabe-se que a sua aceleração máxima é α , enquanto a sua desaceleração máxima é β ($\alpha, \beta > 0$). Imagine o seguinte movimento desse carro: em $t = 0$ s ele inicia um MRUV com a aceleração máxima α até um certo instante, a partir do qual começa a diminuir a sua velocidade descrevendo um outro MRUV, com desaceleração β , até atingir o repouso exatamente após ter percorrido a distância d .

- (a) Faça um gráfico da velocidade do carro *versus* tempo correspondente ao movimento descrito anteriormente.
- (b) Usando o fato de que a aceleração de uma partícula pode ser obtida do gráfico de sua velocidade *versus* tempo e o fato de que a área algébrica sob esse gráfico dá o seu deslocamento, mostre que para que esse carro percorra a distância d no menor tempo possível ele deve seguir, exatamente, o movimento descrito anteriormente.
- (c) Mostre que o menor tempo possível para esse carro percorrer a distância d é dado por

$$\left[\frac{2d(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} \right]^{1/2}.$$

14. Suponha que a função-aceleração \ddot{f}_x de uma partícula seja conhecida, isto é, conhecemos a sua aceleração em qualquer instante de tempo de seu movimento. Supondo ainda que em $t = t_0$ a sua posição seja x_0 e a sua velocidade v_{x0} , mostre que a sua função-movimento é dada por:

$$f_x(t) = x_0 + v_{x0}(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} \ddot{f}_x(t'') dt''.$$

Utilize essa fórmula no caso particular em que a função-aceleração é a função constante $\ddot{f}_x : t \mapsto \ddot{f}_x(t) = a$ e verifique que o resultado obtido coincide com o que você já conhecia para o MRUV.

O estudo do movimento de partículas carregadas eletricamente na ionosfera é importante para se saber como as ondas eletromagnéticas, como por exemplo as ondas de rádio, se propagam na ionosfera.

15. Suponha que a função-aceleração de um determinado elétron da ionosfera devido, por exemplo, à ação do campo elétrico de uma onda eletromagnética, seja dada por:

$$a_x = \ddot{f}_x(t) = -\frac{eE_0}{m_e} \text{sen}(\omega t) ,$$

onde e é o módulo da carga do elétron, m_e é a sua massa, E_0 é o módulo do campo elétrico da onda e ω , a frequência angular das vibrações eletromagnéticas dessa onda.

- (a) Supondo que $v_{x0} = 0\text{m/s}$, mostre que a função-velocidade desse elétron é dada por:

$$v_x = \frac{eE_0}{m_e} [\cos(\omega t) - 1] .$$

- (b) Supondo que $x_0 = 0\text{m}$, determine a função-movimento desse elétron e mostre que:

$$x = -\frac{eE_0}{m_e\omega} t + \frac{eE_0}{m_e\omega^2} \text{sen}(\omega t) .$$

- (c) Analise as dependências das respostas anteriores com m_e , ω e E_0 e interprete os resultados.

OBS: Note que na expressão da função-movimento do elétron há um termo oscilante e um não oscilante, que cresce indefinidamente. Os termos não oscilantes nesse tipo de movimento dependem fortemente das condições iniciais do elétron.

Auto-avaliação

Se você entendeu as definições de velocidade e aceleração, assim como as operações matemáticas de derivação e integração, deve ser capaz de fazer praticamente todos os problemas propostos desse capítulo. Caso tenha dificuldade em resolver os três últimos não se assuste, pois tratam-se dos mais difíceis da lista proposta. No entanto, se você sentir muita dificuldade em resolver mais da metade dos problemas propostos, deve reler os tópicos da aula relacionados a esses problemas e tentar resolvê-los novamente antes de passar para a próxima aula.

Aula 8 – Movimentos não-retilíneos e vetores

Objetivo

- Aprender o conceito de vetor e suas propriedades como instrumento apropriado para estudar movimentos não retilíneos.

Introdução

Da aula 3 até a aula anterior, estudamos os movimentos retilíneos de uma partícula. Vimos que sua posição nesse tipo de movimento é especificada por um único número, a coordenada da partícula na reta do movimento, digamos, a coordenada x . Nesse caso, uma única função-movimento f_x especifica completamente o movimento da partícula. Como consequência, em cada instante, tanto a velocidade da partícula quanto a sua aceleração ficam também especificadas por um único número, v_x e a_x , respectivamente.

No caso de um movimento qualquer da partícula, não necessariamente retilíneo, são necessárias três coordenadas para especificar a posição da partícula a cada instante do movimento. Usando um sistema de eixos coordenados \mathcal{OXYZ} , as três coordenadas são x , y e z . O movimento é então descrito por três funções-movimento f_x , f_y e f_z , que dão as coordenadas da partícula em cada instante t do tempo: $x = f_x(t)$, $y = f_y(t)$ e $z = f_z(t)$. Se a idéia de que um movimento geral da partícula é descrita por essas três funções não estiver bem clara em sua mente, então é necessário que você releia a aula 2, antes de iniciar o estudo desta aula.

Veremos que em um movimento qualquer da partícula, não necessariamente retilíneo, também são necessários três números para especificar a sua velocidade e mais outros três números para especificar sua aceleração. Essa quantidade de números pode tornar muito complicado o estudo do movimento. No entanto, ele pode ser imensamente simplificado se usarmos o conceito geométrico de vetor. Esse é um conceito de enorme utilidade em Física, em Matemática e em diversas outras ciências.

Nesta aula, veremos como o conceito geométrico de vetor nasce naturalmente do estudo de movimentos não retilíneos de uma partícula.

Deslocamento espacial de uma partícula

Como dissemos, a posição de uma partícula em movimento retilíneo, digamos, ao longo do eixo \mathcal{OX} , é dada por um número, a coordenada x da partícula.

O deslocamento da partícula de um ponto a outro é também dado por um número Δx , que corresponde à diferença entre as coordenadas do ponto final e do ponto inicial. Já em um movimento espacial arbitrário, são necessárias três coordenadas para especificar a posição da partícula, as coordenadas x , y e z tomadas em relação a um sistema de eixos \mathcal{OXYZ} . Nesse caso, são também necessários três números para especificar as mudanças de posição, isto é, os deslocamentos. De fato, suponhamos que a partícula, em um certo instante, passe pelo ponto P_1 e, em um instante posterior, por um ponto P_2 . Sejam x_1 , y_1 e z_1 as coordenadas de P_1 e x_2 , y_2 e z_2 as coordenadas de P_2 . O deslocamento da partícula de P_1 até P_2 , isto é, a sua variação de posição ao passar de P_1 para P_2 é dada pelas variações das coordenadas: $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ e $\Delta z = z_2 - z_1$, conforme indicado na **Figura 8.1**.

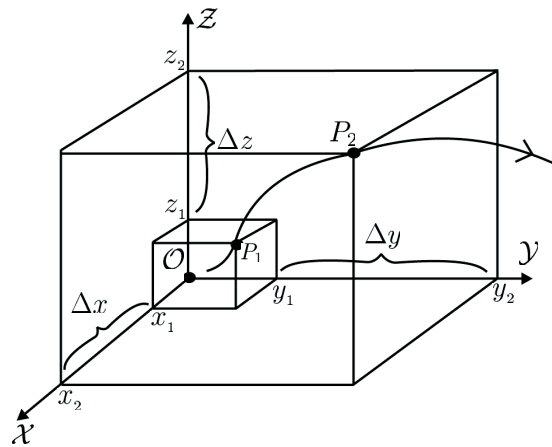


Figura 8.1: Variações das coordenadas de uma partícula em movimento do ponto P_1 para o ponto P_2 .

É claro que as três variações Δx , Δy e Δz especificam univocamente o deslocamento da partícula e vice-versa. No entanto, é extremamente útil considerar um outro conjunto de dados, que também determinam univocamente o deslocamento, e são por ele univocamente determinados. Os dados desse outro conjunto apresentam a vantagem de serem geométricos. Eles, juntamente com os dados numéricos Δx , Δy e Δz , nos dão um meio poderoso de analisar os deslocamentos espaciais e os movimentos de um modo geral. Passemos à consideração desses dados geométricos de um deslocamento.

Consideremos novamente o deslocamento da partícula, desde o ponto P_1 até um outro ponto P_2 . Esses dois pontos determinam uma única reta r , que passa por eles, tal como indicado na **Figura 8.2**. Ela dá a direção do deslocamento. Esse, por sua vez, pode ter dois sentidos ao longo da reta r , de P_1 para P_2 ou de P_2 para

P_1 ; no caso em questão, no sentido de P_1 para P_2 . Finalmente, no deslocamento de P_1 para P_2 fica bem determinado um comprimento: o do segmento de reta que liga P_1 e P_2 .

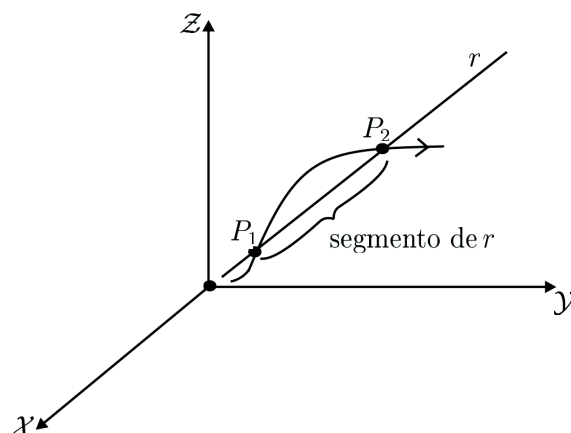


Figura 8.2: Uma mudança de posição, de um ponto P_1 para outro ponto P_2 , especifica biunivocamente uma direção, a da reta r , um sentido, de P_1 para P_2 , e um comprimento, do segmento de reta de P_1 até P_2 .

Vemos então que um deslocamento determina univocamente uma direção, um sentido ao longo dessa direção e um comprimento. Reciprocamente, os dados geométricos de um deslocamento, isto é, uma direção, um sentido de percurso ao longo dessa direção e um comprimento, determinam univocamente um deslocamento. Considere novamente a situação da **Figura 8.2**. Suponha agora que sejam dados uma direção, um sentido e um comprimento, e que, baseados nessas informações, tenhamos de determinar um deslocamento realizado a partir do ponto P_1 . Primeiramente traçamos, a partir de P_1 , uma reta r nessa direção. Agora percorremos ao longo da reta r , e no sentido que foi indicado, uma distância igual ao comprimento que foi dado. No final do percurso, chegamos a um ponto bem determinado que chamamos de ponto P_2 . Dado o ponto P_2 , fica determinado o deslocamento a partir do ponto P_1 .

Sintetizando: um deslocamento no espaço determina univocamente uma direção, um sentido e um comprimento; reciprocamente, uma direção, um sentido e um comprimento determinam univocamente um deslocamento a partir de qualquer ponto do espaço.

Pelo que foi exposto anteriormente, fica claro que, no estudo de deslocamentos, é importante um conceito matemático definido por uma direção, um sentido e um comprimento. Trata-se do conceito geométrico de vetor, que desenvolveremos na próxima seção. Ele é de extrema utilidade no estudo dos deslocamentos espaciais de uma partícula e dos demais conceitos aos quais podemos associar uma direção, um sentido e um comprimento.

O conceito geométrico de vetor

Sejam dois pontos distintos P_1 e P_2 . Eles determinam uma única reta r , a reta que passa por eles. Além disso, nessa reta há um único segmento de reta entre os pontos P_1 e P_2 .

Nesse segmento de reta, são possíveis dois sentidos de percurso: o de P_1 para P_2 e o de P_2 para P_1 . O segmento de reta ao qual atribuímos um sentido é chamado de **segmento de reta orientado**. Para abreviar a linguagem, chamamos um segmento de reta orientado simplesmente de **seta**. Denotamos a seta com sentido de P_1 para P_2 pelo símbolo $\overrightarrow{P_1P_2}$. Se o sentido da seta for de P_2 para P_1 , ela é representada por $\overrightarrow{P_2P_1}$. A **Figura 8.3** ilustra uma seta $\overrightarrow{P_1P_2}$.

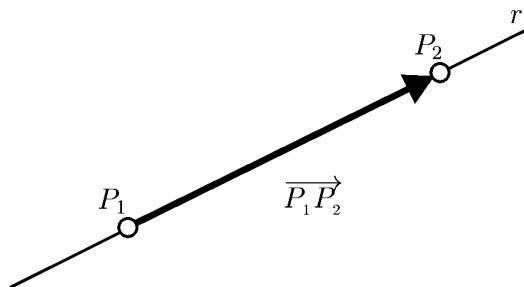


Figura 8.3: Segmento de reta orientado ou seta $\overrightarrow{P_1P_2}$.

Na seta $\overrightarrow{P_1P_2}$, o ponto P_1 é chamado **ponto inicial** da seta, ou **origem** da seta, e o ponto P_2 , **ponto final** da seta. Ao fazer o desenho de uma seta, indicamos que ela tem sentido, ou orientação, de P_1 para P_2 , desenhando uma ponta no seu ponto final, como mostra a **Figura 8.3**. É claro que essa maneira de desenhar um segmento de reta orientado é que motiva chamá-lo de seta.

A reta na qual está uma seta $\overrightarrow{P_1P_2}$ é chamada **reta suporte** da seta. Essa reta tem uma direção com relação a outros objetos, como por exemplo, direção horizontal, ou vertical, ou inclinada de tais ou quais ângulos com relação a outras retas. Definimos **direção** da seta como sendo a direção de sua reta suporte.

Em cada direção há dois sentidos, por exemplo, na direção vertical, há os sentidos para cima e para baixo, e na horizontal, o que chamamos sentidos para a esquerda e para a direita (especificados, é claro, em relação à superfície da Terra e ao observador). Uma seta ou segmento de reta orientado tem sempre um dos sentidos dentre os dois possíveis ao longo de sua direção. Aliás, é para indicar que o segmento de reta orientado tem um sentido definido que atribuímos à expressão “segmento de reta” o adjetivo “orientado”.

Uma seta tem também um certo comprimento, dado em alguma unidade. Esse comprimento é também chamado **módulo** da seta.

Consideremos agora duas setas: $\overrightarrow{P_1P_2}$, com reta suporte r , e $\overrightarrow{P'_1P'_2}$, com reta suporte r' . Dizemos que as duas setas $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P'_1P'_2}$ têm a mesma direção, ou que são paralelas, se as suas retas suportes r e r' são paralelas. Para explicar o que significa dizer que duas setas paralelas têm o mesmo sentido, ou sentidos opostos, vamos usar a **Figura 8.4**, na qual estão representadas duas setas de mesma direção. Primeiramente, notamos que, sendo paralelas, as setas $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P'_1P'_2}$ estão em um mesmo plano Π , que é o plano determinado por suas retas suportes. As retas r e r' dividem Π em três regiões. Uma região \mathcal{R}^* , que está entre as duas retas suportes, r e r' , e é delimitada por elas; uma região \mathcal{R} , que é um semiplano delimitado apenas pela reta r ; e uma região \mathcal{R}' , que é um semiplano delimitado apenas pela reta r' . Passemos uma reta i pelos pontos iniciais P_1 e P'_1 das duas setas, e uma reta f pelos seus pontos finais P_2 e P'_2 . As setas $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P'_1P'_2}$ têm **o mesmo sentido** se, e somente se, as retas i e f não se cruzam na região \mathcal{R}^* que está entre as duas retas suportes r e r' . A **Figura 8.4** ilustra o caso em que as duas setas têm o mesmo sentido. Se as retas i e f se cruzarem na região \mathcal{R}^* , dizemos que as setas não têm o mesmo sentido, ou que têm **sentidos opostos**. Experimente fazer um desenho, no qual o sentido de uma das setas da **Figura 8.4** tem o seu sentido invertido e você verá que as novas retas i e f cruzar-se-ão na região \mathcal{R}^* .

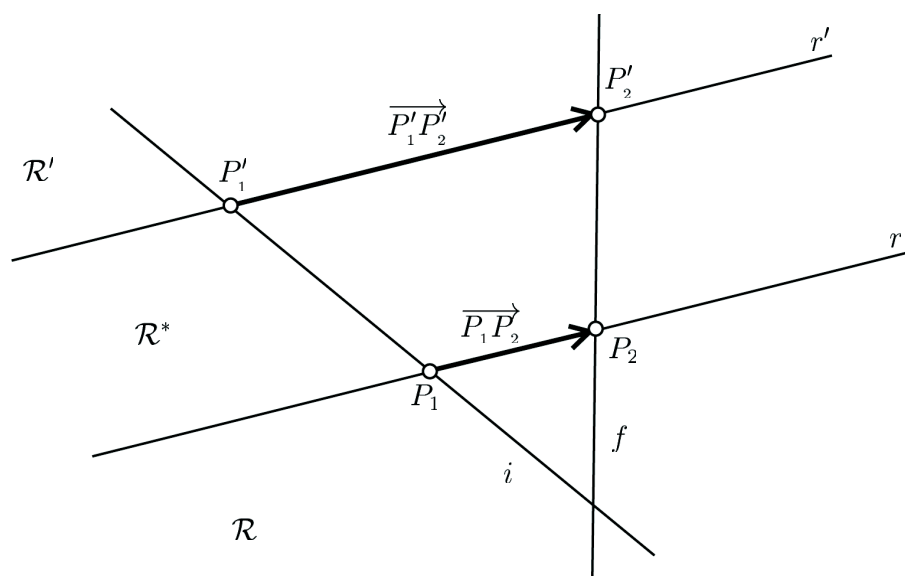


Figura 8.4: Segmentos de reta orientados $\vec{P_1 P_2}$ e $\vec{P'_1 P'_2}$, com a mesma direção, em um mesmo plano Π , que corresponde ao plano desta página.

Setas com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo são chamadas **equipolentes**. A **Figura 8.5** mostra duas setas equipolentes. É claro que uma seta é sempre equipolente a si mesma e que duas setas equipolentes a uma terceira são equipolentes entre si. Se duas setas equipolentes são distintas, suas retas suportes, juntamente com a reta i que passa pelos seus pontos iniciais e a reta f que passa pelos seus pontos finais, formam um paralelogramo.

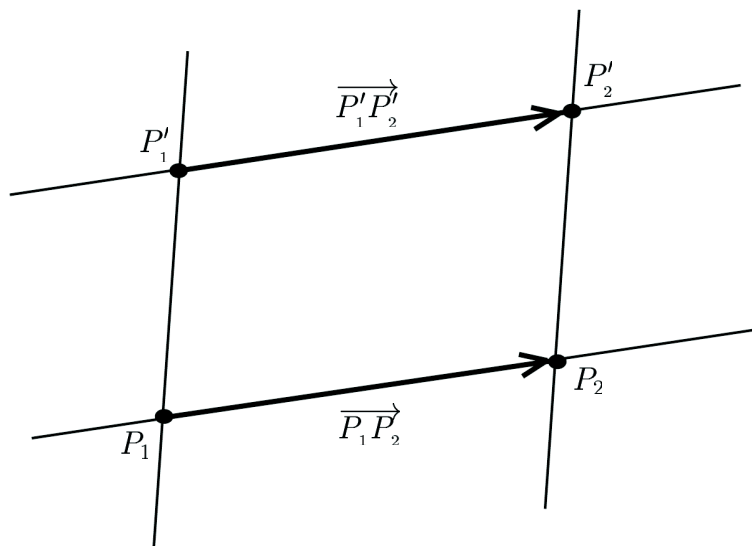


Figura 8.5: Setas $\vec{P_1 P_2}$ e $\vec{P'_1 P'_2}$, equipolentes.

As características que definem uma seta $\overrightarrow{P_1P_2}$ são a sua direção, o seu sentido, o seu módulo e a sua posição no espaço, dada, por exemplo, por seu ponto inicial. Consideremos agora o conjunto de todas as setas equipolentes a $\overrightarrow{P_1P_2}$. Todas têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo e essas três características definem o conjunto. O conjunto é definido pelo que as setas têm em comum, a direção, o sentido e o módulo, mas não depende do que caracteriza cada seta individualmente, que é sua posição no espaço. Esse conjunto de setas equipolentes a $\overrightarrow{P_1P_2}$ é denominado **vetor** associado à seta $\overrightarrow{P_1P_2}$. Definimos **direção**, **sentido** e **módulo** do vetor como sendo, respectivamente, a direção, o sentido e o módulo da seta $\overrightarrow{P_1P_2}$ ao qual ele é associado. O vetor associado a qualquer seta equipolente a $\overrightarrow{P_1P_2}$ é igual ao vetor associado a $\overrightarrow{P_1P_2}$. Cada uma das setas equipolentes que forma o conjunto que define o vetor é chamada **representativo** do vetor. Dizemos também que cada seta equipolente representa o vetor ou que é uma representação do vetor.

Em nossas aulas, um vetor será normalmente denotado por uma única letra em negrito, por exemplo, **a**. Já o módulo de um vetor **a** será denotado por barras verticais ladeando o símbolo do vetor, isto é, o módulo de **a** é $|\mathbf{a}|$. Também representamos o módulo de **a** abolindo o negrito da letra, isto é, por a . Desse modo, temos dois símbolos para denotar o comprimento de **a** e podemos escrever: $|\mathbf{a}| = a$. Nos manuscritos, pode-se denotar um vetor por uma letra encimada por uma setinha, por exemplo: \vec{a} . Nesse caso, representa-se o módulo de \vec{a} por $|\vec{a}|$ ou por a .

É comum em figuras indicarmos um vetor por meio de uma ou várias setas que o representam. A **Figura 8.6** mostra várias setas equipolentes que representam um mesmo vetor **a**.

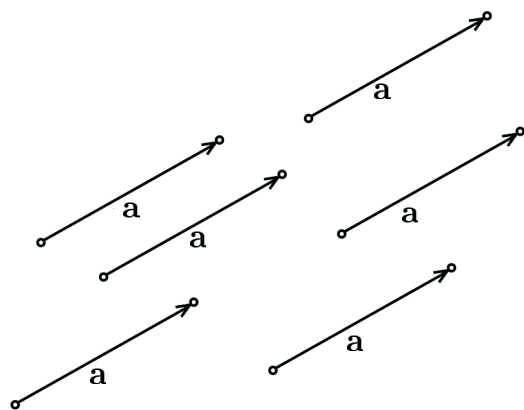


Figura 8.6: Setas equipolentes que representam o mesmo vetor **a** em diferentes pontos do espaço.

Você está vendo que definimos um vetor como o conjunto de todas as setas equipolentes a uma dada seta. Você pode usar outras definições equivalentes. Pode, por exemplo, definir o vetor como o que há de comum a todas as setas desse conjunto. Uma outra definição possível é afirmar que um vetor é uma seta cujo ponto inicial pode ser qualquer ponto do espaço, desde que a direção, o sentido e o comprimento da seta não sejam alterados. Essa última definição tem uma versão bem prática e informal: um vetor é uma seta que podemos desenhar em qualquer ponto do espaço, sempre com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Essa definição prática é muito útil para raciocinar, embora não seja rigorosa. Para desenvolver o formalismo dos vetores, a definição original (de um conjunto de setas equipolentes) é a mais simples e rigorosa, e por isso será a que continuaremos usando em nossa teoria.

Seja um vetor \mathbf{a} . O vetor que tem a mesma direção e o mesmo módulo que \mathbf{a} , porém sentido oposto ao de \mathbf{a} , é chamado **vetor oposto** a \mathbf{a} e é representado por $-\mathbf{a}$. A **Figura 8.7** mostra um vetor \mathbf{a} e seu oposto $-\mathbf{a}$.

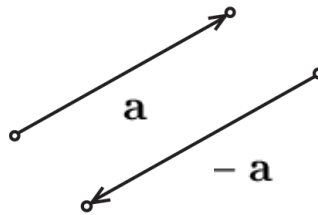


Figura 8.7: Vetor \mathbf{a} e seu oposto $-\mathbf{a}$.

Até agora consideramos que cada seta $\overrightarrow{P_1P_2}$ é definida a partir de dois pontos distintos P_1 e P_2 . Sendo distintos, os dois pontos definem uma reta e, portanto, uma direção; definem um sentido, de um dos pontos para o outro; e definem um módulo, que dá a distância entre os pontos. Com um único ponto P não é possível definir uma direção e um sentido. Mesmo assim, é conveniente definir o que chamaremos seta nula. Uma **seta nula** é simplesmente um ponto. A seta nula constituída pelo ponto P é representada por \overrightarrow{PP} . Por definição, uma seta nula tem módulo igual a zero. Uma vez que não podemos atribuir uma direção e um sentido a uma seta nula, dizemos que ela tem direção e sentido indeterminados. Uma seta nula não é uma seta propriamente dita, mas, ainda assim, é conveniente atribuir-lhe esse nome. Cada ponto do espaço é uma seta nula, e todas as setas nulas são, por definição, equipolentes entre si. Chamamos o conjunto de todas as setas nulas de **vetor nulo**. Cada ponto do espaço é considerado um representante, ou representante, do vetor nulo. O vetor nulo é denotado em nossas aulas por $\mathbf{0}$ e nos manuscritos pode ser usado o símbolo $\overrightarrow{0}$. Note que o vetor nulo não é a

mesma coisa que o número zero. Entretanto, se não há perigo de confusão, o vetor nulo pode ser chamado simplesmente de vetor zero, ou até mesmo de zero.

O conjunto de todos os vetores engloba o vetor nulo e todos os vetores com módulo maior do que zero.

É claro que o conceito de vetor é perfeito para descrever os deslocamentos de uma partícula durante seu movimento. Um vetor a pode ser usado para representar um deslocamento da partícula, a partir de qualquer ponto do espaço, porém, com direção, sentido e comprimento iguais, respectivamente, à direção, ao sentido e ao módulo do vetor a . Como veremos nas próximas aulas, os vetores são úteis para descrever diversas outras grandezas físicas. Toda grandeza física dotada de uma direção, um sentido e um módulo e que é representada por um vetor é chamada **grandeza vetorial**. O deslocamento de uma partícula é uma grandeza vetorial e muitas outras serão encontradas nas aulas que seguem.

Os vetores que definimos podem ser sujeitos a operações com propriedades importantes e úteis em diversas partes da matemática e da física. Passaremos agora a essas operações.

Adição de vetores

Dados dois vetores a e b , consideremos uma seta qualquer que represente a . Tomemos o ponto final dessa seta como o ponto inicial de uma seta que represente b . Definimos **soma** de a com b , que representamos por $a + b$, como sendo o vetor representado pela seta que tem por ponto inicial o ponto inicial da seta que representa a , e por ponto final o ponto final da seta que representa b . A operação que associa aos vetores a e b , o vetor $a + b$, é chamada **adição de vetores**, ou **adição vetorial**. Os vetores a e b que formam a soma $a + b$ são chamados **componentes vetoriais** do vetor $a + b$. Essa regra de obter a soma de dois vetores é chamada **regra do triângulo**. A **Figura 8.8** dá um exemplo de dois vetores a e b e da soma $a + b$ obtida de acordo com a definição de adição vetorial. Na figura fica claro porque a adição vetorial é chamada **regra do triângulo**.

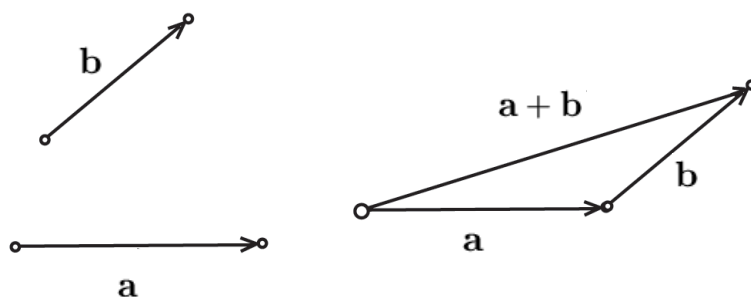


Figura 8.8: Adição dos vetores a e b de acordo com a regra do triângulo.

Quando setas representativas de diversos vetores podem ser desenhadas em um mesmo plano, dizemos que os vetores são coplanares. Evidentemente, dois vetores quaisquer e sua soma são sempre coplanares.

A adição vetorial goza de algumas propriedades muito importantes que enunciaremos a seguir.

1. A adição vetorial é comutativa, isto é, para quaisquer vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , temos:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} . \quad (8.1)$$

2. A adição vetorial é associativa, isto é, para quaisquer vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , temos:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) . \quad (8.2)$$

3. O vetor nulo $\mathbf{0}$ é o elemento neutro da adição vetorial, isto é, para qualquer vetor \mathbf{a} , temos:

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a} . \quad (8.3)$$

4. Para cada vetor \mathbf{a} existe o vetor oposto $-\mathbf{a}$, que satisfaz a igualdade:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0} . \quad (8.4)$$

Note que a regra do triângulo aplica-se sem maiores dificuldades nos casos em que a soma é zero ou em que um ou ambos os vetores a serem adicionados são iguais a zero.

A demonstração da propriedade (8.1) é evidente a partir da **Figura 8.9**. O triângulo superior na figura mostra a adição de \mathbf{a} com \mathbf{b} , e o triângulo inferior, a adição de \mathbf{b} com \mathbf{a} . A soma é a mesma e está ao longo do lado comum aos dois triângulos. Esse lado comum é uma diagonal do paralelogramo formado pelos dois triângulos. Essa propriedade nos permite obter a soma de dois vetores por meio de uma outra regra, a saber: consideremos duas setas com a mesma origem, uma representando o vetor \mathbf{a} , e a outra, o vetor \mathbf{b} . Tais setas determinam um paralelogramo cujos lados são dados pelas mesmas. Note que uma das diagonais do paralelogramo assim formado passa pela origem comum das setas \mathbf{a} e \mathbf{b} . A seta cujo ponto inicial é a origem comum de \mathbf{a} e \mathbf{b} e cujo ponto final é a outra extremidade da diagonal representa a soma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Essa regra para adicionar vetores é chamada, por motivos óbvios, de **regra do paralelogramo**.

A demonstração da propriedade (8.2) é evidente a partir da **Figura 8.10**. Essa propriedade mostra que a soma de três vetores não depende do par que escolhermos para somar em primeiro lugar. Daí não ser necessário usar os parênteses

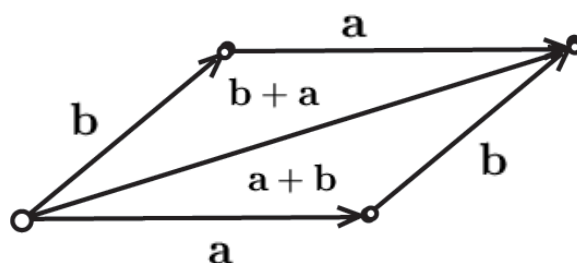


Figura 8.9: $a + b = b + a$.

que em (8.2) indicam essa escolha, de modo que ambos os lados de (8.2) podem ser escritos simplesmente como $a + b + c$. Essa propriedade se estende a qualquer número de vetores. A soma de n vetores $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ pode ser representada sem o uso de parênteses: $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$. Tanto no caso de n vetores como no caso de apenas dois, chamamos os vetores que são somados de **componentes vetoriais** do vetor soma.

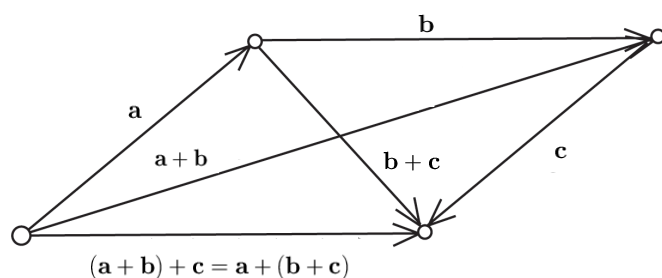


Figura 8.10: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

A demonstração da propriedade (8.4) é uma aplicação direta da regra do triângulo. De fato, usando-se o ponto final da seta que representa a como ponto inicial da seta que representa $-a$, chegamos à conclusão de que o ponto final dessa última seta coincide com o ponto inicial da primeira seta; logo, a soma deve ser o vetor nulo 0 . Você deve fazer sua própria figura para ilustrar essa demonstração. A propriedade (8.3) também se demonstra facilmente usando-se a regra do triângulo.

Para finalizar nosso estudo da adição de vetores, consideremos a adição de um vetor a com o oposto de um vetor b , isto é, a adição de a com $-b$. Chamamos essa adição de diferença entre os vetores a e b e a representamos por $a - b$. Desse modo, temos:

$$a - b = a + (-b) . \quad (8.5)$$

A **Figura 8.11** mostra a diferença entre dois vetores a e b .

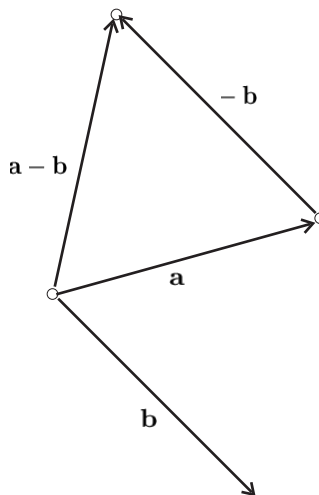


Figura 8.11: $a - b = a + (-b)$.

Você pode verificar a seguinte regra prática para achar a diferença entre a e b : considerando, a partir de uma mesma origem, as setas que representam a e b , a seta que representa $a - b$ é a que vai do final de b até o final de a (note a ordem: vai do final da segunda para o final da primeira). Essa regra prática está ilustrada na **Figura 8.12**.

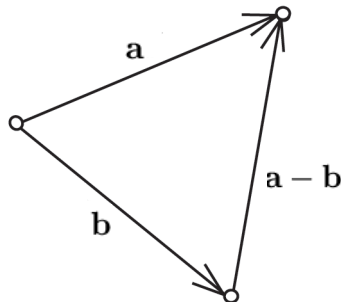


Figura 8.12: Regra prática para calcular a diferença $a - b$.

Não devemos nos esquecer que o processo de achar a diferença de dois vetores é apenas um tipo especial de adição de vetores.

Multiplicação de um número por um vetor

Vamos agora definir uma operação que, a partir de um número real e um vetor, produz um vetor. Seja λ um número real e a um vetor. A esse número e a esse vetor associamos um vetor, que simbolizamos por λa , e que é dado pelas seguintes prescrições: se $\lambda = 0$ ou se $a = 0$ definimos λa como sendo o vetor nulo; nos outros casos, λa é o vetor:

- (i) com a mesma direção de \mathbf{a} ;
- (ii) com módulo igual ao módulo de λ vezes o módulo de \mathbf{a} ;
- (iii) com o mesmo sentido de \mathbf{a} se λ é positivo, mas com sentido oposto se λ é negativo.

Essa operação é chamada **multiplicação de número por vetor** e seu resultado é chamado **produto** do número pelo vetor. Assim, dizemos que a multiplicação do número λ pelo vetor \mathbf{a} tem como resultado o vetor $\lambda\mathbf{a}$, que é o produto de λ por \mathbf{a} . No contexto dessa operação, o número costuma ser chamado de um **escalar**. Referimo-nos então à operação como multiplicação de um escalar por um vetor e ao resultado da operação como o produto do escalar pelo vetor. O produto de um número por um vetor também é chamado **múltiplo** do vetor.

