

Vamos poupar dinheiro!

Érika Silos de Castro (coordenação), André Luiz Martins Pereira e Luciana Felix da Costa Santos.

Introdução

Na Unidade 18 do material do aluno, são apresentadas várias situações cotidianas em que podemos utilizar a função exponencial. Nesta unidade, o aluno terá a oportunidade de ampliar as discussões realizadas no Módulo 2, compreendendo as funções exponenciais por meio de problemas práticos – como os juros compostos de uma poupança, por exemplo.

Com o objetivo de oferecer a você, professor, recursos para complementar a discussão deste tema em sala de aula, pesquisamos e elaboramos algumas atividades. Disponibilizamos também alguns recursos didáticos para facilitar o desenvolvimento destas atividades. O resumo e o detalhamento de nossas sugestões serão apresentados nas tabelas e textos das próximas páginas. A proposta é que você as utilize de acordo com a realidade de cada turma, fazendo alterações e adaptações sempre que julgar necessário.

Sugerimos que a primeira aula desta unidade inicie-se com uma atividade disparadora. Esta é uma atividade proposta para ser realizada em grupo, promovendo uma dinâmica entre os alunos. Neste momento, é esperado que eles desenvolvam algumas noções básicas relacionadas à função exponencial.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos: o primeiro momento deve ser dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o processo. Já o segundo momento é um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	2	6	4 aulas de 2 tempos

Título da unidade	Tema
Vamos poupar dinheiro!	Função Exponencial
Objetivos da unidade	
Identificar fenômenos que podem ser modelados por uma função exponencial;	
Identificar a representação algébrica, gráfica e as principais propriedades da função exponencial;	
Resolver problemas, utilizando a função exponencial;	
Resolver equações exponenciais simples.	
Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	225 e 226
Seção 1 – Aprendendo um pouco sobre o cálculo de juros compostos	227 a 235
Seção 2 – Analisando gráficos e definindo a função exponencial	235 a 238
Resumo	238
Veja ainda...	238
O que perguntam por aí?	241 a 242
Caia na rede!	243 a 245

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

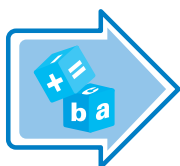
Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.



Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.



Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



Avaliação


Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.



Exercícios

Proposições de exercícios complementares



Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Jogo de xadrez e a exponencial	Folha de atividades e calculadora	A atividade inicialmente propõe a leitura e a interpretação de um diálogo entre o imperador e um súdito sobre o jogo de xadrez. Com os dados apresentados na história, os alunos serão convidados a resolver um problema, cuja solução é dada, usando a ideia de crescimento de uma função exponencial.	Em grupos de três ou quatro alunos	30 minutos
	Torre de Hanói	Folha de atividades, computadores com acesso à Internet, software Torre de Hanói (disponível no material do professor) e software GeoGebra	Esta atividade propõe a utilização do jogo Torre de Hanói para a observação de um crescimento exponencial. Primeiro, apresentamos a história do surgimento deste jogo e apresentamos um aplicativo interativo. Depois, sugerimos questões e reflexões que levem os alunos a observarem e interpretarem as informações contidas no desafio apresentado.	Duplas ou trios, preferencialmente. Grupos de quatro elementos ou participação coletiva da turma também são possíveis.	40 minutos

Seção 1 – Aprendendo um pouco sobre o cálculo de juros compostos

Páginas no material do aluno



227 a 235

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Usando gráficos na previsão de rendimentos em aplicações financeiras	Computadores com acesso à Internet, software GeoGebra instalado, lousa, caderno ou folhas para anotações e lápis/caneta	Usaremos aqui o software GeoGebra para fazer a análise da representação gráfica de uma função exponencial. Ela será usada para calcular o rendimento de uma determinada quantia em dinheiro, quando aplicada na poupança. Esse rendimento é estabelecido pela aplicação de juros compostos.	Turma dividida em duplas ou trios	30 minutos
	Desmistificando o estudo de juros compostos com apoio de gráficos	Computadores, software GeoGebra, datashow, folha para anotações dos alunos e lousa	Usaremos aqui o software GeoGebra, para fazer a representação gráfica de uma função exponencial no software. A partir do gráfico, faremos a análise do rendimento de uma determinada quantia em dinheiro, quando aplicada a juros compostos.	Duplas ou trios	40 minutos

Seção 2 – Analisando gráficos e definindo a função exponencial

Páginas no material do aluno


235 a 238

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Acidente com Césio-137	Folha de atividades, computadores, software GeoGebra e calculadora	Essa atividade tem por objetivo estudar a função exponencial que modela o comportamento do decaimento radioativo de um isótopo do Césio, a partir da leitura de um texto sobre o episódio que ficou conhecido como Acidente com Césio-137. Fará uso do software GeoGebra, para explorar as características gráficas e analíticas do conceito de função exponencial.	Duplas ou trios	40 minutos
	Epidemia de Dengue	Cópias da folha de atividades, computadores, softwares GeoGebra e Winplot e calculadora	Esta atividade propõe-se a mostrar como a Matemática, por meio da teoria de funções exponenciais, pode auxiliar no entendimento e no combate de epidemias.	Duplas ou trios	40 minutos

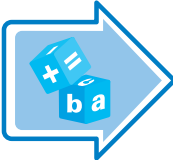
O que perguntam por aí?

Páginas no material do aluno


241 a 242

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	UNESP	Imagem para projeção, disponível neste material; material do aluno	Os alunos resolverão uma questão que envolve a análise de uma função exponencial.	Duplas	15 minutos


Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Cópias da folha de atividades, material do aluno	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade. Ele está dividido em duas etapas: a primeira consiste no registro de aprendizagens e a segunda consiste em questões objetivas e dissertativas, cuja escolha fica a critério do professor.	Individual	40 minutos

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de fixação complementares	Folhas de atividades		Duplas ou em trios	15 minutos

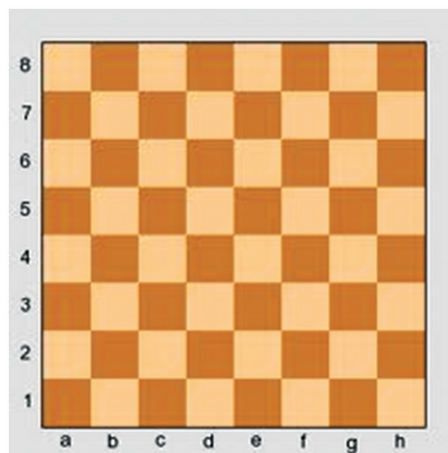
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Jogo de xadrez e a exponencial	Folha de atividades e calculadora	A atividade inicialmente propõe a leitura e a interpretação de um diálogo entre o imperador e um súdito sobre o jogo de xadrez. Com os dados apresentados na história, os alunos serão convidados a resolver um problema, cuja solução é dada, usando a ideia de crescimento de uma função exponencial.	Em grupos de três ou quatro alunos	30 minutos

Aspectos operacionais

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma. Em seguida, solicite que a turma divida-se em grupos de três ou quatro alunos, distribua a folha para os grupos e leia com eles a história.

Após a leitura, apresente o formato do tabuleiro de xadrez, para ajudar os alunos que não estiverem familiarizados com o jogo. É importante destacar que o tabuleiro possui 64 casas e definir uma ordem para a contagem das casas. Sugerimos que sejam contadas da esquerda para a direita e de baixo para cima. Logo, a casa 22 estará na posição (f,3), a casa 59 na posição (c,8) etc.



Orientar os alunos a responderem às questões propostas na folha de atividades, pedindo que descrevam a forma como estão procedendo para resolver o problema.

Ao final da atividade, promover um debate a partir dos resultados obtidos pelos alunos, discutindo as questões apresentadas na próxima seção.

Aspectos pedagógicos

Na seção Para início de conversa..., que abre a Unidade 8 do Módulo 2 do material do aluno, é apresentada uma história em quadrinhos que recorre à matemática financeira para motivar o estudo de funções exponenciais. Na tentativa de trazer novas opções para você, professor, elaboramos esta atividade, utilizando agora a história do jogo de xadrez como ponto de partida e contexto para a elaboração do problema. A solução é dada, usando a ideia de crescimento de uma função exponencial e permite explorar um pouquinho o conceito de progressão geométrica.

Primeiro, propomos a leitura e a interpretação de um diálogo entre o imperador e um súdito sobre o jogo de xadrez. Com os dados apresentados na história, os alunos serão convidados a responderem às questões propostas na folha de atividades, disponível neste material, e posteriormente, a ampliarem as discussões para as situações propostas no material do aluno.

Para auxiliar os alunos nas questões propostas na folha de atividades, você pode dar uma dica de como escrever o número de moedas de ouro, usando potências de 3. Isto é, levá-los a observar que 1 moeda pode ser representada por 3^0 , 3 moedas por 3^1 , 9 por 3^2 e assim por diante. Além disso, este exercício permite o entendimento da generalização proposta na questão 3, através da obtenção de um fórmula matemática que representa o número de moedas de ouro em cada casa x . Ou seja, ao observar que na casa 1 há 3^0 moedas, que na casa 2 há 3^1 moedas, que na casa 3 há 3^2 moedas e assim por diante, acreditamos que os alunos conseguirão perceber que na casa x haverá 3^{x-1} moedas.

A atividade fica mais interessante se for permitido o uso de calculadora, já que a cada casa o número de moedas aumenta exponencialmente, conforme uma PG de razão 3.

Outra oportunidade é a de se trabalhar propriedades de potências, como o produto de potências de mesma base. Isso permite que o aluno observe a relação entre o número de moedas contidas em duas casas consecutivas do tabuleiro e ainda obtenha os resultados desejados com muito mais rapidez. Desta forma, calcular 3^{20} , por exemplo, fica muito mais fácil, quando ele observa que $3^{20} = 3^{10} \cdot 3^{10}$.

Na questão desafio, ajude os grupos, apresentando uma maneira de calcular esse valor, aplicando apenas propriedades de potências ou pela soma de n termos de uma PG.

Ao final da atividade, promover um debate sobre, baseado nos resultados obtidos pelos alunos, discutindo:

- A possibilidade de se preencher o tabuleiro com moedas de ouro, conforme exposto no problema;
- Se os alunos pudessem “chutar” um número de moedas para este preenchimento, quantas moedas eles achariam que são suficientes para satisfazer ao súdito?

Você pode reproduzir e distribuir uma cópia com a figura de um tabuleiro de xadrez para cada grupo (ela está disponível neste material) e instigá-los a imaginar quantas moedas seriam necessárias para o preenchimento daquele tabuleiro de acordo com o “singelo” pedido do súdito.

