MATERIAL DO PROFESSOR

Trigonometria no triângulo retângulo

Cleber Dias da Costa Neto, Heitor Barbosa Lima de Oliveira e Patrícia Nunes da Silva

Introdução

Na unidade 9 do material do aluno, são apresentadas diversas situações e atividades que abordam razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Para auxiliá-lo, pesquisamos e elaboramos algumas atividades e recursos que podem complementar a exposição deste tema em suas aulas. A descrição e o detalhamento destas sugestões estão nas tabelas e páginas seguintes.

Sugerimos que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora. É uma atividade que tem por objetivos iniciar a exposição do tema e promover uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, espera-se que os alunos consigam utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°, que resolvam problemas do cotidiano envolvendo as razões trigonométricas e que utilizem as leis do seno e do cosseno para resolver problemas.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático. Tais recursos apresentam-se associados a atividades descritas detalhadamente neste material. Sugerimos a sua realização nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Recomendamos que você faça alterações e adaptações sempre que achar necessário.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro momento deve ser dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o processo. O segundo momento consiste numa avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos em detrimento da mera reprodução de exercícios feitos anteriormente.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	2	19	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
A trigonometria no triângulo retângulo	Razões Trigonométricas
Objetivos da unidade	
Utilizar as razões trigonométricas para calcular o valor do seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60°;	
Resolver problemas do cotidiano, envolvendo as razões trigonométricas;	
Utilizar as Leis do seno e do cosseno para resolver problemas.	
Seções	**Páginas no material do aluno**
Para início de conversa...	247 a 248
Seção 1 – O triângulo retângulo e as razões trigonométricas	249 a 262
Seção 2 – A lei dos senos e a lei dos cossenos	262 a 267
Veja ainda	268
O que perguntam por aí?	271 a 272

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

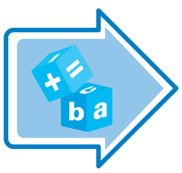
Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

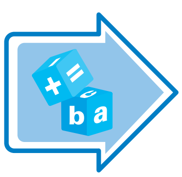
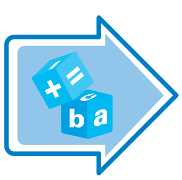
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Comparando triângulos	Régua, calculadora e cópias da folha de atividades	Nesta atividade, os alunos irão medir o comprimento dos lados dos três triângulos que aparecem na figura e calcular as razões contidas na tabela. Dessa maneira, poderão verificar os valores de seno, cosseno e tangente de um mesmo ângulo em triângulos de tamanhos diferentes.	A turma pode ser dividida em trios	20 minutos
	Caça ao tesouro	vídeo *Um caminho para o curral*, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1061, calculadoras e cópias da folha de atividades.	Nesta atividade, os alunos deverão utilizar o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas no triângulo retângulo, para ajudar Antônio numa caça ao tesouro.	A turma pode ser dividida em duplas	25 minutos

Seção 1 – O triângulo retângulo e as razões trigonométricas

Páginas no material do aluno

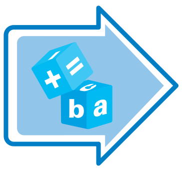
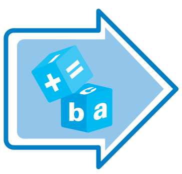
249 a 262

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Os ângulos e as torres	Vídeo *Os ângulos e as torres*, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1145, calculadoras e cópias da folha de atividades.	Os alunos usarão as razões trigonométricas em um triângulo retângulo, para determinar a altura de torres inclinadas.	Duplas	25 minutos
	Batendo pênalti	Calculadoras e cópias da folha de atividades.	Nos problemas propostos, os alunos usarão as razões trigonométricas no triângulo retângulo para determinar os valores máximos para os ângulos verticais e horizontais que a trajetória da bola pode fazer numa cobrança de pênalti.	Duplas.	25 minutos
	Cálculo de distâncias inacessíveis	Calculadoras e cópias da folha de atividades.	Nos problemas propostos, os alunos usarão as razões trigonométricas no triângulo retângulo para determinar distâncias inacessíveis, como largura de rios, altura de montanhas, etc.	Duplas	25 minutos

Seção 2 – A lei dos senos e a lei dos cossenos

Páginas no material do aluno

262 a 267

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Engenharia da trigonometria	Cópias da folha de atividades	Nesta atividade, os alunos deverão aplicar a lei dos cossenos para calcular a medida de um dos lados de um triângulo.	Duplas	20 minutos
	Calculando distâncias	Calculadoras e cópias da folha de atividades	Nos problemas propostos, os alunos usarão a lei dos senos para calcular distâncias.	Duplas	25 minutos

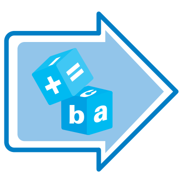
Seção Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Revisão e registros de aprendizagens	Folha de atividades	Atividade para revisão dos conteúdos abordados e registros das aprendizagens realizadas.	Individualmente	25 minutos
	Questões de avaliação de larga escala	Folha de atividades	Sugerimos, nesta etapa, a escolha de uma questão que contemple uma habilidade pretendida nesta unidade para compor o instrumento avaliativo. A ideia é que o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como o ENEM, os vestibulares, os concursos, etc	Individualmente	20 minutos