Obtemos, então, em qualquer caso:

$$|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}|. \quad (8.6)$$

Note que, se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, o produto $\lambda\mathbf{a}$ tem módulo maior, igual ou menor do que o de \mathbf{a} , conforme o módulo de λ seja maior, igual ou menor do que 1. A **Figura 8.13** mostra alguns exemplos de produto de um número por um vetor.

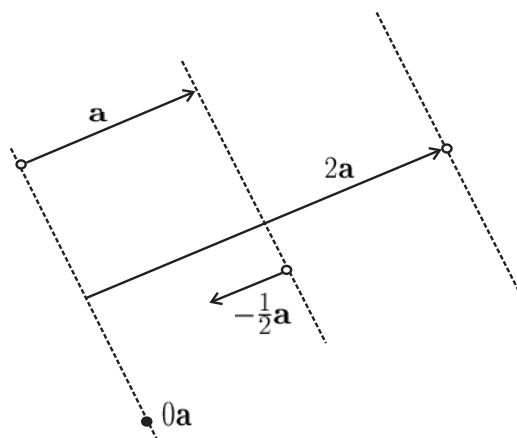


Figura 8.13: Exemplos de produtos de um número por um vetor.

A operação de multiplicação de um número por um vetor tem algumas propriedades notáveis, que passamos a apresentar.

Para quaisquer números λ e μ , e qualquer vetor \mathbf{a} , temos:

$$\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}, \quad (8.7)$$

isto é, multiplicando-se um número por um vetor e o vetor resultante por um segundo número, obtém-se o mesmo resultado que o obtido multiplicando-se o produto dos números pelo vetor. A demonstração dessa propriedade é trivial, embora

tediosa, pois temos de considerar as várias possibilidades dos números envolvidos serem positivos, negativos ou nulos. Experimente fazer a demonstração no caso em que os números são diferentes de zero e de sinais opostos.

Para quaisquer números λ e μ , e qualquer vetor \mathbf{a} , temos:

$$(\lambda + \mu) \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{a} , \quad (8.8)$$

isto é, o produto da soma de dois números por um vetor é igual à soma vetorial dos produtos dos números pelo vetor. Como no caso da propriedade anterior, a demonstração é simples, mas tediosa.

Para qualquer número λ e quaisquer vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , temos:

$$\lambda (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b} , \quad (8.9)$$

isto é, o produto de um número pela soma de dois vetores é a soma vetorial dos produtos do número pelos vetores. A demonstração dessa propriedade é interessante e usa propriedades de semelhança de triângulos.

Na **Figura 8.14** aparecem os triângulos que permitem demonstrar essa propriedade no caso em que λ é positivo. No caso em que λ é negativo, basta inverter na **Figura 8.14** o sentido dos vetores obtidos por uma multiplicação por λ , e no caso em que λ é zero, a demonstração é trivialíssima.

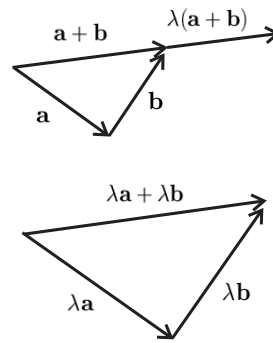


Figura 8.14: Triângulos usados na demonstração de que $\lambda (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}$; as setas $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\lambda (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ têm origem comum.

Para qualquer vetor \mathbf{a} , temos:

$$1 \mathbf{a} = \mathbf{a} . \quad (8.10)$$

Essa propriedade segue de imediato da definição de produto de número por vetor e é tão simples que exige uma explicação do porquê incluí-la entre as propriedades notáveis da operação em estudo. Acontece que ela, com as propriedades (8.7), (8.8), (8.9) e as propriedades (8.1), (8.2), (8.3) e (8.4) da adição vetorial formam

um conjunto de propriedades a partir do qual é possível deduzir toda a álgebra dos vetores, o que é feito na disciplina de Álgebra Linear. Por isso, vale a pena destacar (8.10) como importante, embora aqui não adotemos no estudo dos vetores a abordagem da Álgebra Linear.

Uma outra propriedade que vale a pena mencionar é que o vetor $-\mathbf{a}$, oposto ao vetor \mathbf{a} , pode ser obtido como o produto de -1 por \mathbf{a} , isto é, $-1 \mathbf{a} = -\mathbf{a}$. O aspecto sugestivo dessa igualdade mostra que os símbolos que nela aparecem foram muito bem escolhidos.

Um vetor é chamado **unitário** se o seu módulo é igual a 1 (na unidade de medida que estiver sendo usada), isto é, \mathbf{u} é unitário se, e somente se, $|\mathbf{u}| = 1$. Dado um vetor \mathbf{a} diferente do vetor nulo, o seu módulo $|\mathbf{a}|$ é um número diferente de zero e, portanto, tem um inverso $1/|\mathbf{a}|$. Multiplicando-se esse último número por \mathbf{a} , obtém-se o vetor unitário $(1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$. De fato, usando-se a propriedade (8.6), obtém-se:

$$\left| \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \right| = \left| \frac{1}{|\mathbf{a}|} \right| |\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{a}| = 1. \quad (8.11)$$

Se um número λ é diferente de zero, ele tem um inverso $1/\lambda$. Multiplicando-se esse inverso por um vetor \mathbf{a} , obtém-se um vetor que chamamos de dividido por λ , representado por \mathbf{a}/λ :

Bases e componentes de vetores

Nesta seção, vamos combinar as duas operações com vetores, a adição de vetores e o produto de número por vetor, para obter conceitos e resultados que simplificam imensamente o trabalho com vetores.

Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} dois vetores não-nulos e com direções diferentes. Sejam α e β dois números. Usando tais vetores e números, obtemos o vetor $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Desejamos saber sob quais condições esse vetor é nulo, isto é: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Se $\alpha\mathbf{a}$ e $\beta\mathbf{b}$ não forem ambos nulos, eles serão dois vetores de direções diferentes, pois \mathbf{a} e \mathbf{b} são de direções diferentes. Mas, se $\alpha\mathbf{a}$ e $\beta\mathbf{b}$ são de direções diferentes, então um não pode ser o oposto do outro e a soma deles jamais será zero. Desse modo, para que a equação $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ seja verdadeira, devemos ter $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$ e $\beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Essas duas igualdades exigem que α e β sejam iguais a zero, pois nenhum dos vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} é o vetor nulo. Com essas considerações, chegamos ao resultado enunciado a seguir.

Se \mathbf{a} e \mathbf{b} são dois vetores diferentes de zero e com direções diferentes,

então:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0} \implies \alpha = 0 \quad \text{e} \quad \beta = 0. \quad (8.12)$$

Dizemos que três vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} , diferentes de zero, não são coplanares se as suas setas representativas, escolhidas com origem comum, não ficam todas em um mesmo plano. A **Figura 8.15** mostra um exemplo de três setas representando vetores não coplanares. As setas do par de vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} estão em um plano Π . As setas do par \mathbf{b} e \mathbf{c} estão em um plano Π' diferente de Π e as setas do par \mathbf{a} e \mathbf{c} estão em um terceiro plano Π'' . Cada par de setas está em um plano, mas as três não estão todas em um mesmo plano.

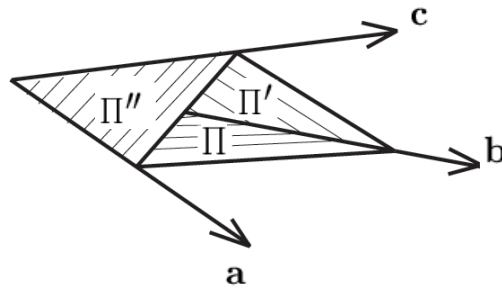


Figura 8.15: Exemplo de três vetores não coplanares.

Sejam α , β e γ três números, com os quais fazemos a seguinte combinação: $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$. Desejamos saber sob quais condições a equação $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}$ é verdadeira. Primeiramente, observemos que essa igualdade exige que $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ e $\gamma \mathbf{c}$ sejam dois vetores nulos. De fato, se $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ e $\gamma \mathbf{c}$ são diferentes de zero, eles são, além disso, dois vetores com direções diferentes, pois $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ está no plano de \mathbf{a} e \mathbf{b} , enquanto $\gamma \mathbf{c}$ está na direção de \mathbf{c} , que não está no plano de \mathbf{a} e \mathbf{b} . Mas dois vetores diferentes de zero e com direções diferentes não podem ter soma zero, o que contraria a igualdade $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Somos então levados a concluir, como dissemos, que $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}$ e $\gamma \mathbf{c}$ são ambos iguais a zero: $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = \mathbf{0}$ e $\gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Dessas duas igualdades, a segunda nos permite concluir, de imediato, que $\gamma = 0$, enquanto a primeira envolve dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} diferentes de zero e com direções diferentes (se tivessem a mesma direção, teríamos \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} em um mesmo plano). Desse modo, a primeira igualdade cai sob as condições da propriedade (8.12), o que nos permite concluir que $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. Consequentemente, concluímos que α , β e γ têm de ser iguais a zero para que tenhamos: $\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Temos, então, o resultado que anunciamos a seguir.

Se \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} são três vetores diferentes de zero e não coplanares, então:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \implies \alpha = 0, \quad \beta = 0 \quad \text{e} \quad \gamma = 0. \quad (8.13)$$

Note que (8.12) é apenas um caso particular dessa propriedade. De fato, basta fazer $\gamma = 0$ em (8.13) para obter (8.12). A propriedade (8.13) será importante no desenvolvimento da teoria dos vetores.

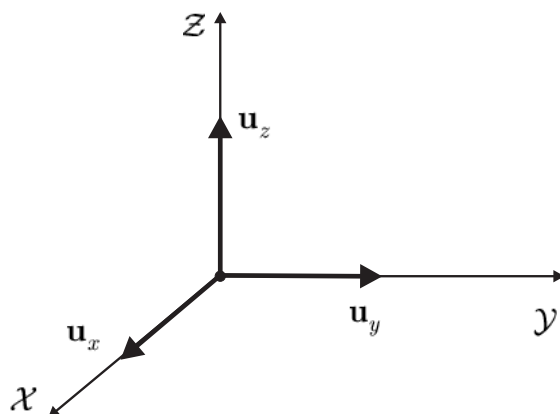
Já dissemos que o vetor nulo tem, por convenção, direção indeterminada. Fazemos agora uma outra convenção: sempre que nos referirmos ao conjunto de vetores que têm uma mesma direção, vamos incluir no conjunto o vetor nulo. Essa convenção é útil porque facilita o enunciado de diversas propriedades; um exemplo vem logo a seguir.

Usando-se apenas a definição de produto de número por vetor, demonstra-se que todos os vetores em uma mesma direção podem ser escritos como múltiplos de um único vetor unitário que tem essa direção. De fato, seja um vetor unitário \mathbf{u} e seja \mathbf{a} um vetor qualquer que tenha a mesma direção que \mathbf{u} . Se \mathbf{a} tem o mesmo sentido de \mathbf{u} , podemos escrever $\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{u}$. Se \mathbf{a} tem sentido oposto ao de \mathbf{u} , escrevemos $\mathbf{a} = -|\mathbf{a}| \mathbf{u}$. Finalmente, se $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, temos $\mathbf{a} = 0 \mathbf{u}$. Em qualquer caso, o vetor \mathbf{a} é um múltiplo de \mathbf{u} . O número que deve multiplicar \mathbf{u} para obter \mathbf{a} é sempre ou o módulo de \mathbf{a} , ou o negativo do módulo de \mathbf{a} . Podemos enunciar esse resultado do modo que segue.

Se \mathbf{a} é um vetor qualquer na direção de um vetor unitário \mathbf{u} , então:

$$\mathbf{a} = \pm |\mathbf{a}| \mathbf{u} . \quad (8.14)$$

Vamos usar agora um sistema de eixos coordenados $\mathcal{O}\mathcal{X}\mathcal{Y}\mathcal{Z}$ e considerar um vetor unitário na direção de cada eixo, com sentido igual ao sentido positivo do eixo. Vamos chamar \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z os vetores unitários com a direção e sentido dos eixos $\mathcal{O}\mathcal{X}$, $\mathcal{O}\mathcal{Y}$ e $\mathcal{O}\mathcal{Z}$, respectivamente, conforme ilustrado na **Figura 8.16**.



Os unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z também são representados, respectivamente, por \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , ou por \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} .

Figura 8.16: Os vetores unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z .

Vamos agora demonstrar que qualquer vetor \mathbf{a} pode ser escrito em termos dos três unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z . Para facilitar a compreensão da demonstração, vamos acompanhá-la considerando o exemplo da **Figura 8.17**.

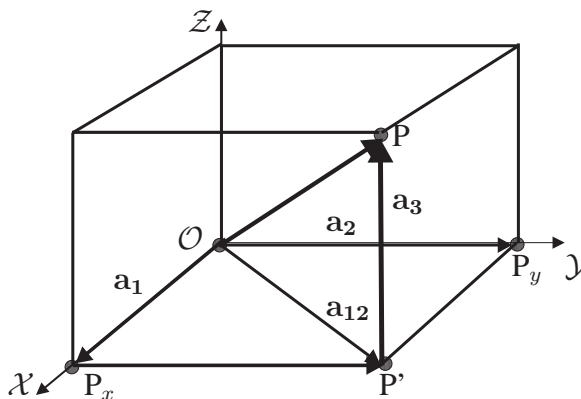


Figura 8.17: Construção geométrica para verificar que o vetor \mathbf{a} pode ser escrito em termos dos vetores unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z .

Seja uma seta representativa de \mathbf{a} com início na origem O do sistema de eixos $Oxyz$. Seja P o ponto final da seta. O vetor \mathbf{a} é então representado pela seta \overrightarrow{OP} . Baixando de P uma perpendicular ao plano Oxy , ela encontra esse plano em um ponto que chamamos P' . Desse ponto P' traçamos uma perpendicular ao eixo Ox , que encontra esse eixo no ponto que chamamos P_x , e uma perpendicular ao eixo Oy , que encontra esse eixo em um ponto que chamamos P_y . Sejam os seguintes vetores: \mathbf{a}_1 associado à seta $\overrightarrow{OP_x}$, \mathbf{a}_2 associado à seta $\overrightarrow{OP_y}$, \mathbf{a}_{12} associado à seta $\overrightarrow{OP'}$ e \mathbf{a}_3 associado à seta $\overrightarrow{P'P}$. Por construção, temos:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{12} + \mathbf{a}_3 \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_{12} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 .$$

Desse modo, podemos escrever:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 . \quad (8.15)$$

Mas \mathbf{a}_1 tem a mesma direção de \mathbf{u}_x e, portanto, é o produto de um número por \mathbf{u}_x . Chamando esse número a_x , temos $\mathbf{a}_1 = a_x \mathbf{u}_x$. Analogamente, \mathbf{a}_2 tem a mesma direção de \mathbf{u}_y , e \mathbf{a}_3 , a mesma direção de \mathbf{u}_z . Portanto, existem números a_y e a_z , tais que $\mathbf{a}_2 = a_y \mathbf{u}_y$ e $\mathbf{a}_3 = a_z \mathbf{u}_z$. Obtemos, pois:

$$\mathbf{a}_1 = a_x \mathbf{u}_x , \quad \mathbf{a}_2 = a_y \mathbf{u}_y \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_3 = a_z \mathbf{u}_z . \quad (8.16)$$

Em virtude da propriedade (8.14), temos então: $a_x = \pm|\mathbf{a}_1|$, $a_y = \pm|\mathbf{a}_2|$ e $a_z = \pm|\mathbf{a}_3|$, mas, no momento, não estamos interessados nessa informação. Usando os resultados (8.16) em (8.15), concluímos que existem números a_x , a_y e a_z , tais que:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z . \quad (8.17)$$

Fica demonstrado, então, que qualquer vetor pode ser escrito em termos dos unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z . Mais do que isso, mostramos com a equação (8.17), que a expressão de um vetor em termos dos unitários é a soma dos produtos de números pelos vetores unitários. Surge naturalmente a questão: será que existe uma outra trinca de números a'_x , a'_y e a'_z tais que o mesmo vetor \mathbf{a} seja escrito como $\mathbf{a} = a'_x \mathbf{u}_x + a'_y \mathbf{u}_y + a'_z \mathbf{u}_z$?

Para responder a essa pergunta, vamos supor, inicialmente, que exista uma outra trinca de números a'_x , a'_y e a'_z , que nos permita escrever:

$$\mathbf{a} = a'_x \mathbf{u}_x + a'_y \mathbf{u}_y + a'_z \mathbf{u}_z. \quad (8.18)$$

Comparando essa expressão com a equação (8.17), escrevemos:

$$a'_x \mathbf{u}_x + a'_y \mathbf{u}_y + a'_z \mathbf{u}_z = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z,$$

donde se conclui que:

$$(a'_x - a_x) \mathbf{u}_x + (a'_y - a_y) \mathbf{u}_y + (a'_z - a_z) \mathbf{u}_z = \mathbf{0}. \quad (8.19)$$

Mas os vetores unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z são diferentes de zero e não são coplanares, pois são todos perpendiculares entre si. Portanto, eles são vetores que gozam da propriedade (8.13). Essa propriedade, aplicada à equação (8.19), nos permite concluir que $(a'_x - a_x) = 0$, $(a'_y - a_y) = 0$ e $(a'_z - a_z) = 0$, isto é,

$$a'_x = a_x, \quad a'_y = a_y \quad \text{e} \quad a'_z = a_z. \quad (8.20)$$

Essas equações mostram que, para cada vetor \mathbf{a} , existe somente uma trinca de números a_x , a_y e a_z capaz de tornar verdadeira a expressão (8.17) para o vetor \mathbf{a} .

Sejam três vetores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 que satisfazem duas propriedades. A primeira é que qualquer vetor \mathbf{a} pode ser escrito em termos de \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 e \mathbf{e}_3 de acordo com a expressão $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$, na qual a_1 , a_2 e a_3 são números. A segunda é que não existe mais do que uma trinca de números a_1 , a_2 e a_3 que permite escrever a citada expressão para \mathbf{a} . Dizemos então que os três vetores formam uma **base** de vetores. Vimos que o conjunto dos vetores \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z satisfazem essas duas propriedades e, portanto, podemos afirmar que eles formam uma base. Esses três vetores são unitários e perpendiculares entre si, embora essas propriedades não sejam necessárias para formar uma base. Quando a base tem essas propriedades suplementares, ela é chamada de base **ortonormal**. Uma base ortonormal, como a constituída pelos vetores \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z , tem a vantagem de facilitar os cálculos, como veremos a seguir.

Chamamos a_x , a_y e a_z de **componentes escalares** do vetor \mathbf{a} na base de vetores \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z . Chamamos a_x de componente escalar de \mathbf{a} ao longo de \mathbf{u}_x ou, simplesmente, de componente x do vetor \mathbf{a} . As componentes a_y e a_z têm denominações análogas.

Quando se estuda pela primeira vez a teoria dos vetores, não é incomum confundir as grandezas que são vetores com as que são números. Uma boa verificação de que estamos alertas para esta questão consiste em distinguir com clareza as componentes escalares das componentes vetoriais de um vetor. Componentes vetoriais de um vetor \mathbf{a} são os vetores que, somados, dão \mathbf{a} . Tomemos como exemplo a própria expressão (8.17): $\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z$. Os vetores $a_x \mathbf{u}_x$ e $a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z$ somados dão \mathbf{a} . Portanto, são duas componentes vetoriais de \mathbf{a} . Também os vetores $a_x \mathbf{u}_x$, $a_y \mathbf{u}_y$ e $a_z \mathbf{u}_z$ somados dão \mathbf{a} , logo, são três componentes vetoriais de \mathbf{a} . Já os números a_x , a_y e a_z são as componentes escalares do vetor \mathbf{a} na base dos vetores \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z . Assim, por exemplo, a_x é uma componente escalar, um número, enquanto $a_x \mathbf{u}_x$ é uma componente vetorial, ou seja, um vetor, dado pelo produto do número a_x pelo vetor \mathbf{u}_x . Uma última palavrinha de alerta quanto a essa questão: é comum fazermos referência às componentes escalares e vetoriais simplesmente como componentes. Nesse caso, pelo contexto, deverá estar claro a qual dos dois tipos de componentes estaremos nos referindo.

O uso de uma base reduz vários cálculos que fazemos com vetores a cálculos com as suas componentes escalares. Isso constitui uma grande vantagem, pois as componentes escalares são números com os quais calculamos com mais facilidade. Vejamos algumas propriedades de vetores descritas em termos de suas componentes na base \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z .

O vetor nulo $\mathbf{0}$ pode ser escrito na base \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z como $\mathbf{0} = 0 \mathbf{u}_x + 0 \mathbf{u}_y + 0 \mathbf{u}_z$, isto é, suas componentes são todas iguais a zero. Como só existe uma trinca de componentes para cada vetor, se tivermos $\mathbf{0} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z$, somos obrigados a concluir que $a_x = 0$, $a_y = 0$ e $a_z = 0$. Temos, então:

$$a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z = \mathbf{0} \quad \Longleftrightarrow \quad a_x = 0 \quad a_y = 0 \quad \text{e} \quad a_z = 0, \quad (8.21)$$

isto é,

um vetor é nulo se, e somente se, suas componentes são iguais a zero.

Sejam dois vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} que têm as seguintes expressões em termos da base \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z :

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = b_x \mathbf{u}_x + b_y \mathbf{u}_y + b_z \mathbf{u}_z. \quad (8.22)$$

A igualdade desses vetores é equivalente à equação:

$$a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z = b_x \mathbf{u}_x + b_y \mathbf{u}_y + b_z \mathbf{u}_z ,$$

da qual obtemos:

$$(a_x - b_x) \mathbf{u}_x + (a_y - b_y) \mathbf{u}_y + (a_z - b_z) \mathbf{u}_z = \mathbf{0} .$$

Usando nessa igualdade a propriedade (8.21), obtemos: $a_x - b_x = 0$, $a_y - b_y = 0$ e $a_z - b_z = 0$, isto é, $a_x = b_x$, $a_y = b_y$ e $a_z = b_z$. Temos, pois, a propriedade:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \iff a_x = b_x , \ a_y = b_y \text{ e } a_z = b_z , \quad (8.23)$$

que pode ser enunciada da seguinte forma:

dois vetores são iguais se, e somente se, suas respectivas componentes forem iguais.

Também temos as propriedades que seguem e cujas demonstrações serão deixadas como exercícios para você fazer.

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \iff a_x = b_x + c_x , \ a_y = b_y + c_y \text{ e } a_z = b_z + c_z , \quad (8.24)$$

isto é,

cada componente da soma de dois vetores é igual à soma das respectivas componentes dos vetores.

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} \iff a_x = \lambda b_x , \ a_y = \lambda b_y \text{ e } a_z = \lambda b_z , \quad (8.25)$$

isto é,

cada componente do produto de um número por um vetor é igual ao produto do número pela respectiva componente do vetor.

Devemos apreciar a importância do conceito de base. Existem infinitos vetores, mas todos eles podem ser escritos em termos de apenas três vetores, os vetores da base. Para isso, basta saber como encontrar as componentes de um vetor qualquer na base que se está usando. Vamos aprender como fazer isso, no caso de uma base ortonormal, na seção seguinte.

Projeções e componentes de um vetor

Sejam \mathbf{a} e \mathbf{b} dois vetores diferentes de zero. Desenhando setas representativas de \mathbf{a} e \mathbf{b} com a mesma origem, podemos determinar o ângulo θ entre as setas, que satisfaz a condição $0 \leq \theta \leq \pi$. Esse ângulo é chamado de **ângulo entre os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b}** .

Seja \mathbf{a} um vetor diferente de zero, \mathbf{u} um vetor unitário e θ o ângulo entre eles. Definimos **projeção** do vetor \mathbf{a} , ao longo do unitário \mathbf{u} , como sendo o número dado pelo produto do módulo do vetor \mathbf{a} pelo cosseno do ângulo entre os vetores. Representando essa projeção por $\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{a}$, temos:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \theta. \quad (8.26)$$

No caso em que $0 \leq \theta < \pi/2$, a projeção de \mathbf{a} , ao longo do unitário \mathbf{u} , é um número positivo e, no caso em que $\pi/2 < \theta \leq \pi$, um número negativo. Se \mathbf{a} é perpendicular a \mathbf{u} , a projeção é nula; se \mathbf{a} é paralelo a \mathbf{u} a projeção é $|\mathbf{a}|$ ou $-|\mathbf{a}|$, conforme \mathbf{a} tenha o mesmo sentido de \mathbf{u} ou sentido oposto a \mathbf{u} , respectivamente.

A **Figura 8.18** ilustra um caso em que $0 < \theta < \pi/2$, com as setas de \mathbf{a} e \mathbf{u} desenhadas a partir de uma origem comum, que chamamos O . Seja r a reta suporte da seta representativa de \mathbf{u} e P o ponto final da seta representativa de \mathbf{a} . Uma perpendicular à reta r , baixada de P , encontra r em um ponto P' , formando um triângulo retângulo OPP' . Esse triângulo tem um cateto OP' , cujo comprimento será representado por $\overline{OP'}$, e uma hipotenusa OP , cujo comprimento será representado por \overline{OP} ; o comprimento da hipotenusa é o módulo de \mathbf{a} , isto é, $\overline{OP} = |\mathbf{a}|$. Pela definição de cosseno, temos $\overline{OP} \cos \theta = \overline{OP'}$, isto é, $|\mathbf{a}| \cos \theta = \overline{OP'}$. Usando nessa igualdade a definição de projeção (8.26), obtemos $\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{a} = \overline{OP'}$. Esse resultado é válido no caso $0 < \theta < \pi/2$, mas também pode ser usado nos casos em que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$, como é fácil de se verificar. Já no caso em que $\pi/2 < \theta \leq \pi$, obtemos $\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{a} = -\overline{OP'}$. Isto é, a projeção do vetor \mathbf{a} , ao longo do unitário \mathbf{u} , é dada por:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{a} = \begin{cases} +\overline{OP'}, & \text{se } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\overline{OP'}, & \text{se } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases} \quad (8.27)$$

onde $\overline{OP'}$ é o comprimento do cateto obtido pela construção geométrica que usamos acima: é o segmento de reta com uma extremidade na origem comum das setas representativas de \mathbf{a} e \mathbf{u} , e a outra extremidade no pé da perpendicular baixada do ponto final da seta de \mathbf{a} até a reta suporte de \mathbf{u} .

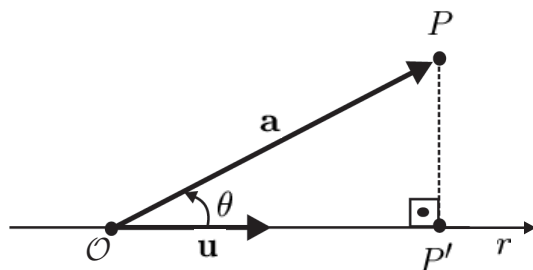


Figura 8.18: Vetor \mathbf{a} , vetor unitário \mathbf{u} e o ângulo θ entre eles.

Seja agora a seta $\overrightarrow{OP'}$, e chamemos de \mathbf{a}' o vetor a ela associado. A **Figura 8.19** mostra os vetores \mathbf{a} , \mathbf{u} e \mathbf{a}' no caso em que $0 < \theta < \pi/2$.

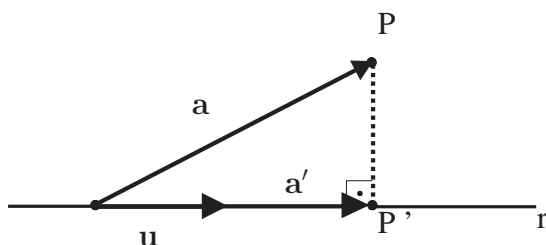


Figura 8.19: Os três vetores desenhados com a mesma origem O : \mathbf{a} , \mathbf{u} e \mathbf{a}' , ilustrando a projeção de \mathbf{a} ao longo de \mathbf{u} .

Usando apenas a definição de produto de um número por um vetor, você pode verificar que, no caso em que $0 \leq \theta \leq \pi/2$, temos $\mathbf{a}' = \overline{OP'} \mathbf{u}$. Já no caso em que $\pi/2 < \theta \leq \pi$, temos $\mathbf{a}' = -\overline{OP'} \mathbf{u}$. Então, de acordo com o resultado (8.27), obtemos, em qualquer caso, a relação $\mathbf{a}' = (\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{a}) \mathbf{u}$. Substituindo nessa igualdade a definição de projeção (8.26), obtemos o resultado:

$$\mathbf{a}' = (|\mathbf{a}| \cos \theta) \mathbf{u}. \quad (8.28)$$

Antes de continuarmos nosso raciocínio, é necessário fazer uma observação. Nas considerações anteriores, supusemos que o vetor genérico \mathbf{a} não fosse o vetor nulo. Isso porque não podemos definir o ângulo entre um vetor nulo e o unitário \mathbf{u} ao longo do qual fazemos a projeção. Entretanto, podemos convencionar que a projeção do vetor nulo, ao longo de qualquer unitário \mathbf{u} , é o número zero. Escrevemos: $\text{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{0} = 0$. Com essa convenção, podemos estender as fórmulas anteriores para abranger o caso em que $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, desde que façamos, quando necessário, ressalvas ditadas pelo bom senso.

Vamos agora aplicar o resultado (8.28) aos vetores unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z , que formam uma base ortonormal. Consideremos a **Figura 8.20**, que mostra a

mesma situação da **Figura 8.17**, mas exibe agora os ângulos θ_x , θ_y e θ_z entre \mathbf{a} e, respectivamente, \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z .

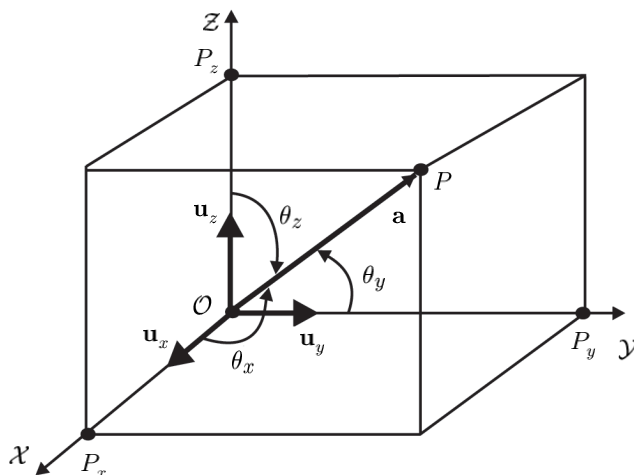


Figura 8.20: Vetor \mathbf{a} , unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z e os ângulos θ_x , θ_y e θ_z .

Uma vez que P_x é o pé da perpendicular baixada de P até o eixo \mathcal{OX} , podemos usar o resultado (8.28) para concluir que $\mathbf{a}_1 = (|\mathbf{a}| \cos \theta_x) \mathbf{u}_x$. Além disso, P_y e P_z são os pés das perpendiculares baixadas de P até os eixos \mathcal{OY} e \mathcal{OZ} , respectivamente. Conseqüentemente, usando (8.28), obtemos $\mathbf{a}_2 = (|\mathbf{a}| \cos \theta_y) \mathbf{u}_y$ e $\mathbf{a}_3 = (|\mathbf{a}| \cos \theta_z) \mathbf{u}_z$. Ou seja,

$$\mathbf{a}_1 = (|\mathbf{a}| \cos \theta_x) \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{a}_2 = (|\mathbf{a}| \cos \theta_y) \mathbf{u}_y \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_3 = (|\mathbf{a}| \cos \theta_z) \mathbf{u}_z. \quad (8.29)$$

Já havíamos concluído em (8.15) que $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$. Usando nessa equação os resultados (8.29), chegamos a

$$\mathbf{a} = (|\mathbf{a}| \cos \theta_x) \mathbf{u}_x + (|\mathbf{a}| \cos \theta_y) \mathbf{u}_y + (|\mathbf{a}| \cos \theta_z) \mathbf{u}_z. \quad (8.30)$$

Comparando essa expressão com (8.17), obtemos

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos \theta_x, \quad a_y = |\mathbf{a}| \cos \theta_y \quad \text{e} \quad a_z = |\mathbf{a}| \cos \theta_z, \quad (8.31)$$

ou seja,

a componente de um vetor ao longo de um unitário de uma base ortonormal é a projeção do vetor ao longo do unitário.

De acordo com (8.24), temos $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c} \Rightarrow a_x = b_x + c_x$, isto é, a projeção da soma de dois vetores, ao longo do unitário \mathbf{u}_x , é igual à soma das projeções

dos vetores ao longo do mesmo unitário. É claro que propriedades análogas são válidas para as projeções ao longo dos unitários \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z . Na verdade, dado um unitário \mathbf{u} qualquer, é sempre possível escolher um sistema de eixos que tenha o eixo \mathcal{OX} na direção e sentido de \mathbf{u} , de modo que tenhamos $\mathbf{u}_x = \mathbf{u}$. Desse modo, a propriedade enunciada acima para o unitário \mathbf{u}_x se mostra como uma propriedade de qualquer unitário \mathbf{u} .

A projeção da soma de dois vetores, ao longo de um unitário \mathbf{u} , é igual à soma das projeções dos vetores ao longo do mesmo unitário:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{b} + \text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{c} . \quad (8.32)$$

De acordo com (8.25), temos $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b} \Rightarrow a_x = \lambda b_x$, isto é, a projeção do produto de um número por um vetor, ao longo do unitário \mathbf{u}_x , é igual ao produto no número pela projeção do vetor ao longo do mesmo unitário. Também nesse caso não há nada de especial no unitário \mathbf{u}_x . Podemos estender essa propriedade para qualquer unitário \mathbf{u} .

A projeção do produto de um número por um vetor, ao longo de um unitário \mathbf{u} , é igual ao produto do número pela projeção do vetor ao longo do mesmo unitário:

$$\text{proj}_{\mathbf{u}}(\lambda \mathbf{b}) = \lambda \text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{b} . \quad (8.33)$$

É muito comum a situação na qual todos os vetores de um problema estão em um mesmo plano. Podemos então escolher dois dos eixos coordenados \mathcal{OXY} nesse plano, por exemplo, os eixos \mathcal{OX} e \mathcal{OY} . Nesse caso, o eixo \mathcal{OZ} é perpendicular ao plano no qual estão os vetores do problema e, conseqüentemente, nenhum deles tem componente ao longo do unitário \mathbf{u}_z . Qualquer vetor \mathbf{a} do plano pode então ser escrito como

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y , \quad (8.34)$$

com as componentes dadas por

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos \theta_x \quad \text{e} \quad a_y = |\mathbf{a}| \cos \theta_y , \quad (8.35)$$

onde os ângulos θ_x e θ_y estão indicados na **Figura 8.21**.