Folha de atividades – Jogo de xadrez e a exponencial

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Vamos interpretar a situação apresentada a seguir, respondendo às questões propostas:

Há muitos e muitos anos, na China, ocorreu um fato inusitado. O imperador, entediado de travar guerras – especialmente aquelas que perdia –, propôs um desafio a seus súditos.

Imperador: – Estou cansado de ficar pensando na guerra que perdi. Quero algo novo para ocupar meu tempo!

Ching Lin, um engenhoso inventor, criou um jogo para acabar com o tédio do seu imperador. Ele chamou esse jogo de xadrez. Confiante em sua criação, Ching Lin foi ao palácio real para apresentar o jogo.

Ching Lin: Consegui! Imperador, inventei um jogo para o senhor passar o seu tempo e esquecer as batalhas.

O imperador e Ching Lin começaram então a jogar. Ao final do jogo, o imperador, encantado pela invenção de seu súdito, decidiu dar-lhe uma recompensa.

Imperador: O que posso fazer para te recompensar por esse magnífico jogo?

Ching Lin: Imperador, dê-me uma moeda de ouro pela primeira casa do tabuleiro, três pela segunda casa, nove pela terceira, vinte e sete pela quarta e assim por diante, até a última casa do tabuleiro.

Imperador: Muito bem! Chamem meu tesoureiro para contar a quantidade de moedas.

Será que o imperador tem noção do que está fazendo? Ching Lin será agora um homem rico?

Questão 1: Preencha o quadro a seguir, relacionando o número de casas e o número de moedas de ouro, até o número que conseguir encontrar no tabuleiro. Obs.: Para auxiliá-lo, utilize uma calculadora.

Número da Casa	Número de Moedas de Ouro por Casa
1	
2	
3	
5	
10	
20	
25	
50	
60	
64	

Questão 2: O que ocorre com o número de moedas em cada casa consecutiva do tabuleiro? Podemos observar alguma regularidade a partir do quadro construído? Justifique a sua resposta.

Questão 3: Determine uma fórmula matemática que represente o número de moedas de ouro em cada casa em função do número x da casa correspondente no tabuleiro.


Questão 4: Determine a quantidade de moedas do ouro:

na 20ª casa. _____

até a 20ª casa. _____

Questão Desafio: Quanto o imperador teria de pagar a Ching Lin, em moedas de ouro? Ching Lin ficaria rico?

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Torre de Hanói	Folha de atividades, computadores com acesso à Internet, software Torre de Hanói (disponível no material do professor) e software GeoGebra	Esta atividade propõe a utilização do jogo Torre de Hanói para a observação de um crescimento exponencial. Primeiro, apresentamos a história do surgimento deste jogo e apresentamos um aplicativo interativo. Depois, sugerimos questões e reflexões que levem os alunos a observarem e interpretarem as informações contidas no desafio apresentado.	Duplas ou trios, preferencialmente. Grupos de quatro elementos ou participação coletiva da turma também são possíveis.	40 minutos

Aspectos operacionais

A atividade foi planejada para ser aplicada no laboratório de informática e com os alunos divididos em duplas. No entanto, caso o laboratório de informática não tenha computadores suficientes, é possível aplicar a atividade com os alunos organizados em grupos de, no máximo, quatro componentes. Em caso de grupos com mais de dois alunos, sugerimos que haja um revezamento entre os componentes do grupo, para que todos possam participar ativamente. A mesma atividade poderá ser aplicada em sala de aula com um computador ligado a um projetor multimídia ou a uma TV. Neste caso, os alunos poderão interagir com o aplicativo de maneira indireta e coletiva.

Assim, antes de conduzir seus alunos até o laboratório ou de usar o computador da sala, certifique-se de que o aplicativo Torre de Hanói e o GeoGebra foram devidamente instalados e testados, para que não seja necessário realizar tais procedimentos durante a aula. Quando tudo estiver preparado, apresente o aplicativo disponível em <http://www.matematica.br/programas/hanoi/index.html> e resolva um dos desafios como exemplo.

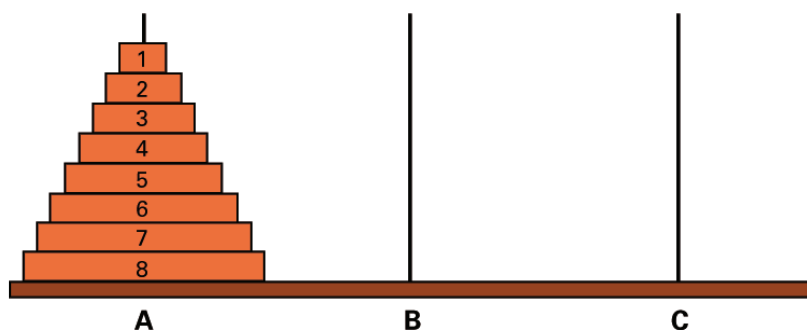
Solicite que os alunos organizem-se em grupos e apresente o jogo, descrevendo sua história e suas regras, de acordo com o proposto na seção Aspectos pedagógicos. Convide-os a interagir com o aplicativo e, em seguida, a responder às questões da folha de atividades. Convide-os também a realizarem registros das suas aprendizagens.

Ao final da atividade, promova um debate a partir dos resultados obtidos pelos alunos, discutindo as questões propostas na seção seguinte.

Aspectos pedagógicos

Para iniciar a atividade, seria interessante apresentar o problema da Torre de Hanói de uma forma mais lúdica. Para isso, podemos contar a história do seu surgimento e, em seguida, apresentar o aplicativo interativo com o jogo originado do problema.

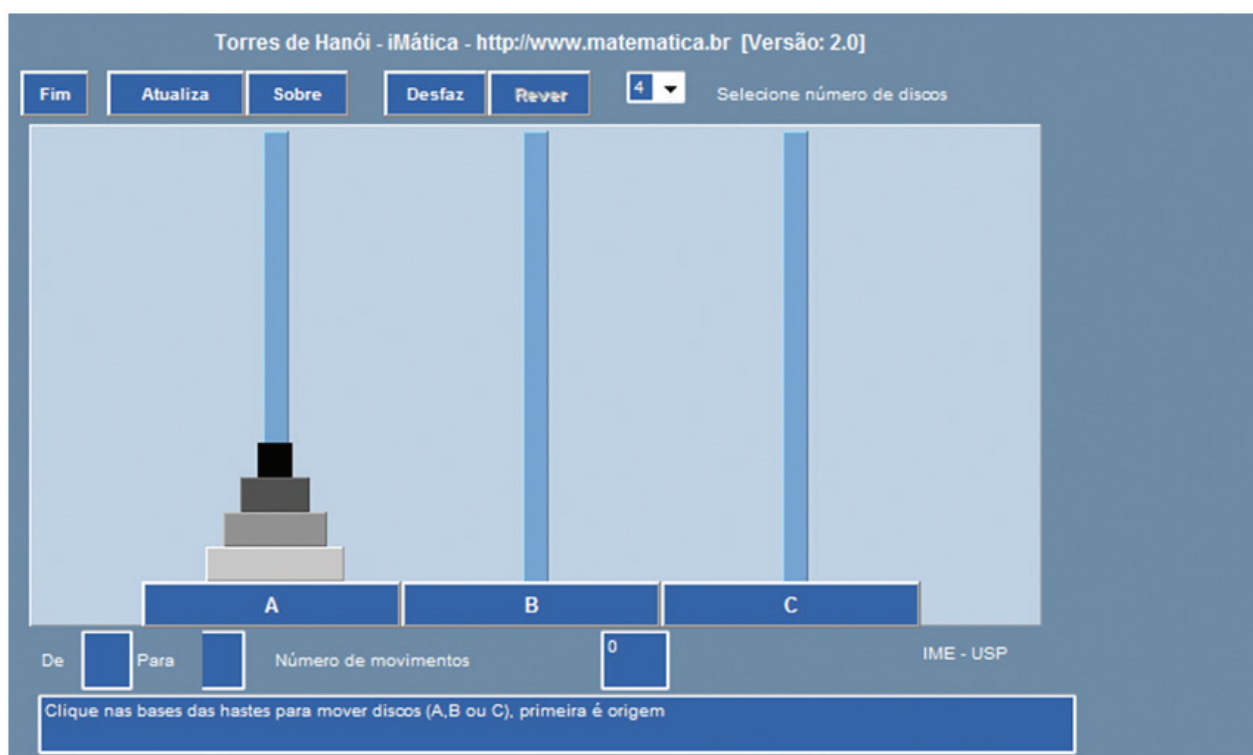
O problema das Torres de Hanói foi proposto pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1883. Lucas elaborou para seu “invento” uma lenda curiosa sobre uma torre muito grande: a “torre de Brama”, que foi criada no “início dos tempos”, com três hastes, contendo 64 discos concêntricos (mesmo centro). O “criador” do universo também criou uma comunidade de monges cuja única atividade seria mover os discos da haste original (“A”) para uma de destino (“C”).



O “criador” estabeleceu que o mundo acabaria, quando os monges terminassem sua tarefa. Porém, os monges deveriam respeitar três regras na sua execução:

- 1ª) pode-se mover um único disco por vez;
- 2ª) um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor;
- 3ª) um disco deve estar sempre numa das três hastes, ou em movimento.

A tarefa do jogo, disponível em <http://www.matematica.br/programas/hanoi/index.html>, é encontrar a regra de movimentação ótima (que atinja o objetivo com um número mínimo de movimentos) e com isso estimar quanto tempo ainda nos resta.



Você pode iniciar com 2 discos e mostrar a eles que o menor número de movimentos, neste caso, é 3. Os alunos poderão reproduzir a jogada com dois discos e aumentar gradativamente o número de discos sempre que atingirem a meta.

Para auxiliar os alunos nas questões propostas na folha de atividades, você pode dar uma dica de como escrever o número mínimo de movimentos, usando potências de 2. Isto é, levá-los a observar que, com 2 discos, o menor número de movimentos pode ser representado por 2^2-1 ; com 3 discos, esse número é 2^3-1 ; com 4 discos, o número é 2^4-1 e assim por diante. Além disso, este exercício permite o entendimento da generalização proposta na questão 3, através da obtenção de uma fórmula matemática que representa o número mínimo de movimentos com um número x de discos, ou seja, ao observar que com 2 discos são necessários pelo menos 2^2-1 movimentos; que com 3 discos são necessário 2^3-1 movimentos; que com 4 discos, 2^4-1 movimentos e assim por diante, acreditamos que os alunos conseguirão perceber que com x discos são necessários, no mínimo, 2^x-1 movimentos.