Atividades Iniciais

Descrevemos a seguir situações motivadoras, que têm por objetivo estimular os alunos a realizar uma discussão coletiva. A ideia é que, antes da etapa de formalização, os alunos se familiarizem com o conteúdo matemático de forma empírica e com atividades de fácil compreensão. Sugerimos que você escolha a que for mais adequada à sua realidade ou, se preferir, utilize uma atividade própria.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Comparando triângulos	Régua, calculadora e cópias da folha de atividades	Nesta atividade, os alunos irão medir o comprimento dos lados dos três triângulos que aparecem na figura e calcular as razões contidas na tabela. Dessa maneira, poderão verificar os valores de seno, cosseno e tangente de um mesmo ângulo em triângulos de tamanhos diferentes.	A turma pode ser dividida em trios	20 minutos

Aspectos operacionais

Divida a turma em trios e distribua a folha de atividades. Antes de começar a atividade, leia o texto em voz alta com os alunos. Durante a realização da atividade, procure perceber se todos os alunos estão fazendo as medições corretamente.

Aspectos pedagógicos

Enfatize o que os 3 triângulos têm em comum e o fato de serem semelhantes. É possível que os alunos não atentem para a necessidade de simplificar as frações, tornando-as irredutíveis, ou não consigam perceber que são frações equivalentes. Neste caso, intervenha, relembrando o tema.

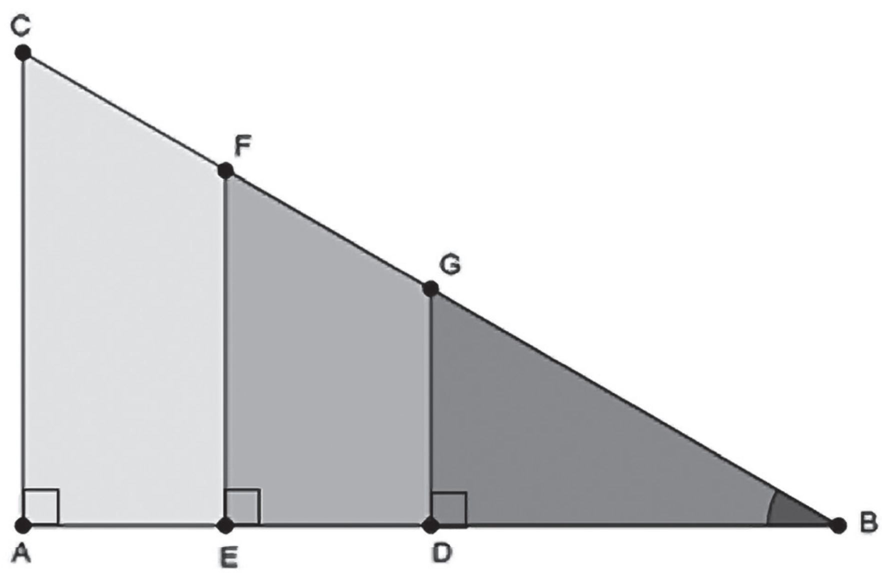
Valorize os resultados encontrados pelos alunos, inclusive aqueles que apresentam algum erro. Utilizar o erro é muito importante para o processo de aprendizagem.

Folha de atividades – Comparando triângulos

Nome da escola:____

Nome do aluno:____

Observe a figura exibida abaixo e faça o que se pede:



a. Quantos triângulos você enxerga na figura? Escreva os seus nomes (por exemplo: Δ ABC)

b. Todos eles possuem uma característica em comum. Qual é essa característica?

c. Meça os lados indicados abaixo com o auxílio de uma régua e preencha a tabela a seguir. (você pode utilizar uma calculadora)

Triângulo 1	Medidas em cm	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{c}$
a = Lado $\overline{DG}$				
b = Lado $\overline{BD}$				
c = Lado $\overline{BG}$				

Triângulo 2	Medidas em cm	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{c}$
$a =$ Lado $\overline{EF}$				
$b =$ Lado $\overline{BE}$				
$c =$ Lado $\overline{BF}$				

Triângulo 3	Medidas em cm	$\frac{a}{b}$	$\frac{b}{c}$	$\frac{a}{c}$
$a =$ Lado $\overline{AC}$				
$b =$ Lado $\overline{BA}$				
$c =$ Lado $\overline{BC}$				

d. Observando os resultados encontrados, o que podemos concluir?

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Caça ao tesouro	vídeo *Um caminho para o curral*, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1061, calculadoras e cópias da folha de atividades.	Nesta atividade, os alunos deverão utilizar o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas no triângulo retângulo, para ajudar Antônio numa caça ao tesouro.	A turma pode ser dividida em duplas	25 minutos

Aspectos operacionais

Exiba o vídeo *Um caminho para o curral* para a turma. Em seguida, divida a turma em duplas, distribua o texto e as calculadoras.

Aspectos pedagógicos

Os alunos podem ter dificuldade em equacionar o problema. Discuta com eles como transferir as informações da primeira figura (onde está Antônio, quanto mede um dos lados do muro) para cada uma das figuras que ilustram os caminhos. Discuta com eles o que Antônio precisaria saber para decidir entre os dois caminhos.