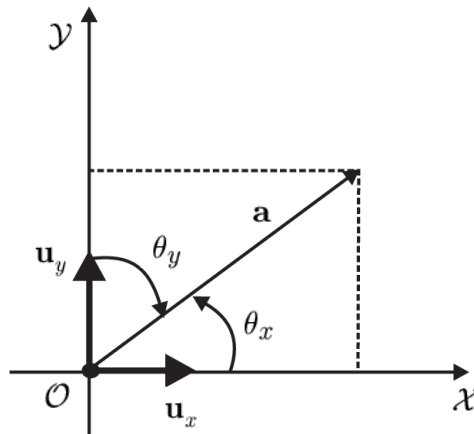


Figura 8.21: Vetor \mathbf{a} no plano \mathcal{OXY} .

Nesse caso, em que os ângulos θ_x e θ_y estão em um mesmo plano, se o vetor \mathbf{a} estiver no primeiro quadrante, o ângulo θ_x é menor ou igual a um ângulo reto. Conseqüentemente, $\theta_y = (\pi/2) - \theta_x$ e, portanto, $\cos \theta_y = \sin \theta_x$. Nesse caso, podemos usar apenas o ângulo θ_x que o vetor faz com o eixo \mathcal{OX} para obter as duas componentes em (8.35), $a_x = |\mathbf{a}| \cos \theta_x$ e $a_y = |\mathbf{a}| \sin \theta_x$. Mesmo se não houver a restrição de que o vetor \mathbf{a} , que está no plano \mathcal{OXY} , se encontra no primeiro quadrante, é possível usar um único ângulo para obter as duas componentes (8.35). Para isso, devemos usar o conceito de ângulo trigonométrico. Sabemos que o ângulo trigonométrico é um ângulo no plano \mathcal{OXY} medido a partir do eixo \mathcal{OX} . Ele pode ter qualquer valor positivo ou negativo além do valor nulo. Considere um vetor \mathbf{a} com ponto inicial na origem \mathcal{O} e apontando na direção e sentido do eixo \mathcal{OX} . Nesse caso o ângulo trigonométrico θ que \mathbf{a} faz com o eixo \mathcal{OX} é nulo, $\theta = 0$. Se o vetor começa a girar em torno da origem no sentido anti-horário, o ângulo trigonométrico passa a ter valores positivos. À medida que o vetor vai girando ele vai crescendo e passa pelos valores $\pi/2$, π , $3\pi/2$ e chega em 2π , quando o vetor completa uma volta. Se o vetor continuar a girar no sentido anti-horário o ângulo θ continua a aumentar e passará pelos valores $2\pi + \pi/2$, 3π e todos os valores positivos que quisermos considerar. Analogamente, se o vetor inicialmente alinhado com o eixo \mathcal{OX} começasse a girar no sentido horário, o ângulo trigonométrico sairia do valor $\theta = 0$ e passaria a assumir valores negativos de módulo cada vez maior, $-\pi/2$, $-\pi$, $-3\pi/2$, -2π , etc.

Se o vetor \mathbf{a} tem uma direção e um sentido qualquer no plano \mathcal{OXY} , podemos sempre definir para ele um ângulo trigonométrico θ , que ele faz com o eixo \mathcal{OX} . É fácil verificar que usando esse ângulo podemos obter as componentes (8.35) pelas fórmulas

$$a_x = |\mathbf{a}| \cos \theta \quad \text{e} \quad a_y = |\mathbf{a}| \sin \theta . \quad (8.36)$$

Com essas fórmulas encontramos as componentes do vetor ao longo dos unitários \mathbf{u}_x e \mathbf{u}_y , usando apenas o módulo do vetor e um ângulo, o ângulo trigonométrico θ que ele faz com o eixo \mathcal{OX} . É importante distinguir o ângulo trigonométrico, que pode ter quaisquer valores positivos ou negativos, do ângulo entre dois vetores, que foi definido como positivo e com valores maiores ou iguais a 0 e menores ou iguais a π . Cada um desses conceitos de ângulo tem a sua utilidade.

É possível também encontrar o módulo e um ângulo trigonométrico para o vetor quando conhecemos as componentes. Para isso, temos as fórmulas

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{a_y}{a_x} . \quad (8.37)$$

Note que para encontrar o ângulo θ devemos, primeiramente, usar a função inversa da função tg , para determinar $\arctg(a_y/a_x)$. Em segundo lugar, devemos usar os sinais de a_x e a_y para determinar em qual quadrante se encontra o ângulo θ .

Terminamos esta aula com uma observação de caráter prático. Temos procurado distinguir o conceito de vetor do conceito de seta. Para cada vetor há uma infinidade de setas que o representam e é o conjunto de todas elas que define o vetor. Entretanto, seguiremos doravante a prática comum de se referir a uma seta como sendo o vetor a ela associado, e vice-versa. Se os conceitos estão bem assentados, não haverá confusão por usar essa linguagem simplificada.

Resumo

Nesta aula, introduzimos o conceito de segmento de reta orientado, ou simplesmente seta, a partir do conceito de deslocamento. Para caracterizar uma seta, você aprendeu que é necessário dar o seu módulo, a sua direção e o seu sentido, além de sua localização no espaço, dada, por exemplo, pelo ponto inicial da seta. Você aprendeu que o vetor associado a uma dada seta corresponde ao conjunto de todas as setas equipolentes a ela. Aprendeu a somar vetores, a multiplicá-los por números e a subtrair um vetor de outro. Verificou ainda várias propriedades importantes que certas operações com vetores possuem. Finalmente, você aprendeu o conceito de base de vetores e de projeção de um vetor ao longo de um vetor unitário. Todos esses conceitos serão fundamentais no estudo da mecânica da partícula.

Questionário

1. O que é um segmento de reta orientado?
2. Defina módulo, direção e sentido de uma seta \overrightarrow{AB} , onde A e B são dois pontos distintos do espaço.
3. O que são setas equipolentes?
4. Verifique se a relação de equipolência entre setas satisfaz as três propriedades abaixo:
 - (a) Reflexividade (uma seta é equipolente a ela mesma).
 - (b) Simetria (se uma seta a for equipolente a uma seta b , a seta b será equipolente à seta a).
 - (c) Transitividade (se uma seta a for equipolente a uma seta b e esta, por sua vez, for equipolente a uma seta c , a seta a será equipolente à seta c).

OBS: Toda relação que obedece a essas três propriedades é chamada de uma relação de equivalência.

5. O que vem a ser o vetor associado à seta \overrightarrow{AB} ?
6. Defina seta nula e vetor nulo. Defina vetor oposto a um vetor v .
7. Explique as seguintes propriedades da adição vetorial: comutatividade e associatividade.
8. Explique a regra do paralelogramo para somar vetores.
9. Qual é a condição para que $\lambda \mathbf{u} + \delta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{w} = \mathbf{0}$, sabendo que λ , δ e γ são números e \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} são vetores não-nulos e não coplanares?
10. Defina projeção de um vetor ao longo de um vetor unitário.

Problemas propostos

1. Considere um relógio comum de ponteiros, cujos números indicativos das horas estejam dispostos num círculo em torno de um ponto central, por onde passa o eixo de rotação dos ponteiros das horas, minutos e segundos. Desenhe a parte da frente deste relógio num papel, isto é, desenhe os números

de 1 a 12 formando um círculo, e para responder aos itens abaixo, você só deverá utilizar setas cujos pontos iniciais e finais estejam nos números de 1 a 12.

- (a) Desenhe dois pares de setas equipolentes.
 - (b) Desenhe setas opostas.
 - (c) Desenhe setas de mesmo módulo, mas de direções diferentes.
 - (d) Desenhe setas de mesma direção, mas de módulos diferentes.
2. Trace dois eixos perpendiculares entre si numa folha de papel e denote-os por eixos norte-sul (eixo vertical, com o norte para cima) e leste-oeste (eixo horizontal, com o leste para a direita). Nos quatro primeiros itens, desenhe uma seta com ponto inicial na origem (interseção dos eixos) tal que:
- (a) sua direção faça um ângulo de 30 graus com o eixo horizontal no sentido anti-horário, seu módulo seja 5cm e seu sentido, o nordeste.
 - (b) sua direção faça um ângulo de 135 graus com o eixo horizontal no sentido anti-horário, seu módulo seja 5cm e seu sentido, o noroeste.
 - (c) sua direção faça um ângulo de 210 graus com o eixo horizontal no sentido anti-horário, seu módulo seja 5cm e seu sentido, o sudoeste.
 - (d) sua direção faça um ângulo de 315 graus com o eixo horizontal no sentido anti-horário, seu módulo seja 10cm e seu sentido, o sudeste.
 - (e) Quais, dentre as quatro setas que você acabou de desenhar, são opostas entre si?
 - (f) Escreva a seta desenhada no segundo item como um número vezes a seta desenhada no último item.
3. Demonstre as propriedades (8.24) e (8.25) enunciadas no texto.
4. Considere o vetor unitário $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y}{\sqrt{2}}$ e os vetores:

$$\mathbf{v} = 10\mathbf{u}_y \quad ; \quad \mathbf{w} = -5 \left(\frac{\mathbf{u}_y - \mathbf{u}_x}{\sqrt{2}} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{h} = -10\mathbf{u}_x .$$

Calcule as respectivas projeções de \mathbf{v} , \mathbf{w} e \mathbf{h} ao longo do vetor unitário \mathbf{u} (**sugestão:** desenhe os vetores no plano \mathcal{OXY} e identifique os ângulos relevantes na solução do problema).

5. Considere as quatro setas desenhadas no problema 2. Determine as projeções de cada uma delas ao longo dos vetores unitários \mathbf{u}_x (relativo ao eixo leste-oeste) e \mathbf{u}_y (relativo ao eixo norte-sul).
6. Considere o vetor $\mathbf{v} = 3\mathbf{u}_x + 4\mathbf{u}_y + 5\mathbf{u}_z$. Calcule o módulo de \mathbf{v} e os ângulos que esse vetor faz, respectivamente, com os vetores unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z .
7. Considere um hexágono cujos lados medem 1cm cada. Seus vértices estão localizados, respectivamente, nos pontos A, B, C, D, E , e F . Escolhemos os eixos cartesianos de forma que o hexágono esteja no plano \mathcal{OXY} , tenha um de seus lados (o lado AB) sobre o eixo \mathcal{OX} e a origem coincida com o ponto A , como ilustra a **Figura 8.22**.

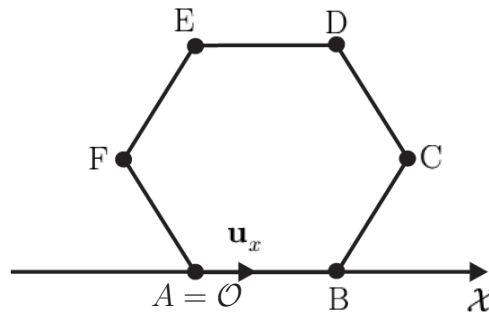


Figura 8.22: Hexágono.

Por conveniência, vamos denotar os vetores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{DE} , \overrightarrow{EF} e \overrightarrow{FA} por \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , \mathbf{e} e \mathbf{f} respectivamente.

- (a) Desenhe os vetores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ e $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d}$.
 - (b) Calcule as projeções ao longo do vetor unitário \mathbf{u}_x dos vetores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} , \mathbf{e} e \mathbf{f} .
 - (c) Desenhe os vetores \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE} e a diferença $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$. Calcule o módulo dessa diferença.
 - (d) Calcule os módulos dos vetores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.
8. Considere os vetores:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_z}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z}{\sqrt{2}} .$$

- (a) Demonstre que os vetores \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 formam uma base para os vetores do espaço tridimensional.

- (b) Calcule as projeções de cada um dos vetores \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z ao longo dos vetores unitários \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 e \mathbf{u}_3 .

Sugestão: Basta expressar os antigos vetores unitários em termos dos novos e o problema já estará resolvido.

Auto-avaliação

Em princípio, você deve ser capaz de responder a todo o questionário e resolver todos os problemas propostos, pois nesta aula tratamos de um tópico com o qual, presumivelmente, você já adquiriu alguma familiaridade durante o seu curso do ensino médio (vetores). Caso você encontre dificuldade em mais de vinte por cento das questões e problemas, não passe para a próxima aula, pois nela você terá de utilizar os conceitos aqui aprendidos para definir quantidades muito importantes na descrição do movimento. Grandezas como posição, velocidade e aceleração de uma partícula são descritas convenientemente a partir do conceito de vetor e se as propriedades dos vetores não estiverem bem compreendidas, o seu estudo de cinemática vetorial estará, desde já, comprometido.

Aula 9 – Cinemática vetorial

Objetivo

- Desenvolver a cinemática de um movimento geral, não necessariamente retilíneo, usando o conceito de vetor.

Introdução

Nesta aula, aplicamos o conceito de vetor para apresentar a cinemática da partícula. A aula anterior, sobre vetores, deve estar bem entendida para começarmos esta. Pelo que nela você aprendeu, você certamente já será capaz de perceber que o conceito de vetor é perfeito para descrever deslocamentos. Você verá, a seguir, que os vetores também são um meio excelente de descrever as demais grandezas cinemáticas como posição, velocidade e aceleração. Nesta seção, é inevitável o uso do conceito de derivada, com o qual agora você já deve estar acostumado. A seção *Derivadas e integrais* da aula 5 pode ser útil para recordar noções elementares sobre esses dois tópicos.

Os conceitos de cinemática aqui apresentados são necessários para a dinâmica que estudaremos no Módulo II. São conceitos capazes de descrever completamente qualquer movimento de uma partícula. Não devemos nos esquecer que foram necessários dois mil anos de reflexões e investigações, envolvendo algumas das maiores inteligências da humanidade, para chegar a esses conceitos cinemáticos que hoje usamos apenas como um preâmbulo da dinâmica.

Conceitos vetoriais de posição e deslocamento

Considere uma partícula em um ponto P , com coordenadas x , y e z em relação a um sistema de eixos \mathcal{OXYZ} , tal como indicado na **Figura 9.1**. Essas coordenadas especificam a posição da partícula em relação ao sistema de eixos. Considere agora o vetor \mathbf{r} , cuja extremidade final está em P quando a extremidade inicial está na origem \mathcal{O} do sistema de eixos. A direção desse vetor é a da reta que passa pela origem \mathcal{O} e pela posição da partícula. Seu módulo é a distância entre a partícula e a origem \mathcal{O} . Seu sentido é da origem \mathcal{O} para a posição da partícula. Vemos então que um sistema de eixos \mathcal{OXYZ} e uma posição da partícula especificam um único vetor \mathbf{r} , que vai da origem do sistema até a posição da partícula. A recíproca também é verdadeira, isto é, dado o vetor \mathbf{r} , com sua direção, seu módulo e seu sentido, a posição da partícula fica univocamente determinada. Colocando-se o ponto inicial do vetor na origem \mathcal{O} , a sua

extremidade final determina exatamente a posição da partícula. Esse vetor \mathbf{r} , que vai da origem \mathcal{O} do sistema de eixos \mathcal{OXYZ} até a posição da partícula, é chamado **vetor posição** da partícula em relação ao sistema de eixos \mathcal{OXYZ} . Desse modo, o vetor posição é um vetor que determina a posição da partícula. Devido a esse fato, muitas vezes nos referimos ao vetor posição como sendo a posição da partícula, ao invés de dizer que ele determina a posição da partícula.

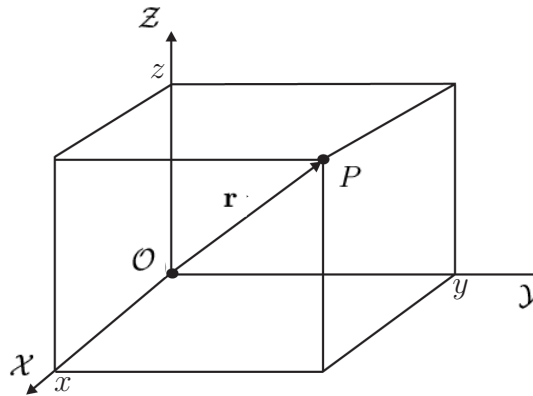


Figura 9.1: Vetor posição de uma partícula de coordenadas x , y e z .

Para determinar a posição de uma partícula no espaço, em relação a um sistema de eixos \mathcal{OXYZ} , usamos as coordenadas x , y e z da partícula em relação ao sistema de eixos. Agora temos uma outra opção: podemos determinar a posição da partícula em relação a um sistema de eixos \mathcal{OXYZ} , usando o vetor posição \mathbf{r} da partícula em relação a este sistema. As duas opções são equivalentes: ou usamos os três números x , y e z ou um único vetor \mathbf{r} . Nos dois casos, a posição da partícula fica perfeitamente determinada, embora o vetor posição permita uma descrição de seu movimento mais geométrica e intuitiva, e além disso, mais poderosa matematicamente.

Sejam agora os unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z do sistema de eixos \mathcal{OXYZ} . Como fica claro pela **Figura 9.1**, as componentes do vetor posição \mathbf{r} ao longo dos unitários são exatamente as respectivas coordenadas da partícula:

$$r_x = x, \quad r_y = y \quad \text{e} \quad r_z = z, \quad (9.1)$$

de modo que

$$\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z. \quad (9.2)$$

Essa propriedade é tão fundamental que podemos até adotá-la como definição de vetor posição:

vetor posição de uma partícula, em relação a um sistema de eixos coordenados, é o vetor cujas componentes ao longo dos eixos são as respectivas coordenadas da partícula em relação ao sistema de eixos.

O movimento de uma partícula é descrito pela funções-movimento f_x , f_y e f_z , que determinam quais são as coordenadas x , y e z da partícula em cada instante t do movimento. Temos:

$$\begin{cases} x = f_x(t), \\ y = f_y(t), \\ z = f_z(t). \end{cases} \quad (9.3)$$

Usando essas expressões em (9.2), obtemos:

$$\mathbf{r} = f_x(t) \mathbf{u}_x + f_y(t) \mathbf{u}_y + f_z(t) \mathbf{u}_z. \quad (9.4)$$

Essa equação nos mostra que, a cada instante t do movimento, as funções-movimento fazem corresponder uma única trinca de componentes para o vetor posição \mathbf{r} , que com isso fica univocamente determinado. Ou seja, a cada instante t do movimento corresponde um único vetor posição \mathbf{r} . Isso significa que existe uma função que vamos chamar de f , que associa a cada instante t do movimento, um único vetor posição \mathbf{r} . Dizemos que o vetor posição é uma função do tempo, e escrevemos:

$$\mathbf{r} = f(t). \quad (9.5)$$

Essa função f determina o movimento da partícula porque dá a cada instante t o vetor posição da partícula, ou seja, ela dá a cada instante a posição em que a partícula se encontra. Portanto, essa única função f desempenha o mesmo papel que as três funções-movimento f_x , f_y e f_z . Chamamos f de **função-movimento vetorial**. Ela é chamada de vetorial porque o seu valor, em cada instante t , é um vetor, o vetor \mathbf{r} . Já os valores das funções f_x , f_y e f_z , em cada instante t , são números e não vetores. Podemos dizer que as funções f_x , f_y e f_z são numéricas, enquanto a função f é vetorial. À medida que o tempo passa, a função-movimento vai assumindo os seus valores, que são as posições pelas quais a partícula vai passando durante o seu movimento. Nesse processo, se o ponto inicial do vetor posição permanece fixo na origem do sistema de eixos coordenados, o ponto final vai traçando uma curva, denominada trajetória da partícula.

A **Figura 9.2** mostra os vetores posições de uma partícula em três instantes diferentes. Essa figura também mostra a trajetória da partícula em movimento.

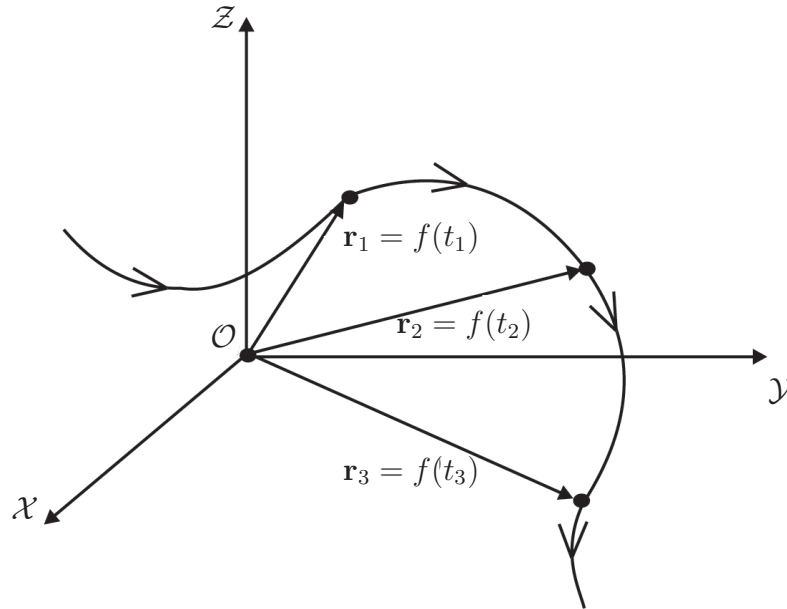


Figura 9.2: Três valores da função-movimento f , nos instantes t_1 , t_2 e t_3 .

Agora é um bom momento para você aprender algo importante sobre os conceitos físicos. Alguns conceitos são bons para descrever situações bem concretas e resolver problemas específicos de Física, como os problemas propostos nos finais de nossas aulas. Em contrapartida, esses conceitos podem não ser apropriados para discutir as idéias mais básicas da Física, aquelas idéias com as quais você vai desenvolvendo as teorias. Existem também outros conceitos que são bons exatamente para discutir tais idéias, mas podem não ser apropriados para resolver problemas específicos. Pois bem, o conceito de função-movimento vetorial é desse segundo tipo. Ele é útil para desenvolver a teoria sobre o movimento espacial de uma partícula, mas dificilmente você irá usá-lo na solução de um problema. Na hora de resolver problemas, ou dar exemplos de movimentos, como fizemos na aula 2, usaremos freqüentemente as funções-movimento f_x , f_y e f_z escritas em (69), e não a função-movimento vetorial (9.5). Portanto, não se preocupe em como utilizar a função-movimento vetorial em problemas. Apenas entenda que ela é a função que especifica o movimento e aproveite essa idéia para entender o resto da teoria.

Consideremos agora uma partícula que em seu movimento passe por um ponto P_1 e por um ponto P_2 , como exemplificado na **Figura 9.3**. O **vetor deslocamento** da partícula, de P_1 até P_2 , é o vetor definido pela seta com ponto

inicial P_1 e ponto final P_2 . Esse vetor também é chamado **deslocamento vetorial** da partícula. Seja \mathbf{r}_1 o vetor posição da partícula quando ela está em P_1 , \mathbf{r}_2 o vetor posição da partícula quando ela está em P_2 e \mathbf{d} o vetor deslocamento da partícula ao passar de P_1 para P_2 . É claro pela **Figura 9.3** que o vetor deslocamento da partícula de uma posição a outra é igual à diferença entre o vetor posição na posição final e o vetor posição na posição inicial: $\mathbf{d} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Dito de outro modo:

o vetor deslocamento de uma partícula de um ponto a outro é igual à variação do vetor posição entre esses dois pontos.

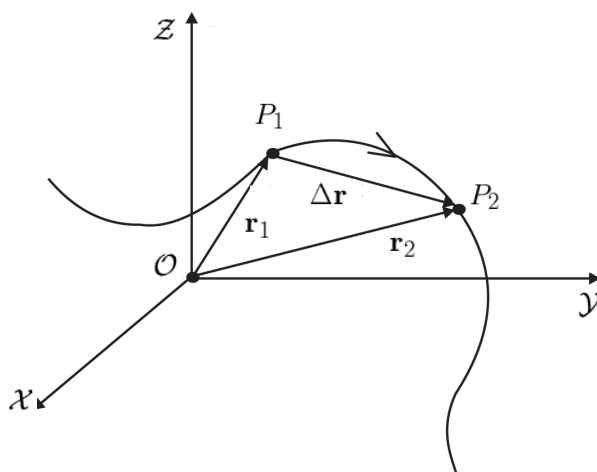


Figura 9.3: Vetor deslocamento de P_1 para P_2 .

Devido a essa propriedade, é comum representar o vetor deslocamento de uma partícula pelo símbolo $\Delta \mathbf{r}$, indicando ser o vetor deslocamento uma variação do vetor posição. Desse modo, em uma fórmula como:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad (9.6)$$

entendemos que $\Delta \mathbf{r}$ como sendo deslocamento vetorial que a partícula sofre ao passar da posição \mathbf{r}_1 para a posição \mathbf{r}_2 .

Note que o deslocamento vetorial de um ponto P_1 até um ponto P_2 é uma informação geralmente muito pobre sobre o movimento da partícula entre esses dois pontos. De fato, qualquer que tenha sido a trajetória seguida pela partícula, o seu deslocamento entre essas duas posições terá sido sempre o mesmo. No entanto, o conceito de deslocamento é útil pelas informações que dá sobre o movimento e, principalmente, porque a partir dele chegamos a conceitos mais apropriados e convenientes para a descrição do movimento.

Suponhamos que uma partícula passe por um ponto P_1 em um instante t_1 , e por um ponto P_2 em um instante t_2 . O deslocamento vetorial da partícula de P_1 até P_2 também é chamado deslocamento vetorial no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ e é representado por $\Delta \mathbf{r}[t_1, t_2]$. Se conhecemos o movimento da partícula, podemos determinar o seu deslocamento vetorial em qualquer intervalo de tempo. Suponhamos que tal movimento seja dado por uma função-movimento vetorial f , como na equação (9.5). Se no instante t_1 a partícula tem a posição \mathbf{r}_1 , dada por $\mathbf{r}_1 = f(t_1)$, e no instante t_2 ela tem a posição \mathbf{r}_2 , dada por $\mathbf{r}_2 = f(t_2)$, então o deslocamento vetorial da partícula no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é dado por

$$\Delta \mathbf{r}[t_1, t_2] = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = f(t_2) - f(t_1) . \quad (9.7)$$

O deslocamento vetorial $\Delta \mathbf{r}[t_1, t_2]$ pode ser representado simplesmente por $\Delta \mathbf{r}$, se estiver claro pelo contexto qual é o intervalo de tempo em que ele está sendo considerado.

Sejam agora dois vetores posições dados por

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{u}_x + y_1 \mathbf{u}_y + z_1 \mathbf{u}_z \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{u}_x + y_2 \mathbf{u}_y + z_2 \mathbf{u}_z . \quad (9.8)$$

O vetor deslocamento da partícula ao passar da posição \mathbf{r}_1 para a posição \mathbf{r}_2 é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \\ &= (x_2 \mathbf{u}_x + y_2 \mathbf{u}_y + z_2 \mathbf{u}_z) - (x_1 \mathbf{u}_x + y_1 \mathbf{u}_y + z_1 \mathbf{u}_z) \\ &= (x_2 - x_1) \mathbf{u}_x + (y_2 - y_1) \mathbf{u}_y + (z_2 - z_1) \mathbf{u}_z . \end{aligned} \quad (9.9)$$

As componentes do vetor deslocamento são dadas pelas seguintes variações de coordenadas:

$$\Delta x = x_2 - x_1 , \quad \Delta y = y_2 - y_1 \quad \text{e} \quad \Delta z = z_2 - z_1 . \quad (9.10)$$

Podemos então escrever o resultado (9.9) como:

$$\Delta \mathbf{r} = \Delta x \mathbf{u}_x + \Delta y \mathbf{u}_y + \Delta z \mathbf{u}_z . \quad (9.11)$$

Se a partícula estivesse em movimento retilíneo ao longo do eixo \mathcal{OX} , a sua posição seria dada pela coordenada x e a variação da coordenada x , de um valor x_1 para um valor x_2 , seria o deslocamento $\Delta x = x_2 - x_1$ da partícula, conforme estudamos na aula 3. Entretanto, estamos agora estudando um movimento que não é necessariamente retilíneo, e $\Delta x = x_2 - x_1$ não é mais o deslocamento da partícula, mas apenas a componente do vetor deslocamento na direção do eixo \mathcal{OX} . Do mesmo modo, $\Delta y = y_2 - y_1$ e $\Delta z = z_2 - z_1$ são as componentes do vetor deslocamento nas direções dos eixos \mathcal{OY} e \mathcal{OZ} , respectivamente. A **Figura 9.4** mostra um deslocamento vetorial $\Delta \mathbf{r}$ e suas componentes Δx , Δy e Δz .

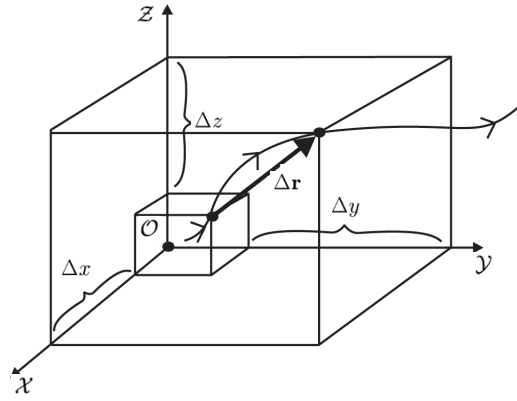


Figura 9.4: Vetor deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ e suas componentes Δx , Δy e Δz .

Note que o deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ em (9.10) é a soma dos três vetores $\Delta x \mathbf{u}_x$, $\Delta y \mathbf{u}_y$ e $\Delta z \mathbf{u}_z$. Dizemos que o vetor $\Delta x \mathbf{u}_x$ é o deslocamento da partícula na direção do eixo \mathcal{OX} . Analogamente, dizemos que $\Delta y \mathbf{u}_y$ e $\Delta z \mathbf{u}_z$ são os deslocamentos da partícula nas direções de \mathcal{OY} e \mathcal{OZ} , respectivamente. Usando essa linguagem, podemos descrever a equação (9.10) da seguinte maneira: o vetor deslocamento de uma partícula é igual à soma vetorial de seus deslocamentos nas direções dos eixos \mathcal{OX} , \mathcal{OY} e \mathcal{OZ} .

Exemplo 9.1

Para ilustrar o conceito de deslocamento, suponha que uma partícula em movimento passe no instante t_1 pelo ponto $P_1(-3, 0, 0)$ e num instante posterior t_2 , pelo ponto $P_2(0, 4, 0)$. Para determinarmos o deslocamento da partícula no intervalo $[t_1, t_2]$, basta calcular $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Lembrando que as componentes do vetor posição são dadas simplesmente pelas coordenadas da partícula, temos:

$$\Delta \mathbf{r} = 4\mathbf{u}_y - (-3\mathbf{u}_x) = 3\mathbf{u}_x + 4\mathbf{u}_y .$$

A expressão anterior contém todas as informações do deslocamento sofrido pela partícula nesse intervalo. Podemos obter, se desejarmos, os dados que caracterizam geometricamente esse deslocamento, a saber, seu módulo, sua direção e seu sentido. Por exemplo, seu módulo é dado por:

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\text{m} .$$

A sua direção pode ser dada pelo ângulo θ formado entre $\Delta \mathbf{r}$ e o vetor unitário ao longo do eixo \mathcal{OX} , isto é, \mathbf{u}_x . Esse ângulo é dado por:

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3} \quad \longrightarrow \quad \theta = \arctan(4/3) .$$

E o seu sentido, uma vez que as componentes Δx e Δy são ambas positivas, é para a direita e para cima, tomando a folha de papel como o plano \mathcal{OXY} . Vale enfatizar que o conhecimento de $\Delta \mathbf{r}[t_1, t_2]$ não traz nenhuma informação a respeito do movimento durante o intervalo, de como a partícula seguiu de P_1 até P_2 .

Conceitos vetoriais de velocidade média e instantânea

Suponhamos que uma partícula em um instante t_1 tenha posição \mathbf{r}_1 e em um instante diferente t_2 tenha posição \mathbf{r}_2 . Seu deslocamento vetorial no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é $\Delta \mathbf{r}[t_1, t_2] = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ e o tempo que ela gasta para realizar tal deslocamento é $t_2 - t_1$. A razão entre o deslocamento vetorial e o tempo gasto para realizá-lo é chamada **velocidade vetorial média** da partícula no intervalo de tempo em que ocorreu o deslocamento. Representando a velocidade vetorial média no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ pelo símbolo $\langle \mathbf{v} \rangle[t_1, t_2]$, temos:

$$\langle \mathbf{v} \rangle[t_1, t_2] = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1} \quad (t_2 \neq t_1) . \quad (9.12)$$

Tal velocidade também é representada simplesmente por $\langle \mathbf{v} \rangle$, quando está claro o intervalo de tempo no qual tal velocidade média está sendo considerada. Também podemos representar o deslocamento por $\Delta \mathbf{r}$ e o intervalo de tempo por Δt , isto é, escrever $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ e $\Delta t = t_2 - t_1$. Usando essas expressões, a definição de velocidade média (9.12) toma a forma mais compacta:

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (\Delta t \neq 0) . \quad (9.13)$$

Note que a velocidade média é o produto do número positivo $1/\Delta t$ pelo vetor deslocamento $\Delta \mathbf{r}$. O resultado $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$, que é a velocidade média $\langle \mathbf{v} \rangle$, é um vetor com a mesma direção e sentido que o deslocamento $\Delta \mathbf{r}$. Ou seja, a velocidade vetorial média, em um certo intervalo de tempo, tem a mesma direção e o mesmo sentido que o deslocamento nesse mesmo intervalo. A direção da velocidade média é a da reta suporte do vetor deslocamento, isto é, da reta secante à trajetória que passa pelos pontos inicial e final do deslocamento. O módulo da velocidade média dá a rapidez com que a partícula mudou sua posição no intervalo de tempo. Note que a velocidade vetorial média em um intervalo de tempo dá apenas uma informação global sobre a maneira com que a partícula se move no intervalo.

Consideremos agora um movimento descrito por uma função-movimento vetorial f . Sejam t e $t + \Delta t$ dois instantes do movimento, com $\Delta t \neq 0$. Suponhamos que no instante t a partícula passe pelo ponto P de sua trajetória e seu vetor posição seja \mathbf{r} , e que no instante $t + \Delta t$ ela passe pelo ponto P' e seu vetor posição seja \mathbf{r}' . Temos então $\mathbf{r} = f(t)$ e $\mathbf{r}' = f(t + \Delta t)$. O deslocamento da partícula no intervalo de t a $t + \Delta t$ é dado por $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = f(t + \Delta t) - f(t)$, conforme ilustrado na **Figura 9.5**.

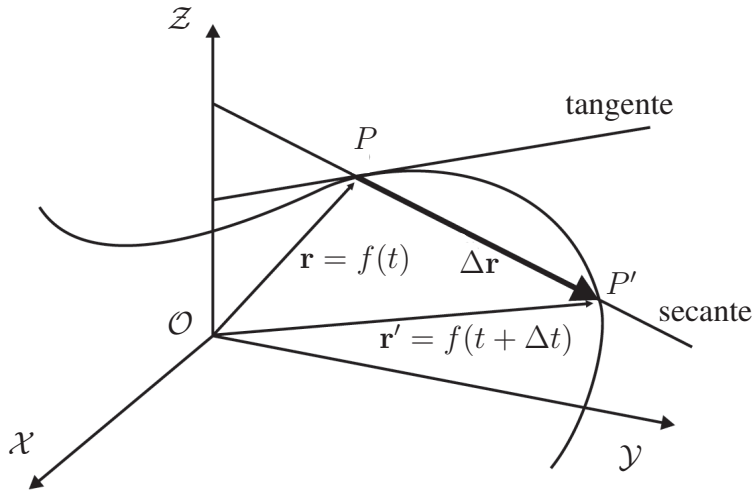


Figura 9.5: Posições de uma partícula em dois instantes de um movimento descrito por uma função-movimento vetorial f .