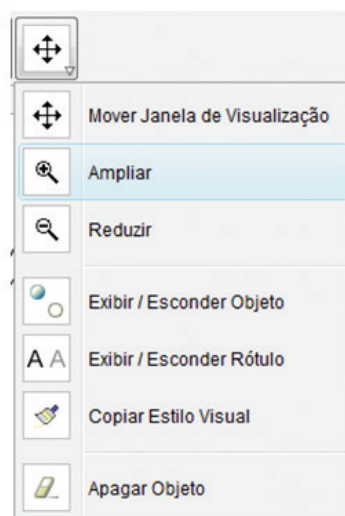
Na questão 5, se necessário, oriente os alunos a inserirem a lei $A(n)=2^n-1$ na caixa de entrada, localizada na parte inferior da tela do GeoGebra, conforme figura a seguir:



Ao resolverem a questão 6, oriente-os alunos a inserirem a lei $A(n)=2n-1$ na caixa de entrada da mesma tela, para que possam realizar a comparação proposta.



Esta atividade permite que os alunos recorram às potencialidades do software, como o zoom. Para isso, basta clicar em “Ampliar” e depois clicar sobre o objeto na tela, até que ele atinja o tamanho desejado.



Ao final da atividade, promova um debate com os alunos, discutindo:

As maneiras como estão procedendo para resolver o problema, sem se preocupar com o rigor matemático.

Se a maneira escolhida por eles utiliza o menor número de movimentos possível.

Caso os alunos apresentem dificuldades nesta otimização, você pode auxiliá-los na obtenção destes números mínimos de movimentos e instigá-los a observarem algum tipo de regularidade.

Os domínios e as imagens das funções dadas pela mesma lei $A(n)=2^n-1$. Aqui, cabe ressaltar que no caso da função que representa o número de movimentos da Torre de Hanói, o domínio, representado pelo número de discos, é dado pelo conjunto discreto $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, enquanto o gráfico dado pelo GeoGebra considera $D = \mathbb{R}$.

Folha de atividades – Torre de Hanói

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

O problema das Torres de Hanói foi proposto pelo matemático francês Edouard Lucas, em 1883. Lucas elaborou para seu “invento” uma lenda curiosa sobre uma torre muito grande: a “torre de Brama”, que foi criada “início dos tempos”, com três hastes, contendo 64 discos concêntricos (mesmo centro). O “criador” do universo também criou uma comunidade de monges cuja única atividade seria mover os discos da haste original (“A”) para uma de destino (“C”).

O “criador” estabeleceu que o mundo acabaria, quando os monges terminassem sua tarefa. Porém, os monges deveriam respeitar três regras na sua execução:

- 1ª) pode-se mover um único disco por vez;
- 2ª) um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor;
- 3ª) um disco deve estar sempre numa das três hastes, ou em movimento.

Sua tarefa é encontrar a regra de movimentação ótima (que atinge o objetivo com um número mínimo de movimentos) e com isso estimar quanto tempo ainda nos resta! Suponha que cada disco leve 1 segundo para ser movido. Tente encontrar uma fórmula que, a partir de um determinado número inteiro n , devolva o número mínimo de movimentos para mover completamente uma torre com n discos.

Questão 1: A partir do jogo interativo, tente preencher a tabela com o menor número de movimentos necessários para atingir o objetivo deste desafio.

Número de Discos	Número Mínimo de Movimentos
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Questão 2: É possível sempre chegar ao objetivo desejado, isto é, determinar um número mínimo de movimentos que permita transferir todos os discos da primeira para a terceira haste, seguindo as regras do jogo? Caso positivo, justifique a sua resposta.

Questão 3: Existe, nesta atividade, alguma relação matemática entre o número n de peças da torre e o número mínimo $A(n)$ necessário, para efetuar a sua transferência da haste de origem para a haste final? Existe uma função matemática $A(n)$, da variável n que possa representar esta situação?

Questão 4: O que acontece com o número de movimentos, quando o número de discos aumenta em uma unidade? E em duas unidades? E em três? E em n ? Que tipo de função descreve este comportamento?


Questão 5: Usando uma ferramenta gráfica, como GeoGebra, faça o gráfico da função $A(n)$ obtida na questão 3. Para isto, digite na caixa de entrada, localizada na parte inferior da tela do software GeoGebra a lei de formação, obtida na questão anterior.

Questão 6: Analisando o gráfico obtido na questão 5 e o gráfico da função de primeiro grau $f(n) = 2n-1$, para n natural, qual é a função que cresce mais rápido? Para que valores de n estas funções coincidem? Justifique com suas palavras:

Seção 1 – Aprendendo um pouco sobre o cálculo de juros compostos

Páginas no material do aluno

227 a 235

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Usando gráficos na previsão de rendimentos em aplicações financeiras	Computadores com acesso à Internet, software GeoGebra instalado, lousa, caderno ou folhas para anotações e lápis/caneta	Usaremos aqui o software GeoGebra para fazer a análise da representação gráfica de uma função exponencial. Ela será usada para calcular o rendimento de uma determinada quantia em dinheiro, quando aplicada na poupança. Esse rendimento é estabelecido pela aplicação de juros compostos.	Turma dividida em duplas ou trios	30 minutos

Aspectos operacionais

Esta atividade foi elaborada para aplicação em laboratório de informática, onde, a partir da modelagem de um problema, será feito uso da representação gráfica de uma função exponencial.

Para executar a construção da representação gráfica da função exponencial, você deverá sugerir aos seus alunos o uso do software GeoGebra. Portanto, antes de começar, certifique-se de que o software está instalado nos computadores que serão usados. Leve, então, os seus alunos até o laboratório de informática, peça para que eles formem duplas ou trios e que cada grupo se posicione em frente a um computador.

Proponha aos seus alunos que tentem resolver o problema que consta da seção aspectos pedagógicos (você poderá projetar a imagem contendo o texto do problema, que está disponível em seu material, ou, simplesmente, escrevê-lo na lousa). Faça com eles uma leitura e uma rápida discussão do problema proposto.

Eles deverão estabelecer as expressões algébricas das funções $f(x)$ e $g(x)$. Em seguida, peça que abram o software GeoGebra e o apresente rapidamente. Passe, então à construção das funções:

Uma vez aberto o software, peça os alunos que escolham, dentro do menu Disposições, a opção Álgebra e Gráficos.

Em seguida, peça para que escrevam na barra de Entrada a expressão da primeira função (f). O gráfico da função aparecerá na Janela de visualização. Então, peça para que ajustem a escala do gráfico para uma melhor visualização (podemos fazer isso clicando com o botão direito do mouse sobre uma parte qualquer da Janela de visualização e escolhendo a opção Eixo X : Eixo Y. Provavelmente, a escala mais apropriada será a 1 : 50).

Eles poderão então responder ao primeiro questionamento – quanto teremos daqui a cinco anos? – inserindo uma segunda equação, $x = 60$ (lembrando que a taxa é MENSAL e que cinco anos correspondem a 60 MESES), e determinando o ponto de interseção dos dois gráficos. Para fazer isso, basta selecionar a ferramenta Interseção de dois objetos e, em seguida, clicar sobre os gráficos em questão. As coordenadas do par ordenado, correspondente ao ponto criado, aparecerão na Janela de álgebra. E o valor de y nesse par ordenado corresponde ao valor procurado.

Para responder ao segundo questionamento – se depositarmos dez mil reais hoje na poupança, em quanto tempo, aproximadamente, teremos doze mil reais? –, primeiro peça aos alunos que escondam os objetos com os quais acabaram de trabalhar (para isso, basta clicar com o botão direito do mouse sobre cada objeto e desmarcar a opção Exibir objeto). Eles poderão proceder da mesma forma para a segunda função, inserindo a expressão da segunda função na barra de Entrada, inserindo, em seguida, a equação $y = 12000$ e, finalmente, determinando o ponto de interseção dos dois gráficos. Para fazer isso, basta selecionar a ferramenta Interseção de dois objetos e, em seguida, clicar sobre os gráficos em questão. As coordenadas do par ordenado correspondente ao ponto criado aparecerão na Janela de álgebra. E o valor de x nesse par ordenado corresponde ao valor procurado (para a segunda função a escala mais apropriada será a 1: 100).

Caso a sua unidade escolar não disponha de um laboratório de informática, a mesma atividade poderá ser aplicada em sala de aula com auxílio de um computador ligado a um projetor multimídia ou a uma TV. Neste caso, os alunos poderão interagir com o software de maneira indireta e coletiva.

Aspectos pedagógicos

Esta atividade foi elaborada, tomando como base os questionamentos a respeito do rendimento de uma determinada quantia em dinheiro na poupança, levantados no material do aluno, na seção Para início de conversa (**página 2**).

Existem muitas maneiras de calcular o rendimento que se estabelece pela aplicação de juros compostos. Uma delas passa pela modelagem do problema através da noção de função exponencial. Mas a análise, baseada apenas na representação algébrica da função, passaria pela resolução de equações exponenciais e, em alguns casos, pela resolução de equações logarítmicas.

Uma vez que, até aqui, seus alunos provavelmente não tiveram a oportunidade de desenvolver essas habilidades e competências – principalmente em relação à resolução de equações logarítmicas – pensamos no uso da representação gráfica de uma função exponencial para, a partir da modelagem do problema, realizar esse tipo de análise de rendimento.

Mas, por que lançar mão de um software de geometria dinâmica e construção de gráficos, como o GeoGebra? O uso desse software, além de agilizar o processo de construção de gráficos, permitirá a resolução gráfica das equações exponenciais que citamos anteriormente – as que dependem da resolução de equações logarítmicas – uma vez que será possível marcar pontos de interseção de curvas e determinar suas coordenadas cartesianas.

Os questionamentos propostos na seção Para início de conversa levam-nos ao seguinte problema (que deverá ser proposto aos alunos durante a aplicação da atividade):

Problema: Se colocarmos dois mil reais hoje na poupança, como fez Leon, você saberia dizer quanto teremos daqui a cinco anos? Ou, então, se depositarmos dez mil reais hoje na poupança, em quanto tempo, aproximadamente, teremos doze mil reais?

Para ajudar os seus alunos a modelar esse problema a partir do estudo de funções exponenciais, sugira os seguintes questionamentos:

Qual é a taxa mensal de rendimento da poupança atualmente?

Como podemos escrever esse valor em sua forma percentual e decimal?