Como a medida do cateto oposto é desconhecida, os alunos podem ter dificuldade em resolver o primeiro exercício. Durante a discussão do problema, é importante representar a medida desconhecida do cateto oposto ou claramente identificá-lo em cada um dos caminhos para facilitar a visualização de como o cálculo da tangente pode auxiliar a resolver o problema.

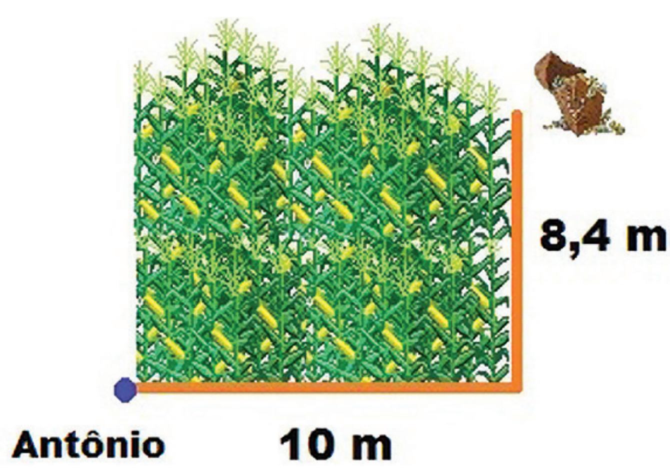
Folha de atividades – Caça ao tesouro

Nome da escola:____

Nome do aluno:____

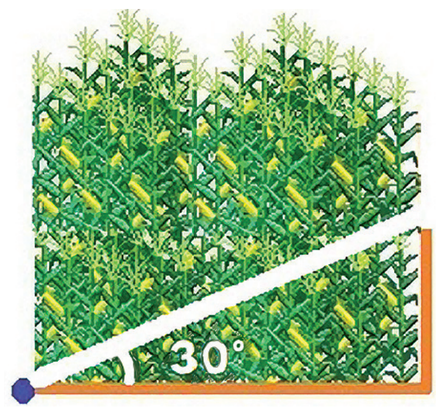
Antônio está participando de uma gincana em sua escola. Ele está disputando uma prova de caça ao tesouro e precisa da sua ajuda. Ele precisa escolher um caminho para atravessar o milharal e encontrar o tesouro. Ele só cumpre a tarefa se escolher o caminho que leva diretamente ao tesouro!

Se a regra do jogo permitisse, seria muito mais fácil seguir o muro que cerca o milharal, andando 10 metros até a esquina e, depois, mais 8,4 metros até o tesouro (veja figura a seguir).



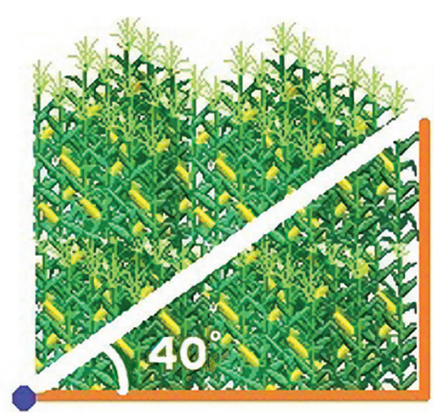
No entanto, para chegar ao tesouro, Antônio deve passar por dentro do milharal. Ele tem duas opções.

O primeiro caminho forma um ângulo de 30° com o lado do muro, que mede 10 metros.



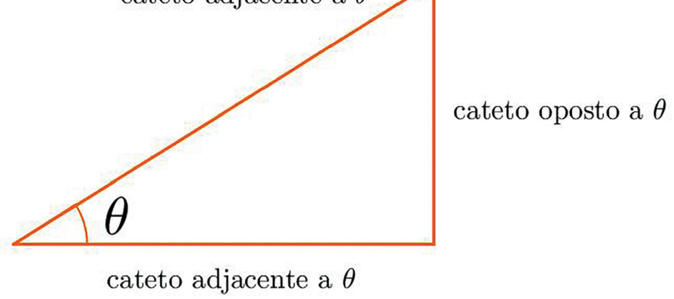
O segundo caminho forma um ângulo de 40° com o lado do muro, que mede 10 metros.

Em cada um dos caminhos, Antônio conhece apenas o ângulo formado entre o caminho e o lado do muro, que mede 10m.



1. Para cada caminho, use a tangente para calcular o comprimento do cateto oposto ao ângulo que o caminho faz com a parte do muro, que mede 10 metros.

$$\text{tangente de } \theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$



	ângulo	tangente	cateto oposto
Primeiro caminho	30°	0,58	
Segundo caminho	40°	0,84	

2. Use os resultados do item anterior para ajudar Antônio a escolher o caminho que leva ao tesouro.

Seção 1 – O triângulo retângulo e as razões trigonométricas

Páginas no material do aluno

249 a 262

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Os ângulos e as torres	Vídeo *Os ângulos e as torres*, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1145, calculadoras e cópias da folha de atividades.	Os alunos usarão as razões trigonométricas em um triângulo retângulo, para determinar a altura de torres inclinadas.	Duplas	25 minutos

Aspectos operacionais

Exiba o vídeo *Os ângulos e as torres* para a turma. Divida a turma em duplas, distribua o texto e as calculadoras. É interessante ler o texto com os alunos antes de começar a atividade.

Aspectos pedagógicos

Os alunos podem ter dificuldade em localizar na tabela os valores necessários para a resolução do problema proposto.