A velocidade vetorial média da partícula, no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$, é dada por:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (\Delta t \neq 0). \quad (9.14)$$

Exemplo 9.2

Considere novamente o exemplo 9.1. Com o intuito de calcular uma velocidade média, suponha, nesse exemplo, que $t_1 = 3\text{s}$ e $t_2 = 8\text{s}$. A velocidade média nesse caso é dada então por:

$$\langle \mathbf{v} \rangle [3, 8] = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{3\mathbf{u}_x + 4\mathbf{u}_y}{5} = 0,6\mathbf{u}_x + 0,8\mathbf{u}_y. \quad (9.15)$$

O módulo dessa velocidade média segue imediatamente da fórmula anterior:

$$|\langle \mathbf{v} \rangle| = \sqrt{(0,6)^2 + (0,8)^2} = 1\text{m/s}.$$

Por simplicidade de notação, omitimos, nessa fórmula, o intervalo de tempo no qual estamos calculando a velocidade média. Assim como no exemplo 9.1, tampouco a velocidade média traz informações sobre o movimento da partícula durante o intervalo considerado. A velocidade média calculada em (9.15) apenas

nos informa que se a partícula tiver deixado o ponto $P_1(-3, 0, 0)$ em $t_1 = 3\text{s}$ e atingido o ponto $P_2(0, 4, 0)$ em $t_2 = 8\text{s}$ descrevendo um MRU, a sua velocidade terá sido obrigatoriamente igual a essa velocidade média.

Definimos **velocidade vetorial instantânea** da partícula, no instante t , como sendo o limite dessa razão quando Δt tende a zero. Representando essa velocidade por \mathbf{v} , temos então:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (9.16)$$

A velocidade vetorial instantânea costuma ser chamada simplesmente de velocidade vetorial e, algumas vezes, ainda mais abreviadamente, de velocidade.

No limite em que $\Delta t \rightarrow 0$, o deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ tende ao vetor nulo $\mathbf{0}$, pois $\Delta \mathbf{r} = f(t + \Delta t) - f(t)$. No entanto, quando $\Delta \mathbf{r}$ tende ao vetor nulo $\mathbf{0}$, a **Figura 9.5** nos mostra que o ponto P' tende para o ponto P . Nesse limite, a reta secante que passa por P e P' tende para a reta tangente à trajetória no ponto P . Sabemos que $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ tem a direção e o sentido da reta secante que passa por P e P' e, portanto, o limite de $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$, quando $\Delta t \rightarrow 0$, tem a direção da reta tangente à trajetória no ponto P . Como esse limite, pela definição (9.16), é a velocidade vetorial instantânea, concluimos que:

a velocidade vetorial instantânea da partícula, em cada instante, tem a direção da reta tangente à trajetória no ponto onde se encontra a partícula nesse instante.

Dito de um modo mais sucinto: a velocidade vetorial instantânea é sempre tangente à trajetória no ponto em que está a partícula. Ou seja, dizemos que a direção da trajetória de uma partícula, num dado ponto de sua trajetória, é a direção da reta tangente a ela, passando por esse ponto.

A definição (9.16) também mostra que

o sentido da velocidade vetorial instantânea da partícula em um ponto da trajetória é o sentido em que a partícula se move nesse ponto.

Sendo um limite de velocidades médias, em intervalos de tempo que diminuam indefinidamente, a velocidade instantânea tem o significado de rapidez. Rapidez com que a partícula se move. Enquanto a velocidade média dá a rapidez com que a partícula se move em um intervalo de tempo, a velocidade instantânea dá a rapidez com que a partícula se move no instante em que ela é definida.

A **Figura 9.6** mostra um exemplo de movimento no qual está indicada a velocidade instantânea com que a partícula passa por vários pontos da trajetória.

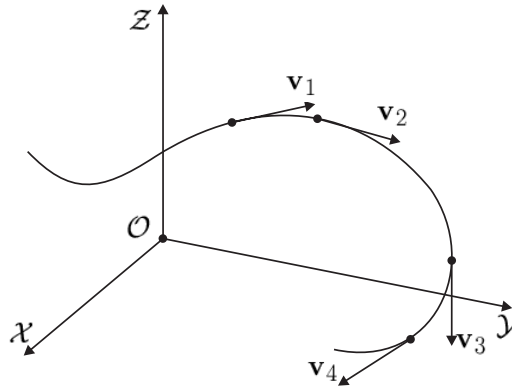


Figura 9.6: Velocidades vetoriais instantâneas em diversos instantes durante o movimento.

A fórmula da velocidade vetorial instantânea \mathbf{v} , dada na definição (9.16), não é usada diretamente em cálculos. Ela é útil no desenvolvimento da teoria, mas na hora de fazer cálculos vamos utilizar outras fórmulas. Para chegar a elas, comecemos por substituir a expressão (9.11) para o deslocamento $\Delta \mathbf{r}$ na definição (9.16) de velocidade vetorial \mathbf{v} . Obtemos:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{u}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{u}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t} \mathbf{u}_z \right). \quad (9.17)$$

Os vetores unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z são constantes e, portanto, não são afetados pelo limite, de modo que:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \mathbf{u}_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \mathbf{u}_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \mathbf{u}_z. \quad (9.18)$$

Conforme aprendemos nas aulas 4 e 5, em especial na seção *Derivadas e integrais* da aula 5, o limite de $\Delta x / \Delta t$, quando Δt tende a zero, é a derivada dx/dt

da coordenada x em relação ao tempo. Na aula 4, essa derivada tem o significado de velocidade de uma partícula em movimento retilíneo no eixo \mathcal{OX} . Já na fórmula (9.18), ela é uma das componentes da velocidade vetorial \mathbf{v} , a componente na direção de \mathcal{OX} . De modo análogo, os limites de $\Delta y/\Delta t$ e $\Delta z/\Delta t$ são, respectivamente, as derivadas: dy/dt e dz/dt . Portanto:

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{u}_z . \quad (9.19)$$

Chamando de v_x , v_y e v_z as componentes da velocidade vetorial nas direções respectivas de \mathcal{OX} , \mathcal{OY} e \mathcal{OZ} , temos:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y + v_z \mathbf{u}_z . \quad (9.20)$$

Comparando essa expressão com o resultado (9.19), obtemos:

$$v_x = \frac{dx}{dt} , \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt} . \quad (9.21)$$

Derivando as funções-movimento (9.3), obtemos em cada instante t :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{f}_x(t) , \quad \frac{dy}{dt} = \dot{f}_y(t) \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dt} = \dot{f}_z(t) , \quad (9.22)$$

onde $\dot{f}_x(t)$, $\dot{f}_y(t)$ e $\dot{f}_z(t)$ indicam as derivadas em relação ao tempo, das respectivas funções-movimento, no instante t . Substituindo (9.22) em (9.19), obtemos:

$$\mathbf{v} = \dot{f}_x(t) \mathbf{u}_x + \dot{f}_y(t) \mathbf{u}_y + \dot{f}_z(t) \mathbf{u}_z . \quad (9.23)$$

Para cada valor de t que substituirmos nessa equação, obteremos um único valor bem determinado da velocidade vetorial \mathbf{v} , isto é, essa equação mostra que existe uma função que representaremos por $\dot{\mathbf{f}}$, que associa a cada instante t do movimento a velocidade vetorial \mathbf{v} nesse instante:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{f}}(t) . \quad (9.24)$$

Chamamos essa função $\dot{\mathbf{f}}$ de **função-velocidade vetorial**. Ela é a função que especifica a cada instante qual a velocidade vetorial da partícula que realiza um certo movimento.

Comparando as equações (9.23) e (9.24), obtemos

$$\dot{\mathbf{f}}(t) = \dot{f}_x(t) \mathbf{u}_x + \dot{f}_y(t) \mathbf{u}_y + \dot{f}_z(t) \mathbf{u}_z . \quad (9.25)$$

Vemos que essa única função $\dot{\mathbf{f}}$, que dá a velocidade vetorial da partícula a cada instante do movimento, desempenha o mesmo papel que as três funções-velocidade

\dot{f}_x , \dot{f}_y e \dot{f}_z , que dão as componentes da velocidade vetorial a cada instante do tempo.

Finalmente, comparando as equações (9.16) e (9.24), obtemos

$$\dot{f} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \quad (9.26)$$

O membro direito dessa equação é um limite que chamamos de derivada da função f no instante t . Desse modo, a função-velocidade vetorial é a derivada da função-movimento vetorial, um resultado semelhante ao obtido no movimento retilíneo para a relação entre a função-velocidade \dot{f}_x e a função-movimento f_x .

Uma vez que a velocidade de uma partícula é uma grandeza vetorial, ela possui em cada instante um módulo, uma direção e um sentido. Basta que apenas uma dentre essas três quantidades varie com o passar do tempo para que a velocidade da partícula varie com o tempo. No caso particular em que o módulo da velocidade de uma partícula permanece constante durante um certo intervalo de tempo de seu movimento, dizemos que ela se move num **movimento uniforme** nesse intervalo. Note que um movimento uniforme não é necessariamente retilíneo.

Conceitos vetoriais de aceleração média e instantânea

Suponha que em um instante t_1 uma partícula tenha a posição \mathbf{r}_1 e a velocidade \mathbf{v}_1 , e em um instante diferente t_2 , ela tenha a posição \mathbf{r}_2 e a velocidade \mathbf{v}_2 , conforme indicado na **Figura 9.7**.

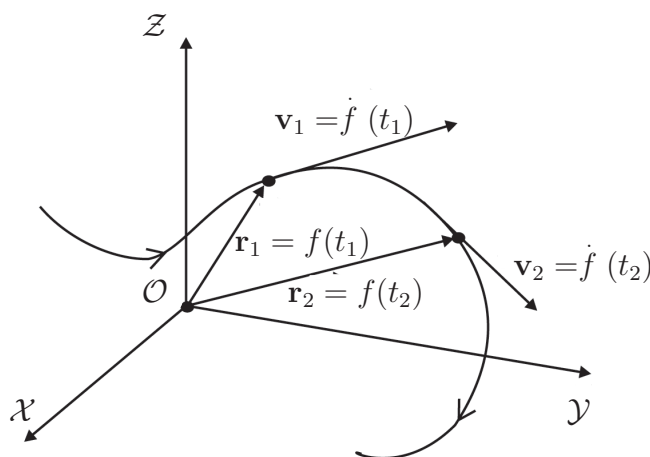


Figura 9.7: Posições e velocidades de uma partícula em dois instantes de um movimento descrito por uma função-movimento vetorial f .

A variação da velocidade vetorial da partícula no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, que representaremos por $\Delta \mathbf{v}$:

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 . \quad (9.27)$$

O tempo decorrido nessa mudança de velocidade é $t_2 - t_1$, que representamos, como de costume por Δt . A razão entre a variação da velocidade vetorial da partícula e o tempo gasto para ocorrer tal variação é chamada **aceleração vetorial média** da partícula no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ em consideração. Representando a aceleração vetorial média no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ pelo símbolo $\langle \mathbf{a} \rangle [t_1, t_2]$, temos:

$$\langle \mathbf{a} \rangle [t_1, t_2] = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} \quad (t_2 \neq t_1) . \quad (9.28)$$

Novamente, usamos o símbolo mais abreviado $\langle \mathbf{a} \rangle$ para a aceleração média, se não for motivo de confusão.

De acordo com a definição (9.28), a aceleração vetorial média $\langle \mathbf{a} \rangle [t_1, t_2]$ é um vetor com a mesma direção e sentido que a variação de velocidade vetorial $\Delta \mathbf{v}$ no intervalo $[t_1, t_2]$. A aceleração vetorial média em um intervalo de tempo dá apenas uma informação global sobre a maneira como a partícula muda sua velocidade vetorial no intervalo.

Seja um movimento dado pela função-movimento vetorial \mathbf{f} . A derivada dessa função em relação ao tempo leva à função-velocidade vetorial $\dot{\mathbf{f}}$, que determina a cada instante qual a velocidade vetorial da partícula. Seja t o instante no qual a partícula tem o vetor de posição \mathbf{r} e velocidade \mathbf{v} e $t + \Delta t$ outro instante do movimento, no qual a partícula tem vetor de posição $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}$ e velocidade $\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}$, conforme ilustrado na **Figura 9.8**.

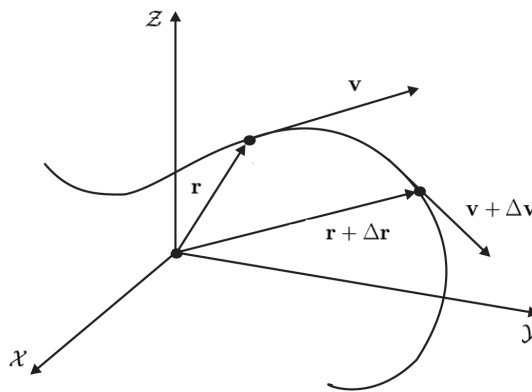


Figura 9.8: Velocidades de uma partícula em dois instantes de um movimento descrito por uma função-movimento vetorial \mathbf{f} .

A aceleração vetorial média da partícula, no intervalo de tempo $[t, t + \Delta t]$, é dada por:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a} \rangle &= \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \\ &= \frac{\dot{\mathbf{f}}(t + \Delta t) - \dot{\mathbf{f}}(t)}{\Delta t}, \quad (\Delta t \neq 0). \quad (9.29)\end{aligned}$$

Definimos **aceleração vetorial instantânea** da partícula, no instante t , como sendo o limite dessa razão quando Δt tende a zero. Representando a aceleração vetorial instantânea por \mathbf{a} , temos a definição:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{f}}(t + \Delta t) - \dot{\mathbf{f}}(t)}{\Delta t}. \quad (9.30)\end{aligned}$$

É comum chamar a aceleração vetorial instantânea aceleração vetorial ou ainda, simplesmente, de aceleração

Consideremos qualquer trecho de uma trajetória com concavidade bem definida, como o mostrado na **Figura 9.9**. Nessa figura, exibimos a mesma situação da **Figura 9.8**, explicitando a construção geométrica do vetor diferença $\Delta \mathbf{v}$. Em um

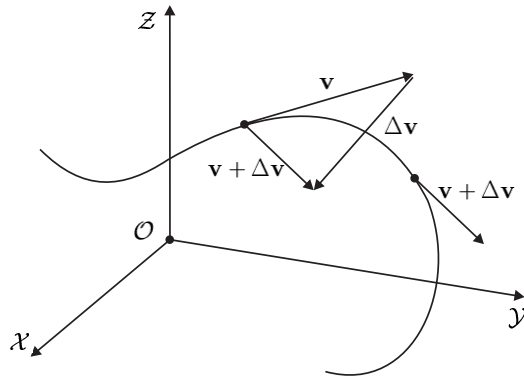


Figura 9.9: Variação de velocidade em um trecho de uma trajetória com concavidade bem definida.

trecho como este, variações de velocidade e, portanto, acelerações médias nunca apontam no sentido oposto à concavidade. O limite dessas acelerações médias, quando $\Delta t \rightarrow 0$, é a aceleração instantânea que, por continuidade, também jamais apontará no sentido oposto ao da concavidade da curva. Temos então:

qualquer que seja a direção da aceleração instantânea, o seu sentido jamais aponta para fora da concavidade da trajetória.

A definição (9.30) também mostra que o módulo da aceleração vetorial instantânea em um instante t dá a rapidez com que a partícula está mudando sua velocidade no instante t . Note que a velocidade pode mudar somente seu módulo e seu sentido, sem mudar sua direção. Esse é o caso de um movimento retilíneo. Nesse caso, a aceleração tem sempre a mesma direção da velocidade. A velocidade também pode mudar sem mudar o seu módulo. Nesse caso, como veremos adiante, a aceleração tem direção perpendicular à velocidade. Finalmente, a velocidade pode mudar em direção, módulo e sentido. Nesse caso, a aceleração pode ter qualquer direção, com um sentido que jamais aponta para fora da concavidade da trajetória.

A **Figura 9.10** mostra as acelerações de uma partícula em diversos instantes, ilustrando o fato de que a aceleração sempre aponta para a concavidade da curva.

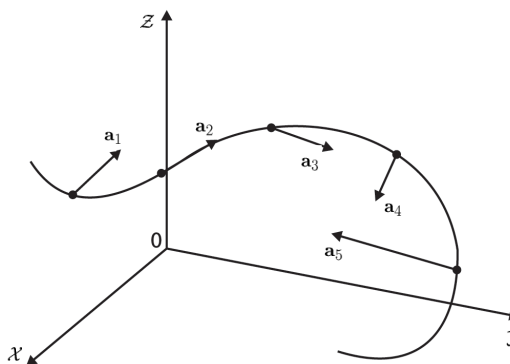


Figura 9.10: Acelerações vetoriais instantâneas em diversos instantes durante o movimento.

Sejam Δv_x , Δv_y e Δv_z as componentes da variação de velocidade $\Delta \mathbf{v}$ na definição (9.30):

$$\Delta \mathbf{v} = \Delta v_x \mathbf{u}_x + \Delta v_y \mathbf{u}_y + \Delta v_z \mathbf{u}_z . \quad (9.31)$$

Substituindo esta expressão na definição (9.30), obtemos:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \mathbf{u}_x + \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \mathbf{u}_y + \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \mathbf{u}_z \right) . \quad (9.32)$$

Uma vez que os vetores unitários \mathbf{u}_x , \mathbf{u}_y e \mathbf{u}_z são constantes, temos:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \mathbf{u}_x + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \mathbf{u}_y + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \mathbf{u}_z . \quad (9.33)$$

Na seção *Derivadas e integrais* da aula 5, vimos que o limite de $\Delta v_x / \Delta t$, quando Δt tende a zero, é a derivada dv_x / dt . No contexto da aula 7, essa derivada tem o significado de aceleração de uma partícula em movimento retilíneo no eixo $\mathcal{O}\mathcal{X}$. Na fórmula (9.33), ela é a componente da velocidade vetorial \mathbf{v} ao longo do unitário \mathbf{u}_x . De modo análogo, os limites de $\Delta y / \Delta t$ e $\Delta z / \Delta t$ são, respectivamente, as derivadas: dv_y / dt e dv_z / dt . Consequentemente, temos para a aceleração vetorial (9.33):

$$\mathbf{a} = \frac{dv_x}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{u}_z . \quad (9.34)$$

Se as componentes da aceleração vetorial \mathbf{a} são a_x , a_y e a_z ,

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y + a_z \mathbf{u}_z . \quad (9.35)$$

Obtemos de (9.34):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} , \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} . \quad (9.36)$$

Na prática, usamos essas fórmulas para calcular as componentes da aceleração e, com isso, obter a aceleração

Das equações (9.21) e (9.22), temos:

$$v_x = \dot{f}_x(t) , \quad v_y = \dot{f}_y(t) \quad \text{e} \quad v_z = \dot{f}_z(t) . \quad (9.37)$$

Derivando essas funções em relação ao tempo, obtemos para cada instante t :

$$\frac{dv_x}{dt} = \ddot{f}_x(t) , \quad \frac{dv_y}{dt} = \ddot{f}_y(t) \quad \text{e} \quad \frac{dv_z}{dt} = \ddot{f}_z(t) , \quad (9.38)$$

onde $\ddot{f}_x(t)$, $\ddot{f}_y(t)$ e $\ddot{f}_z(t)$ indicam as derivadas em relação ao tempo, das respectivas funções $\dot{f}_x(t)$, $\dot{f}_y(t)$ e $\dot{f}_z(t)$. Substituindo (9.38) em (9.34), obtemos:

$$\mathbf{a} = \ddot{f}_x(t) \mathbf{u}_x + \ddot{f}_y(t) \mathbf{u}_y + \ddot{f}_z(t) \mathbf{u}_z . \quad (9.39)$$

Por meio dessa equação, fica associado a cada instante t um único valor bem determinado da aceleração vetorial \mathbf{a} . Com isso, essa equação define uma função que representaremos por \ddot{f} , que associa a cada instante t do movimento a aceleração vetorial \mathbf{a} nesse instante:

$$\mathbf{a} = \ddot{f}(t) . \quad (9.40)$$

Chamamos essa função \ddot{f} de **função-aceleração vetorial**.

Das equações (9.40) e (9.39), segue:

$$\ddot{\mathbf{f}}(t) = \ddot{f}_x(t) \mathbf{u}_x + \ddot{f}_y(t) \mathbf{u}_y + \ddot{f}_z(t) \mathbf{u}_z . \quad (9.41)$$

Essa expressão mostra que a função $\ddot{\mathbf{f}}$ fornece, sozinha, as mesmas informações que as três funções \ddot{f}_x , \ddot{f}_y e \ddot{f}_z .

Para terminar, comparamos (9.40) com (9.30) para obter:

$$\ddot{\mathbf{f}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\dot{\mathbf{f}}(t + \Delta t) - \dot{\mathbf{f}}(t)}{\Delta t} , \quad (9.42)$$

isto é, a função-aceleração vetorial é a derivada da função-velocidade vetorial.

Aqui termina a exposição dos conceitos fundamentais da cinemática de uma partícula. Em princípio, qualquer movimento de uma partícula pode ser descrito por esses conceitos. Eles são uma ferramenta matemática eficiente para estudar o movimento. Em nossa disciplina, a maior parte dos problemas que iremos resolver são sobre movimentos de uma partícula que se processam em um plano fixo. Nesse caso, o formalismo vetorial que estudamos nesta seção, isto é, a descrição do movimento baseada no conceito de vetor, fica ainda mais simples. Veremos isso na próxima seção.

Exemplo 9.3

Consideremos aqui a seguinte função-movimento vetorial:

$$\mathbf{r} = f(t) = [2t - \sin(2t)] \mathbf{u}_x + [1 - \cos(2t)] \mathbf{u}_y .$$

Note que esse tipo de movimento já foi discutido anteriormente, mais precisamente, no exemplo 7 da aula 2. Naquele exemplo, chegamos a traçar a trajetória seguida pela partícula e mencionamos que se trata de uma trajetória cicloidal (na aula 11 você irá aprender a deduzir as equações paramétricas de uma ciclóide). No entanto, no exemplo tratado na aula 2 a partícula se movimenta no plano \mathcal{OYZ} , enquanto no presente exemplo ela se movimenta no plano \mathcal{OXY} . Nosso objetivo aqui é calcular a velocidade e a aceleração da partícula nesse movimento cicloidal.

A velocidade da partícula é dada simplesmente pela derivada temporal de sua posição, isto é,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = [2 - 2\cos(2t)] \mathbf{u}_x + 2\sin(2t) \mathbf{u}_y . \quad (9.43)$$

Note que, embora a componente v_y da velocidade da partícula oscile harmonicamente, assumindo, portanto, valores positivos, negativos e nulos, a componente v_x nunca assume valores negativos. Ou seja, nesse movimento, a partícula nunca

se move no sentido negativo do eixo \mathcal{OX} (é oportuno, nesse momento, dar uma olhada na trajetória traçada no exemplo 7 da aula 2, tendo o cuidado naquele exemplo de interpretar o eixo \mathcal{OZ} como o eixo \mathcal{OY} , e o eixo \mathcal{OY} como o eixo \mathcal{OX}).

Para encontrarmos a aceleração da partícula, basta derivarmos uma vez mais a expressão da velocidade (9.43):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 4 \sin(2t) \mathbf{u}_x + 4 \cos(2t) \mathbf{u}_y .$$

Observe, a partir da equação anterior, que o módulo da aceleração permanece constante durante o movimento, pois:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{16[\sin^2(2t) + \cos^2(2t)]} = 4\text{m/s}^2 .$$

O mesmo já não ocorre com a velocidade, como pode ser verificado a partir da Eq.(9.43):

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}| &= \sqrt{[2 - 2\cos(2t)]^2 + 4\sin^2(2t)} = \\ &= \sqrt{8[1 - \cos(2t)]} = \\ &= 4 \sin(t) , \end{aligned} \tag{9.44}$$

onde usamos a identidade trigonométrica $1 - \cos(2t) = 2 \sin^2 t$.

Movimento plano

No caso em que os movimentos de uma partícula se processam em um plano, podemos escolher os eixos \mathcal{OX} e \mathcal{OY} nesse plano, de modo que a coordenada z da partícula é sempre nula. Como consequência, o vetor posição (9.2) da partícula pode ser escrito como

$$\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y . \tag{9.45}$$

Qualquer outra equação de um movimento plano pode ser obtida das equações gerais da cinemática, como desenvolvidas na seção anterior, impondo o vínculo de que a coordenada na direção perpendicular ao plano é sempre nula. O movimento plano é determinado pelas funções-movimento que dão as coordenadas no plano. Com a nossa escolha de eixos, temos:

$$x = f_x(t) \quad \text{e} \quad y = f_y(t) . \tag{9.46}$$

Derivando-se o vetor posição (9.45) em relação ao tempo, obtemos a velocidade vetorial da partícula em movimento plano:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{u}_x + v_y \mathbf{u}_y, \quad (9.47)$$

onde

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \text{e} \quad v_y = \frac{dy}{dt}. \quad (9.48)$$

Por sua vez, a derivada dessa velocidade em relação ao tempo dá a aceleração vetorial da partícula em movimento plano:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{u}_x + a_y \mathbf{u}_y, \quad (9.49)$$

onde

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \text{e} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}. \quad (9.50)$$

O movimento circular uniforme

Consideremos o importante exemplo de movimento plano dado pelas seguintes funções-movimento:

$$x = R \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad y = R \sin(\omega t), \quad (9.51)$$

onde R e ω são constantes positivas. Elevando essas equações ao quadrado e somando membro a membro, obtemos:

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (9.52)$$

que é a equação de um círculo de raio R centrado na origem do sistema de eixos \mathcal{OXY} . Com isso, obtemos o significado da constante R nas equações de movimento (9.51); ela é o raio da trajetória circular do movimento em estudo. Substituindo a equação (9.51) em (9.45), obtemos o vetor posição da partícula em um instante qualquer t :

$$\mathbf{r} = R \cos(\omega t) \mathbf{u}_x + R \sin(\omega t) \mathbf{u}_y. \quad (9.53)$$

Utilizando o que aprendemos sobre vetores na aula 8, calculamos o módulo desse vetor posição e concluímos que ele é constante e igual ao raio R da trajetória circular.

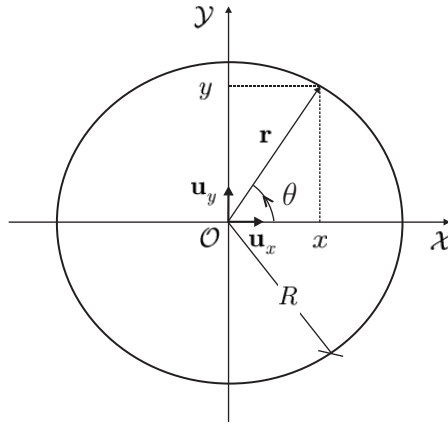


Figura 9.11: Grandezas envolvidas na descrição do movimento (9.51).

Na verdade, não é necessário calcular o módulo para saber que é igual ao raio. De fato, o vetor posição com ponto inicial na origem de \mathcal{OXY} tem seu ponto final na trajetória da partícula. Como essa trajetória no presente problema é um círculo de raio R centrado na origem de \mathcal{OXY} , imediatamente conclui-se que o módulo de \mathbf{r} é igual ao raio R do círculo. A **Figura 9.11** mostra as diversas grandezas que usamos para descrever o movimento circular (9.51). As equações (9.51), (9.52) e (9.53) deixam claro na **Figura 9.11** que o ângulo θ entre \mathbf{r} e o unitário \mathbf{u}_x é igual a ωt :

$$\theta = \omega t . \quad (9.54)$$

Desse resultado obtemos $\omega = \theta/t$ e encontramos o significado da constante ω que aparece nas equações de movimento (9.51): ela é a razão constante com que o ângulo θ entre o vetor posição \mathbf{r} e o unitário \mathbf{u}_x cresce com o tempo. Chamamos ω **velocidade angular** do movimento circular (9.51).

A seguir, vamos usar as seguintes derivadas em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt} \sin(\omega t) = \omega \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} \cos(\omega t) = -\omega \sin(\omega t) . \quad (9.55)$$

Derivando em relação ao tempo as funções em (9.51), obtemos:

$$v_x = -\omega R \sin(\omega t) \quad \text{e} \quad v_y = \omega R \cos(\omega t) . \quad (9.56)$$

A velocidade vetorial é então obtida da fórmula (9.47):

$$\mathbf{v} = -\omega R \sin(\omega t) \mathbf{u}_x + \omega R \cos(\omega t) \mathbf{u}_y . \quad (9.57)$$

Esse resultado dá a velocidade em um instante qualquer t . Nele, estão contidas todas as informações sobre a velocidade da partícula no movimento em estudo.

Em particular, o módulo dessa velocidade é dado por:

$$|\mathbf{v}| = \omega R . \quad (9.58)$$

Como ω e R são duas constantes, é constante o módulo da velocidade neste movimento circular. Além disso, essa velocidade é proporcional ao raio da trajetória circular, sendo a velocidade angular a constante de proporcionalidade.

Eliminando ω entre as equações (9.58) e (9.54), obtemos

$$R\theta = |\mathbf{v}|t . \quad (9.59)$$

Esse resultado tem um significado simples: $R\theta$ é o comprimento do arco de círculo percorrido pela partícula desde o instante zero até o instante t , como é óbvio na **Figura 9.11**. Sendo $|\mathbf{v}|$ constante, a equação (9.59) afirma que esse arco percorrido pela partícula é proporcional ao tempo t . Dito de modo sucinto: nesse tipo de movimento circular, o arco de círculo percorrido pela partícula cresce uniformemente com o passar do tempo. Por causa dessa propriedade, esse movimento circular é chamado uniforme. É comum abreviar movimento circular uniforme por MCU.

A velocidade \mathbf{v} do movimento circular uniforme, dada em (9.57), é tangente ao círculo no ponto onde se encontra a partícula, pois a velocidade em qualquer movimento tem a propriedade de ser tangente à trajetória. É instrutivo verificar essa propriedade na expressão (9.57) da velocidade, como faremos a seguir.

A **Figura 9.12** mostra a velocidade vetorial no movimento circular e o ângulo $\theta = \omega t$ envolvido nas componentes do vetor posição (9.51) e da velocidade vetorial (9.57).

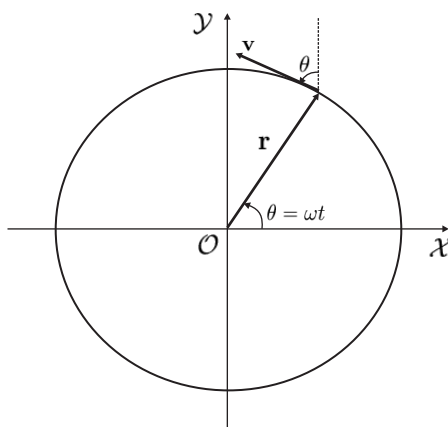


Figura 9.12: Velocidade vetorial no MCU.

Sendo \mathbf{v} tangente à trajetória circular, a velocidade \mathbf{v} é perpendicular ao vetor posição \mathbf{r} . Obviamente, o eixo \mathcal{OY} é perpendicular ao eixo \mathcal{OX} . Esses dois fatos nos levam à conclusão de que o ângulo entre a velocidade \mathbf{v} e o eixo \mathcal{OY} é igual ao ângulo entre o vetor posição \mathbf{r} e o eixo \mathcal{OX} . De fato, sabemos da geometria elementar que “dois ângulos são iguais se têm lados perpendiculares dois a dois”. Como consequência, o ângulo que \mathbf{v} faz com o eixo \mathcal{OY} é igual a $\theta = \omega t$. Usando esse ângulo e a regra de projeção de vetores dada nas fórmulas (8.37) da aula 8, obtemos exatamente as componentes de \mathbf{v} que aparecem em (9.57). De fato, de acordo com (8.37) da aula 8, a componente v_x é igual ao módulo de \mathbf{v} multiplicado pelo cosseno do ângulo que \mathbf{v} faz com o eixo \mathcal{OX} . Ora, o módulo de \mathbf{v} é ωR , em virtude de (9.58), enquanto o dito ângulo é igual a $(\pi/2) + \theta$, de acordo com resultado enunciado mais acima. Portanto, temos:

$$\begin{aligned} v_x &= |\mathbf{v}| \cos[(\pi/2) + \theta] = \\ &= -\omega R \sin \theta = \\ &= -\omega R \sin(\omega t), \end{aligned} \quad (9.60)$$

que está de acordo com (9.57). De modo análogo, obtemos $v_y = \omega R \cos(\omega t)$, também em acordo com (9.57).

Vamos agora derivar as funções escritas em (9.56) em relação ao tempo para obter as componentes da aceleração como indicado em (9.50). O resultado obtido,

$$\begin{cases} a_x = -\omega^2 R \cos(\omega t); \\ a_y = -\omega^2 R \sin(\omega t), \end{cases} \quad (9.61)$$

é substituído em (9.49) para se obter o vetor aceleração

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -\omega^2 R \cos(\omega t) \mathbf{u}_x - \omega^2 R \sin(\omega t) \mathbf{u}_y = \\ &= -\omega^2 R [\cos(\omega t) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t) \mathbf{u}_y]. \end{aligned} \quad (9.62)$$

O módulo desse vetor é dado por

$$|\mathbf{a}| = \omega^2 R. \quad (9.63)$$

Usando a relação (9.58) para eliminar dessa expressão a constante ω , obtemos:

$$|\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R}. \quad (9.64)$$

Portanto, o módulo da aceleração no MCU é igual ao quadrado do módulo da velocidade dividido pelo raio da trajetória circular.

Comparando o vetor aceleração (9.62) e o vetor posição (9.53), concluímos que no MCU vale a relação:

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r} . \quad (9.65)$$

Dado que ω^2 é positivo, obtém-se dessa igualdade que no MCU a aceleração tem a mesma direção e o sentido contrário do vetor posição \mathbf{r} . Conseqüentemente, a aceleração no MCU aponta sempre para o centro da trajetória circular. Por esse motivo, ela é chamada **aceleração centrípeta**, dado que centrípeta significa “que pede o centro”. A **Figura 9.13** ilustra os vetores posição, velocidade e aceleração no MCU.

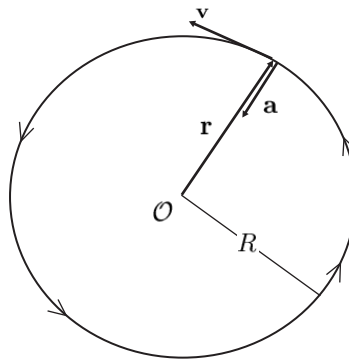


Figura 9.13: Vetores posição, velocidade e aceleração no MCU.