Usando a fórmula apresentada na **página 5** do material do aluno, $M = C.(1 + i)^n$, e sabendo que i) esse tipo de aplicação é feita a juros compostos e que ii) a taxa mensal de rendimento da poupança se manterá constante durante todo o tempo da aplicação, qual seria a expressão algébrica da função estabelecida entre o montante acumulado do rendimento e o tempo de aplicação de um capital de R\$2.000,00? E para R\$ 10.000,00?

Para que seus alunos descubram qual é a taxa mensal de rendimento da poupança atualmente, você poderá sugerir a eles que procurem por essa informação por intermédio de um *site* de busca (por exemplo, o Google). Para referência dessa busca, os alunos poderão usar expressões como taxa da poupança 2013. Dentre os *sites* que certamente aparecerão como resultado estará o *site* de Remuneração dos Depósitos de Poupança do Banco Central. Nesse *site*, os alunos encontrarão os valores atualizados para a taxa de rendimento da poupança no mês de aplicação dessa atividade.

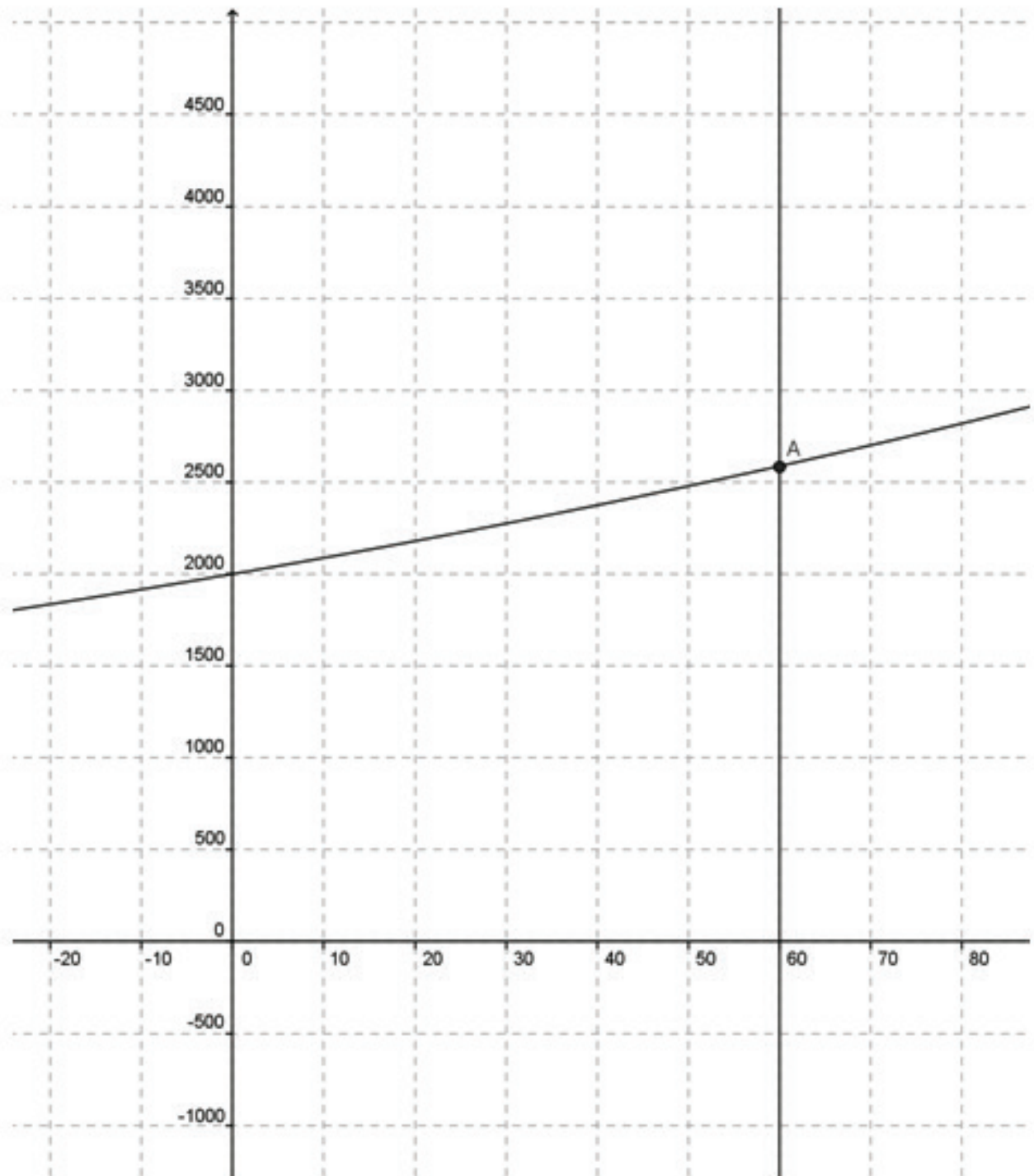
Após esta etapa, você poderá lembrá-los da fórmula apresentada na **página 5** do material do aluno, $M = C.(1 + i)^n$, e também que a taxa mensal de rendimento da poupança se manterá constante durante todo o tempo da aplicação. A partir daí, procure conduzi-los a descobrir a expressão algébrica da função estabelecida entre o montante acumulado do rendimento e os tempos de aplicação de um capital de R\$2.000,00 e de um capital de R\$ 10.000,00.

É importante neste momento lembrar rapidamente as condições para que algumas relações sejam consideradas funções. Durante a realização da atividade, eles trabalharão, por exemplo, com o gráfico da equação $x = 60$, que não representa uma função e cujo gráfico é uma reta vertical.

Também é importante enfatizar a relação existente entre o período de rendimento e a taxa. Se a taxa é MENSAL o período de rendimento deverá ser contado em MESES, já se a taxa é ANUAL, o período de rendimento deverá ser contado em ANOS.

Os gráficos obtidos pelos alunos serão bem próximos dos que se seguem:

$$f(x) = 2000 \cdot (1+i)^x \text{ e } x = 60$$



$$g(x) = 10000 \cdot (1+i)^x \text{ e } y = 12000$$




Trabalhando com a taxa de rendimento da poupança do início do mês de maio de 2013, 0,4273% ou 0,004273 ao mês, o montante acumulado do investimento de um capital de R\$2.000,00 em cinco anos (60 meses) será de, aproximadamente, R\$2.587,25. Já em um investimento de um capital de R\$10.000,00, serão necessários 43 meses, aproximadamente, para obter um montante de R\$12.000,00.

Seção 1 – Aprendendo um pouco sobre o cálculo de juros compostos

Páginas no material do aluno

227 a 235

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Desmistificando o estudo de juros compostos com apoio de gráficos	Computadores, software GeoGebra, datashow, folha para anotações dos alunos e lousa	Usaremos aqui o software GeoGebra, para fazer a representação gráfica de uma função exponencial no software. A partir do gráfico, faremos a análise do rendimento de uma determinada quantia em dinheiro, quando aplicada a juros compostos.	Duplas ou trios	40 minutos

Aspectos operacionais

Esta atividade foi elaborada para ser aplicada em laboratório de informática, tomando como base o problema apresentado na seção Aspectos pedagógicos.

Antes de levar seus alunos ao laboratório de informática de sua unidade escolar, certifique-se de que o software GeoGebra já está devidamente instalado nos computadores que serão usados durante a execução da atividade. Uma vez que tudo esteja preparado, leve os alunos até o laboratório, divida-os em duplas ou em trios e peça que cada grupo posicione-se em frente a um computador.

Proponha o problema e deixe que os alunos reflitam sobre ele por alguns minutos. Você poderá projetar a imagem, contendo o texto do problema, que está disponível em seu material, ou, simplesmente, escrevê-lo na lousa.

Peça, então, que seus alunos abram o software GeoGebra e apresente-o rapidamente.

Peça que tentem utilizar o software para resolver o problema. Para isto, peça para que eles insiram as expressões das funções do problema no software, procedendo da seguinte forma:

Peça para que escolham, dentro do menu Disposições, a opção Álgebra e Gráficos e no menu Exibir, que escolham a opção Malha.

Em seguida, peça que escrevam, na barra de Entrada, a expressão das funções que auxiliarão na resolução do problema. Os gráficos das funções aparecerão na Janela de visualização.

Dáí eles poderão responder ao questionamento do problema, determinando o ponto de interseção dos dois gráficos (para fazer isso basta selecionar a ferramenta Interseção de dois objetos e, em seguida, clicar sobre os gráficos e questão). As coordenadas do par ordenado correspondente ao ponto criado aparecerão na Janela de álgebra e o valor de x nesse par ordenado corresponde ao valor procurado.

Caso a sua unidade escolar não disponha de um laboratório de informática, a mesma atividade poderá ser aplicada em sala de aula com auxílio de um computador ligado a um projetor multimídia ou a uma TV. Neste caso, os alunos poderão interagir com o software de maneira indireta e coletiva.

Aspectos pedagógicos

Proponha aos seus alunos o seguinte problema:

Problema: Ao final de quanto tempo, aproximadamente, os juros produzidos por determinado capital são iguais à metade deste, se usarmos a taxa de 8% a.a, com capitalização anual? Pensar neste problema com a aplicação a juros compostos.

Seus alunos devem utilizar a fórmula introduzida na **página 5** do material do aluno, na seção Aprendendo um pouco sobre o cálculo de juros compostos. Depois de substituir os dados do problema na fórmula, eles vão então se deparar com a equação $(1 + 0,08)^n = \frac{3}{2}$.

Sem utilizar o logaritmo como ferramenta para resolução dessa equação, uma vez que esse conteúdo provavelmente ainda não foi trabalhado por eles, podemos lançar mão dos gráficos das funções reais $f(x) = (1 + 0,08)^x$ (exponencial) e da $y = \frac{3}{2}$ (constante) para obter tal resolução.


Orientar seus alunos sobre a escrita de números decimais no software GeoGebra. Nesse ambiente, a separação da parte inteira da parte decimal de um número se dá através de um ponto e não de uma vírgula, como o usual. A escrita de decimais usando vírgulas na expressão das funções fará com que o gráfico não apareça.

O valor obtido como resposta para o problema proposto será expresso pelo software em sua forma decimal: 5,27. Será interessante discutir com seus alunos o que esse número representa no contexto do problema. 5,27 representa 5 anos mais 0,27 ou 27 centésimos do ano, que corresponde, aproximadamente a 5 anos, 3 meses e 7 dias.