Verifique se os alunos não estão fazendo confusão entre o comprimento e a altura da torre. Como ela está inclinada, a altura é a distância do ponto mais alto da torre até o solo.

Os alunos podem confundir o ângulo que a torre faz com o solo com o chamado ângulo de inclinação da torre: o ângulo entre o eixo da torre e um eixo perpendicular ao solo.

Use o triângulo retângulo (em preto) na figura para identificar a hipotenusa com o comprimento da torre e a altura com o cateto adjacente ao ângulo de inclinação da torre.

Folha de atividades – Os ângulos e as torres

Nome da escola:____

Nome do aluno:____

Balança, mas não cai!

http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1417227

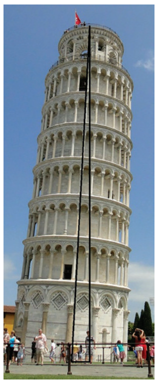
A Torre de Pisa é inclinada por ter sido construída sobre um terreno de argila e areia, materiais pouco firmes para sustentar uma edificação daquele porte. A construção da torre foi iniciada em 1173: seus três primeiros andares, mal tinham acabado de ser erguidos, quando foi notada uma ligeira inclinação, devido ao afundamento do terreno e ao assentamento irregular das fundações! Várias tentativas de aprumar a estrutura de oito andares foram executadas, mas de nada adiantaram.

Em 1990, a Torre de Pisa corria o risco de desabar e foi fechada para reformas. Para evitar o desabamento, os engenheiros tiraram, aos poucos, terra do lado inclinado e reforçaram a fundação com placas de chumbo. Além disso, injetaram cimento nos muros que circundam a torre.

A torre foi reaberta ao público em 2001 e deve ficar no lugar, pelo menos, por mais 200 anos.

Problema

O comprimento da torre é de 58 metros.



Em 1292, ainda no meio da sua construção, a torre apresentava uma inclinação de 1,5 graus em relação a um eixo vertical.

Em 1817, o ângulo de inclinação havia crescido até atingir 4 graus.

Em 1990, o ângulo em relação a um eixo vertical media 5,5 graus, e a torre acabou sendo fechada ao público.

Com auxílio dos dados que acabamos de apresentar, use as razões trigonométricas de um triângulo retângulo para calcular a altura da Torre de Pisa em 1292, 1817 e 1990.

Ano	Ângulo de inclinação	Altura da Torre de Pisa
1292		
1817		
1990		

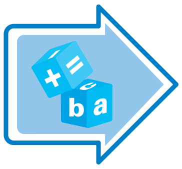
A tabela a seguir pode te ajudar!

Ângulo (em graus)	sen	cos	tg
0	0	1	0
0,5	0,008727	0,999962	0,008727
1	0,017452	0,999848	0,017455
1,5	0,026177	0,999657	0,026186
2	0,034899	0,999391	0,034921
2,5	0,043619	0,999048	0,043661
3	0,052336	0,99863	0,052408
3,5	0,061049	0,998135	0,061163
4	0,069756	0,997564	0,069927
4,5	0,078459	0,996917	0,078702
5	0,087156	0,996195	0,087489
5,5	0,095846	0,995396	0,096289
6	0,104528	0,994522	0,105104

Seção 1 – O triângulo retângulo e as razões trigonométricas

Páginas no material do aluno

249 a 262

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Batendo pênalti	Calculadoras e cópias da folha de atividades.	Nos problemas propostos, os alunos usarão as razões trigonométricas no triângulo retângulo para determinar os valores máximos para os ângulos verticais e horizontais que a trajetória da bola pode fazer numa cobrança de pênalti.	Duplas.	25 minutos

Aspectos operacionais

Divida a turma em duplas, distribua o texto e as calculadoras. É interessante ler o texto com os alunos antes começar a atividade. Procure perceber se todos estão entendendo de que a atividade está tratando, pois alguns alunos podem não dominar informações sobre futebol.

Aspectos pedagógicos

Os alunos podem ter dificuldade em localizar na tabela os valores necessários para a resolução do problema proposto. Os valores exatos de tangente encontrados na resolução do problema não estão disponíveis na tabela. Oriente os alunos a encaixá-los entre dois valores próximos. Por exemplo, quando obtiverem $\text{tg}\theta = 0{,}22$, oriente-os a localizar esse valor entre os de tg 12° e de tg 13° e concluir que $12° < \theta < 13°$.

Para resolver o problema da vista de cima, pode ser necessário relembrar algumas propriedades do triângulo isósceles: os ângulos da base têm a mesma medida e a altura passa pelo ponto médio da base.

Os alunos podem encontrar dificuldade em identificar o triângulo retângulo no problema da vista de cima. Se necessário, lembre aos alunos que a altura é perpendicular à base do triângulo isósceles e o divide em dois triângulos retângulos iguais.

No primeiro problema, para discutir com os alunos como representar um chute em que a bola passe por baixo e rente à trave superior, use o esquema da vista lateral e chame a atenção para o triângulo retângulo que tem por catetos uma das traves (altura do gol) e a distância dos 11 metros da marca do pênalti até o gol (representada pela linha vermelha).