Aceleração centrípeta não existe apenas no MCU, mas em todo movimento não retilíneo. No caso particular do MCU, a aceleração centrípeta aponta para o centro da trajetória circular associada a esse movimento. No caso de um movimento curvilíneo qualquer, a aceleração centrípeta da partícula, quando ela está em um ponto P de sua trajetória, aponta para o chamado centro de curvatura de sua trajetória nesse ponto, como veremos na aula 11.

A expressão (9.64) do módulo da aceleração centrípeta, que obtivemos derivando o vetor posição da partícula, duas vezes, em relação ao tempo, e calculando o módulo do resultado dessa derivação, também pode ser obtido por uma análise mais geométrica do MCU. Isso será feito mais adiante.

Todas as características do MCU foram obtidas das funções-movimento (9.51). O caminho de volta também é possível, ou seja, partindo das características de que o movimento é circular e uniforme, digamos com raio R e velocidade angular ω , pode-se chegar às funções-movimento (9.51). Em linhas gerais, para cumprir tal objetivo, você deve seguir o seguinte procedimento: comece usando a característica de que a trajetória é circular. Escolha um sistema de eixos \mathcal{OXY} no qual a origem \mathcal{O} coincida com centro do círculo. Desse modo, o vetor posição da partícula terá módulo igual ao raio R do círculo. Escolha o eixo \mathcal{OX} passando pela posição da partícula no instante $t = 0$ e o eixo \mathcal{OY} de modo que o movimento circular se processe no sentido anti-horário, de \mathcal{OX} para \mathcal{OY} . Use agora a característica de que o movimento é uniforme para escrever que o ângulo θ entre o vetor posição e o eixo \mathcal{OX} no instante t é dado por $\theta = \omega t$. Use esse ângulo e o módulo do vetor posição para achar as suas projeções nos eixos \mathcal{OX} e \mathcal{OY} .

Com isso, você terá chegado às funções-movimento (9.51). Você está convidado a fazer em detalhe esse raciocínio que acabamos de esboçar.

Resumo

Nesta aula, utilizamos o conceito de vetor, aprendido na aula anterior, para definir várias grandezas importantes na descrição do movimento de uma partícula. Definimos deslocamento vetorial de uma partícula, ou simplesmente deslocamento da partícula, num certo intervalo de tempo e , a partir desse conceito, definimos velocidade média da partícula num dado intervalo de tempo como sendo o seu deslocamento nesse intervalo dividido pela duração do intervalo. Introduzimos o conceito de velocidade instantânea de uma partícula, ou simplesmente velocidade da partícula, como sendo o limite de velocidades médias para intervalos de tempo tendendo a zero em torno do instante considerado. Em outras palavras, a função-velocidade vetorial é a derivada temporal da função vetorial de . Definimos aceleração média de uma partícula num certo intervalo de tempo como sendo a sua variação de velocidade nesse intervalo dividida pela duração do intervalo e , de modo análogo à definição de velocidade instantânea, definimos a função vetorial de aceleração como a derivada temporal de sua função-velocidade vetorial.

Você aprendeu o que é movimento plano de uma partícula e, em seguida, aplicou os conceitos apresentados nesta aula em um exemplo muito importante de movimento plano, a saber, no movimento circular uniforme. Nesse exemplo você aprendeu ainda o que se entende por aceleração centrípeta, conceito que irá aparecer muitas vezes daqui por diante.

Na aula 11, você estudará outros exemplos importantes de movimentos planos que o ajudarão a se familiarizar um pouco mais com a notação vetorial, imprescindível no estudo da cinemática e da dinâmica de uma partícula.

Questionário

1. O que é vetor-posição de uma partícula em relação a um sistema de eixos coordenados?
2. Defina função-movimento vetorial.
3. Defina deslocamento e velocidade média de uma partícula num certo intervalo de tempo. Defina também velocidade instantânea de uma partícula num instante genérico t .

4. Qual a relação entre as componentes cartesianas do vetor velocidade e as componentes cartesianas do vetor posição de uma partícula?
5. Defina aceleração média de uma partícula num certo intervalo de tempo. Defina ainda aceleração instantânea de uma partícula num instante genérico t e função-aceleração vetorial.
6. Defina movimento uniforme e responda à seguinte pergunta: a aceleração de uma partícula quando ela se encontra em movimento uniforme é necessariamente nula?
7. Defina movimento plano de uma partícula. Dê dois exemplos quaisquer de movimentos planos (escreva explicitamente as funções-movimento vetorial nos dois casos).
8. A aceleração de uma partícula que descreve um movimento circular uniforme é constante no tempo?

Problemas propostos

1. Num movimento genérico de uma partícula, demonstre que a distância percorrida num dado intervalo de tempo é sempre maior ou igual ao módulo de seu deslocamento nesse mesmo intervalo. Em que circunstâncias ocorre a igualdade?
2. Considere as três posições \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 ocupadas por uma partícula nos instantes t_1 , t_2 e t_3 ($t_3 > t_2 > t_1$), respectivamente, durante seu movimento:

$$\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{u}_x - 3\mathbf{u}_y + 5\mathbf{u}_z \quad ; \quad \mathbf{r}_2 = 4\mathbf{u}_x + 7\mathbf{u}_y - 3\mathbf{u}_z \quad ; \quad \mathbf{r}_3 = -\mathbf{u}_x - 5\mathbf{u}_y + 2\mathbf{u}_z .$$

- (a) Calcule, a partir dos vetores escritos anteriormente, os seguintes deslocamentos dessa partícula: $\Delta\mathbf{r}[t_1, t_2]$, $\Delta\mathbf{r}[t_2, t_3]$ e $\Delta\mathbf{r}[t_1, t_3]$.
 - (b) Verifique a igualdade $\Delta\mathbf{r}[t_1, t_3] = \Delta\mathbf{r}[t_1, t_2] + \Delta\mathbf{r}[t_2, t_3]$.
3. Suponha que uma partícula descreva um movimento circular uniforme de raio $R = 4\text{m}$. Os eixos cartesianos são escolhidos de tal modo que a origem coincida com o centro do círculo, como ilustra a **Figura 9.14**.

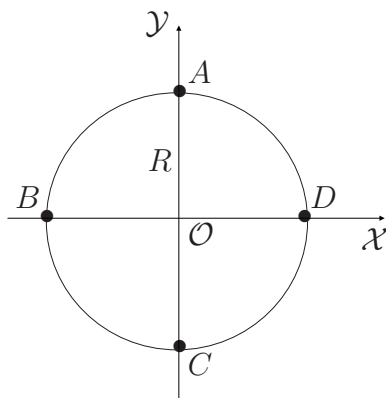


Figura 9.14: Movimento circular uniforme do problema 3.

Nessa figura estão marcados os pontos A , B , C e D . Suponha que nela a partícula se mova no sentido anti-horário e que no instante $t_0 = 0$ ela esteja no ponto A . Seja τ o período de seu movimento, isto é, o intervalo de tempo necessário para dar exatamente uma volta completa.

- Desenhe os vetores-posição nos instantes 0 , $\tau/4$, $\tau/2$ e $3\tau/4$ e obtenha suas expressões na base cartesiana.
- Desenhe os deslocamentos da partícula $\Delta \mathbf{r}[0, \tau/4]$, $\Delta \mathbf{r}[0, \tau/2]$ e $\Delta \mathbf{r}[0, 3\tau/4]$ e obtenha suas expressões na base cartesiana.
- Supondo que $\tau = 8\text{s}$, calcule as velocidades médias da partícula $\langle \mathbf{v} \rangle[0, 2]$, $\langle \mathbf{v} \rangle[0, 4]$, $\langle \mathbf{v} \rangle[0, 6]$ e $\langle \mathbf{v} \rangle[0, 8]$. Calcule os respectivos módulos dessas velocidades.

4. Suponha que a função-movimento vetorial de uma partícula seja dada por:

$$\mathbf{r} = 2 \cos(2t) \mathbf{u}_x + 4 \sin(2t) \mathbf{u}_y .$$

- Determine a velocidade da partícula num instante genérico de seu movimento.
- O movimento descrito por essa partícula é uniforme?
- Determine a aceleração da partícula num instante genérico de seu movimento.
- Calcule a posição, a velocidade e a aceleração da partícula nos instantes 0 , $\pi/4$ e $t = \pi/2$. Indique num desenho todos esses vetores.
- Desenhe a trajetória da partícula durante o intervalo $[0, \pi/2]$ e identifique a curva desenhada.

5. Suponha que a função-movimento vetorial de uma partícula seja dada por:

$$\mathbf{r} = 5 \sin(2t) \mathbf{u}_x + 5 \cos(2t) \mathbf{u}_y + 4t \mathbf{u}_z.$$

- (a) O movimento descrito por essa partícula é plano?
- (b) Determine a velocidade da partícula num instante genérico de seu movimento.
- (c) Determine a aceleração da partícula num instante genérico de seu movimento.
- (d) O movimento descrito por essa partícula é uniforme?
- (e) Calcule o módulo da aceleração da partícula num instante genérico de seu movimento.

6. A função-aceleração vetorial de uma partícula em movimento é dada por:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{f}}(t) = 2(\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y).$$

- (a) Sabendo que a velocidade da partícula em $t = 0\text{s}$ é dada por

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{f}}(0) = -5 \mathbf{u}_x + 5 \mathbf{u}_y,$$

determine a sua velocidade em um instante qualquer de seu movimento.

- (b) A partir do resultado anterior e sabendo que a posição da partícula em $t = 0\text{s}$ é dada por $\mathbf{r} = \mathbf{f}(0) = \mathbf{0}$, determine a sua posição em um instante qualquer de seu movimento.
- (c) Em que instante, além de $t = 0\text{s}$, a partícula cruza o eixo \mathcal{OY} ? Calcule, nesse instante, a sua posição e a sua velocidade.
- (d) Em que instante a componente v_x da velocidade da partícula é nula? Calcule, nesse instante, a sua posição e a sua velocidade.
- (e) A partir dos resultados encontrados nos itens anteriores, tente fazer um esboço da trajetória seguida pela partícula para $t \geq 0$. Marque na trajetória desenhada as posições encontradas nos itens anteriores indicando, ainda, nessas posições, os vetores que representam a velocidade e a aceleração da partícula.

7. Suponha que seja conhecida a função-aceleração de uma partícula e que esta seja dada por:

$$\mathbf{a} = -20 [\sin(2t) \mathbf{u}_x + \cos(2t) \mathbf{u}_y].$$

Pode-se mostrar que a trajetória de uma partícula que se movimenta com uma aceleração constante é dada, em geral, por uma parábola (ou um arco de parábola, se a duração do movimento for finita). Sua trajetória não será parabólica se, e somente se, a sua velocidade e a sua aceleração forem colineares, caso em que a partícula descreverá um movimento retilíneo. Na aula 11, estudaremos com mais detalhes um movimento desse tipo, a saber, o movimento de projéteis desprezando-se a resistência do ar.

- (a) Sabendo que a velocidade da partícula em $t = 0\text{s}$ é dada por

$$\mathbf{v} = \dot{f}(0) = 10 \mathbf{u}_x ,$$

determine a velocidade da partícula em um instante genérico de seu movimento.

- (b) A partir desse resultado, e sabendo ainda que a posição da partícula no instante $t = 0\text{s}$ é dada por

$$\mathbf{r} = f(0) = 5 \mathbf{u}_y ,$$

determine a posição da partícula em um instante genérico de seu movimento.

- (c) Verifique que se trata de um movimento circular uniforme e determine em que sentido ocorre o movimento, horário ou anti-horário. Tome cuidado, pois a sua resposta irá depender do ponto de onde você analisa o movimento (escolha, por exemplo, um ponto no semi-eixo positivo \mathcal{OZ}).

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de responder sem muita dificuldade a todo o questionário e aos três primeiros problemas propostos. Resolver os problemas 4 e 5 já exigirá de você um pouco mais de atenção, uma vez que tais problemas envolvem o conceito matemático de derivada. Caso você tenha alguma dificuldade em resolvê-los, faça uma breve revisão desse conceito. Os problemas 6 e 7 exigirão mais ainda de você, pois envolvem o conceito matemático de integral. Caso você encontre dificuldade em resolvê-los, reveja as noções de integral aprendidas na aula 5 e tente recordar como fazer integrais de funções trigonométricas como as funções seno e cosseno. Mesmo que você não consiga resolver esses últimos problemas, você pode seguir adiante, pois na aula 11 você encontrará uma breve revisão dos pontos principais de cinemática vetorial e outros exemplos que serão tratados com mais detalhes, o que certamente irá elucidar algumas de suas dúvidas.

Aula 10 – Começando a praticar

Objetivos

- Usar os conceitos de referencial, partícula, posição e deslocamento em práticas extremamente simples.
- Medir posições e deslocamentos de partículas.

Introdução

O movimento de uma partícula é caracterizado pela variação de sua posição com o tempo. Como veremos, o curso de Física I (A e B) está dedicado ao estudo de diversos tipos de movimento, tanto do ponto de vista teórico, quanto do ponto de vista experimental. Os procedimentos experimentais utilizados para a análise do movimento de uma partícula passam sempre pela determinação das posições ocupadas pela partícula em diversos instantes de tempo. Mas como medir essa grandeza dita posição? Que características ela tem? A posição de uma partícula é um conceito absoluto ou relativo? Se a resposta for um conceito relativo, relativo a quê? Em outras palavras, ela só depende da partícula considerada ou também é necessário considerar outros corpos? Bem, neste momento do curso, você certamente já sabe como responder a essas perguntas, mas mesmo assim, nesta primeira aula experimental, iremos rediscutir essas e outras questões a partir de algumas práticas simples que faremos a seguir.

Antes, porém, é pertinente fazer um comentário sobre uma peculiaridade desta aula. Quando se faz uma medida experimental de uma grandeza, por vários motivos obtêm-se resultados numéricos com uma certa imprecisão. A essa imprecisão dá-se o nome **erro da medida**. Nesta primeira aula, os erros serão considerados de maneira bastante intuitiva e não serão tratados rigorosamente. Dessa maneira, antes de ser de fato um experimento, o que faremos aqui será um conjunto de atividades muito simples e lúdicas!

Você já teve algumas explicações sobre tratamento de erros no curso de Introdução à Física e aprofundará seus conhecimentos sobre o assunto, oportunamente, no curso de Física II.

Procedimento experimental

Material necessário

- Folhas de papel pardo
- Fita métrica e esquadros
- Fita adesiva
- Grãos de arroz
- Moedas

Prática I - Determinação de posições

Fixe com o auxílio da fita adesiva uma folha de papel pardo no tampo da mesa. Marque um ponto O perto do canto inferior esquerdo a aproximadamente 1,0 cm de cada margem do papel. Trace um eixo que passe por este ponto e seja paralelo à margem inferior do papel e, com o auxílio de esquadros, trace um outro eixo, que também passe pelo ponto O , mas seja perpendicular ao primeiro eixo. Nomeie esses eixos como $O\mathcal{X}$ e $O\mathcal{Y}$, respectivamente. Adote o sentido positivo do eixo $O\mathcal{X}$ para a direita e o do eixo $O\mathcal{Y}$ para cima, como mostra a **Figura 10.1**. Temos, dessa maneira, um sistema de eixos coordenados $O\mathcal{X}\mathcal{Y}$ fixo em relação à mesa e, conseqüentemente, à sala e à Terra.

De um modo geral, representamos uma coordenada referente ao eixo $O\mathcal{X}$ pela letra x e, analogamente, por y uma coordenada referente ao eixo $O\mathcal{Y}$

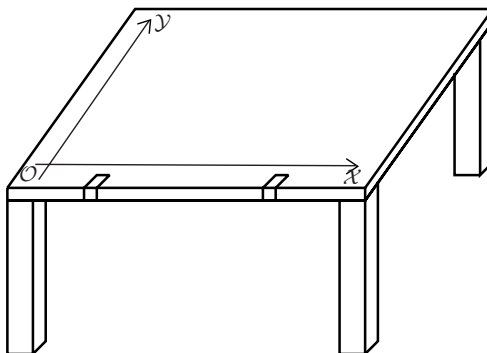


Figura 10.1: Mesa com o papel e os eixos já desenhados.

Marque, no papel, um ponto com coordenadas dadas por $x=40,0$ cm e $y=25,0$ cm em relação a este sistema de eixos. Você estará usando para medir as coordenadas uma fita métrica tradicional de costureira, cuja menor divisão é 1,0 cm. Como você viu no curso de Introdução à Física, ao se fazer uma medida experimental existe sempre uma imprecisão inerente ao método ou ao aparelho usado para este fim. No nosso caso, consideraremos a imprecisão das medidas da ordem de 0,5 cm. Isso representa metade da menor divisão de uma fita métrica de costureira.

Marque um outro ponto com coordenadas $x = 25,0$ cm e $y = 40,0$ cm. Note que os pontos não ficaram superpostos. Em notação de pares ordenados, dizemos que o primeiro ponto é caracterizado por (40,0 cm ; 25,0 cm), enquanto o segundo, por (25,0 cm ; 40,0 cm). Portanto, ao indicarmos o par de coordenadas que determinam a posição de uma partícula sobre a mesa, devemos tomar cuidado com a ordem dos elementos do par! Para se familiarizar mais com a marcação de pontos no plano \mathcal{OXY} , marque os pontos representados pelos pares ordenados: (10,0 cm; 30,0 cm) e (30,0 cm; 10,0 cm).

Observe que com a escolha sugerida para os eixos \mathcal{OX} e \mathcal{OY} , quase todos os pontos da folha de papel têm coordenadas x e y positivas. Se tivéssemos escolhido o ponto \mathcal{O} no centro da folha e tivéssemos usado eixos paralelos aos anteriores, teríamos pontos da folha com coordenadas x e y positivas ou negativas. Numa folha de papel comum, faça um esboço desse caso e indique em quais quadrantes definidos por esses eixos as coordenadas x e y são positivas e em quais elas são negativas. Você saberia dizer ainda onde estão os pontos com coordenadas x nulas? E com coordenadas y nulas?

Ponha agora um grão de arroz sobre cada um dos pontos marcados. Observe que a imprecisão na marcação dos pontos é maior do que as dimensões características do grão de arroz. Essas últimas, por sua vez, são muito menores do que as distâncias relevantes nessa atividade, ou seja, muito menores do que as distâncias entre os pontos marcados. Como você já aprendeu nas aulas teóricas, é justamente esse fato que nos permite pensar no grão de arroz como sendo um ponto material durante essa prática.

Vamos agora refazer essa prática, mas com um objeto um pouco maior do que um grão de arroz. Tente então colocar uma moeda grande (ou uma carta de baralho) sobre um dos pontos. Nesse caso, as dimensões da moeda ou da carta são maiores do que as imprecisões consideradas para as medidas (bem maiores no caso da carta) e você já terá uma certa dificuldade no seu posicionamento, o que não ocorreu com os grãos de arroz. No caso dos grãos, certamente você não se preocupou em saber se era o seu extremo superior ou inferior que deveria ser colocado na posição desejada. Mas no caso da moeda ou da carta, é muito

Em situações como essa, em que as dimensões de um corpo são desprezíveis em relação às distâncias características do problema em questão, tal corpo pode ser **idealizado** como uma **partícula**. Por exemplo, uma garrafa de guaraná de dois litros pode ser pensada como uma partícula quando se encontra armazenada dentro de um enorme galpão, mas certamente quando a colocamos em nossa geladeira ela não pode ser pensada como uma partícula.

provável que você tenha levantado essa questão. As dimensões das moedas já não são tão desprezíveis em relação às distâncias entre os pontos marcados e as dimensões das cartas, muito menos ainda.

Em todas as práticas desta aula usaremos grãos de arroz. Desse modo, com as imprecisões consideradas nas medidas e as distâncias envolvidas em cada prática, os grãos poderão ser idealizados como partículas. Além disso, você não fará nesta aula uma análise de erros (como se propagam os erros quando somamos ou multiplicamos duas medidas etc.), mas simplesmente escreverá os erros associados a cada medida que fizer para saber que eles existem.

Prática II - Determinação de deslocamentos

Tire de cima da folha de papel os objetos que você usou na prática anterior. Ponha um grão de arroz perto da margem esquerda do papel e à meia altura do mesmo. Marque a posição do grão no papel, meça-a e denomine-a por P_1 . Mova o grão para uma posição mais à direita e mais acima do primeiro ponto. Marque essa nova posição do grão no papel e após medi-la, denote-a por P_2 . A seguir, mova novamente o grão sobre o papel para mais à direita e para baixo. Marque e meça também essa posição, nomeando-a P_3 . Veja abaixo um esboço das posições usadas.

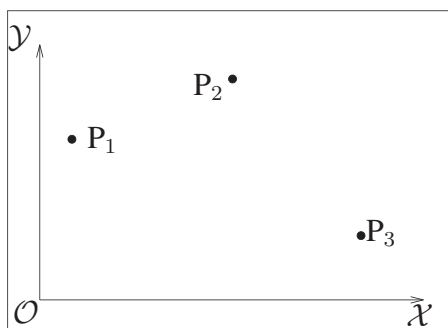


Figura 10.2: Esboço das posições escolhidas.

Desenhe na folha os deslocamentos, definidos como as variações das posições: $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$.

Observe, por exemplo, que o deslocamento $\overrightarrow{P_1P_2}$ é dado em termos das coordenadas dos pontos por:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (X_2 - X_1) \mathbf{u}_x + (Y_2 - Y_1) \mathbf{u}_y .$$

Assim, a medida experimental do deslocamento $\overrightarrow{P_1P_2}$ pode ser obtida a partir das medidas das coordenadas X_1 e Y_1 do ponto P_1 e das coordenadas X_2 e Y_2 do ponto P_2 . Entretanto, ao fazermos as medidas, temos associadas a elas imprecisões devido às leituras das medidas com a fita métrica. A cada medida havíamos associado uma imprecisão $\delta = 0,5 \text{ cm}$. Considere que erros de até $1,0 \text{ cm}$ podem ocorrer quando se somam ou subtraem grandezas (como as nossas) com imprecisões individuais de $\delta = 0,5 \text{ cm}$.

Defina os deslocamentos $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{d}_1$ e $\overrightarrow{P_2P_3} = \vec{d}_2$. Coloque novamente o grão de arroz sobre o ponto P_1 . Movimente então o grão de arroz com um deslocamento dado por \vec{d}_2 , fazendo com que ele atinja um ponto P'_2 , de coordenadas (X'_2, Y'_2) diferentes das coordenadas (X_2, Y_2) do ponto P_2 . Nesse momento, o que se pode afirmar do ponto de vista experimental é que a posição do grão está dentro de um pequeno quadrado em torno do ponto P'_2 , localizado no centro do quadrado. A partir daí, movimente novamente o grão, mas agora com o deslocamento \vec{d}_1 , fazendo com que ele atinja um ponto P'_3 . Observe então que, devido às imprecisões experimentais, a posição final do grão fica dentro de uma área quadrada do papel cujo centro é este ponto e cujo lado é $4\delta = 2,0 \text{ cm}$ (você teve de fazer quatro operações aritméticas de soma ou subtração para cada coordenada!). Verifique se o ponto inicialmente medido P_3 com sua imprecisão está dentro desta área.

Refaça esta prática, mas considerando agora 4 pontos e não apenas 3, como no caso descrito acima. Ou seja, coloque inicialmente o grão sobre o papel num ponto próximo à origem. Chame esse ponto Q_1 e meça suas coordenadas. Desloque o grão para um outro ponto, denote-o por Q_2 e meça suas coordenadas. Desloque novamente o grão até um terceiro ponto, designe-o por Q_3 e meça suas coordenadas. Finalmente, desloque o grão até um quarto e último ponto, chame-o Q_4 e meça também suas coordenadas (estamos contando com o seu bom senso na escolha dos pontos, para que não fiquem muito juntos). Feito isso, defina os deslocamentos:

$$\vec{d}'_1 := \overrightarrow{Q_1Q_2} ; \quad \vec{d}'_2 := \overrightarrow{Q_2Q_3} ; \quad \vec{d}'_3 := \overrightarrow{Q_3Q_4} .$$

Recoloque então o grão na posição Q_1 e a partir daí faça com que o grão atinja a sua posição final, dada pelo ponto Q'_4 , do seguinte modo: primeiramente, a partir de Q_1 , o grão se deslocará de \vec{d}'_3 atingindo o ponto Q'_2 ; desse ponto, o grão se deslocará de \vec{d}'_2 atingindo o ponto Q'_3 e, finalmente, desse ponto o grão se deslocará de \vec{d}'_1 atingindo a sua posição final dada pelo ponto Q'_4 .

Note que, do ponto de vista experimental, dizer que o grão está na posição Q'_2 , por exemplo, significa dizer que ele se encontra em algum ponto dentro de um quadrado centrado em Q'_2 e cujos lados estão relacionados com as imprecisões nas medidas e com as operações que fazemos com os valores medidos. Desenhe esses quadrados de incertezas nas posições do grão em torno dos pontos Q'_2 , Q'_3 e Q'_4 . À medida que temos mais e mais deslocamentos, o que acontece com as dimensões desses quadrados que representam experimentalmente as possíveis posições atingidas pelo grão? Compare seus tamanhos e tente explicar os resultados encontrados. Verifique também se o ponto Q_4 está dentro do quadrado em torno do ponto Q'_4 .

Prática III - Mudança de referencial

Tire novamente os grãos de arroz de cima do papel. Considere um novo referencial, cujos eixos correspondentes estão construídos a partir de uma nova origem O' com coordenadas $x = 30,0$ cm e $y = 20,0$ cm em relação aos eixos OXY do referencial anterior. Construa os novos eixos $O'X'Y'$ de modo que os eixos $O'X'$ e $O'Y'$ sejam paralelos, respectivamente, aos eixos OX e OY , como ilustra a **Figura 10.3**.

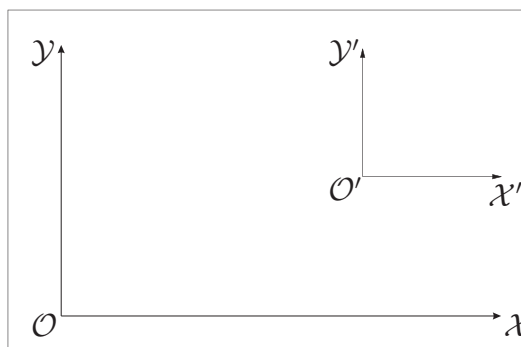


Figura 10.3: Os dois referenciais deslocados.

Ponha um grão de arroz numa posição qualquer sobre o papel, mas que fique relativamente longe das duas origens O e O' . Chame esse ponto P_1 . Meça as posições desse grão em relação aos dois referenciais, ou seja, meça as coordenadas (X_1, Y_1) de P_1 relativas ao referencial associado aos eixos OXY . Meça também as coordenadas (X'_1, Y'_1) de P_1 relativas ao referencial associado aos eixos $O'X'Y'$. Observe que os pares ordenados encontrados em suas medidas são diferentes, embora ambos descrevam as posições do mesmo grão de arroz (posição é um conceito relativo!). Desloque agora o grão para um novo ponto sobre a mesa,

que chamaremos P_2 . Meça também as posições do grão relativas aos dois referenciais quando ele se encontra em P_2 . Novamente você obterá diferentes pares ordenados, dados por (X_2, Y_2) e (X'_2, Y'_2) , mostrando mais uma vez que a posição de uma partícula depende do referencial.

A partir dessas medidas, calcule os deslocamentos do grão relativamente a cada um dos referenciais, isto é:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{r} &= (X_2 - X_1) \mathbf{u}_x + (Y_2 - Y_1) \mathbf{u}_y \\ \Delta \mathbf{r}' &= (X'_2 - X'_1) \mathbf{u}_x + (Y'_2 - Y'_1) \mathbf{u}_y.\end{aligned}$$

Verifique que, dentro das imprecisões consideradas para as medidas, $\Delta \mathbf{r}$ e $\Delta \mathbf{r}'$ coincidem. Esse resultado ilustra o fato de que, embora as posições de uma partícula dependam do referencial, seus deslocamentos não dependem.

Verifique ainda que as distâncias entre P_1 e P_2 calculadas a partir das medidas relativas aos diferentes referenciais são iguais, também dentro das imprecisões consideradas para as medidas. Tais distâncias são obtidas pelos respectivos módulos dos deslocamentos medidos, isto é:

$$\begin{aligned}d &= |\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \\ d' &= |\Delta \mathbf{r}'| = \sqrt{(X'_2 - X'_1)^2 + (Y'_2 - Y'_1)^2}.\end{aligned}\quad (10.1)$$

Considere o erro experimental nas expressões para as distâncias calculadas como sendo $\approx 3\delta = 1,5$ cm (justificaremos este valor mais adiante nesta disciplina).

Como uma última medida desta prática, meça diretamente com a fita métrica a distância entre os pontos P_1 e P_2 . Compare o valor encontrado com os valores escritos para d e d' e verifique que coincidem, dentro das imprecisões consideradas.

Prática IV - Rotação de referencial

Retire o arroz usado na prática anterior de cima do papel. Considere um terceiro referencial, cujos eixos correspondentes $\mathcal{O}''\mathcal{X}''\mathcal{Y}''$ possuem a mesma origem que os eixos $\mathcal{O}'\mathcal{X}'\mathcal{Y}'$, isto é, \mathcal{O}'' coincide com \mathcal{O}' , mas os eixos $\mathcal{O}''\mathcal{X}''$ e $\mathcal{O}''\mathcal{Y}''$ estão rodados 45° no sentido anti-horário em relação aos eixos anteriores $\mathcal{O}'\mathcal{X}'$ e $\mathcal{O}'\mathcal{Y}'$, respectivamente, como ilustra a **Figura 10.4**.

Repita o procedimento da prática anterior e mostre novamente que embora as posições do grão de arroz dependam dos referenciais, os deslocamentos medidos nos dois referenciais coincidem, dentro das imprecisões consideradas para

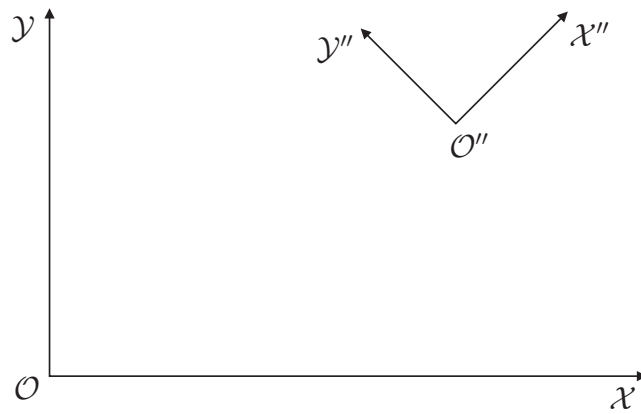


Figura 10.4: Os dois referenciais deslocados e rodados.

as medidas. Verifique que as distâncias entre os dois pontos calculadas a partir das medidas nos dois referenciais também coincidem, dentro da precisão que estipulamos para as nossas medidas.

Prática V - Deslocamento em três dimensões

Coloque um grão de arroz em cima de uma mesa ou estante do recinto onde você está. Considere um referencial construído a partir de um ponto O em um dos cantos do recinto com o eixo OZ vertical e direcionado para cima. Considere ainda os outros dois eixos OX e OY perpendiculares entre si e também ao eixo OZ . Boas escolhas para esses eixos seriam, possivelmente, os rodapés da sala. Determine então, com o auxílio de uma fita métrica, a posição do grão, agora caracterizada por uma trinca de números (X, Y, Z) , em relação a este referencial. Desloque o grão de arroz para uma nova posição, de preferência que não tenha nenhuma coordenada igual à posição anterior. Meça esta nova posição (X', Y', Z') em relação ao mesmo referencial. Obtenha o deslocamento do grão $\Delta\vec{r}$. Calcule o seu módulo, isto é:

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2 + (\Delta Z)^2}.$$

Utilizando a fita métrica, meça também diretamente a distância entre a posição inicial do grão e sua posição final. Compare a distância assim obtida com a calculada a partir do módulo do deslocamento e verifique que coincidem, dentro da precisão estipulada para as nossas medidas. Para efeito de comparação, considere, neste caso, que a imprecisão obtida na manipulação dos dados no cálculo do módulo do deslocamento é igual a 3 cm.

Resumo

Nesta aula experimental, você realizou algumas medidas que o ajudaram a compreender melhor os conceitos de referencial, partícula, posição e deslocamento. Na maior parte das práticas nos restringimos, por simplicidade, a medições de posições e deslocamentos em duas dimensões. Apenas uma prática envolveu a medida de um deslocamento em três dimensões. Procuramos mostrar, com exemplos simples, quando um corpo pode ser considerado como uma partícula, enfatizando que isso é possível sempre que as suas dimensões forem desprezíveis em relação às distâncias relevantes do problema em questão. Mostramos ainda que a determinação da posição de uma partícula requer necessariamente a escolha de um referencial. Finalmente, verificamos que, embora a posição de uma partícula dependa do referencial escolhido, o seu deslocamento não depende do referencial.

Tarefas para casa

Para verificar se você aprendeu bem a trabalhar com pares ordenados, sugerimos que você faça a seguinte tarefa em sua casa: desenhe numa folha de papel um par de eixos coordenados ortogonais entre si e os nomeie \mathcal{OXY} . Indique nessa folha o conjunto de pontos que satisfazem às seguintes condições:

- $X = 0$ cm
- $Y = 0$ cm
- $X > Y$
- $X^2 + Y^2 < 9$ cm
- $X^2 + Y^2 < 9$ cm e $X > Y$ simultaneamente

Auto-avaliação

Você deve ser capaz de realizar todas as práticas desta aula sem nenhuma dificuldade, incluindo as tarefas sugeridas para casa, pois trata-se de atividades muito simples, cujo objetivo principal consiste em consolidar os conceitos básicos necessários para experimentos mais complexos. Caso você tenha encontrado alguma dificuldade em fazê-las, não passe adiante sem antes consultar os tutores locais, a fim de que eles resolvam suas dúvidas.

Leitura complementar. Padrões e unidades de tempo e distância.

Os dicionários registram em nossa língua dois significados para o verbete tempo. Tempo significa, primeiramente, duração tal como indicada pelos relógios. Também pode significar estado atmosférico, como quando dizemos que o tempo está bom, significando, por exemplo, que não há chuva. Aqui, naturalmente, estaremos falando sobre o tempo em seu sentido primário, de duração.

Em 1581, o jovem Galileu percebeu que o período das oscilações de um candelabro da catedral de Pisa era o mesmo qualquer que fosse a amplitude das oscilações, resultado conhecido como o isocronismo das oscilações de um pêndulo. Galileu chegou a essa conclusão comparando as oscilações do candelabro com o seu ritmo cardíaco, medindo o seu próprio pulso. Obviamente, esse resultado é aproximado e pode-se mostrar que é válido para pequenas oscilações. A descoberta de Galileu deu origem à construção dos relógios de pêndulo.

Temos um conceito intuitivo sobre o que vem a ser o tempo, pois, frequentemente, falamos algo a seu respeito. Percebemos o fluir do tempo, falamos em desperdício de tempo, em perda de tempo e em ganhar ou recuperar o tempo. Sabemos dizer quão rapidamente ou lentamente ocorrem os acontecimentos em nossas vidas. Sabemos até mesmo medir o tempo por meio de relógios e cronômetros. No entanto, se alguém nos perguntar qual a definição rigorosa de tempo, provavelmente ficaremos embaraçados.