Seção 2 – Analisando gráficos e definindo a função exponencial

Páginas no material do aluno

235 a 238

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Acidente com Césio-137	Folha de atividades, computadores, software GeoGebra e calculadora	Essa atividade tem por objetivo estudar a função exponencial que modela o comportamento do decaimento radioativo de um isótopo do Césio, a partir da leitura de um texto sobre o episódio que ficou conhecido como Acidente com Césio-137. Fará uso do software GeoGebra, para explorar as características gráficas e analíticas do conceito de função exponencial.	Duplas ou trios	40 minutos

Aspectos operacionais

Esta atividade foi elaborada para ser aplicada em laboratório de informática, onde cada aluno poderá interagir diretamente com o software GeoGebra, que dará o apoio a construção do gráfico proposto. Por isto, antes de começar, certifique-se de que o software GeoGebra está instalado nos computadores do laboratório de informática de sua unidade escolar. Caso a sua unidade escolar não disponha de um laboratório de informática, a mesma atividade poderá ser aplicada em sala de aula, com auxílio de um computador ligado a um projetor multimídia ou a uma TV. Nesse caso, os alunos poderão interagir com o software de maneira indireta e coletiva.

Uma vez que tudo esteja preparado no laboratório ou na sala de aula, distribua uma folha de atividade para cada grupo. Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades com antecedência.

Peça para que os alunos abram o software GeoGebra e apresente-o rapidamente. Deixe que os alunos leiam o texto proposto na folha de atividades. Essa parte da atividade não deve ultrapassar 10 minutos.

Depois da leitura do texto, deixe que os alunos respondam às questões propostas na folha de atividades.

Aspectos pedagógicos

A atividade parte da leitura de um texto sobre o que ficou conhecido como “Acidente com Césio-137”. Esse acidente, ocorrido aqui no Brasil em 1987, em Goiânia, teve grande repercussão e foi considerado como um dos maiores acidentes radioativos do mundo. Após o acidente, os trabalhos de descontaminação produziram toneladas

de lixo radioativo que foram armazenados em caixas, tambores e contêineres em um bunker revestido de concreto e chumbo, e lá devem ficar por pelo menos 180 anos.

O questionamento levantado nessa atividade, logo após a leitura do texto informativo sobre o acidente, refere-se justamente ao tempo de 180 anos que se deve aguardar até que esse lixo radioativo não ofereça mais riscos ao ambiente. Esse período de tempo indicado no texto informativo pode ser diretamente verificado a partir do estudo da função exponencial que modela o decaimento radioativo do Césio-137.

Esse radioisótopo do Césio apresenta uma meia-vida de aproximadamente 30 anos. Meia-vida ou período de semidesintegração de um radioisótopo é como chamamos o período de tempo necessário para desintegração de metade de uma massa qualquer desse radioisótopo em um decaimento exponencial. Cada radioisótopo possui uma meia-vida, que pode variar de segundos a bilhões de anos, dependendo da maior ou menor instabilidade do elemento.

Você poderá propor aos seus alunos que, depois de algumas reflexões iniciais, deduzam uma expressão analítica para a função que descreve esse decaimento e, a partir dela, construam o gráfico dessa função usando o software GeoGebra.

Durante as reflexões, eles devem começar a perceber que a cada meia-vida – no caso 30 anos – a massa do isótopo torna-se igual à metade ou $\frac{1}{2}$ da anterior. Ou seja, se inicialmente temos uma amostra de b gramas do isótopo, depois de transcorrida a primeira meia-vida restarão $b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ gramas; depois da segunda, $b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$ gramas; depois da terceira, $b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$ gramas, e assim sucessivamente. Dessa forma, ao se passarem n meias-vidas, restarão $b \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ gramas do radioisótopo.

Depois dessas considerações, acreditamos que os alunos terão ferramentas suficientes para fazer a generalização dessa observação e criar uma expressão algébrica que representará a função entre a quantidade restante do isótopo ($f(x)$ ou y) e a quantidade de anos passados (x).

Neste momento, é necessário lembrá-los de que a massa restante depende do número n de meias-vidas passado e que, para obter esse número a partir do número x de anos decorrido, é necessário dividi-lo por 30 (o número de anos correspondente à meia-vida do Césio-137), isto é, $n = \left(\frac{x}{30}\right)$.

Assim, deverão obter a função $f(x) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{30}}$. Mas deve ficar claro que essa função depende da massa da amostra do isótopo (nesse caso, 200 g) e de sua meia-vida (nesse caso 30 anos). No caso de outro isótopo ou de outro elemento químico, esses valores poderão variar.

Uma vez estabelecida a expressão algébrica dessa função, peça para que os alunos escolham dentro do menu Disposições a opção Álgebra e gráficos. Depois peça para que escolham dentro do menu Exibir a opção Malha. Em seguida, peça que escrevam na barra de Entrada a expressão da função (f). O gráfico da função aparecerá na Janela de visualização.

Alguns alunos terão dificuldades para visualizar o gráfico, pois, na tela padrão, os valores dos eixos variam entre -5 e 5. Neste caso, oriente-os a modificar o zoom, se afastando do gráfico e colocando a variação dos eixos de -40 a 240. Desta forma, a visualização ficará mais adequada.

Daí eles poderão responder aos demais questionamentos – como calcular o restante da amostra de 200g depois de passados 180 anos – inserindo uma segunda equação, $x = 180$ e determinando o ponto de interseção dos dois gráficos. Para fazer isso, basta selecionar a ferramenta Interseção de dois objetos e, em seguida, clicar sobre os gráficos em questão. As coordenadas do par ordenado correspondente ao ponto criado aparecerão na Janela de álgebra. E o valor de y nesse par ordenado corresponde ao valor procurado.

Para responder à questão 7, que pergunta sobre porcentagem, eles deverão verificar o valor obtido na questão anterior e encontrar que porcentagem da massa inicial – no caso, 200 gramas – esse valor representa. Para fazer os cálculos sem que se perca muito tempo, encoraje seus alunos a utilizar a calculadora do próprio sistema operacional.

Ao final da atividade, você pode promover um debate a partir dos resultados obtidos na folha de atividades em relação ao risco de contaminação por radiação e discutir o comportamento dessa função exponencial – que é decrescente, mas cujo gráfico não corta o eixo dos x . O eixo dos x é uma assíntota ao gráfico.

Folha de atividades – Acidente com Césio-137

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Leia o texto a seguir e depois faça o que se pede:

O texto Césio 137: O brilho da morte, publicado por Lorena Verli no Guia do Estudante da editora Abril¹, relembra o segundo maior acidente radioativo do mundo, que aconteceu em 13 de setembro de 1987, em Goiânia, atrás apenas de Chernobyl, na Ucrânia.

Dois catadores de lixo de Goiânia arrombaram um aparelho radiológico, encontrado nos escombros de um antigo hospital, expondo o Césio-137, um elemento radioativo criado em laboratório. Por se tratar de um pó branco que emitia um estranho brilho azul quando colocado no escuro, o Césio foi, na época, considerado sobrenatural e passou pelas mãos de muitas pessoas, contaminando o solo, o ar e centenas de moradores da capital goiana.

A contaminação espalhou-se na cidade e foram necessários 16 dias para perceberem que a substância estava deixando muitas pessoas doentes. A autora explica que, após o desastre, os trabalhos de descontaminação produziram 13,4 toneladas de lixo radioativo, entre roupas, utensílios, plantas, animais, restos de solo e materiais de construção. Explica também que tudo isso foi armazenado em cerca de 1200 caixas, 1900 tambores e 14 contêineres, guardados em um depósito construído na cidade de Abadia de Goiânia, a 24 quilômetros da capital – e lá deve ficar por pelo menos 180 anos.

Centenas de vítimas foram afetadas pelo brilho da morte, nome dado ao césio por Devair Alves Ferreira, primeira pessoa a entrar em contato direto com o elemento. Quatro morreram cerca de um mês após a exposição, entre elas uma criança de 6 anos, considerada a maior fonte humana radioativa do mundo. Atualmente, as vítimas ainda sofrem

¹ <http://guiadoestudante.abril.com.br/aventuras-historia/cesio-137-brilho-morte-435543.shtml>

e reclamam do descaso do governo, afirmando que estão sem assistência médica e medicamentos. O governo nega a acusação e afirma que as vítimas usam o acidente para justificar todos os seus problemas de saúde. Em 1996, três sócios e um funcionário daquele hospital abandonado foram condenados pela justiça por homicídio culposo, porém as penas foram trocadas por prestação de serviços.

Questões:

Meia-vida ou período de semidesintegração de um radioisótopo é como chamamos o período de tempo necessário para desintegração de metade de uma massa qualquer desse radioisótopo, em um decaimento exponencial. Cada radioisótopo possui uma meia-vida, que pode variar de segundos a bilhões de anos, dependendo da maior ou menor instabilidade do elemento. O Césio-137 apresenta uma meia-vida de aproximadamente 30 anos.

1. Partindo de uma amostra genérica de 200 gramas de Césio-137, determine a quantidade desse isótopo que ainda restaria depois de passados 30 anos.

2. Ainda partindo de uma amostra genérica de 200 gramas de Césio-137, determine a quantidade desse isótopo que ainda restaria depois de passados 60 anos.

3. Ainda partindo de uma amostra genérica de 200 gramas de Césio-137, determine a quantidade desse isótopo que ainda restaria depois de passados 90 anos.

4. Qual a expressão analítica da função exponencial que descreve o decaimento de uma amostra de 200 gramas de Césio-137 ao longo do tempo?

5. Construa o gráfico dessa função, fazendo uso do software GeoGebra.

6. Usando o gráfico construído no item anterior, indique qual a quantidade de Césio-137 restante da amostra de 200g depois de passados 180 anos?


7. Pela análise do gráfico, qual a porcentagem da massa do Césio-137 que resta depois de passados 180 anos?

8. Podemos dizer que a massa do isótopo em algum momento será igual a zero? Por quê?

Seção 2 – Analisando gráficos e definindo a função exponencial

Páginas no material do aluno

235 a 238

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Epidemia de Dengue	Cópias da folha de atividades, computadores, softwares GeoGebra e Winplot e calculadora	Esta atividade propõe-se a mostrar como a Matemática, por meio da teoria de funções exponenciais, pode auxiliar no entendimento e no combate de epidemias.	Duplas ou trios	40 minutos

Aspectos operacionais

Esta atividade foi elaborada para ser aplicada em laboratório de informática, onde os alunos poderão interagir diretamente com o software que dará apoio à construção do gráfico proposto: o GeoGebra ou o Winplot, de acordo com a preferência do professor.

Caso a sua unidade escolar não disponha de um laboratório de informática, a mesma atividade poderá ser aplicada em sala de aula, com auxílio de um computador ligado a um projetor multimídia ou a uma TV. Neste caso, os alunos poderão interagir com o software de maneira indireta e coletiva.