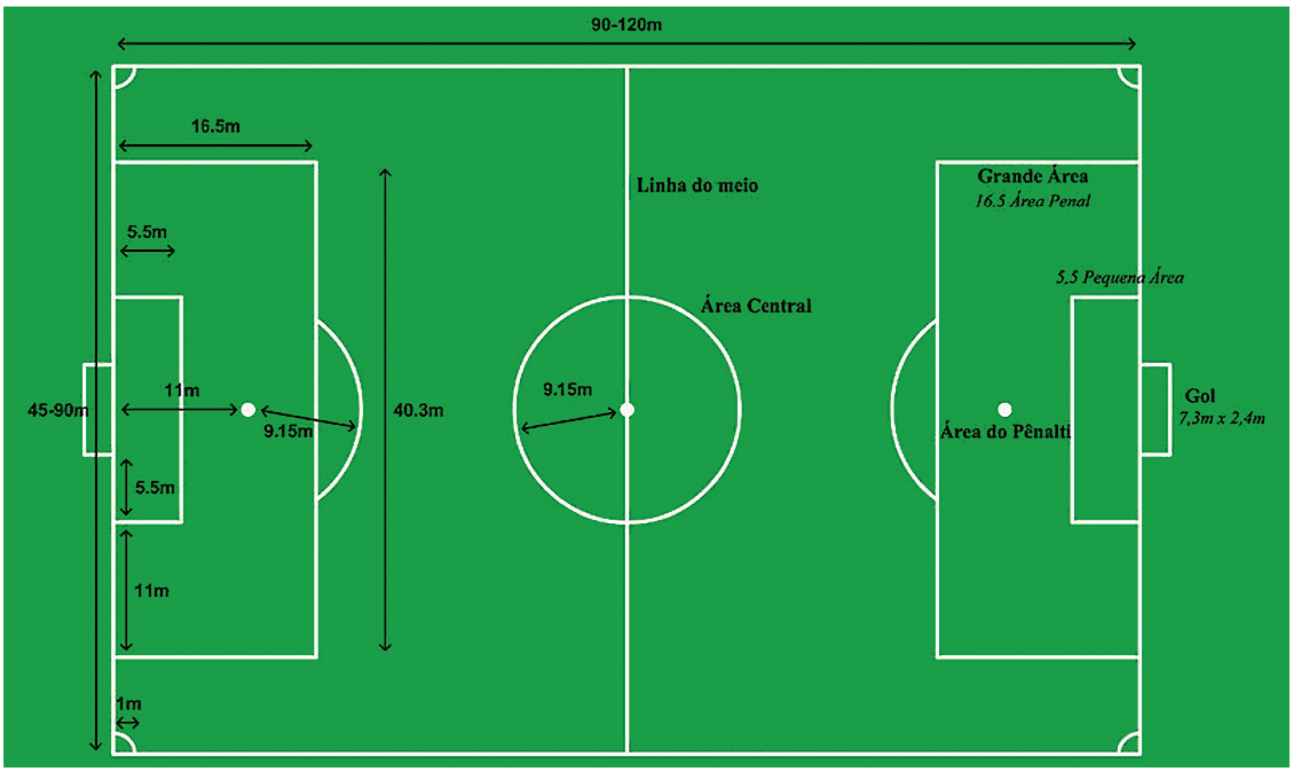
Folha de atividades – Batendo pênalti

Nome da escola:____

Nome do aluno:____

O cronômetro já marca 42 minutos do segundo tempo, e o juiz marca pênalti contra o seu time!

Você conhece as regras para a cobrança de pênalti?

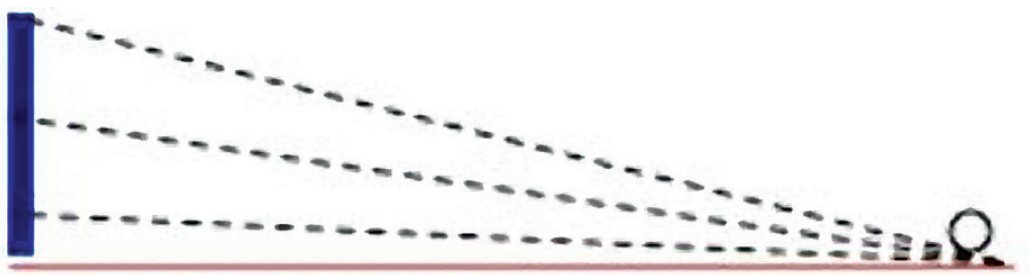


A bola deve ser colocada a 11 metros do ponto médio da linha do gol, que tem 7,32 metros de largura e 2,44 metros de altura.

A cobrança usual do pênalti é feita por meio de um tiro direto. Em função da distância e da velocidade, a trajetória da bola pode ser considerada, em grande parte das experiências, uma linha reta. Assim, faremos a visualização das vistas lateral e superior desses chutes, pontilhando as trajetórias das bolas em direção ao gol.