Filósofos e cientistas já tentaram definir o tempo e ainda hoje sua essência íntima é cercada de mistério. Para nosso estudo da Física, felizmente, não necessitaremos desvendar a totalidade desse mistério.

Em Física, consideramos tempo como um conceito primitivo. Utilizamos então uma noção intuitiva para medi-lo, isto é, para obter números que expressem a idéia intuitiva de duração, a partir de procedimentos bem precisos de medição. Esse tempo expresso como números é então utilizado na construção da ciência e, em particular, na construção da mecânica clássica.

A noção intuitiva de tempo é a que provém da comparação de movimentos. Comparamos o movimento de um automóvel do Rio de Janeiro até Campos, com o movimento dos ponteiros de um relógio, para dizer que a viagem durou 3 horas e 35 minutos. Os antigos comparavam o movimento das aves em migração com o movimento do Sol, para dizer que elas iam e voltavam a cada seis meses, por exemplo.

Um modo bastante conveniente de medir o tempo é utilizar algum fenômeno que se repita indefinidamente, como por exemplo, o movimento de rotação da Terra em torno de seu eixo, ou as sucessivas fases da Lua, entre outros. Tais movimentos nos permitem definir um intervalo de tempo padrão como sendo aquele transcorrido durante um ciclo do movimento, ou seja, durante duas situações idênticas sucessivas.

Por exemplo, o intervalo de tempo entre dois nasceres do Sol consecutivos vistos do mesmo ponto da Terra, definido como dia solar, ou simplesmente dia, define um padrão de tempo que poderá ser utilizado na análise de outros movimentos. Definido o dia, podemos dizer, por exemplo, que o intervalo de tempo entre duas fases consecutivas de Lua cheia é de 28 dias, ou que a Terra dá uma volta em torno do Sol em aproximadamente 365 dias.

Num sentido bem geral, chamamos relógio qualquer instrumento que realiza um fenômeno que se repete indefinidamente e que é utilizado na medição do tempo. Nesse sentido, um dos primeiros relógios da Humanidade foi a própria rotação da Terra. Adotando-se um relógio padrão torna-se possível definir uma unidade de tempo. Podemos então expressar intervalos de tempo em termos dessa unidade e de seus múltiplos e submúltiplos. Até 1956, adotava-se a unidade padrão do tempo como sendo o segundo(s), definido-o como $1/86.400$ do dia solar médio (média do dia solar durante um ano). Em 1956, por causa das irregularidades na rotação da Terra, a definição do segundo mudou e essa unidade passou a ser definida como $1/31.556.925,9747$ da duração do ano tropical de 1900.

Um ano tropical é definido como o intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do Sol pelo equinócio de primavera.

Os chamados relógios atômicos são baseados nos períodos de oscilação das ondas eletromagnéticas emitidas pelos átomos, períodos esses que são característicos de cada átomo. Com esses relógios é possível atingir uma precisão na medição do tempo, de uma parte em 10^{12} . Essa precisão pode ser ainda aumentada para uma parte em 10^{15} com a utilização de técnicas de confinamento e resfriamento de átomos.

Em 1967, um tal relógio atômico foi adotado como padrão. Nesse relógio, utiliza-se a onda eletromagnética correspondente à transição característica do elemento químico chamado Césio 133 (quando aquecido ele emite uma luz na qual identificamos essa onda eletromagnética da transição característica). O segundo passou então a ser definido como 9.192.631.770 períodos da tal onda eletromagnética emitida pelo Césio. Usando essa unidade de tempo para medir o período de rotação da Terra, verificamos que esse período é de fato irregular, sendo nele perceptíveis variações de uma parte em 10^8 .

Consideramos o espaço, assim como o tempo, como um conceito primitivo, e utilizamos o conceito intuitivo que dele temos para medir comprimentos e distâncias. Esses processos de medição são utilizados na construção das teorias físicas, em particular, na construção da mecânica clássica.

A medida de distância ou comprimento requer a escolha de um padrão de comprimento e de unidade de comprimento associada a esse padrão. De posse do padrão, medir uma distância significa fazer uma comparação direta entre a distância que se deseja medir e a unidade padrão, contando-se quantas unidades correspondem a essa distância. Essa unidade padrão é, em princípio, arbitrária. Pode ser, por exemplo: o comprimento de uma determinada barra, o comprimento do pé de uma certa pessoa, o perímetro da roda de uma bicicleta, a distância Terra-Lua, entre outros. No entanto, dependendo do padrão escolhido, reproduzi-lo com exatidão poderá ser uma tarefa árdua. Por isso, a escolha de um padrão

conveniente deve se criteriosa. Com o tempo, padrões de comprimento cada vez melhores têm sido adotados.

Por necessidades cartográficas e de navegação do final do século XVIII, após a revolução francesa adotou-se como unidade padrão o metro (m), que foi definido como $1/40.000.000$ da distância do Equador ao Pólo Norte, ao longo do meridiano de Paris. Em 1889, o metro padrão passou a ser definido como a distância entre dois traços numa barra de uma liga de platina com irídio, guardada sob condições bem especificadas no *Bureau International de Poids e Mesures* de Sèvres, na França. Em 1960, o metro foi redefinido como $1\text{m} = 1.650.763,73$ comprimentos de onda no vácuo da radiação eletromagnética característica do ^{86}Kr (Criptônio 86). Note que, além de ser esta definição muito mais precisa do que as anteriores, é de fácil reprodução em qualquer laboratório competente ao longo do globo terrestre. Finalmente, em 1983, o padrão de comprimento foi trocado por um padrão de velocidade, baseado na velocidade da luz no vácuo. Esta velocidade é considerada uma constante universal. Seu valor exato é dado, por definição, por $c = 299.792.458\text{m/s}$. Nesse sentido, um metro passou a ser a distância percorrida pela luz em $1/299.792.458$ segundo (o padrão de tempo continuou a ser definido como descrevemos anteriormente). Conseqüentemente, cada vez que o padrão de tempo é reajustado, automaticamente o metro padrão também fica reajustado. Apesar dessa última definição para o metro, para fins práticos de construção de padrões de alta qualidade em diferentes laboratórios, ainda se utiliza a definição baseada no ^{86}Kr , descrita acima.

Finalmente, é importante notar que as medições de tempos e distâncias são importantes não só do ponto de vista conceitual, para fundamentar as teorias da Física, como também do ponto de vista prático, para as atividades tecnológicas, industriais e comerciais. Sem processos e unidades de medição de tempos e distâncias, e de outras grandezas fundamentais, as atividades industriais e comerciais contemporâneas ficariam muito prejudicadas, quando não se tornassem impossíveis. Uma nação moderna e próspera é uma nação que domina os processos de mensuração das grandezas fundamentais como tempo e comprimento. No Brasil o órgão oficial responsável por essas questões é o INMETRO, o Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (<http://www.inmetro.gov.br>).

Aula 11 – Exemplos de movimentos não-retilíneos

Objetivo

- Aplicar as definições e os conceitos da cinemática vetorial adquiridos nas aulas anteriores na discussão de alguns movimentos não-retilíneos importantes, como por exemplo: o movimento de projéteis, o movimento circular e o movimento cicloidal.

Introdução

Na aula 9, utilizamos o conceito de segmento orientado e o conceito de vetor para definir quantidades muito importantes na descrição do movimento de uma partícula, tais como seu vetor posição, sua velocidade e sua aceleração. A partir das relações entre velocidade e posição, e entre aceleração e velocidade de uma partícula em movimento unidimensional, estudadas nas primeiras aulas deste curso, obtivemos as relações entre tais quantidades no caso de um movimento não retilíneo genérico, a saber:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (11.1)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (11.2)$$

Embora saibamos operar com vetores geometricamente (somá-los, subtraí-los etc.), é bastante conveniente trabalhar com as suas componentes numa certa base, como por exemplo, a base cartesiana. Nesse caso, temos:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y + z \mathbf{u}_z, \quad (11.3)$$

e conseqüentemente,

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{u}_z \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{dv_x}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \mathbf{u}_z = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{u}_z. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Se for conveniente, as equações anteriores podem ser escritas em termos das funções-movimento e de suas derivadas temporais. No entanto, o importante é

ter em mente que, uma vez conhecida a função-movimento f de uma partícula, definida pela equação

$$\mathbf{r} = f(t) = f_x(t)\mathbf{u}_x + f_y(t)\mathbf{u}_y + f_z(t)\mathbf{u}_z, \quad (11.6)$$

temos imediatamente a velocidade e a aceleração dessa partícula em qualquer instante de tempo:

$$\mathbf{v} = \dot{f}(t) = \dot{f}_x(t)\mathbf{u}_x + \dot{f}_y(t)\mathbf{u}_y + \dot{f}_z(t)\mathbf{u}_z, \quad (11.7)$$

$$\mathbf{a} = \ddot{f}(t) = \ddot{f}_x(t)\mathbf{u}_x + \ddot{f}_y(t)\mathbf{u}_y + \ddot{f}_z(t)\mathbf{u}_z. \quad (11.8)$$

Em analogia ao caso unidimensional, o caminho inverso também é possível. Ou seja, conhecendo-se a função-aceleração de uma partícula, podemos utilizar o conceito de integral para obter, a menos de constantes de integração, a sua função-velocidade e a sua função-movimento.

Mais especificamente, dada a função de aceleração e a velocidade \mathbf{v}_0 no instante t_0 , podemos escrever para a velocidade num instante t qualquer:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t [\ddot{f}_x(t')\mathbf{u}_x + \ddot{f}_y(t')\mathbf{u}_y + \ddot{f}_z(t')\mathbf{u}_z] dt'. \quad (11.9)$$

Analogamente, sabendo-se a posição da partícula num dado instante, podemos integrar a equação anterior e obter o vetor de posição da partícula em qualquer instante. Por exemplo, sendo \mathbf{r}_0 a posição da partícula em t_0 , temos:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} [\ddot{f}_x(t'')\mathbf{u}_x + \ddot{f}_y(t'')\mathbf{u}_y + \ddot{f}_z(t'')\mathbf{u}_z] dt''. \quad (11.10)$$

Para o caso de uma aceleração constante igual a \mathbf{a} , a expressão anterior nos fornece (veja o problema 1):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\mathbf{a}(t - t_0)^2. \quad (11.11)$$

No caso particular em que $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, obtemos a função-movimento vetorial de um MRU:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0). \quad (11.12)$$

Nesta aula, aplicaremos os conceitos que acabamos de revisar na descrição de problemas particulares, porém, de grande importância num estudo introdutório da mecânica da partícula. Em particular, discutiremos nas próximas três seções, respectivamente, o movimento de projéteis, o movimento circular e o movimento cicloidial.

Nesse momento, vale a pena relembrar alguns conhecimentos que você adquiriu na seção *Derivadas e Integrais* da aula 5. Calcular a integral de uma certa função consiste, basicamente, em encontrar uma função primitiva da função a ser integrada. No entanto, se somarmos uma constante à função primitiva de uma dada função obteremos uma outra função primitiva desta mesma função, uma vez que a derivada de uma função constante é sempre nula.

Como de costume, encontra-se no final da aula uma lista de problemas propostos. Nela, você terá de fazer tanto demonstrações de resultados utilizados no texto da aula quanto aplicações numéricas do que foi discutido na mesma. Sugere-mos que você resolva o maior número possível de problemas dessa lista, tarefa que irá ajudá-lo a se familiarizar cada vez mais com a notação vetorial.

O movimento de projéteis

Já estudamos anteriormente o movimento vertical de um corpo que está próximo à superfície terrestre e cujas velocidades, durante seu movimento, são pequenas o suficiente para desprezarmos a resistência do ar. Nessas circunstâncias, você aprendeu que qualquer corpo descreve um MRUV, com uma aceleração de módulo igual a $9,8\text{m/s}^2$ e apontando sempre para o centro da Terra (esta direção determina a vertical local). Esse tipo de movimento, como vimos na aula 7, é um caso particular do chamado movimento de queda livre. Particular porque pode-se (e deve-se) estudar também movimentos de queda livre levando-se em consideração a resistência do ar.

Nesta seção, iremos analisar movimentos um pouco mais gerais do que os de queda livre estudados na aula 7, mas ainda com as restrições de proximidade da Terra e resistência do ar desprezível. Nossa generalização consistirá em considerar movimentos não retilíneos, ou seja, movimentos nos quais a partícula possui tanto uma componente vertical de velocidade como uma componente horizontal. Ou seja, consideraremos nesta seção movimentos com lançamentos oblíquos, comumente chamados **movimentos de projéteis**.

Uma propriedade do movimento que pretendemos estudar, e de qualquer outro cuja aceleração da partícula em estudo seja constante, é que a partícula descreve uma trajetória plana, isto é, seu movimento ocorre sempre num mesmo plano do espaço (no problema 2, você é convidado a demonstrar esse resultado). No movimento de projéteis a ser estudado, a aceleração é igual à aceleração da gravidade, sempre com o mesmo módulo, com a direção vertical e apontando para baixo. Por conveniência, vamos escolher os eixos cartesianos de modo que o movimento ocorra no plano $\mathcal{OX}\mathcal{Y}$.

Suponha então que uma partícula seja lançada do ponto $P_0(x_0, y_0, 0)$ com uma velocidade de módulo igual a $v_0 := |\mathbf{v}_0|$. Seja θ_0 o ângulo entre a sua velocidade no instante do lançamento (t_0) e o vetor unitário \mathbf{u}_x relativo ao eixo horizontal \mathcal{OX} . A **Figura 11.1** ilustra esse lançamento.

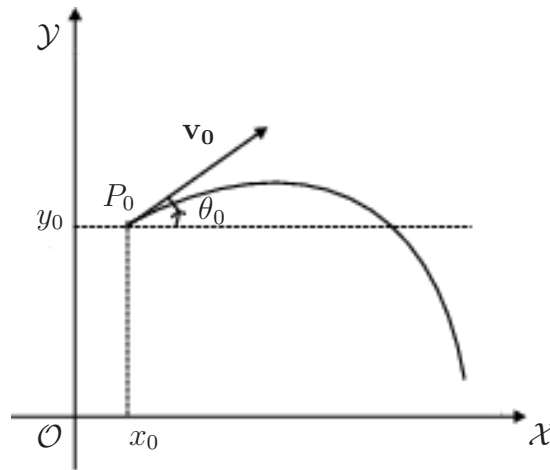


Figura 11.1: Projétil lançado de um ponto $P_0(x_0, y_0)$ com velocidade \mathbf{v}_0 .

Nosso objetivo aqui é encontrar a função-movimento do projétil, conhecida a sua aceleração, que no caso é constante e dada por $\mathbf{a} = -g \mathbf{u}_y$. Consequentemente, utilizando a equação (11.11), obtemos:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \mathbf{u}_y. \quad (11.13)$$

Substituindo na equação anterior as expressões de \mathbf{r}_0 e \mathbf{v}_0 em termos de suas componentes cartesianas,

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0 = x_0 \mathbf{u}_x + y_0 \mathbf{u}_y \\ \mathbf{v}_0 = v_{x0} \mathbf{u}_x + v_{y0} \mathbf{u}_y, \end{cases} \quad (11.14)$$

e reagrupando convenientemente os termos, obtemos:

$$\mathbf{r} = [(x_0 + v_{x0}(t - t_0)) \mathbf{u}_x + [y_0 + v_{y0}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2] \mathbf{u}_y]. \quad (11.15)$$

Identificamos, então, as componentes cartesianas do vetor posição do projétil num instante genérico:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{x0}(t - t_0) \\ y = y_0 + v_{y0}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2. \end{cases} \quad (11.16)$$

Uma vez que foram dados o módulo da velocidade inicial e o ângulo θ_0 entre \mathbf{v}_0 e \mathbf{u}_x , devemos expressar as componentes v_{x0} e v_{y0} em termos dessas quantidades. Usando os conceitos de projeção adquiridos na aula 9, temos:

$$\begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 \\ v_{y0} = v_0 \sin \theta_0 \end{cases} \quad (11.17)$$

Sem perder o caráter geral de nossa discussão, escolheremos $t_0 = 0\text{s}$ (lembre-se de que podemos zerar o nosso cronômetro no instante que mais nos convier). Com isso, as equações estabelecidas em (11.16) são reescritas na forma:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cos \theta_0 t \\ y = y_0 + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (11.18)$$

Desejamos saber agora qual é a trajetória descrita pelo projétil. Na verdade, as equações presentes em (11.16) já nos dão essa trajetória, uma vez que, dado um instante de tempo t qualquer, elas fornecem as coordenadas do projétil, ou seja, o ponto onde ele se encontra nesse instante. Como ambas as coordenadas são escritas em função de um parâmetro (no caso, o tempo t), tais equações são chamadas **equações paramétricas da trajetória**. No entanto, muitas vezes é conveniente relacionar diretamente as coordenadas cartesianas da partícula em movimento, obtendo assim a **equação cartesiana de sua trajetória**.

A fim de eliminar o tempo das equações (11.16), escrevemos, a partir da primeira delas, a seguinte relação:

$$t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta_0}.$$

Substituindo essa expressão na segunda equação em (11.16), obtemos:

$$y = y_0 + \tan \theta_0 (x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} (x - x_0)^2. \quad (11.19)$$

Essa é a equação cartesiana da trajetória do projétil. Trata-se de uma parábola, de eixo vertical, e que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, 0)$. Note ainda que a tangente a essa parábola, passando por P_0 , tem a mesma direção de \mathbf{v}_0 , como era de se esperar (veja o problema 3).

É muito comum escolher a origem dos eixos cartesianos no ponto de lançamento do projétil, principalmente quando ele é lançado do solo. Nesse caso, a equação cartesiana de sua trajetória se reduz a:

$$y = \tan \theta_0 x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2. \quad (11.20)$$

Caso $\pi/2 < \theta_0 < \pi$, o projétil atingirá o solo no ponto de coordenadas $x = -A$ e $y = 0$.

Vejamos agora como calcular a altura máxima atingida pelo projétil e a que distância do ponto de lançamento ele atinge o solo. Essa distância é chamada **alcance do projétil** e será denotada por A . Portanto, se o ângulo de lançamento do projétil for um ângulo agudo ($\theta_0 < \pi/2$), podemos dizer que o projétil atinge o solo no ponto de coordenadas $x = A$ e $y = 0$.

Com tudo isso em mente, calculemos, inicialmente, o instante em que o projétil atinge o ponto mais alto de sua trajetória, instante que denotaremos por t_m . Por definição, nesse instante, a velocidade vertical do projétil é nula, de modo que:

$$v_0 \sin \theta_0 - g t_m = 0 \quad \longrightarrow \quad t_m = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}.$$

Substituindo esse resultado na segunda equação escrita em (11.18), obtemos a altura máxima atingida pelo projétil:

$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}. \quad (11.21)$$

O alcance pode ser determinado simplesmente calculando-se qual é a coordenada x do projétil no instante em que ele retorna ao solo. Do mesmo modo que no movimento de queda livre, aqui também o tempo gasto pelo projétil para atingir a altura máxima (tempo de subida) é igual à metade do tempo total de voo. Desse modo, o tempo de voo é dado por:

$$t_A = 2t_m = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g}.$$

Substituindo esse resultado na primeira equação escrita em (11.18), obtemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{2v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0 = \\ &= \frac{v_0^2}{g} \sin(2\theta_0), \end{aligned} \quad (11.22)$$

onde usamos a identidade trigonométrica $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

A partir dessa expressão para o alcance, é imediato concluir que, dentre todos os projéteis lançados com velocidades iniciais de mesmo módulo, mas com ângulos de lançamento diferentes, terá o maior alcance aquele que for lançado com $\theta_0 = \pi/4$, isto é, com 45° . Isso ocorre simplesmente porque $\sin(2\theta_0)$ tem um máximo em $2\theta_0 = \pi/2$. Além disso, como $\sin(\pi/2) = 1$, o alcance máximo de um projétil lançado com velocidade inicial de módulo v_0 é dado por $A_m = v_0^2/g$.

Para lançamentos feitos com o mesmo valor de v_0 , fica também evidente que os alcances correspondentes àqueles feitos com ângulos de lançamento complementares são exatamente iguais. Em outras palavras, os alcances de projéteis

A demonstração desse resultado é totalmente análoga àquela feita no estudo da queda livre; o tempo de voo só depende da componente vertical da velocidade no instante do lançamento (v_{y0}) e da aceleração da gravidade (g), não importando com que rapidez o projétil se movimenta horizontalmente. No entanto, é importante mencionar que essa independência dos movimentos horizontal e vertical, em geral, deixa de ser válida nos casos mais realistas, nos quais a resistência do ar influencia o movimento.

lançados com ângulos iniciais de $45^\circ + \alpha$ e $45^\circ - \alpha$, com $0 < \alpha < 45^\circ$, são os mesmos, como ilustra a **Figura 11.2**. Demonstre esse resultado!

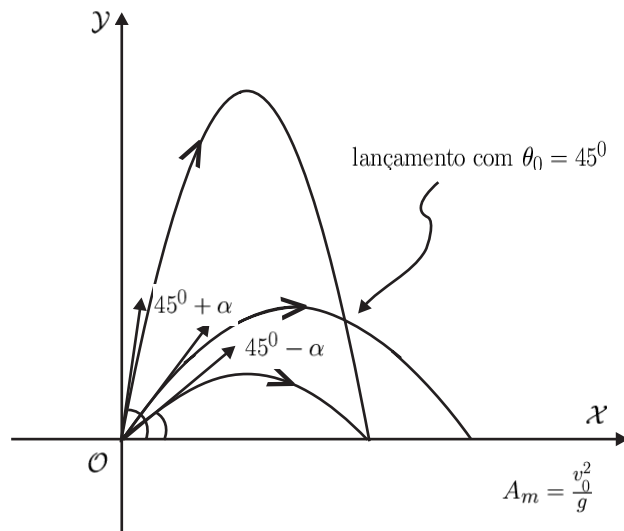


Figura 11.2: Alcance máximo e alcances para ângulos complementares (todos os lançamentos feitos com o mesmo v_0).

Vale a pena finalizar esta seção comentando que o tipo de movimento que acabamos de analisar aparece em outras situações de interesse em física. Por exemplo, partículas carregadas na presença de campos eletrostáticos uniformes sofrem acelerações constantes. Inclusive, as condições idealizadas em que supusemos não haver resistência do ar podem se cumprir de uma forma mais rigorosa com partículas atômicas ou subatômicas (como os elétrons) do que no caso de projéteis, pois tais partículas podem ser lançadas em regiões de alto vácuo (diminuindo, assim, praticamente a zero a resistência do ar). Justamente movimentos desse tipo estavam presentes nas experiências que levaram J.J. Thomson a descobrir o elétron em 1897.

J.J. Thomson utilizou um aparelho conhecido como **tubo de raios catódicos**, uma espécie de versão primitiva dos modernos tubos de osciloscópio ou de televisão.

Reverendo o movimento circular

Nesta seção, discutiremos novamente o movimento circular já tratado na aula 9, com o objetivo de rever algumas de suas características e aprender alguns aspectos novos a respeito desse movimento. Em particular, deduziremos novamente a fórmula para a aceleração centrípeta no caso de um MCU utilizando apenas argumentos geométricos.

Na aula 9, estudamos a função-movimento vetorial de um MCU de frequência angular constante ω . Mostramos que se a origem dos eixos cartesianos for escolhida no centro da trajetória circular, se esta possuir um raio R e se a partícula

se mover no sentido anti-horário, então, a sua posição num instante genérico t será dada por:

$$\mathbf{r} = R[\cos(\omega t + \theta_0) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t + \theta_0) \mathbf{u}_y] . \quad (11.23)$$

Note que introduzimos o parâmetro θ_0 no argumento das funções trigonométricas presentes na função-movimento vetorial escrita acima. A sua presença indica, apenas, que no instante $t = 0$ s o ângulo entre o vetor posição da partícula e o vetor unitário \mathbf{u}_x não é zero, e sim θ_0 . Ou seja, em $t = 0$ s, a partícula não se encontra no ponto $(R, 0)$ sobre o eixo \mathcal{OX} , como ocorre na discussão feita na aula 9, mas sim no ponto $(R\cos\theta_0, R\sin\theta_0)$. Por exemplo, se $\theta_0 = \pi/2$, a posição inicial da partícula é $\mathbf{r}_0 = R \mathbf{u}_y$ e, nesse caso, no instante $t = 0$ s, ela se encontra no ponto $(0, R)$ do plano \mathcal{OXY} .

A velocidade e a aceleração da partícula num instante genérico são obtidas calculando-se, respectivamente, a primeira e a segunda derivada temporal da função-movimento vetorial:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega R[-\sin(\omega t + \theta_0) \mathbf{u}_x + \cos(\omega t + \theta_0) \mathbf{u}_y]; \\ \mathbf{a} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\omega^2 R[\cos(\omega t + \theta_0) \mathbf{u}_x + \sin(\omega t + \theta_0) \mathbf{u}_y] . \end{aligned} \quad (11.24)$$

Como fizemos na aula 9, vamos designar por θ o ângulo entre o vetor posição da partícula num instante genérico e o vetor unitário \mathbf{u}_x . Portanto, no caso do MCU em questão, $\theta = \omega t + \theta_0$. Desse modo, as equações anteriores tomam a forma:

$$\mathbf{v} = \omega R(-\sin\theta \mathbf{u}_x + \cos\theta \mathbf{u}_y) ; \quad \mathbf{a} = -\omega^2 R(\cos\theta \mathbf{u}_x + \sin\theta \mathbf{u}_y) . \quad (11.25)$$

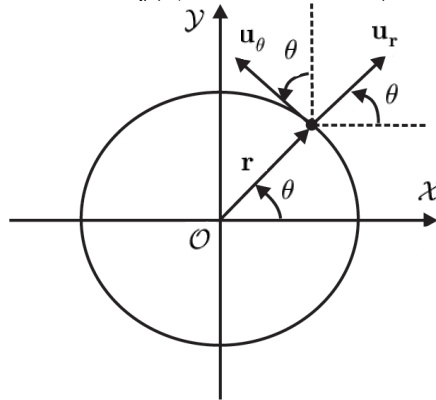


Figura 11.3: Vetores unitários \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ .

Com o auxílio da **Figura 11.3**, note que $\cos\theta \mathbf{u}_x + \sin\theta \mathbf{u}_y$ é um vetor unitário que aponta na direção radial com sentido saindo da origem. Designando-o por \mathbf{u}_r , podemos escrever o vetor posição da partícula neste MCU como:

$$\mathbf{r} = R \mathbf{u}_r . \quad (11.26)$$

Observe que no MCU a aceleração também aponta na direção radial, mas com sentido para dentro da curva, de modo que

$$\mathbf{a} = -\omega^2 R \mathbf{u}_r . \quad (11.27)$$

Da **Figura 11.3**, vemos ainda que $-\sin\theta \mathbf{u}_x + \cos\theta \mathbf{u}_y$ é também um vetor unitário, cuja direção é perpendicular à radial e, portanto, tangencial à trajetória circular da partícula, e com sentido indicado nesta figura. Designando-o por \mathbf{u}_θ , a velocidade da partícula, nesse movimento, pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{v} = \omega R \mathbf{u}_\theta . \quad (11.28)$$

Lembrando que $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ e $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, e utilizando os resultados anteriores, somos levados aos seguintes resultados, válidos num MCU:

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \omega \mathbf{u}_\theta; \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\omega \mathbf{u}_r . \quad (11.29)$$

Considerando ainda um MCU, vamos agora utilizar argumentos geométricos para reobter a expressão da aceleração dada por (11.27). Com esse objetivo, vamos considerar a posição da partícula em dois instantes próximos, a saber, os instantes t e $t' = t + \Delta t$. Sejam P e P' os pontos onde a partícula se encontra nos instantes t e t' , respectivamente, como indica a **Figura 11.4**.

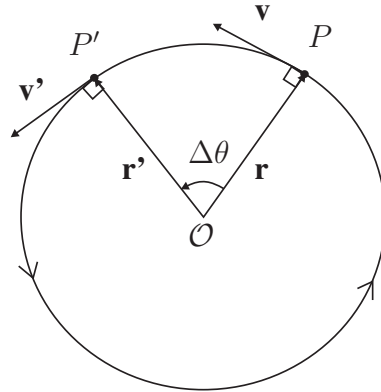


Figura 11.4: Posições da partícula nos instantes t e t' .

Designemos por $\Delta\theta$ o ângulo descrito pela partícula durante o intervalo $[t, t']$, de duração Δt . Designemos ainda por \mathbf{r} o vetor posição da partícula em t , por \mathbf{r}' o vetor posição da partícula em t' , por \mathbf{v} a velocidade da partícula em t e por \mathbf{v}' a velocidade da partícula em t' . Todos esses vetores e o ângulo $\Delta\theta$ estão indicados na **Figura 11.4**. A duração Δt deve ser bem pequena. De fato, iremos tomar inclusive o limite em que $\Delta t \rightarrow 0$ no final de nossa análise.

Lembre-se de que num MCU o vetor posição da partícula tem módulo constante e, portanto, $|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}|$. Também num MCU, o módulo da velocidade permanece constante, o que acarreta $|\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}|$.

O deslocamento da partícula no intervalo $[t, t']$ é dado por $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ e sua variação de velocidade, nesse mesmo intervalo, por $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$, como ilustra a **Figura 11.5**. Observe, no entanto, que o triângulo formado pelos vetores \mathbf{r} , \mathbf{r}' e $\Delta \mathbf{r}$ é semelhante ao triângulo formado pelos vetores \mathbf{v} , \mathbf{v}' e $\Delta \mathbf{v}$, pois ambos são triângulos isóceles com o mesmo ângulo $\Delta \theta$ entre os lados iguais.

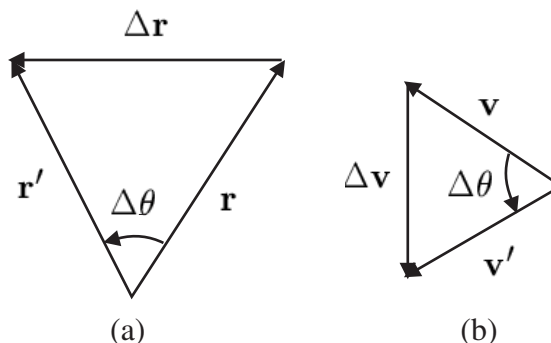


Figura 11.5: (a) Deslocamento em Δt ; (b) Variação de velocidade em Δt .

Utilizando então a semelhança entre os triângulos da **Figura 11.5**, escrevemos:

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|} = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}. \quad (11.30)$$

Dividindo ambos os lados da equação anterior por Δt , usando o fato de que $|\mathbf{r}| = R$ e rearrumando ligeiramente os termos (lembre-se de que queremos calcular a aceleração), obtemos:

$$\frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{v}|}{R} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}.$$

Tomando o limite em que $\Delta t \rightarrow 0$ em ambos os lados da equação acima, temos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{|\mathbf{v}|}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t}.$$

Utilizando, então, as definições de aceleração e velocidade, obtemos o módulo da aceleração da partícula (que, no caso de um MCU, tem apenas componente centrípeta):

$$|\mathbf{a}| = \frac{v^2}{R}, \quad (11.31)$$

ou ainda, lembrando que $v = \omega R$,

$$|\mathbf{a}| = \omega^2 R. \quad (11.32)$$

Para determinarmos a direção da aceleração da partícula, basta analisar novamente as **Figuras 11.4 e 11.5**. Quando $\Delta t \rightarrow 0$, temos também $\Delta\theta \rightarrow 0$ e com isso, nesse limite, a direção de $\Delta\mathbf{v}$ passa a ser perpendicular à direção de \mathbf{v} . Como \mathbf{v} é tangente à trajetória circular, $\Delta\mathbf{v}$ terá obrigatoriamente a direção radial, com sentido para dentro da curva por motivos óbvios. Conseqüentemente, usando argumentos puramente geométricos, mostramos que num MCU a aceleração da partícula é dada por $\mathbf{a} = -\omega^2 R \mathbf{u}_r$.

Finalizamos esta seção comentando que num movimento circular não uniforme a aceleração da partícula terá, além de uma componente centrípeta, uma componente tangencial, responsável pela variação do módulo de sua velocidade. Na última seção desta aula, você aprenderá a calcular a expressão da aceleração centrípeta em termos do módulo de sua velocidade e de parâmetros geométricos de sua trajetória, mesmo em movimentos mais genéricos do que o circular.

O movimento cicloidal

Você já se deparou com um movimento cicloidal de uma partícula no final da aula 2. Naquela ocasião, você também aprendeu a definição cinemática de cicloide (que será lembrada aqui), mas não aprendeu a deduzir as equações paramétricas dessa curva e muito menos pôde aplicar o formalismo de vetores ao estudo desse tipo de movimento por não estar ainda familiarizado com ele. Esta seção, sobre movimento cicloidal, vem preencher estas lacunas e aproveitar para dar mais informações sobre uma curva tão comum em nosso dia-a-dia e tão importante na história da física. Considere um disco de raio R rolando sem deslizar sobre uma superfície plana e horizontal. Suponha que, ao movimentar-se, o disco se mantenha sempre num mesmo plano vertical e que o seu centro descreva um movimento retilíneo. Nessas circunstâncias, a curva traçada por um ponto qualquer P da periferia do disco é uma cicloide. Essa curva está ilustrada na **Figura 11.6**.

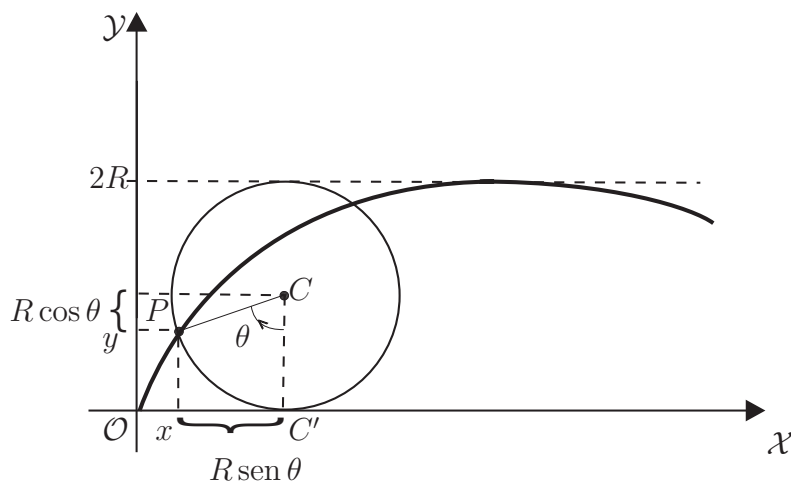


Figura 11.6: Trajetória cicloidal de um ponto na periferia de um disco que rola sem deslizar sobre uma superfície plana e horizontal.