Certifique-se de que o software GeoGebra – ou o Winplot – está instalado nos computadores do laboratório de informática de sua unidade escolar ou no computador da sala de aula. Uma vez que tudo esteja preparado, distribua uma folha de atividade para cada grupo. Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades com antecedência e que discuta os textos com os alunos antes de fazer a exploração do software.

Peça então que os alunos abram o software – ou abra o software você mesmo, caso esteja usando o computador de sala de aula – e apresente-o, rapidamente. Deixe que os alunos leiam os textos propostos na folha de atividades. Depois da leitura do texto, deixe que os alunos respondam às questões propostas na folha de atividades.

Aspectos pedagógicos

A atividade parte da leitura de dois textos sobre a epidemia de dengue que ocorreu na cidade de Goiânia, em 1993. Os textos mostram como a Matemática pode ajudar a combater as epidemias, assim como o modelo matemático que descreveu a epidemia de dengue em Goiânia.

Orienta os alunos na resolução das questões propostas, chamando a atenção para o fato de a letra t ter sido usada para representar a variável independente na fórmula apresentada no texto 2 e que, no contexto do problema, ela representa o número de dias transcorridos. Lembre-os, também, dos procedimentos de substituição de uma variável por um valor numérico em uma fórmula matemática.

É necessário considerar que os alunos podem não estar habituados ao uso da calculadora como recurso na resolução de problemas. Então, ajude-os, esclarecendo a função de cada tecla. Ao final da atividade, você pode, a partir dos resultados obtidos na folha de atividades, promover um debate em relação ao risco de epidemias e discutir sobre os modelos matemáticos, envolvidos nestas questões. Esta atividade sugere um trabalho interdisciplinar que pode ser planejado juntamente com o professor de Biologia.

Folha de atividades – Epidemia de dengue

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Leia os textos a seguir e depois faça o que se pede:

Texto 1

A história da sociedade humana é marcada por diversas adversidades e desafios na busca pela sobrevivência. O clima, as guerras, os predadores sempre foram uma preocupação da humanidade. Porém, nenhum outro fator traz tanto temor à sociedade quanto as epidemias. O número de mortes, provocado pelas maiores epidemias de todos os tempos, é impreciso, mas é incomparavelmente maior do que o número de mortes provocado por todas as guerras.

Doenças infecciosas afligem a sociedade humana desde tempos remotos. Nenhum outro exemplo sintetiza melhor o efeito desastroso de doenças infecciosas do que a peste negra que levou a morte de um quarto da população da Europa, durante os anos de 1347 a 1350. Também na Europa, doenças infecciosas trazidas por estrangeiros, tais como: sarampo, varíola, gripe e peste bubônica foram responsáveis pela exterminação de grupos étnicos, os quais

não haviam entrado em contato com estas doenças anteriormente, portanto não haviam adquirido imunidade. Outras epidemias causaram milhões de mortes, como a epidemia mundial da gripe, que morreram cerca de 20 milhões de pessoas.

Em tempos mais recentes, o vírus HIV passou a ter um significativo impacto nos índices de mortalidade, tanto em países ricos quanto em países pobres. Estima-se 18 milhões de mortes causadas pela AIDS e o aparecimento de mais de 30 mil novos casos a cada ano .

No Brasil, desde a identificação do primeiro caso de AIDS, em 1980, até junho de 2007, já foram identificados cerca de 474 mil casos da doença.

Atualmente, a epidemia de dengue é um dos principais problemas de saúde pública no mundo. A Organização Mundial da Saúde (OMS) estima que 80 milhões de pessoas infectem-se anualmente. Cerca de 550 mil doentes necessitam de hospitalização e 20 mil morrem em consequência da dengue. Portanto, métodos que possam auxiliar no desenvolvimento de estratégias de prevenção e de controle de doenças de forma a aumentar sua eficácia e reduzir custos tornam-se cada vez mais necessários.

Fonte: Modelagem de epidemias através de modelos baseados em indivíduos.

Dissertação de Mestrado de Lucymara de Resende Alvarenga – UFMG. Disponível em <http://www.cpdee.ufmg.br/documentos/Defesas/778/Dissertacao-Lucymara-final.pdf>

Texto 2

O Instituto Gauss de Matemática afirma que, durante a última epidemia de dengue, de 1993, o número de pessoas que adoeceram no setor Coimbra, em Goiânia, após t dias, foi modelada pela função:

$$D_{coimbra}(t) = \frac{10000}{1 + 99e^{-0.2t}}$$

Fonte: http://www.igm.mat.br/aplicativos/index.php?option=com_content&view=article&id=708:funcoes-elementares&catid=98:calculo1

Questão 1: Usando o modelo descrito no texto 2 e uma calculadora, calcule o número de pessoas ficaram doentes no primeiro dia da epidemia (Considere $e \approx 2,718$).


Questão 2: Usando o modelo descrito no texto 2 e uma calculadora, calcule o número de pessoas que ficaram doentes após 25 dias? (Considere $e \approx 2,718$).

Questão 3: Usando o GeoGebra ou outro software gráfico, faça o gráfico da evolução dos afetados pela dengue:

O que perguntam por aí?

Páginas no material do aluno

241 a 242

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	UNESP	Imagem para projeção, disponível neste material; material do aluno	Os alunos resolverão uma questão que envolve a análise de uma função exponencial.	Duplas	15 minutos

Aspectos operacionais

Na seção O que perguntam por aí?, na página 17 do material do aluno, há uma questão da UNESP que envolve a análise de uma função exponencial. Você poderá trabalhar esta questão a partir da projeção da imagem que está disponível neste material.

Então, peça aos alunos que discutam e resolvam a seguinte questão:

Unesp – 2002

A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita por um observador através do seguinte modelo matemático

$h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2t}$, com t em segundos, $h(t)$ em metros e $0 \leq t \leq T$. O tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto foi

- a. 1 b. 2 c. 4 d. 8 e. 10

Aspectos pedagógicos

Após a resolução desta questão em aula, você pode promover uma análise coletiva das respostas encontradas pelos alunos, com uma breve discussão a respeito dos possíveis erros (erros mais comuns) por eles cometidos.

Analizando as alternativas

Solução comentada:

Consideremos o instante $t = 0$, o momento em que o golfinho saiu da água, e o instante $t = T$, o exato momento em que o golfinho retorna à água. Nesses dois momentos, a altura do golfinho em relação ao nível da água é igual a zero, pois não está nem sob e nem sobre a água. Com isso, temos que:

$$4t - t \cdot 2^{0,2t} = 0$$

$$t \cdot (4 - 2^{0,2t}) = 0$$

Temos duas possibilidades:

1ª possibilidade:

$t=0$ (Já esperávamos por essa possibilidade, pois é o momento inicial em que o golfinho sai da água para efetuar o salto.)

2ª possibilidade:

$$(4 - 2^{0,2t}) = 0$$

$$2^{0,2t} = 4 = 2^2$$

$$0,2 \cdot t = 2$$

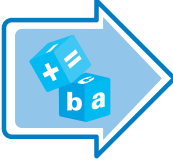
$$t = 10$$

Logo, a resposta correta é a **letra e**.

As escolhas pelas demais alternativas podem ter sido motivadas por diversos erros comuns que tentamos identificar a seguir:

- O aluno pode ter se confundido ao resolver a equação $2^{0,2t}=2^2$, considerando indevidamente $2t=2$, e a partir daí obtido $t=1$.
- O aluno pode ter se confundido a partir da equação $0,2t=2$, considerando indevidamente $t=2$, motivado pelo 2º membro da igualdade.
- O aluno pode ter se confundido a partir da equação $2^{0,2t}=4$, considerando indevidamente $t=4$, motivado pelo 2º membro da igualdade.
- Não foi encontrado nenhum indício que tenha levado o aluno a marcar esta opção. Ele pode ter escolhido esta alternativa de forma aleatória.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Cópias da folha de atividades, material do aluno	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade. Ele está dividido em duas etapas: a primeira consiste no registro de aprendizagens e a segunda consiste em questões objetivas e dissertativas, cuja escolha fica a critério do professor.	Individual	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado à Unidade 8. A seguir apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões que têm por objetivo avaliar o desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas, a saber:

- Modelar e resolver problemas que envolvam função exponencial.
- Analisar gráficos de funções exponenciais.

A ideia é que sejam usadas de forma a complementar as questões que você apresentar aos alunos. Sugerimos, também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros, a serem entregues ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho e, se for o caso, repensá-los de acordo com as sugestões apresentadas.

Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Sugerimos, para compor esta etapa do instrumento avaliativo, a escolha de pelo menos uma questão objetiva que contemple uma habilidade pretendida nesta unidade.

Sugestões de questões objetivas para a avaliação:

Questão 1: (Enem 2011)

Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

Investimento A: 3% ao mês

Investimento B: 36% ao ano

Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1,03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

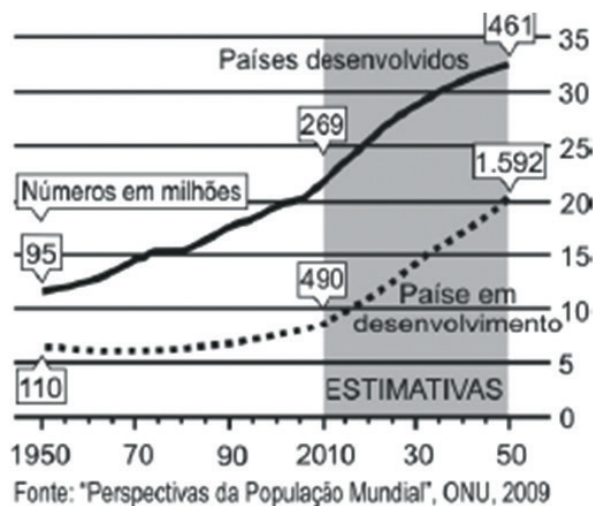
Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá

- escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.
- escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.
- escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.
- escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.
- escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

Questão 2: (Enem – 2009)

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna

da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950, havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