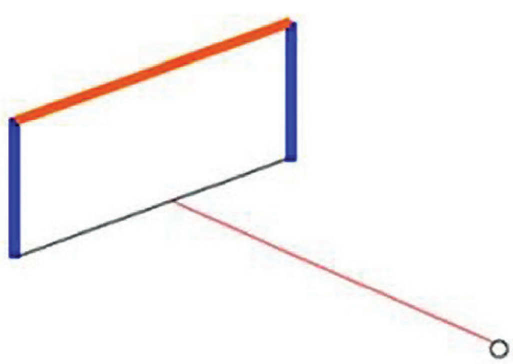
Problemas:

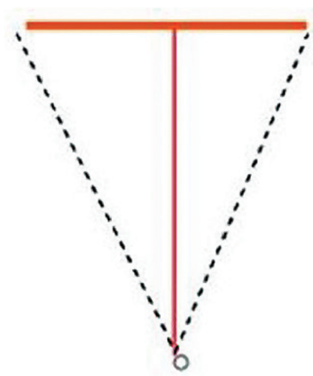
1. Se olharmos a cobrança do pênalti lateralmente, podemos visualizar um triângulo retângulo. Um de seus catetos corresponde a uma das traves (altura do gol), e o outro, à distância dos 11 metros da marca do pênalti até o gol (representada pela linha vermelha).



Use as razões trigonométricas no triângulo retângulo e a Tabela 1 para obter um valor aproximado do ângulo máximo de saída da bola para que o jogador marque gol. (Pense em um chute em que bola passe por baixo e rente à trave superior. Essencialmente, você deve determinar o ângulo entre a linha pontilhada que passa rente à trave e a linha vermelha);

2. Se olharmos de cima a cobrança do pênalti, podemos visualizar um triângulo isósceles cuja base coincide com a largura do gol e cuja altura coincide com a distância do gol à marca do pênalti. A medida da base é 7,32 metros e sua altura mede 11 metros.





VISTA DE CIMA OU PLANTA

Use as razões trigonométricas no triângulo retângulo e a Tabela 1 para obter um valor aproximado do ângulo máximo de saída da bola para que o jogador marque gol. (Pense em um chute rasteiro em que bola passe em um dos cantos inferiores do gol. Essencialmente, você deve determinar o ângulo entre a linha pontilhada e a linha vermelha).

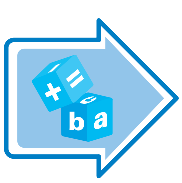
Ângulo	sen	cos	tg
1	0,017452	0,999848	0,017455
2	0,034899	0,999391	0,034921
3	0,052336	0,99863	0,052408
4	0,069756	0,997564	0,069927
5	0,087156	0,996195	0,087489
6	0,104528	0,994522	0,105104
7	0,121869	0,992546	0,122785
8	0,139173	0,990268	0,140541
9	0,156434	0,987688	0,158384
10	0,173648	0,984808	0,176327
11	0,190809	0,981627	0,19438
12	0,207912	0,978148	0,212557
13	0,224951	0,97437	0,230868
14	0,241922	0,970296	0,249328
15	0,258819	0,965926	0,267949
16	0,275637	0,961262	0,286745
17	0,292372	0,956305	0,305731
18	0,309017	0,951057	0,32492
19	0,325568	0,945519	0,344328
20	0,34202	0,939693	0,36397

Tabela 1

Seção 1 – O triângulo retângulo e as razões trigonométricas

Páginas no material do aluno

249 a 262

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Cálculo de distâncias inacessíveis	Calculadoras e cópias da folha de atividades.	Nos problemas propostos, os alunos usarão as razões trigonométricas no triângulo retângulo para determinar distâncias inacessíveis, como largura de rios, altura de montanhas, etc.	Duplas	25 minutos

Aspectos operacionais

Divida a turma em duplas, distribua o texto e as calculadoras. É interessante ler o texto com os alunos antes de começar a atividade. Durante a realização da atividade, procure informar aos alunos o que são topógrafos e teodolitos.

Aspectos pedagógicos

Em cada problema, foram informados mais dados dos que os necessários para a resolução, o que é bastante comum em situações concretas. Os alunos podem ter dificuldade em identificar os dados que devem utilizar. Essa situação pode revelar também a dificuldade dos alunos em determinar a relação trigonométrica adequada para a resolução dos problemas.

A resolução dos problemas envolve representá-los geometricamente e efetuar cálculos usando razões trigonométricas: seno, cosseno ou tangente. Note que, nos problemas apresentados, o valor da hipotenusa é desconhecido. Ela corresponde à linha de mira do teodolito ou do radar. Portanto, podemos descartar duas das razões trigonométricas: seno e cosseno, pois elas necessitam diretamente da hipotenusa.

Folha de atividades – Cálculo de distâncias inacessíveis

Nome da escola:____

Nome do aluno:____

Quem não tem cão caça com gato

Você saberia como medir objetos muito altos e de difícil acesso?

Como determinar a largura de um rio sem o atravessar?

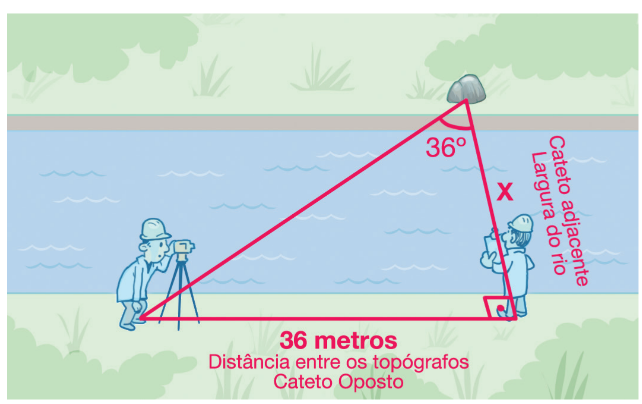
Você conhece alguma maneira de se fazer medidas indiretamente, ou seja, sem acessar o que se quer medir?