A fim de deduzir as equações paramétricas que caracterizem os pontos dessa curva, é conveniente utilizar como parâmetro o ângulo de giro do disco. Seja θ o ângulo entre a vertical e o segmento de reta \overline{CP} , onde C é o centro do disco em movimento e P , o ponto que descreve a ciclóide desenhada na **Figura 11.6** à medida que o disco gira. Escolhemos os eixos cartesianos de modo que \mathcal{OX} seja horizontal, enquanto \mathcal{OY} , vertical e com a origem coincidindo com a posição do ponto P quando $\theta = 0$. Note, então, que qualquer posição do ponto P ao longo de sua trajetória fica univocamente determinada pelo ângulo θ . A **Figura 11.6** mostra esse ponto numa posição genérica durante seu movimento.

Como não há deslizamento entre o disco e a superfície, o comprimento do arco $\widehat{PC'}$ – onde C' é o ponto de contato entre o disco e a superfície horizontal – é igual ao comprimento do segmento $\overline{OC'}$. Expressando o ângulo θ em radianos, esse comprimento de arco é dado por $R\theta$. Desse modo, a **Figura 11.6** nos permite escrever para a coordenada cartesiana x do ponto P :

$$x = \overline{OC'} - R \sin \theta = R(\theta - \sin \theta) .$$

Novamente com o auxílio da **Figura 11.6**, escrevemos para a coordenada y do ponto P :

$$y = \overline{CC'} - R \cos \theta = R(1 - \cos \theta) .$$

Resumindo: as equações paramétricas da cicloide descrita pelo ponto P da **Figura 11.6** são dadas por

$$\begin{cases} x = R(\theta - \text{sen}\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases} \quad (11.33)$$

Vale enfatizar que não é possível relacionar diretamente por meio apenas das chamadas operações algébricas (soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação inteira) as coordenadas cartesianas do ponto P . A equação cartesiana da trajetória cicloidial do ponto P envolve operações mais complicadas, como a radiciação e o conceito de função inversa (veja o último problema proposto). O caráter não-algébrico dessa curva despertou a atenção de muitos matemáticos e físicos importantes do século XVII, que utilizaram a cicloide para testar e confrontar métodos da época sobre construção de tangentes a curvas etc.

Independentemente de como o disco gire, isto é, se girar com velocidade angular constante ($d\theta/dt = Cte$) ou variável no tempo, a trajetória do ponto P será a cicloide descrita anteriormente. No entanto, diferentes movimentos do disco levam a diferentes funções-movimento vetorial do ponto P . Por exemplo, se o disco gira de tal modo que $d\theta/dt = \omega$, sendo ω uma constante positiva, temos para a função-movimento vetorial de P :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \mathbf{u}_x + y \mathbf{u}_y = \\ &= [R(\omega t - \text{sen}\omega t)] \mathbf{u}_x + [R(1 - \cos\omega t)] \mathbf{u}_y, \end{aligned} \quad (11.34)$$

onde, por simplicidade, escolhemos o zero de nosso cronômetro no instante em que $\theta = 0$. Calculando-se a derivada temporal da expressão anterior, obtemos a velocidade do ponto P num instante genérico de seu movimento:

$$\mathbf{v} = \omega R \left\{ [1 - \cos(\omega t)] \mathbf{u}_x + \text{sen}(\omega t) \mathbf{u}_y \right\}. \quad (11.35)$$

A aceleração do ponto P num instante genérico é obtida derivando-se a expressão anterior uma vez em relação ao tempo:

$$\mathbf{a} = \omega^2 R \{ \text{sen}(\omega t) \mathbf{u}_x + \cos(\omega t) \mathbf{u}_y \}. \quad (11.36)$$

Nos problemas propostos, você terá oportunidade de verificar algumas características desse movimento. Por exemplo, no caso que acabamos de discutir, o ponto mais alto da trajetória do ponto P é atingido pela primeira vez (supondo que o movimento tenha começado em $t = 0s$) no instante $t = \pi/\omega$. Nesse instante, a sua velocidade é horizontal e tem módulo máximo igual a $2\omega R$ e aceleração vertical e para baixo, de módulo $\omega^2 R$. No instante $t = 2\pi/\omega$ o ponto P toca a superfície horizontal pela primeira vez após o início de seu movimento e isso ocorre

a uma distância $2\pi R$ da origem. A sua velocidade é nula nesse instante e a sua aceleração é vertical e para cima, de módulo $\omega^2 R$.

Finalizamos esta seção com um pouco mais de história sobre a cicloide. No final do século XVII, mais precisamente no ano de 1696, Jean Bernoulli lançou um desafio, presumivelmente endereçado a alguns gigantes da época, como por exemplo, Leibniz e Newton, entre outros. Esse problema ficou conhecido com o nome de o problema da **braquistócrona** (do grego *tempo mais curto*) e consiste essencialmente na pergunta:

qual deve ser a forma da superfície sobre a qual uma partícula deve deslizar sem atrito para que, partindo do repouso de um ponto A, atinja um ponto B (que não esteja na vertical e que passe por A) no menor tempo possível?

A superfície que minimiza o tempo de percurso entre A e B nada mais é do que uma superfície cicloidal, ou seja, uma partícula ao se movimentar de A para B descreve justamente uma trajetória cicloidal. Esse problema, que pode ser considerado como um marco inicial do chamado cálculo variacional, foi resolvido no ano seguinte por várias pessoas, a saber: pelo próprio Jean Bernoulli, por seu irmão Jacques Bernoulli, por Leibniz, por L'Hopital e por Newton. Conta a lenda que Newton resolveu o desafio na mesma tarde em que tomou conhecimento do mesmo. Parece que, ao receber a solução apresentada por seu irmão, Jean percebeu que havia cometido um pequeno erro em sua solução. Apropriou-se, indevidamente, dos cálculos de seu irmão e corrigiu a sua própria solução. Essa atitude, no entanto, gerou uma grande discórdia entre os irmãos Jean e Jacques, que perdurou até a morte de Jacques. O método proposto por Jacques Bernoulli para o problema da braquistócrona prima por sua beleza e simplicidade, mas está além dos propósitos desta aula.

Grandezas do movimento associadas à trajetória

Consideremos o movimento de uma partícula dado por uma função-movimento vetorial f . Temos:

$$\mathbf{r} = f(t) . \quad (11.37)$$

Sabemos que a trajetória desse movimento é a curva traçada no espaço pelo ponto final do vetor posição. Dito de outro modo, é o conjunto de pontos pelos quais a partícula passa durante o seu movimento. Representemos por \mathcal{C} a trajetória do movimento em consideração. Vamos agora desenvolver alguns conceitos associados

a uma dada trajetória do movimento e que são especialmente úteis quando enfrentamos um problema no qual a trajetória é conhecida de antemão e desejamos descrever como a partícula nela se move.

Escolhamos um ponto qualquer da trajetória \mathcal{C} para ser a origem a partir da qual medimos as distâncias ao longo dela; representamos esse ponto por \mathcal{O}_C . Vamos também escolher um dos sentidos de percurso na trajetória e chamá-lo positivo; o outro sentido é chamado então negativo. A **Figura 11.7** mostra uma escolha de origem \mathcal{O}_C e de sentidos de percurso positivo e negativo.

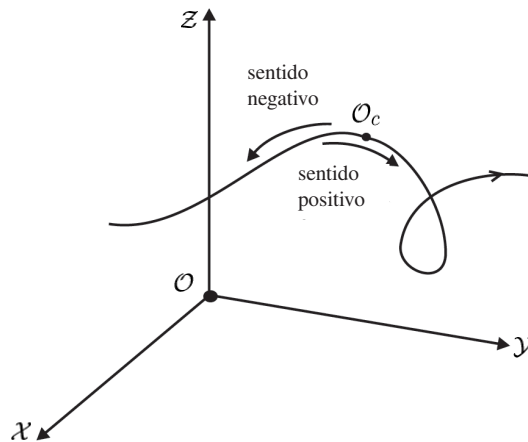


Figura 11.7: Uma escolha de origem e sentido na trajetória.

Vamos considerar, separadamente, os dois casos, em que a trajetória é aberta e em que a trajetória é fechada. Primeiramente, seja \mathcal{C} uma trajetória aberta e P um ponto qualquer sobre ela. Seja d o comprimento do arco que vai de \mathcal{O}_C até P ; como todo comprimento, d é positivo ou nulo. Definimos **arco percorrido** de \mathcal{O}_C até P como sendo d no caso em que o sentido de percurso de \mathcal{O}_C até P é positivo, e $-d$ no caso em que o sentido de percurso de \mathcal{O}_C até P é negativo. Além disso, dizemos que o **arco percorrido** é nulo se $d = 0$; nesse caso, obviamente, o ponto P coincide com \mathcal{O}_C . Vamos denotar por s o arco percorrido de \mathcal{O}_C até P . Naturalmente, temos sempre $s = \pm d$. O ponto \mathcal{O}_C fixado na trajetória é chamado **origem** do arco percorrido. A **Figura 11.8** mostra uma trajetória e os arcos percorridos na trajetória da origem \mathcal{O}_C até dois pontos P e P' . O arco percorrido s de \mathcal{O}_C até P é positivo, pois é percorrido no sentido da trajetória que convencionamos como positivo. Já o arco percorrido s' de \mathcal{O}_C até P' é negativo, pois foi percorrido no sentido negativo da trajetória.

No caso em consideração, de trajetória aberta, cada valor s do arco percorrido s determina um único ponto na trajetória. É aquele que está a uma distância

o arco percorrido s na trajetória também é conhecida como **espaço percorrido** ou como **posição escalar**. O próprio nome **comprimento de arco** pode ser usado para designar s . Nesse caso devemos entender comprimento em um sentido mais lato, pois s pode tanto positivo quanto negativo.

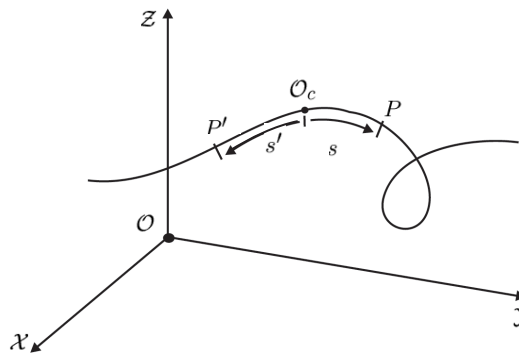


Figura 11.8: O comprimento de arco algébrico de O_C a P é s , e o percorrido de O_C a P' é s' ; s é positivo, e s' , negativo.

$|s|$ de O_C , de um lado ou de outro de O_C , conforme tenhamos s positivo ou negativo e, naturalmente, $P = O_C$ se $s = 0$. Além disso a cada ponto da trajetória corresponde um único arco percorrido de O_C até o ponto. Portanto, há uma correspondência biunívoca entre os pontos da trajetória e os arcos percorridos. Então, podemos nos referir ao arco percorrido na trajetória como **coordenada na trajetória** do ponto correspondente.

É claro que, de um modo geral três números são necessários para determinar a posição de um ponto P no espaço, digamos as coordenadas x , y e z . No entanto, se já dispomos da informação de que o ponto P está em uma trajetória conhecida, basta saber sua coordenada s na trajetória para que sua posição fique perfeitamente determinada.

Seja, agora, o caso de uma trajetória fechada \mathcal{C} de comprimento ℓ , como o exemplo dado pelo círculo da **Figura 11.9**. Nesse caso, dada uma origem O_C na curva e um outro ponto P da curva, há mais de um arco da curva entre O_C e P . Partindo de O_C e percorrendo a curva no sentido que convencionarmos como positivo, chegamos ao ponto P após percorrermos um certo arco positivo, digamos s . Partindo de O_C e percorrendo a curva no sentido oposto, também chegamos ao ponto P após percorrermos um arco s' negativo. Observe que $s' = s - \ell$.

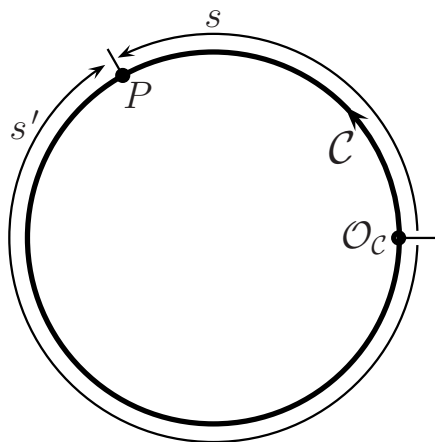


Figura 11.9: Círculo de comprimento ℓ , orientação anti-horária e origem dos arcos em O_C .

Se partirmos de O_C no sentido positivo, podemos passar por P , dar mais uma volta na curva fechada e chegar pela segunda vez no ponto P . Nesse caso, teremos percorrido um arco $s + \ell$. Desse modo, a um dado ponto P da trajetória fechada, correspondem os arcos $s, s + \ell, s + 2\ell$, etc, dependendo do número de voltas que dermos na trajetória no sentido positivo. Ao ponto P também correspondem os arcos negativos $s', s' - \ell, s' - 2\ell$, etc, dependendo do número de voltas que dermos na trajetória no sentido negativo.

Nesse caso, de trajetória fechada, não seria bom dar a esses arcos percorridos os nomes de coordenadas do ponto P na trajetória, pois ao ponto P correspondem vários arcos e reservamos o nome coordenada para quantidades que estão em correspondência biunívoca com os pontos que elas localizam. Por esse motivo, continuaremos utilizando a expressão **arcos percorrido**, lembrando que são grandezas algébricas, positivas ou negativas, conforme o percurso seja no sentido positivo ou negativo. Esse percurso, que imaginamos hipoteticamente, nas situações concretas será o percurso de uma partícula em sua trajetória fechada.

Vamos usar o mesmo símbolo s para representar o arco percorrido, quer ele seja uma coordenada, no caso da curva aberta, quer não o seja, no caso de curvas fechadas. No caso de uma trajetória fechada, dados dois arcos percorridos s_1 e s_2 até um ponto P , a diferença entre eles é uma constante. Portanto, seus diferenciais são iguais, $ds_1 = ds_2$, e, conseqüentemente, suas derivadas com respeito a qualquer variável também serão iguais. Por esse motivo, na teoria a ser desenvolvida no restante dessa seção, em que aparecem diferenciais e derivadas do arco percorrido, não é importante saber qual dos arcos percorridos foi escolhido para

representar um ponto em trajetória fechada.

Agora, consideremos o movimento de uma partícula ao longo da trajetória \mathcal{C} com origem dos arcos em \mathcal{O}_C . O arco percorrido pela partícula é, por definição, o arco percorrido na trajetória da origem \mathcal{O}_C até o ponto da trajetória em que se encontra a partícula. Suponhamos que em um instante qualquer t_0 o arco percorrido pela partícula na trajetória seja dado por s_0 . Se a partícula se encontra em repouso, o seu arco percorrido na trajetória permanece igual a s_0 e, se a partícula se move, seu arco percorrido na trajetória muda com o tempo. De qualquer modo, a cada instante do tempo t corresponde um valor bem determinado s para o arco percorrido pela partícula na trajetória. Isto é, existe em cada movimento de uma partícula uma função, que chamaremos γ , que associa a cada instante t o arco percorrido pela partícula na trajetória até esse instante. Denotando por s esse arco, temos

$$s = \gamma(t) . \quad (11.38)$$

Note que a função-movimento vetorial f em (11.37) determina completamente o movimento da partícula. Ela determina a trajetória da partícula e o ponto da trajetória no qual a partícula se encontra em cada instante do movimento. Já a função γ em (11.38) determina o ponto, de uma dada trajetória, no qual se encontra a partícula. Desse modo, o movimento da partícula fica determinado pela função γ se a trajetória da partícula for conhecida. A função γ pode ser chamada função-movimento da partícula na trajetória \mathcal{C} . Note que, no caso particular em que a trajetória é um dos eixos coordenados, digamos \mathcal{OX} , a coordenada na trajetória é a coordenada x e a função-movimento é representada por f_x , isto é, nesse caso particular $s = x$ e $\gamma = f_x$.

Vamos representar por v_T a derivada do arco percorrido s em relação ao tempo,

$$v_T = \frac{ds}{dt} = \dot{\gamma}(t) , \quad (11.39)$$

onde representamos por $\dot{\gamma}$ a função derivada da função γ em relação ao tempo. Pelo que já sabemos de derivadas, v_T dá, a cada instante, a rapidez com que o arco percorrido s varia com o tempo. É claro que v_T tem o significado de uma velocidade. É um número que dá a rapidez com que a partícula se move em uma trajetória dada. É costume chamar v_T **velocidade escalar** da partícula na trajetória. A velocidade escalar em um certo instante é um número positivo ou negativo, conforme o movimento da partícula nesse instante esteja ocorrendo no sentido positivo ou negativo da trajetória. Lembre-se de que os sentidos da trajetória são escolhidos por convenção.

Representando por a_T a derivada de v_T em relação ao tempo, temos

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} = \ddot{\gamma}(t), \quad (11.40)$$

onde $\ddot{\gamma}$ é a função derivada da função $\dot{\gamma}$ em relação ao tempo. Sendo a derivada de uma velocidade em relação ao tempo, a grandeza a_T tem o significado de uma aceleração. Ela dá a rapidez com que muda a velocidade escalar da partícula durante o movimento. Mais adiante voltaremos a falar sobre essa aceleração a_T , quando então veremos que o seu nome mais apropriado é aceleração tangencial.

Agora, consideremos que em seu movimento a partícula ocupe no instante t o ponto P , de vetor-posição \mathbf{r} . Em um instante posterior $t + \Delta t$ ela ocupa o ponto P' , de vetor-posição \mathbf{r}' . Nesse intervalo de tempo, de duração Δt , a partícula sofre um deslocamento $\Delta \mathbf{r}$. Seja s o arco percorrido até o ponto P e s' , até o ponto P' . Definimos a variação do arco percorrido pela partícula na trajetória como $\Delta s = s' - s$. Uma vez que será tomado o limite em que Δt tende a zero, podemos considerar o ponto P' tão próximo do ponto P quanto quisermos. A situação está ilustrada na **Figura 11.10**.

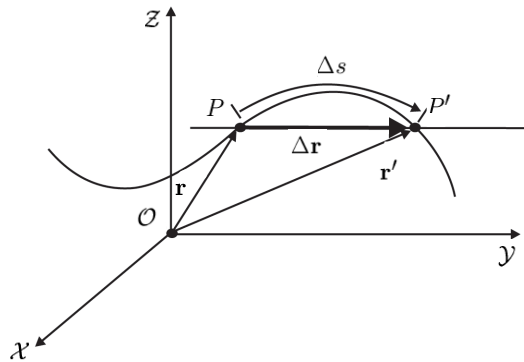


Figura 11.10: Arco de comprimento Δs e corda de comprimento $|\Delta \mathbf{r}|$; no limite $P' \rightarrow P$, o comprimento da corda tende para o comprimento do arco.

No limite em que $\Delta t \rightarrow 0$, o ponto P' tende para o ponto P e, conseqüentemente, a corda PP' tende para o arco PP' . A corda PP' tem comprimento dado pelo módulo $|\Delta \mathbf{r}|$ do vetor deslocamento. Supondo que o sentido de P para P' seja o sentido de percurso positivo na trajetória, a variação Δs do arco percorrido é positiva e igual ao comprimento do arco PP' . Desse modo, no limite em que $\Delta t \rightarrow 0$, a razão entre a corda e o arco tende para 1:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta s} = 1. \quad (11.41)$$

Além disso, $\Delta \mathbf{r} / \Delta s$ é um vetor com a mesma direção que $\Delta \mathbf{r}$, que é a direção da reta secante à trajetória, que passa por P e P' .

No limite em que $\Delta t \rightarrow 0$, $P' \rightarrow P$ e a reta secante por P e P' tende para a reta tangente à trajetória em P . Isso significa que no limite $\Delta t \rightarrow 0$, o vetor $\Delta \mathbf{r} / \Delta s$ tende para um vetor tangente à trajetória, que representaremos por \mathbf{u}_T :

$$\mathbf{u}_T = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (11.42)$$

Esse vetor tem módulo 1, em virtude do resultado (11.41). Portanto, \mathbf{u}_T é um vetor unitário. Além disso, como supusemos que o sentido de P para P' fosse o sentido de percurso positivo na trajetória, concluímos que \mathbf{u}_T aponta nesse sentido positivo. Se tivéssemos suposto que o sentido de P para P' fosse o sentido de percurso negativo na trajetória, teríamos um Δs negativo, que levaria novamente \mathbf{u}_T a ser um vetor apontando no sentido de percurso positivo da trajetória. Em qualquer caso, o limite (11.42) é um vetor \mathbf{u}_T unitário, tangente à trajetória e com sentido igual ao sentido de percurso positivo na trajetória. O vetor \mathbf{u}_T é chamado **unitário tangente** à trajetória no ponto P . Note que o unitário tangente não é um vetor constante. É claro que o módulo do vetor unitário tangente é constante, pois é sempre igual a 1, mas sua direção vai mudando à medida que passamos de um ponto a outro de uma trajetória não-retilínea. A **Figura 11.11** mostra vetores unitários tangentes em diversos pontos de uma trajetória.

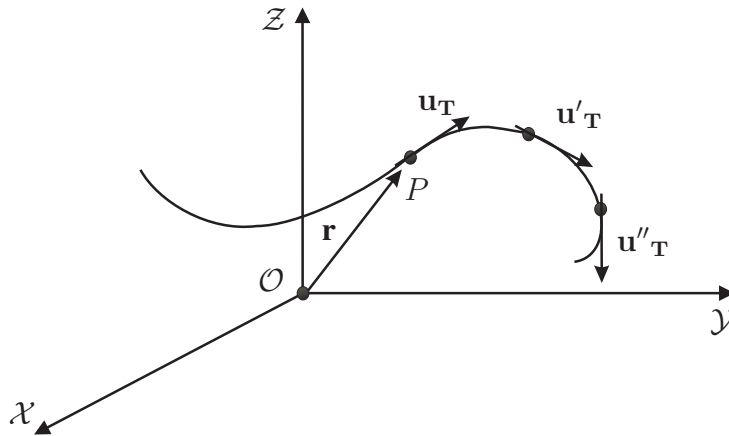


Figura 11.11: Vetores unitários tangentes em diversos pontos da trajetória.

De acordo com a definição de velocidade vetorial da partícula, temos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s} \right). \quad (11.43)$$

No limite em que $\Delta t \rightarrow 0$, a primeira fração $\Delta s / \Delta t$ tende para a derivada ds/dt que, de acordo com (11.39), é a velocidade escalar v_T . Nesse limite, a segunda fração $\Delta \mathbf{r} / \Delta s$ tende para a derivada $d\mathbf{r} / ds$ que, de acordo com (11.42),

é o unitário tangente à trajetória, no ponto onde estamos calculando a velocidade vetorial \mathbf{v} . Portanto, como consequência de (11.43), temos

$$\mathbf{v} = v_T \mathbf{u}_T. \quad (11.44)$$

Esse resultado é intuitivo, se levarmos em conta o significado das grandezas que nele aparecem. A velocidade vetorial \mathbf{v} aparece em (11.44) como um vetor tangente à trajetória, pois é um número v_T multiplicado pelo vetor unitário tangente \mathbf{u}_T . Se o arco s percorrido pela partícula na está aumentando no instante em consideração, a derivada ds/dt é positiva, isto é, v_T é um número positivo. Nesse caso, \mathbf{v} em (11.44) tem o mesmo sentido que \mathbf{u}_T . Se o dito arco está diminuindo no instante em consideração, a derivada ds/dt é negativa, isto é, v_T é um número negativo. Nesse caso, a velocidade tem o sentido oposto ao do unitário \mathbf{u}_T , mostrando que a partícula está se movendo, nesse instante, no sentido negativo da trajetória.

Agora, vamos agora calcular a aceleração da partícula utilizando como ponto de partida a expressão (11.44), que relaciona a velocidade vetorial com as grandezas v_T e \mathbf{u}_T . Temos, pela regra da derivada de um produto

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_T \mathbf{u}_T) = \frac{dv_T}{dt} \mathbf{u}_T + v_T \frac{d\mathbf{u}_T}{dt}. \quad (11.45)$$

Nessa expressão, dv_T/dt é a rapidez com que varia a velocidade escalar e que, de acordo com (11.40), representamos por a_T . Assim, podemos escrever (11.45) na forma:

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{u}_T + v_T \frac{d\mathbf{u}_T}{dt}. \quad (11.46)$$

Para a derivada do unitário tangente, temos

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}_T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta s}{\Delta t} \frac{\Delta \mathbf{u}_T}{\Delta s} \right). \quad (11.47)$$

No limite em que $\Delta t \rightarrow 0$, a fração $\Delta s/\Delta t$ tende para a derivada ds/dt , isto é, para a velocidade escalar v_T . Nesse mesmo limite, a variação Δs do arco percorrido tende a zero, de modo que a fração $\Delta \mathbf{u}_T/\Delta s$ tende para a derivada $d\mathbf{u}_T/ds$. Com isso, podemos escrever (11.47) como

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = v_T \frac{d\mathbf{u}_T}{ds} = v_T \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{u}_T}{\Delta s}. \quad (11.48)$$

Vamos nos servir da **Figura 11.12** para entender o significado dessa derivada.

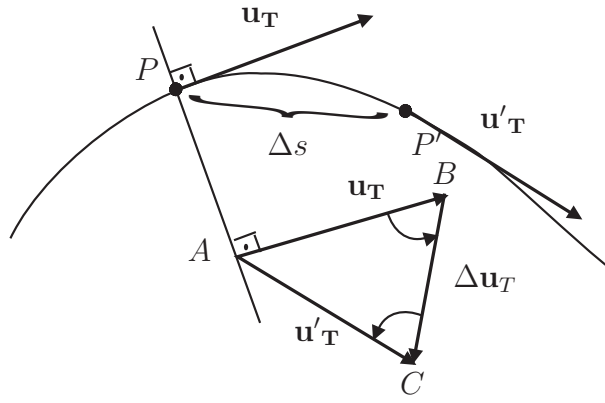


Figura 11.12: Vetores unitários tangentes, em dois pontos separados por um arco de comprimento Δs .

A **Figura 11.12** mostra dois vetores unitários tangentes \mathbf{u}_T e \mathbf{u}'_T , nos pontos P e P' , separados por um arco de trajetória de comprimento Δs . A variação do vetor unitário tangente é dada por $\Delta \mathbf{u}_T = \mathbf{u}'_T - \mathbf{u}_T$. Como vamos tomar o limite em que Δs tende a zero, com P' tendendo para P , podemos considerar Δs e $\Delta \mathbf{u}_T$ tão pequenos quanto quisermos. Essas variações não aparecem como pequeninas na figura por razões de clareza no desenho, mas devemos imaginar, por exemplo, que $\Delta \mathbf{u}_T$ vai tornando-se cada vez menor em relação a \mathbf{u}_T . No triângulo isósceles ABC , em que desenhemos a diferença $\Delta \mathbf{u}_T = \mathbf{u}'_T - \mathbf{u}_T$, os ângulos em B e em C são iguais a um valor que chamaremos θ . No limite em que Δs tende a zero, P' tende a P , \mathbf{u}'_T tende para \mathbf{u}_T e, conseqüentemente, $\Delta \mathbf{u}_T$ tende a zero. Mas quando $\Delta \mathbf{u}_T$ tende a zero, o ângulo θ tende a $\pi/2$, isto é, a direção de $\Delta \mathbf{u}_T$ tende para a direção perpendicular a \mathbf{u}_T . Assim sendo, o limite em (11.48), que é a derivada $d\mathbf{u}_T/ds$, tem a direção da reta perpendicular a \mathbf{u}_T . Além disso, o sentido de $\Delta \mathbf{u}_T$ aponta sempre para dentro da curva no trecho considerado da trajetória, ou seja, o sentido de \mathbf{u}_T deve ser consistente com a concavidade da curva. Quanto ao módulo da derivada $d\mathbf{u}_T/ds$, nada podemos dizer em geral, pois ele depende do tipo de movimento. Vamos denotar esse módulo por κ (a letra grega capa),

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{u}_T}{ds} \right|. \quad (11.49)$$

Dividindo a derivada $d\mathbf{u}_T/ds$ pelo seu módulo κ , obtemos um vetor unitário que vamos representar por \mathbf{u}_N ,

$$\mathbf{u}_N = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{u}_T}{ds}. \quad (11.50)$$

Em cada ponto da trajetória, o vetor \mathbf{u}_N tem direção perpendicular ao vetor unitário tangente, sentido apontando para a concavidade da curva e, naturalmente, módulo igual a 1. Chamamos \mathbf{u}_N **unitário normal** à trajetória. Note que, nesse contexto,

“normal” tem o mesmo significado que “perpendicular”.

Podemos, então, escrever a derivada (11.48) na forma

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{ds} = \kappa \mathbf{u}_N . \quad (11.51)$$

Usando-se a definição (11.49) de κ e o conceito de derivada, é evidente que κ é zero quando a trajetória é retilínea. Após uma certa reflexão, é possível concluir também que, quanto mais encurvada for a trajetória em um ponto, maior será o valor de κ obtido nesse ponto. Por esse motivo, o número κ é chamado **curvatura** da trajetória no ponto onde calculamos a derivada (11.49). Note, na definição (11.49), que \mathbf{u}_T é um vetor de módulo 1 e, portanto, não tem dimensão. Já s tem a dimensão de comprimento. Conseqüentemente, κ tem a dimensão de inverso de comprimento. Logicamente, o inverso de κ tem a dimensão de comprimento. Chamamos o inverso de κ **raio de curvatura** e representamos essa quantidade por ρ ,

$$\rho = \frac{1}{\kappa} . \quad (11.52)$$

Vamos preferir usar a grandeza ρ no lugar de κ , de modo que (11.51) será reescrita na forma

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_N . \quad (11.53)$$

Substituímos agora essa expressão de $d\mathbf{u}_T/ds$ em (11.48), para obter

$$\frac{d\mathbf{u}_T}{dt} = v_T \frac{1}{\rho} \mathbf{u}_N . \quad (11.54)$$

Finalmente, substituímos essa expressão da derivada $d\mathbf{u}_T/dt$ na equação (11.45) e chegamos ao resultado

$$\mathbf{a} = \frac{dv_T}{dt} \mathbf{u}_T + \frac{v_T^2}{\rho} \mathbf{u}_N . \quad (11.55)$$

Podemos, pois, escrever

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{u}_T + a_N \mathbf{u}_N , \quad (11.56)$$

onde

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} \quad \text{e} \quad a_N = \frac{v_T^2}{\rho} \quad (11.57)$$

são as projeções do vetor aceleração ao longo dos unitários tangente e normal à trajetória. A **Figura 11.13** mostra a trajetória de uma partícula em movimento e sua aceleração vetorial \mathbf{a} em um certo ponto P da trajetória. Na figura, também aparecem os unitários tangente e normal e os vetores $a_T \mathbf{u}_T$ e $a_N \mathbf{u}_N$ que, somados, dão o vetor aceleração, conforme estabelecido na equação (11.55). Desde a

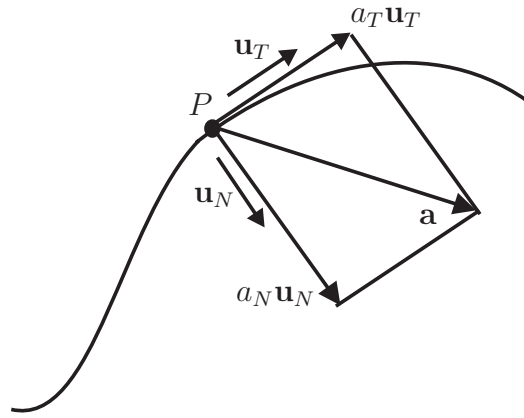


Figura 11.13: Decomposição da aceleração \mathbf{a} nas componentes tangencial e normal à trajetória.

equação (11.46) até a equação (11.54), fizemos vários cálculos e interpretações de grandezas cinemáticas e suas derivadas. Esse tipo de trabalho é útil para aprendermos a lidar com vetores e dar significado às operações que fazemos com eles na cinemática da partícula. No entanto, o mais importante em nossa análise é o significado do resultado (11.55), que comentaremos adiante. Entender bem o significado desse resultado é o objetivo principal desta seção. Você deve procurar esse entendê-lo mesmo que, numa primeira leitura, não tenha ficado claro como chegamos a ele.

A equação (11.55) mostra que a aceleração vetorial \mathbf{a} de uma partícula pode sempre ser decomposta em uma componente tangente à trajetória e em uma componente normal à trajetória. A componente tangente à trajetória é chamada **aceleração tangencial** e a normal à trajetória, **aceleração normal**. A aceleração tangencial é dada por

$$\mathbf{a}_T = \frac{dv_T}{dt} \mathbf{u}_T, \quad (11.58)$$

onde dv_T/dt dá a rapidez com que varia a velocidade escalar ao longo da trajetória. A componente normal à trajetória é dada por:

$$\mathbf{a}_N = \frac{v_T^2}{\rho} \mathbf{u}_N. \quad (11.59)$$

Para entender o significado dessa aceleração, note que ela é a única que existe quando a velocidade da partícula tem módulo constante. De fato, pela equação (11.44), sabemos que o módulo da velocidade é igual a $|v_T|$ e, se a velocidade tem módulo constante, dv_T/dt é igual a zero, isto é, não há aceleração tangencial. Nesse caso, temos apenas a aceleração normal (11.59), $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}_T$. Mas, sendo constante o módulo de \mathbf{v} , sua única variação possível é uma variação em direção. Então, a rapidez com que varia a direção de \mathbf{v} é dada exatamente pela

aceleração normal a_T . Note também que, quanto maior for a curvatura de uma trajetória, mais rápida será a variação da direção da velocidade, isto é, maior será a aceleração normal. A expressão (11.59) confirma isso, pois, quanto maior a curvatura, menor o raio de curvatura ρ e maior a fração v_T^2/ρ , isto é, maior a aceleração normal (para um dado valor de v_T).

No caso de um MCU, podemos usar os resultados obtidos na Aula 9 para escrever a aceleração \mathbf{a} na forma

$$\mathbf{a} = -\frac{|\mathbf{v}|^2}{R} \mathbf{u}_r, \quad (11.60)$$

onde \mathbf{u}_r é o unitário na direção e no sentido do vetor posição \mathbf{r} , isto é, $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$. No caso de um movimento circular, o unitário normal \mathbf{u}_N tem a direção radial e aponta para dentro do círculo, ou seja, $\mathbf{u}_N = -\mathbf{u}_r$. Levando em conta essas propriedades e comparando (11.60) com (11.55), obtemos no MCU

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} = 0 \quad \text{e} \quad a_N = \frac{v_T^2}{\rho} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R}. \quad (11.61)$$

Podemos entender facilmente esse resultado. No MCU, o módulo da velocidade é constante e, portanto, não há aceleração tangencial. Usando o fato de que $v_T^2 = |\mathbf{v}|^2$ na segunda equação em (11.61), obtemos o fato de que o raio de curvatura da trajetória circular é constante e igual ao raio R da trajetória, mostrando que esse nome, raio de curvatura, foi bem escolhido para a grandeza ρ . Em trajetórias não circulares, o raio de curvatura ρ não é constante, mas vai mudando de ponto para ponto da trajetória. Em um movimento qualquer de uma partícula, a aceleração normal (11.59), a cada instante, é a aceleração de um movimento circular de raio igual ao raio de curvatura ρ . No entanto, nesse movimento qualquer, em instantes diferentes, as acelerações normais são acelerações de movimentos circulares com raios diferentes, a menos que esse movimento qualquer seja, ele próprio, um movimento circular como descrito anteriormente.