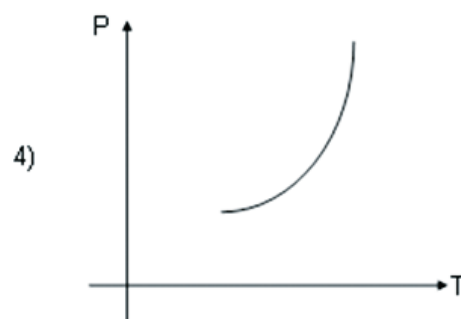
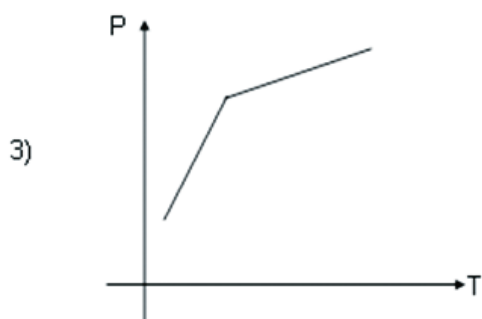
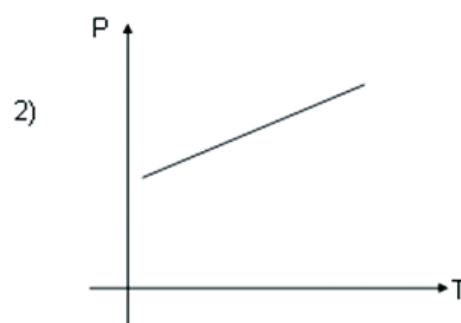
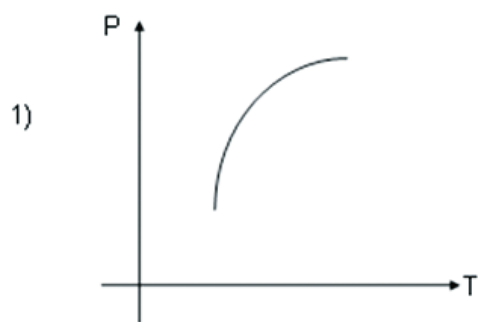
Disponível em: www.economist.com.
Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

Suponha que o modelo exponencial $y = 363e^{0,03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2000, $x = 1$ corresponde ao ano 2001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x , seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2010 e 2050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2030, entre

- 490 e 510 milhões.
- 550 e 620 milhões.
- 780 e 800 milhões.
- 810 e 860 milhões.
- 870 e 910 milhões.

Questão 3: (UFC – 1998)

A população de uma cidade X aumenta 1500 habitantes por ano e a população de uma cidade Y aumenta 3% ao ano. Considere os seguintes gráficos:

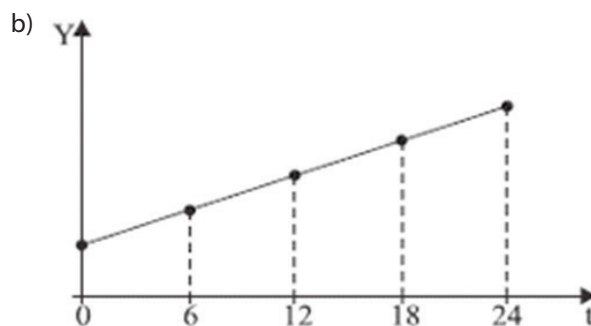
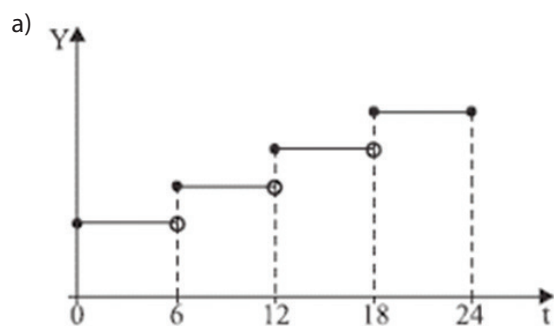


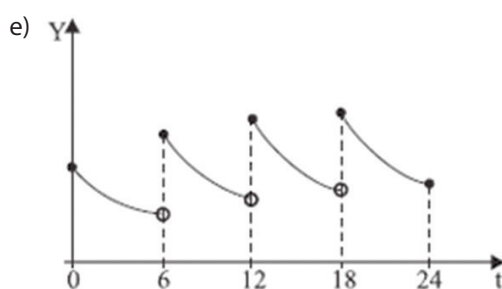
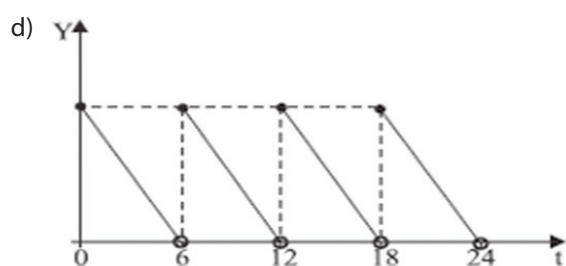
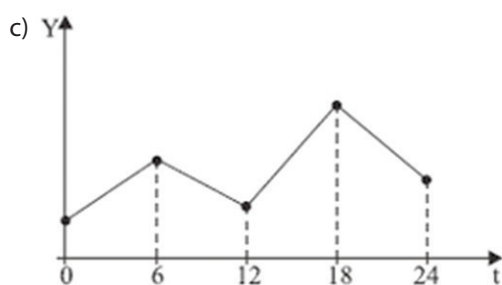
Analisando os gráficos acima, assinale a opção que indica aqueles que melhor representam os crescimentos populacionais P das cidades X e Y, respectivamente, em função do tempo T.

- a) 1 e 2 b) 2 e 3 c) 1 e 4 d) 2 e 4 e) 3 e 4

Questão 4: (UNIFES – 2007)

Uma forma experimental de insulina está sendo injetada a cada 6 horas em um paciente com diabetes. O organismo usa ou elimina a cada 6 horas 50% da droga presente no corpo. O gráfico que melhor representa a quantidade Y da droga no organismo como função do tempo t, em um período de 24 horas, é:





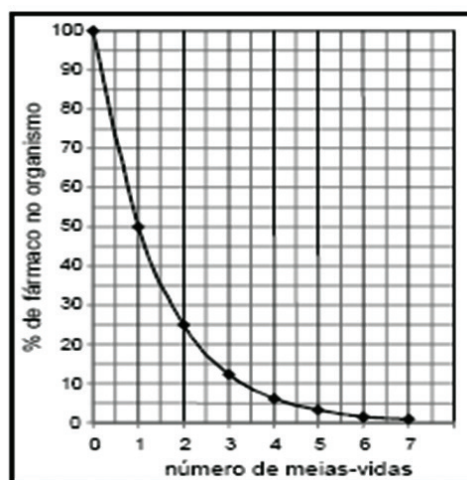
Sugestões de questões discursivas para a avaliação:

Questão 1: (Enem 2007)

A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.

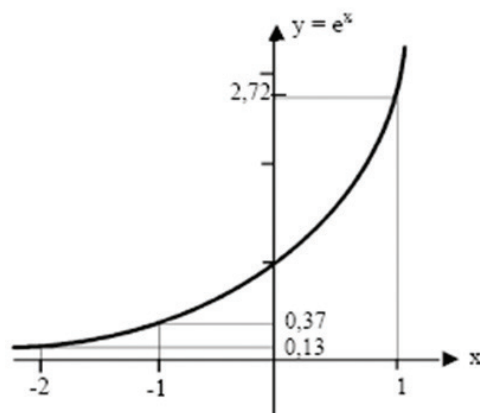
O gráfico acima representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13 h 30 min será aproximadamente de:



Questão 2: (UERJ – 1998)

Uma empresa acompanha a produção diária de um funcionário recém-admitido, utilizando uma função $f(d)$, cujo valor corresponde ao número mínimo de peças que a empresa espera que ele produza em cada dia (d), a partir da data de sua admissão. Considere o gráfico auxiliar, que representa a função $y = e^x$.



Utilizando $f(d) = 100 - 100 \cdot e^{-0,2d}$ e o gráfico acima, responda: qual deve ser o valor de d para que o funcionário alcance a produção de 87 peças?

Questão 3: (MACK – 2008)

Um aparelho celular tem seu preço “ y ” desvalorizado exponencialmente em função do tempo (em meses) “ t ”, representado pela equação $y = p \cdot q^t$, com p e q constantes positivas. Se, na compra, o celular custou R\$500,00 e, após 4 meses, o seu valor é $1/5$ do preço pago, 8 meses após a compra, qual será o valor do aparelho?

Questão 4: (UFRJ – 2005)

O número de bactérias em uma certa cultura dobra a cada hora. A partir da amostra inicial, são necessárias 24 horas para que o número de bactérias atinja uma certa quantidade Q . Calcule quantas horas são necessárias para que a quantidade de bactérias nessa cultura atinja a metade de Q .

Questão 5:

Devido ao uso frequente, a bateria de um telefone celular descarrega, de acordo com a função $q(t) = b \cdot 2^{-0,1t}$, sendo b a quantidade inicial de carga e $q(t)$ a carga após t horas de uso. Considere que a bateria está totalmente carregada, em quantas horas a carga da bateria se reduzirá a 25% da carga inicial?

Aspectos pedagógicos

Respostas comentadas das questões objetivas sugeridas

1. Letra (C). Para responder a esta questão, basta observar que os investimentos são aplicados a juros compostos. Analisando as três opções para o mesmo período de 1 ano, obtemos:

Investimento A: $(1,03)^{12}=1,426$. Isto é, 42,6% ao ano;

Investimento B: 36% ao ano;

Investimento C: $(1,18)^2=1,3924$. Isto é, 39,24% ao ano.

2. Letra (E). Para responder a esta questão, basta resolver $y=363 \cdot e^{0,03 \cdot 30}$ e observar que esta igualdade pode ser escrita da forma $y=363 \cdot (e^{0,3})^3$ e a partir do dado do problema obter $y = 363 \cdot 1,35^3 \cong 893$ milhões
3. Letra (D). Nesta questão, basta observar que o crescimento populacional da cidade X ocorre linearmente, isto é, a uma taxa de variação constante, enquanto o crescimento da população da cidade Y é dado por uma exponencial, já que a taxa de crescimento incide sobre a população do ano anterior.
4. Letra (E). Nesta questão, basta observar a informação de que a cada 6 horas o organismo usa ou elimina 50% da droga. Isto implica que a meia-vida deste medicamento é de 6 horas, o que sugere que quantidade de droga no corpo em cada um desses intervalos apresenta um comportamento de uma exponencial decrescente. Isso pode ser observado somente na opção (E).

Respostas comentadas das questões discursivas sugeridas:

Questão 1: 35%. Nesta questão, basta observar o gráfico dado e analisar o que acontece com a quantidade do antibiótico no organismo humano após 1h e 30min.

Questão 2: 10. Nesta questão, basta resolver a equação exponencial $100 - 100 \cdot e^{-0,2d} = 87$, obtendo a partir daí, $100 \cdot e^{-0,2d} = 13$, isto é, $e^{-0,2d} = 0,13$. Logo, usando o gráfico auxiliar, temos $e^{-0,2d} = e^{-2}$, ou seja, $-0,2d = -2$, assim $d=10$.