Largura de um rio

Para medir ângulos em terrenos ou em construções, topógrafos e engenheiros utilizam aparelhos que permitem realizar medidas com grande rigor – os teodolitos. Veja na figura seguinte.

Fonte: http://www.sxc.hu/browse.phtml?f=download&id=1160625

Dois topógrafos estão na mesma margem de um rio, separados 36 metros um do outro. Um deles observa uma pedra que está na outra margem, bem em frente ao seu companheiro. Com a ajuda de um teodolito, o observador verifica que a linha perpendicular que une a pedra ao colega forma um ângulo de 36º com a linha de mira do teodolito à pedra. Qual é a largura do rio? (Dados: tg 36º = 0,727, sen 36º = 0,588 e cos 36º = 0,809).

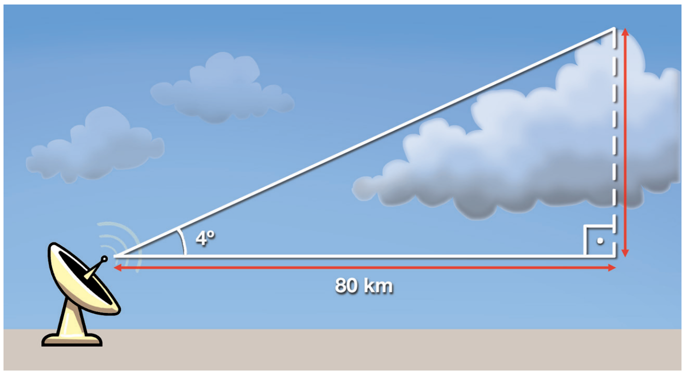


Previsão do tempo

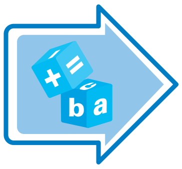
Nem sempre foi fácil prever tempestades, furações, tornados, um tempo frio ou quente. Mas, com o avanço da tecnologia, os meteorologistas conseguem, quase com exatidão, prever fenômenos naturais como os citados. A integração entre os sistemas computacionais e os grandes radares e satélites, juntamente com a Matemática, são imprescindíveis para a realização dessas previsões.

A determinação da altura de uma nuvem em relação ao solo, geralmente feita por um radar, é importante para previsões meteorológicas. Ela também é importante para a navegação dos aviões que, a partir das informações, podem evitar as turbulências e, assim, diminuir o risco de acidentes.

Determine a altura da nuvem detectada pelo radar, de acordo com a figura seguinte. (Dados: sen 4º = 0,077, cos 4º= 0,998 e tg 4º=0,070).



Seção 2 – A lei dos senos e a lei dos cossenos	*Páginas no material do aluno* **262 a 267**

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Engenharia da trigonometria	Cópias da folha de atividades	Nesta atividade, os alunos deverão aplicar a lei dos cossenos para calcular a medida de um dos lados de um triângulo.	Duplas	20 minutos

Aspectos operacionais

Divida a turma em duplas e distribua o texto e as calculadoras. É interessante ler o texto com os alunos antes de começar a atividade.

Aspectos pedagógicos

Professor,

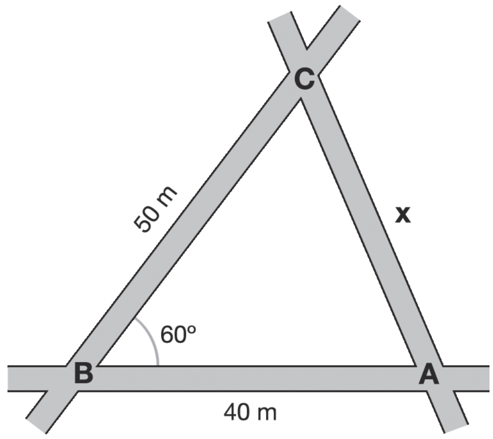
Alguns alunos podem demonstrar dificuldades na utilização da fórmula da lei dos cossenos. Seria interessante que você exibisse algumas resoluções de exemplos mais simples do que este. Pode aproveitar também para relembrar as relações métricas no triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras.

Folha de atividades – Engenharia da trigonometria

Nome da escola:____

Nome do aluno:____

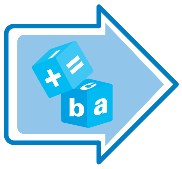
Um determinado engenheiro precisa medir as dimensões de um terreno triangular. Ele já determinou que um dos lados mede 40 metros e que o outro lado mede 50 metros. Determinou também que o ângulo formado por esses dois lados é de 60°. Para encontrar o valor do terceiro lado, é necessário fazer uma nova medição ou basta simplesmente efetuar um cálculo?



Seção 2 – A lei dos senos e a lei dos cossenos

Páginas no material do aluno

262 a 267

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Calculando distâncias	Calculadoras e cópias da folha de atividades	Nos problemas propostos, os alunos usarão a lei dos senos para calcular distâncias.	Duplas	25 minutos

Aspectos operacionais

Divida a turma em duplas; distribua o texto e as calculadoras. É interessante ler o texto com os alunos antes de começar a atividade. Durante a realização da atividade, procure perceber se todos os alunos estão entendendo o que significam os dados da tabela apresentada.