Resumo

Nesta aula, começamos fazendo uma breve revisão dos principais conceitos da cinemática vetorial para, em seguida, aplicá-los em alguns exemplos importantes. Discutimos o movimento de projéteis sem considerarmos a resistência do ar, rediscutimos o movimento circular uniforme, aproveitando para fazer um tratamento mais geométrico desse movimento e, finalmente, estudamos o movimento cicloidal. Somente na última seção, você voltou a aprender novos conceitos e definições importantes no estudo da mecânica da partícula, como por exemplo,

os vetores unitários tangente \mathbf{u}_T e normal \mathbf{u}_N à trajetória da partícula e os conceitos de curvatura e raio de curvatura de uma curva num certo ponto. Aprendeu ainda a derivar os vetores \mathbf{u}_T e \mathbf{u}_N em relação ao tempo e com isso foi capaz de deduzir expressões convenientes para as componentes tangencial e centrípeta da aceleração em um movimento geral. Embora esta aula tenha sido na sua maior parte composta por exemplos, podemos considerá-la uma das mais difíceis e densas de todo o módulo 1. É também a que tem a maior lista de problemas propostos. Por isso, não se aflija caso você tenha de estudá-la mais de uma vez.

Questionário

1. O movimento de queda livre é um caso particular do movimento de projéteis?
2. Qual é a trajetória de um projétil?
3. Em que ponto da trajetória de um projétil a sua aceleração é perpendicular à sua velocidade?
4. A velocidade de uma partícula é tangente à sua trajetória somente num MCU?
5. O que é aceleração centrípeta?
6. Considere dois pontos na superfície terrestre em diferentes latitudes. Qual deles possui a maior aceleração centrípeta, o de maior ou menor latitude?
7. O que podemos afirmar sobre um movimento de uma partícula no qual a sua aceleração é sempre perpendicular à sua velocidade?
8. Considere um movimento plano genérico e, por conveniência, suponha que ele ocorra no plano \mathcal{OXY} . Conhecida a função-aceleração vetorial da partícula, que outras informações são necessárias para que possamos obter univocamente a sua função-movimento vetorial?
9. Considere um MCU. Se conhecermos o raio da trajetória deste movimento e a sua frequência angular, esse movimento estará totalmente especificado?
10. Se aos dados fornecidos no item anterior, adicionarmos o sentido do movimento, este MCU estará agora totalmente especificado?
11. Defina cicloide.
12. Defina curvatura e raio de curvatura num dado ponto de uma curva.

Problemas propostos

1. Usando os seus conhecimentos de integração, demonstre a equação (11.11).
2. Considere todos os possíveis movimentos de uma partícula nos quais a sua aceleração seja constante.
 - (a) Demonstre que, se a velocidade for nula ou paralela à aceleração em algum instante do movimento, este será, obrigatoriamente, um MRUV.
 - (b) Demonstre que, se a velocidade e a aceleração não forem colineares em algum instante, o movimento não será retilíneo, mas será um movimento plano.

3. Demonstre que a reta tangente à parábola dada pela equação (11.19) no ponto $P_0(x_0, y_0, 0)$ possui a mesma direção que $\mathbf{v}_0 = v_{x0}\mathbf{u}_x + v_{y0}\mathbf{u}_y$.

Sugestão: calcule, a partir da equação (11.19), a derivada dy/dx em $x = x_0$ e interprete o resultado.

4. Determine o alcance de um projétil a partir da equação cartesiana de sua trajetória (11.20). Confira o resultado com o obtido no texto, dado pela equação (11.22).
5. Mostre que o alcance de um projétil é proporcional ao produto das componentes v_{x0} e v_{y0} da velocidade de lançamento.
6. Em 1947, numa experiência cujo objetivo era estudar a distribuição de velocidades em feixes atômicos, a queda livre dos átomos pôde ser constatada. Nessa experiência, átomos de Césio foram produzidos por um “forno” a uma temperatura de 450K. Suponha que a essa temperatura, a média dos módulos das velocidades dos átomos seja 300m/s. Um feixe desses átomos, colimado na direção horizontal, isto é, um feixe de átomos no qual todos eles possuem velocidades horizontais e paralelas entre si, foi posto para se propagar dentro de um tubo de alto vácuo (para que não houvesse resistência alguma ao movimento dos átomos do feixe) de 2m de comprimento. O quanto caíram os átomos do feixe sob a ação da gravidade após terem percorrido o tubo?
7. Um atirador aponta sua espingarda na direção de um alvo de tal modo que a direção da reta suporte do cano de sua arma passe exatamente pelo centro do alvo, isto é, na “mosca”, como indica a **Figura 11.14**.

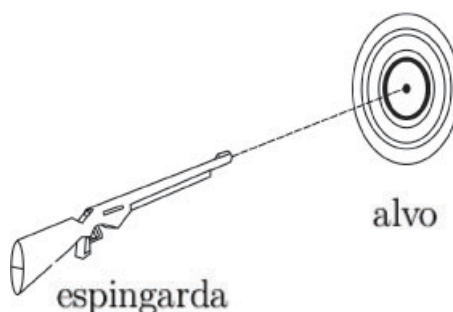


Figura 11.14: Espingarda apontada para a “mosca”.

Suponha, no entanto, que no instante em que a bala saia de sua espingarda, o alvo seja abandonado a partir do repouso e comece a cair em queda livre. Desprezando a resistência do ar, responda se a bala irá ou não atingir a mosca.

8. Demonstre que a inclinação com que um projétil retorna ao solo é a mesma, em módulo, que a sua inclinação quando é lançado.
9. Qual deve ser o valor do ângulo de lançamento de um projétil, θ_0 , para que a altura máxima atingida por ele seja igual ao seu alcance?
10. Suponha que um projétil seja lançado com uma velocidade inicial de módulo v_0 e com um ângulo de lançamento θ_0 . Quais são os valores de θ_0 para que o alcance desse projétil seja exatamente a metade de seu alcance máximo?
11. Considere o movimento de um projétil que é lançado sobre uma rampa inclinada que faz um ângulo α em relação à direção horizontal. Seja v_0 a velocidade inicial do projétil e θ_0 o ângulo entre v_0 e a horizontal, como indica a **Figura 11.15**. Para que ângulo de lançamento θ_0 o alcance sobre a rampa é máximo?

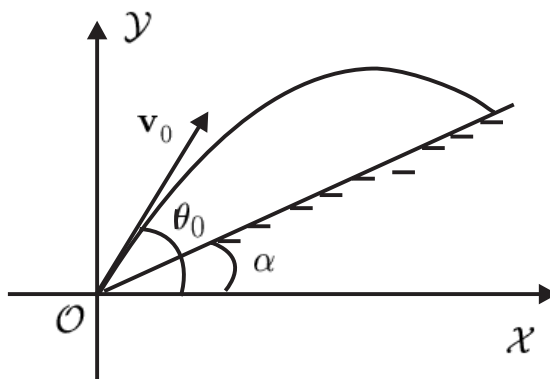


Figura 11.15: Alcance máximo numa rampa inclinada.

12. Uma barra de comprimento L está inicialmente encostada numa parede vertical. Sua extremidade inferior é ligeiramente deslocada lateralmente, de modo que a barra começa a cair, deslizando sobre o solo (plano horizontal) e a parede vertical. Suponha que, em sua queda, a barra mantenha sempre contato tanto com a parede vertical quanto com o solo, e ainda que todo seu movimento ocorra no mesmo plano vertical. Demonstre que a trajetória do centro da barra é um arco de circunferência de raio $L/2$ e centrada na origem. Desenhe essa trajetória.
13. Considere novamente o movimento da barra descrito no problema anterior. Você saberia dizer agora qual é a trajetória de um ponto genérico da barra (que não seja o seu centro nem seus pontos extremos)? Tente obter, por exemplo, a equação cartesiana da trajetória do ponto P da barra que está a uma distância d do extremo superior da mesma. Desenhe essa trajetória.
14. Suponha que uma partícula se mova no plano \mathcal{OXY} descrevendo um MCU de raio R , frequência angular ω e centro na origem dos eixos cartesianos. Suponha ainda que o sentido do movimento seja o sentido horário para quem observa o movimento de um ponto do semi-eixo positivo \mathcal{OZ} , e que no instante $t = 0$ s a partícula esteja no ponto $(0, -R)$. Escreva a função-movimento vetorial dessa partícula, a sua função-velocidade vetorial e a sua função-aceleração vetorial.
15. A roda gigante de um certo parque de diversões tem raio $R = 3,0$ m (estamos designando por raio a distância do centro da roda gigante até qualquer uma de suas cadeiras). Calcule o módulo da aceleração centrípeta que uma criança possui quando a roda estiver girando com frequência angular $\omega = (\pi/4)$ rad/s.
16. Considere um ventilador de teto cujas pás têm comprimentos $L = 0,5$ m cada uma. Suponha que numa certa velocidade de operação, suas pás executem 30 voltas completas por segundo (lembre-se de que cada volta completa corresponde a 2π radianos). Determine o módulo da aceleração centrípeta de um ponto no extremo de uma das pás.
17. Demonstre todas as afirmativas feitas no parágrafo que vem imediatamente após a equação (11.36) no que diz respeito ao movimento cicloidal discutido nesta aula.

18. Suponha que uma partícula se movimente de tal forma que sua função-aceleração vetorial seja dada por:

$$\mathbf{a} = 16[\sin(8t) \mathbf{u}_x + \cos(8t) \mathbf{u}_y] .$$

Sabendo que no instante $t = 0\text{s}$ a partícula se encontra em repouso na origem, obtenha a sua função-velocidade vetorial e a sua função-vetorial de movimento. Desenhe a trajetória da partícula e interprete o resultado.

19. Considere o movimento cicloidal descrito nesta aula. A partir das equações (11.35) e (11.36), calcule os módulos da velocidade e da aceleração do ponto P num instante genérico de seu movimento. Verifique que, embora a aceleração desse ponto tenha módulo constante, o mesmo não ocorre com a sua velocidade.
20. Considere novamente o movimento cicloidal descrito nesta aula. Marque as posições do ponto P nos instantes $\pi/2\omega$, π/ω , $3\pi/2\omega$ e $2\pi/\omega$. Indique, nestas posições, as respectivas velocidades e acelerações desse ponto.
21. Uma partícula descreve um movimento uniforme não retilíneo cuja trajetória está mostrada na **Figura 11.16**. Nela estão marcados os pontos A , B e C . Usando os símbolos de ordem $>$, $<$ e $=$, ordene os módulos das acelerações da partícula nesses três pontos.

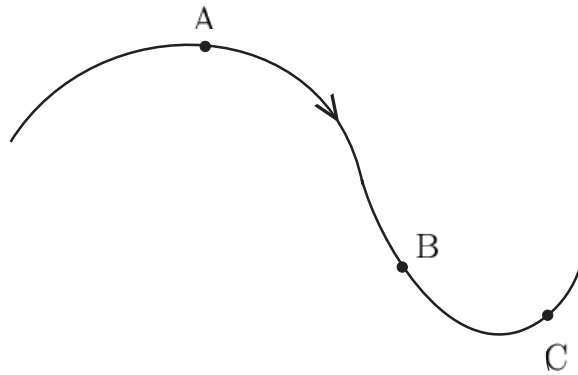


Figura 11.16: Trajetória do movimento uniforme da partícula do problema 21.

22. Mostre que num movimento de projétil, lançado com ângulo de 45° , o raio de curvatura do ponto mais alto da trajetória é o dobro da altura máxima atingida pelo projétil.
23. Considere o movimento cicloidal discutido no texto. Calcule o raio de curvatura do ponto mais alto dessa trajetória cicloidal.

24. Suponha que a função-aceleração vetorial de uma partícula seja dada por

$$\mathbf{a} = \pi A [\sin(\pi t) \mathbf{u}_x + 4 \sin(2\pi t) \mathbf{u}_y] .$$

- (a) Sabendo que em $t = 0$ a partícula se encontra na origem com velocidade $\mathbf{v}_0 = \pi A(\mathbf{u}_x + 2 \mathbf{u}_y)$, obtenha a sua função-velocidade vetorial e a sua função-movimento vetorial.
- (b) Desenhe a trajetória da partícula.
- (c) Marque as posições da partícula nos instantes $1/4$, $1/2$, $3/4$ e 1 . Nessas posições, indique por meio de vetores as respectivas velocidades e acelerações da partícula.

25. A partir das equações paramétricas da cicloide, a saber:

$$\begin{cases} x = R (\theta - \sin \theta) \\ y = R (1 - \cos \theta) \end{cases} ,$$

relacione diretamente as coordenadas x e y e mostre que a equação cartesiana da cicloide é dada por:

$$x = R \arccos[1 - y/R] - \sqrt{2yR - y^2}$$

Auto-avaliação

Você deve saber responder a todo o questionário sem maiores dificuldades. Quanto aos problemas, você certamente sentirá maior facilidade em resolver aqueles relacionados com o movimento de projéteis e com o MCU. Portanto, não se decepcione se você não conseguir, em sua primeira tentativa, resolver os últimos problemas dessa lista, pois incluímos, deliberadamente, alguns problemas mais difíceis do que os de costume. No entanto, não deixe de tentar resolvê-los, pois são justamente esses problemas mais difíceis que, por exigirem um raciocínio mais elaborado, ajudam-nos a compreender melhor a matéria.

Aula 12 – Medindo o movimento

Referências: Aulas teóricas 1, 2, 3 e Aula experimental 1.

Objetivos

- *Aprender a usar o trilho de ar.*
- *Determinação experimental de velocidades a partir de posições medidas no trilho de ar.*

Introdução

Cerca de 90% das experiências do nosso curso serão feitas com o auxílio do trilho de ar. De fato esse equipamento, como veremos, permite estudar e analisar movimentos unidimensionais com as forças de atrito praticamente inexistentes.

Como você verá nas aulas teóricas, a não inclusão de forças de atrito nos primeiros modelos da mecânica foi uma das principais razões de as idéias dos gregos terem durado tantos séculos. De fato, até hoje em dia, ao se perguntar à maioria das pessoas por que um carro com falta de gasolina pára, elas dirão que foi porque o motor parou e não porque o atrito o fez parar. Enfim, a importância das forças de atrito será objeto de considerações mais aprofundadas nas aulas teóricas. O importante é que o trilho de ar permitirá fazer experiências em que as forças de atrito podem ser desprezadas e, assim, os fundamentos mais importantes da teoria ficarão mais evidentes.

Escreveremos inicialmente um pequeno texto sobre o trilho de ar e, em seguida, descreveremos uma prática que nos permitirá determinar velocidades em um movimento uniforme sobre o trilho de ar.

O trilho de ar

O trilho de ar é composto de chapas metálicas de perfil reto formando uma cunha com pequenos buracos convenientemente espaçados.

Ao se injetar ar comprimido por dentro da cunha, o mesmo sai através dos buracos produzindo um colchão de ar de aproximadamente meio milímetro entre o trilho e o que chamamos de carro.

Este último consiste também de uma cunha bem menor que o próprio trilho que na ausência do ar comprimido se ajusta sobre o mesmo (veja **Figura 12.1**).

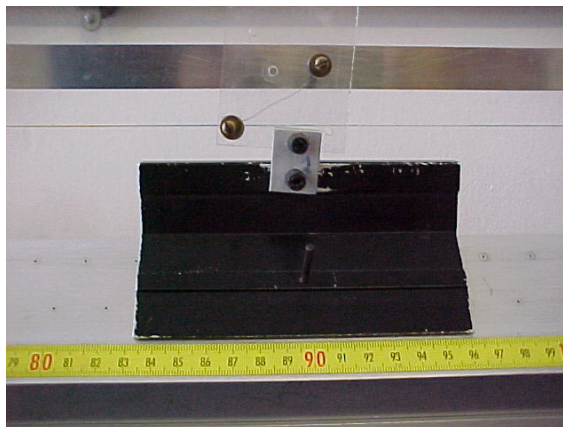


Figura 12.1: O carro.

O colchão de ar faz com que o carrinho “flutue” de maneira que o atrito entre o carro e o trilho praticamente se anule, restando somente uma eventual fricção com o ar, que nas nossas experiências poderá ser desprezada por serem muito baixas as velocidades envolvidas.

O trilho tem ainda um sistema de pára-choques nas suas extremidades, cuja função óbvia é amortecer o choque dos carrinhos ao chegarem nas pontas do trilho (veja **Figura 12.2**).

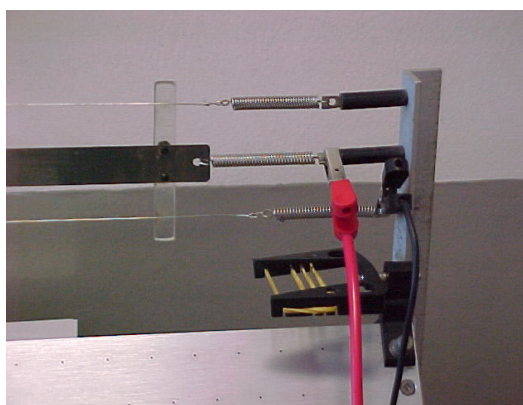


Figura 12.2: O sistema amortecedor e as ligações com as garras.

Existe ainda um sistema de registro de posições composto de um dispositivo centelhador (veja **Figura 12.3**) que provoca centelhas em intervalos de tempo escolhidos pelo experimentador.



Figura 12.3: O centelhador.

Essas centelhas marcam, então, em uma fita de papel termossensível colocada paralelamente ao percurso do trilho, as diversas posições do(s) carro(s) nos intervalos de tempo ajustados no centelhador.

O centelhador é ligado ao trilho por meio de garras (veja **Figura 12.2**). Deve-se tomar cuidado ao se prender as garras ao trilho de ar. Uma das garras corresponde ao terra e a outra à alta tensão ligada a uma fita de aço inoxidável, na qual prendemos a fita de papel mencionada acima. Toda a ligação é feita de modo a possibilitar a formação da centelha entre a fita de aço e um parafuso fixo ao carro (veja **Figura 12.1**). Essa centelha marca, no papel, a posição do carro naquele instante de tempo.

A regulação do centelhador (veja **Figura 12.3**) permite a escolha do intervalo de tempo entre duas centelhas sucessivas. Considera-se então uma marca centelhada na fita de papel como origem do tempo ($t = 0s$). As marcas seguintes correspondem às posições do carrinho em instantes de tempo separados por $\Delta t = 1/f$, onde f é a frequência ajustada no centelhador (veja **Figura 12.3**). Tipicamente, as frequências varrem a faixa de 2,5 a 100 Hz, correspondendo a uma faixa de intervalos de tempo de 0,4 a 0,01 segundo.

Recomendações ao usar o trilho de ar

Nesta sessão, discutiremos algumas precauções que devem ser tomadas ao se utilizar o trilho de ar para uma experiência.

Em primeiro lugar, deve-se levar sempre em consideração que o trilho de ar, apesar de ter uma aparência robusta é, de fato, um conjunto que requer delicadeza no seu trato de forma a não danificá-lo. Dessa maneira, devem ser evitados choques fortes do trilho com a mesa assim como entre os carrinhos.

De fato, choques entre os carrinhos serão provocados em aulas posteriores, mas com o devido cuidado.

Outra prática que deve ser evitada é o arraste dos carrinhos sobre o trilho de ar quando o compressor de ar está desligado. A fricção do carrinho com o trilho produz, em ambos, arranhões prejudiciais à vida útil do aparelho.

Especial cuidado deve ser tomado ao se colocar pesos em cima dos carrinhos, como será feito em experiências futuras: eles devem ser sempre colocados de forma simétrica, de tal maneira que os carrinhos fiquem balanceados.

As ligações elétricas devem ser feitas de forma que o fio terra seja ligado à base do trilho (veja **Figura 12.4**).

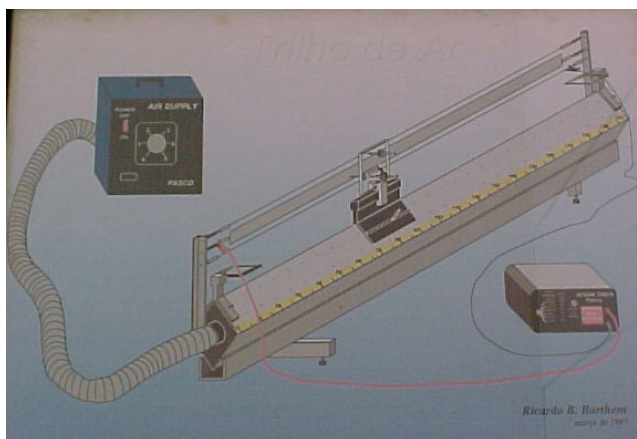


Figura 12.4: A ligação elétrica.

Deve-se manter uma distância conveniente entre a ponta de metal fixa ao carro e a fita sobre a qual é colada a fita de papel. Esta distância tem de ser tal que a descarga produzida pelo centelhador ocorra de maneira a produzir uma dispersão pequena da posição da centelha, de forma a minimizar a imprecisão na leitura da posição do carrinho e, por outro lado, ser perfeitamente legível.

Observe que se a distância mencionada for muito grande, a descarga poderá se dar-se dentro do centelhador, eventualmente danificando-o. No outro caso (distância muito pequena), poderá haver o contato do fio com o terra, o que provocará uma corrente muito grande (“curto-circuito”) também podendo prejudicar o centelhador.

Quanto ao processo de centelhamento, dois cuidados devem ser tomados. O primeiro diz respeito ao tempo de centelhamento: ele não deve ser muito longo, pois esse processo superaquece o aparelho. Evite, por isso, gerar centelhas por mais tempo que o necessário. O segundo é sobre o manuseio do trilho. Ele só deve ser feito após a produção de centelhas com o centelhador desligado, descarregando assim eventuais capacitores que tenham ficado carregados.

Finalmente, o último cuidado que deve ser tomado diz respeito à regulação mecânica do trilho de ar. O trilho deve ajustar-se da melhor forma possível. A não observância da primeira propriedade (verticalidade) faz com que o carrinho se incline para um dos lados, podendo assim ter fricção com o trilho, produzindo um atrito que, pelo que já foi exposto, não é conveniente. No caso de o trilho não ficar horizontal, o carrinho, devido à gravidade, se moverá quando colocado sobre o mesmo. Esse tipo de comportamento freqüentemente é inconveniente para as nossas experiências.

Nós veremos mais adiante, neste curso, que a força da gravidade e a não-horizontalidade levam ao aparecimento de uma aceleração do carrinho na direção do trilho de ar.

O relatório

Em todas as áreas da atividade humana deseja-se que haja circulação de informações. Uma das maneiras mais eficientes e costumeiras é feita através de relatórios. Na Física não é diferente. No caso da Física Experimental, procura-se transmitir procedimentos feitos em laboratórios a outras pessoas que não tenham participado da atividade executada.

Assim, é comum (embora não obrigatório) apresentar um relatório de uma prática experimental com os seguintes itens:

- Introdução — É onde se procura descrever o objetivo da experiência e o contexto no qual ela está inserida. Tipicamente, seria a parte do relatório responsável pelas respostas às perguntas: o que foi medido e por que a medida foi feita.
- Procedimento experimental — Descreve-se nesta parte qual foi a técnica e o material utilizado na experiência. Procura-se aqui fornecer todas as informações necessárias para que outras pessoas possam refazer a experiência se quiserem.
- Tratamento dos dados — É a parte do relatório onde se opera com os diversos resultados de medidas feitas. É bastante comum nesta parte a confecção de gráficos de forma a poder visualizar melhor os dados. Também é bastante freqüente se fazer a propagação dos erros, isto é, a partir das medidas feitas de grandezas com certas imprecisões obter resultados numéricos para outra grandeza com incertezas associadas. Isso em geral é feito supondo algum modelo que relacione as grandezas em questão.

Incentivamos fortemente que sejam confeccionados relatórios sobre todas as práticas feitas neste curso. Você verá que, ao fazê-lo, as dúvidas surgirão, e quando elas forem dirimidas (por você mesmo ou com a ajuda de um monitor), isso se constituirá, talvez, na sua melhor fonte de conhecimento.

Leia o anexo sobre introdução ao tratamento de dados.

- Conclusão — Onde você deve comentar o seu resultado. Isso deve ser feito comparando seu resultado com algum outro conhecido ou previsto. Em particular, as imprecisões obtidas devem ser motivo de análise. Se possível, comente melhorias que poderiam ser feitas na prática ou outras experiências na mesma linha que seriam interessantes

Finalmente, uma última recomendação: procure reler o seu relatório e tente se colocar no lugar de uma pessoa que não tenha participado da experiência. Será que ela teria entendido tudo? Se tiver alguma parte confusa, refaça-a!

Experiência: o movimento do carrinho sobre o trilho de ar.

Até agora fizemos algumas considerações sobre o manuseio do trilho de ar e sobre a confecção de um relatório. Agora vamos de fato fazer a nossa primeira experiência com o trilho de ar.

Objetivos

- Observar e analisar o movimento do carrinho sobre o trilho de ar.
- Compreender o conceito de medida e incerteza experimental, fazendo medidas de posição e de tempo.
- Analisar gráficos de dados obtidos.
- Finalmente, medir a velocidade de um carrinho sobre o trilho de ar.

Procedimento experimental

- Verifique se o trilho de ar está nivelado, testando se o carrinho se move aceleradamente em várias posições do trilho de ar. Se isso acontecer, nivele o trilho de ar. Este procedimento é bastante delicado e pode ser que você precise do auxílio do tutor.
- Faça as conexões elétricas do centelhador com o trilho de ar como aparece nas **Figuras 12.2 e 12.4**.
- Treine uma obtenção de dados sem a colocação da fita de papel termos-sensível. Para isso, defina onde ela será colocada e estime qual deve ser a frequência a ser usada no centelhador, de modo que você obtenha um

razoável número de centelhas marcadas quando o papel estiver colocado em posição. Lembre-se de que o inverso da frequência utilizada será o intervalo de tempo entre as posições sucessivas do carrinho marcadas sobre a fita de papel.

- Coloque a fita de papel, e num canto dela, promova um centelhamento para que você, dessa maneira, verifique se a distância entre a ponta centelhadora e a fita de aço está conveniente, de modo a marcar de maneira legível a fita de papel.

Tomada dos dados

- Com o treino adquirido no item anterior, finalmente registre o movimento do carrinho através do centelhamento na fita.
- Retire a fita de papel e estenda-a sobre uma mesa. Verifique se os pontos centelhados estão legíveis e se eles guardam alguma característica especial. Sobre esta última observação, lembre-se do que foi discutido na aula teórica sobre MRU!
- Faça a leitura dos dados. Para isso, você deverá ler o anexo sobre tratamento de dados, ao final desta aula.
- Resuma os resultados obtidos através da confecção de uma tabela na qual constem os instantes de tempo e as posições com as suas incertezas referentes a cada ponto centelhado. Justifique a incerteza adotada para as posições. Adote a incerteza para os instantes de tempo como nulas, pois, de fato, elas são muito pequenas para serem consideradas.

Análise dos dados

- A partir do que foi demonstrado nas aulas teóricas sobre MRU, faça uma análise preliminar dos seus dados. Em particular, esboce como deveriam ser os gráficos da velocidade e da posição como função do tempo para uma partícula em MRU. Será que seus dados mostram estas características?
- Foi demonstrado nas aulas teóricas que para uma partícula em MRU:
 - A intervalos de tempos iguais correspondem deslocamentos iguais. Seus dados refletem isso? Isto ocorre com os dados obtidos na sua experiência (claro que considerando as incertezas)?

- A velocidade média calculada em qualquer intervalo de tempo considerado é sempre a mesma. Considere alguns intervalos de tempo, não necessariamente sucessivos, e calcule as respectivas velocidades médias. Considerando ainda as incertezas, esta propriedade de MRU é verificada?
- Vamos fazer agora uma análise mais criteriosa. Construa, para os dados obtidos, um gráfico da posição em função do tempo em papel milimetrado. Considere, no eixo horizontal representado, o tempo, e no vertical, a posição. Não esqueça de anotar no gráfico as unidades e a escala utilizadas em cada eixo. Procure utilizar uma escala que permita facilmente a leitura dos dados a partir do gráfico. Não esqueça de marcar as incertezas nas posições, representando-as por barras de erros proporcionais à escala usada.

Anexo - Introdução ao tratamento de dados

Neste anexo, escreveremos sobre alguns termos usados frequentemente no trabalho experimental. Alguns desses termos você já usou nas práticas experimentais do curso de Introdução às Ciências Físicas e seria interessante que você relese, em particular, o complemento 3 do módulo 1 daquele curso.

Antes de Galileu, a “Filosofia Natural” (a Física da época) não fazia medidas com o intuito de comprovar ou verificar um modelo teórico qualquer. No período de 1602 a 1608, Galileu começou a fazer uma série de medidas para compreender o movimento. Deparou-se então com vários problemas práticos, como por exemplo, a definição de velocidade que varia no tempo. De fato, como você já viu nas aulas anteriores, foi Newton, com o desenvolvimento do Cálculo e da Mecânica, que resolveu este problema. Mas uma das principais conclusões obtidas por Galileu foi sobre o limite prático de exatidão de uma medida. Ele verificou que não importa o quanto se melhore as técnicas de medida, existe sempre um tal limite. Isto constituiu, de fato, uma ruptura com as idéias da “Filosofia Natural” da época. A partir de Galileu, exige-se para o aceite de um modelo teórico tão somente concordância razoável com a observação. Assim, sempre que é realizada uma medida, o resultado deve ser expresso de uma maneira clara, de tal forma que ele seja compreensível e reproduzível por algum outro experimentador.

Esta medida deve ser expressa num sistema de unidades conhecido e padronizado. O mais usado é o Sistema Internacional (SI), que tem para unidades de distância e tempo, respectivamente, o metro e o segundo. Leia o final da aula 10 sobre estes padrões.

Suponhamos, por exemplo, que ao se fazer uma medida do período de um pêndulo, um experimentador tenha achado o valor de 1,72s. A pergunta que se faz então é: quão exata ou próxima de um “valor verdadeiro” ou mesmo de um valor teórico ela está? Pelo que discutimos acima, associada a esta medida existe sempre uma incerteza (no nosso caso, vamos supor que seja 0,07s). O resultado da medida é expresso como: $T = (1,72 \pm 0,07)\text{s}$. Com isso, queremos dizer que temos uma previsão de que a repetição da experiência em condições idênticas deve fornecer um resultado entre 1,65 e 1,79s. Você verá no curso de Física II que esta é uma previsão probabilística, isto é, existe uma probabilidade de tantos por cento de isto ocorrer.

Mas por que a indicação da incerteza é tão importante? Do ponto de vista experimental, ela é uma indicação da qualidade da experiência, isto é, quanto menor o seu valor mais bem feita foi a medida. Ela também é importante numa comparação com um modelo teórico. Vamos supor que o período do pêndulo,

Você deve estar estranhando previsões teóricas com incertezas. Isto acontece porque as grandezas que aparecem na fórmula teórica têm incertezas associadas e elas se propagam para a grandeza medida. Mais adiante, neste curso, você verá como isto é feito.

para um determinado modelo, seja $T = (1,66 \pm 0,02)s$.

A comparação dos resultados experimental e teórico mostram uma consistência e, portanto, uma concordância da experiência com a teoria. Observe que se tivéssemos apenas os valores 1,72s e 1,66s nenhum tipo de conclusão seria possível. Resumindo, você deve ter sempre em mente que:

Toda vez que você fizer uma medida você deve expressá-la com a unidade apropriada e com a incerteza associada.

A repetição de uma experiência em condições idênticas não fornece resultados idênticos. Tente, por exemplo, medir o seu tempo de reação usando um cronômetro. Meça o tempo que você gasta dando partida e parando o cronômetro. Embora seja sempre o mesmo cronômetro e a mesma pessoa, você obterá valores diferentes cada vez que fizer a medida. Observe que isso será válido se usarmos cronômetros razoavelmente precisos (da ordem de centésimos de segundos). Se usássemos um relógio comum com precisão de 1s, provavelmente todas as medidas dariam esse valor. Esse seria o verdadeiro valor dentro da precisão do aparelho de medida.

É bastante intuitivo que se repetirmos uma experiência várias vezes, através de um tratamento adequado dos dados (cálculo de média dos valores obtidos etc.), encontraremos um resultado mais próximo do que seria o valor verdadeiro da grandeza. Meça várias vezes o seu tempo de reação e verifique o que vai acontecendo com a média das suas medidas.

Assim, se tivéssemos paciência ou possibilidade de repetir um número muito grande de vezes a experiência, esperaríamos que a nossa estimativa de valor verdadeiro correspondesse ao valor verdadeiro da medida.

As diferenças de resultados entre estas diversas medidas são chamadas flutuações estatísticas, e aos erros que causaram estas flutuações denominamos **erros estatísticos**.

Existe um outro tipo de erro que é chamado de erro sistemático. Sua principal característica é não poder ser minimizado com a repetição da experiência. Por exemplo, podemos ter um instrumento com calibração desregulada. Imagine que você esteja usando uma régua de metal para medir distâncias. Se ela tiver sido calibrada em uma baixa temperatura e você estiver usando-a em uma alta temperatura, devido à dilatação, sistematicamente você achará um resultado menor que o valor verdadeiro! Nesse caso, não adianta refazer inúmeras vezes a experiência, de modo a diminuir este erro.

Finalmente, o último tipo de erro é o chamado **erro grosseiro**. Um exemplo desse tipo seria uma medida de uma distância com uma régua, onde o experimen-

tador faria a medida começando da marcação de 1cm em vez da marcação de 0cm. Espera-se ardentemente que este tipo de erro não seja cometido.

Os conceitos de precisão e acurácia estão intimamente ligados às idéias de erros sistemáticos e de erros aleatórios. Uma história exemplifica isso muito bem.

Suponha que um jogador de futebol, para treinar passe de bola, tenha de chutá-la de modo a atingir uma estaca no campo. Ele chuta 20 vezes e nestas 20 tentativas a bola atinge uma outra estaca bastante separada da que ele queria acertar. Este jogador é extremamente preciso, já que seus chutes não apresentaram nenhuma variação em torno da segunda estaca. Entretanto, sua acurácia é muito ruim, uma vez que o objetivo era acertar uma estaca e ele acertava outra bastante separada. Isto pode ser resumido da seguinte maneira:

um experimentador é muito preciso quando ele consegue resultados cuja flutuação em torno de um valor médio é pequena. Ele será um experimentador acurado quando sua discrepância em relação ao valor verdadeiro for pequena.

Assim, erros estatísticos pequenos acarretam uma boa precisão e isso indica que o resultado da medida é bastante reprodutível (acertar 20 vezes a mesma estaca!). Mas para ter uma boa acurácia, é necessário, além de uma boa precisão, que os erros sistemáticos sejam pequenos.



UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense



Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro



**GOVERNO DO
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



**UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL**

**Ministério
da Educação**