Questão 3: R\$ 20,00. Para resolver a questão, basta observar que na igualdade $y = p \cdot q^{-t}$, para $t=0$, $y=500$, daí obtém-se $p=500$. Logo, precisamos encontrar o valor de y que satisfaça $y = 500 \cdot q^{-8}$. Como para $t=4$, $y=100$, $100 = 500 \cdot q^{-4}$, $q^{-4}=1/5$. Portanto, fazendo $(q^{-4})^2=1/25$, o que implica $y=500 \cdot 1/25 = 20$.

Questão 4: 23 horas. Para resolver esta questão, basta observar que o crescimento da cultura de bactérias obedece à lei $y = Q_0 \cdot 2^t$, onde Q_0 é o número de bactérias consideradas na amostra inicial. Deseja-se obter t para que a cultura atinja $Q/2$, isto é, $Q/2 = Q_0 \cdot 2^t$. Tomando $Q = Q_0 \cdot 2^{24}$, obtemos $\frac{Q_0 \cdot 2^{24}}{2} = Q_0 \cdot 2^t$, obtendo assim $2^{23}=2^t$, ou seja $t = 23$ horas.

Questão 5: 20 horas. Para resolver esta questão, basta resolver a equação exponencial $b/4=b \cdot 2^{-0,1t}$, daí, $1/4=2^{-0,1t}$, isto é, $2^{-2}=2^{-0,1t}$. Logo, $0,1 \cdot t = 2$, ou seja $t = 20$ horas.

Folha de atividades – Avaliação

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na Unidade 8 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

Questão 1:

Determine os gráficos das seguintes funções exponenciais:

a. $f(x) = 3^x$


b. $g(x) = 3^{-x}$

c. Identifique e descreva diferenças entre as funções $f(x)$ e $g(x)$

d. Qual das funções acima é crescente e qual é decrescente? Justifique a sua resposta.

e. Pelos itens b e c, podemos concluir alguma relação do expoente da função com o fato de ser crescente ou decrescente?

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de fixação complementares	Folhas de atividades		Duplas ou em trios	15 minutos

Aspectos operacionais:

Peça que os alunos organizem-se em duplas ou em trios e procure distribuir uma folha de atividades para cada aluno. Assim, todos poderão ficar com uma cópia do material e usá-lo como fonte de consulta.

Escolha previamente os exercícios que se adequam mais à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos na Unidade 8.

Depois de os alunos concluírem o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, procure discutir as soluções apresentadas pelos alunos, valorizando cada estratégia mesmo que esta não tenha conduzido a uma resposta verdadeira.

Procure incentivar os alunos a realizar os exercícios sem a sua intervenção. Isso pode favorecer o desenvolvimento da autonomia deles no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

Aspectos pedagógicos

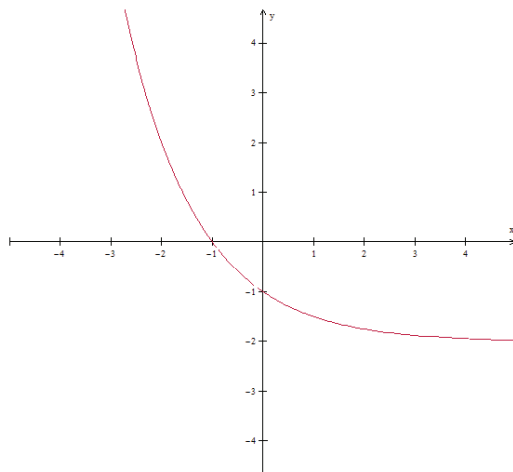
A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação das principais noções ligadas ao conceito de função exponencial, trabalhadas tanto no material do aluno quanto nas atividades sugeridas no presente material. As noções são expressão analítica da função exponencial, gráfico de uma função exponencial, análise do comportamento da função exponencial na observação de seu crescimento ou decréscimo e da relação existente entre os seus termos.

Esses exercícios foram distribuídos nas Folhas de atividades, que se encontram disponíveis para a reprodução no pendrive do professor. Elas poderão ser aplicadas ao término de cada seção do material do aluno ou todas juntas, no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados. Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo no Grid de aula de seu pendrive.

Respostas da Folha de atividades – Exercícios Complementares

1. Podemos contar 6 bimestres no período de um ano. Então, para um capital C aplicado a uma taxa bimestral de 20%, teríamos o montante $M = C (1 + 0,2)^6$ ao final de um ano. Assim temos, $M = C (1,2)^6 = C \cdot (2,985984) = C \cdot (1 + 1,985984)$. Assim a taxa anual será de 1,985984 ou 198,5984%, que podemos indicar aproximadamente por 198,60%. Logo, a opção correta é a letra C.
2. Podemos contar 6 bimestres no período de um ano. Então, para um capital C aplicado a uma taxa anual de 131,3060%, teríamos o montante $M = C (1 + 1,313060)$ ao final de um ano. Assim temos, $M = C (1 + 1,313060) = C (1 + i)^6$. Daí podemos concluir que $2,313060 = (1 + i)^6$. Como a raiz sexta de 2,313060 é aproximadamente igual a 1,15, o valor de i será aproximadamente 0,15 ou 15%. Assim, a taxa bimestral será de aproximadamente 15%. Logo, a opção correta é a letra D.
3. Podemos contar 3 meses no período de um trimestre, então, para um capital C aplicado a uma taxa trimestral de 9,2727%, teríamos o montante $M = C (1 + 0,092727)$ ao final de um trimestre. Assim, temos $M = C (1 + 0,092727) = C (1 + i)^3$. Podemos então concluir que $1,092727 = (1 + i)^3$. Como a raiz cúbica de 1,092727 é aproximadamente igual a 1,03, o valor de i será aproximadamente 0,03 ou 3%. Assim a taxa bimestral será de aproximadamente 3%. Logo, a opção correta é a letra A.
4. Sabemos que $M = C (1 + i)^n$. Como, nesse contexto, $M = 3\,804\,708,60$; $C = 600\,000$ e $t = 24$ (lembre-se que 2 anos possuem 24 meses; tal conversão é necessária uma vez que a taxa é mensal, não anual), então temos: $3\,804\,708,60 = 600\,000 (1 + i)^{24}$. Assim, $(1 + i)^{24} = 6,341181$. Como a raiz vigésima quarta de 6,341181 é aproximadamente igual a 1,08, então o valor de i é aproximadamente 0,08 ou 8%. Logo, a opção correta é a letra A.
5.
 - a. $f(x)$ é decrescente, pois $0 < \frac{1}{5} < 1$.
 - b. $g(x)$ é crescente, pois $2,03 > 1$.
 - c. $h(x)$ é decrescente, pois $7^{-x} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ e $0 < \frac{1}{7} < 1$.
 - d. $j(x)$ é crescente, pois $3^{-3+x} = (3^{-3}) \cdot 3^x$ e $3 > 1$.

6. a)



- b. O conjunto domínio de f é \mathbb{R} (conjunto dos números reais).
- c. O conjunto imagem de f é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > -2\}$ ou $\text{Im}(f) =]-2, +\infty[$

7. Letra A

8. Letra A

9. De acordo com as dicas, temos: $c = 6$, pois o gráfico da função exponencial em questão é uma translação vertical para cima do gráfico da função $y = a \cdot b^x$, cuja assíntota horizontal é o eixo x . Como $(0, 4)$, $(1, 0)$ são pontos do gráfico, temos que $f(0) = a \cdot b^0 + c = 4$ e $f(1) = a \cdot b^1 + c = 0$. Assim, $a + c = 4$ e $a \cdot b + c = 0$. Sendo $c = 6$ e substituindo os valores nas equações anteriores, temos: $a = -2$ e $b = 3$. Logo, a alternativa correta é a letra E.

Folha de atividades – Avaliação

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

- Qual a taxa anual aproximada, equivalente para juros compostos, a 20% ao bimestre?

a) 120% b) 150% c) 198,60% d) 180% e) 210,6%
- Qual a taxa bimestral aproximada, equivalente para juros compostos, a 131,3060% ao ano?

a) 12% b) 13% c) 14% d) 15% e) 20%
- Dada a taxa de juros de 9,2727% ao trimestre, determine a taxa de juros compostos mensal equivalente.

a) 3% b) 3,1% c) 3,01% d) 2,8% e) 3,5%
- Um investidor aplicou R\$600 000,00 a juros compostos mensais durante 2 anos e recebeu um montante de R\$3 804 708,60. Qual foi a taxa da operação?

a) 8% a.m b) 9% a.m c) 10% a.m d) 5% a.m e) 6% a.m
- Indique se as funções reais a seguir são crescentes ou decrescentes a partir de cada uma de suas expressões analíticas.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ b) $g(x) = (2,03)^x$ c) $h(x) = 7^{-x}$ d) $j(x) = 3^{-3+x}$
- Considere a função real f , cuja expressão analítica é dada por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$, e faça o que se pede:

a. Esboce o gráfico de f .

b. Indique o domínio de f .

c. Indique o conjunto imagem de f .

7. (PUC-RS) Os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{x-1}$ e $g(x) = 4^x$ encontram-se no ponto de coordenadas:

- a) $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ b) $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ c) $(-1, 2)$ d) $(0, 1)$ e) $(2, 4)$

8. (PUC-RS) Sejam as funções reais f e g definidas por $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ e $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ e as afirmações:

I. Os gráficos de f e g não se interceptam.

II. f e g são funções crescentes.

III. $f(-2) \cdot g(-1) = \frac{2}{3}$

IV. Pela análise dos dados, conclui-se que está correta a alternativa:

- a) somente I e II são falsas. b) somente I e III são falsas. c) somente II e III são falsas.
d) I, II e III são verdadeiras. e) I, II e III são falsas.

9. De acordo com o gráfico da função exponencial f a seguir, determine sua expressão analítica. Dica: lembre-se de que uma função exponencial possui expressão analítica na forma $f(x) = a \cdot b^x + c$. Observe também que $(0, 4)$, $(1, 0)$ são pontos do gráfico e que $y = 6$ é uma assíntota ao gráfico, isto é, o gráfico de f aproxima-se indefinidamente do gráfico de $y = 6$ sem cortá-lo ou tocá-lo.

- a) $f(x) = 3 \cdot 2^x$ b) $f(x) = 3^x + 24$ c) $f(x) = 4 \cdot 2^x - 2$
d) $f(x) = 2 \cdot 3^x + 6$ e) $f(x) = -2 \cdot 3^x + 6$