Aspectos pedagógicos

Em cada problema, foram informados mais dados dos que os necessários para a resolução, o que é bastante comum em situações concretas. Os alunos podem ter dificuldade em identificar quais deles devem utilizar. Essa situação pode revelar também a dificuldade dos alunos em determinar a relação trigonométrica ou a propriedade adequada para a resolução dos problemas.

A primeira etapa da resolução dos problemas envolve representá-los geometricamente. Note que, nos problemas apresentados, não temos triângulos retângulos. Precisaremos utilizar relações válidas em triângulos quaisquer.

O primeiro exercício também pode ser resolvido pela lei dos cossenos. Nesse caso, estimule os alunos a conferirem os resultados, tentando resolver o problema através da lei dos senos. Para utilizar a lei dos senos, é preciso escolher, entre os dois lados de medida conhecida, aquele que é oposto a um ângulo de medida conhecida. No caso, devemos considerar o ângulo de 33 graus e o lado oposto a ele, de medida igual a 210 metros.

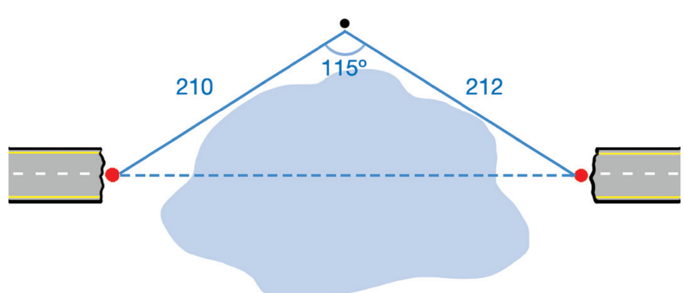
Folha de atividades – Calculando distâncias

Nome da escola:____

Nome do aluno:____

Construindo uma ponte

Você é um engenheiro e precisa determinar o comprimento de uma ponte que liga duas partes de uma estrada. A ponte passa sobre um lago e deve ligar os dois pontos (em vermelho) indicados na figura a seguir.



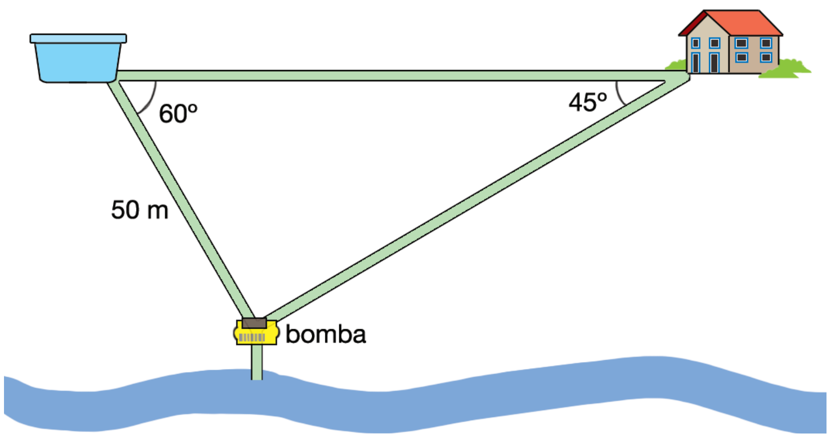
Você foi orientado por seu chefe a efetuar as medições indicadas na figura. Ele afirmou que, conhecendo a medida de dois lados do triângulo e de dois ângulos, você seria capaz de calcular o comprimento da ponte. As medidas dos lados foram feitas em metros.

Utilize os dados da figura e os da tabela a seguir, para determinar o comprimento da ponte.

Ângulo	sen	cos	tg
33	0,544639	0,838671	0,649408
115	0,906308	-0,422618	-2,144507

Encanamento

A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada de um rio para uma caixa d'água a 50 m de distância. Sabemos que o ângulo formado pelas direções "caixa d'água casa" e "caixa d'água bomba" é de 45º e que o ângulo formado pelas direções "bomba-caixa d'água" e "caixa d'água casa" é de 60º. Se pretendermos bombear água do mesmo ponto de captação diretamente até a casa, quantos metros de encanamento serão necessários? (Dados: tg 45º = 1, sen 45º = 0,707107 e cos 45º = 0,707107; tg 60º = 1,732051, sen 60º = 0,866025 e cos 60º = 0,5).

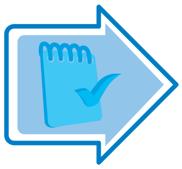


Atividades de Avaliação

Nesta seção, apresentaremos atividades que retomam as habilidades verificadas nas seções anteriores, com o intuito de consolidar e avaliar o processo de ensino/aprendizagem do conteúdo proposto.

Sugerimos a utilização dos dois últimos tempos de aula destinados a esta unidade. A seguir, apresentamos sugestões para a retomada dos conteúdos trabalhados e para a avaliação das habilidades pretendidas. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, explicitadas a seguir.

Seção Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Revisão e registros de aprendizagens	Folha de atividades	Atividade para revisão dos conteúdos abordados e registros das aprendizagens realizadas.	Individualmente	25 minutos

Aspectos operacionais

Distribua as folhas de atividade para cada aluno. Leia o texto com os alunos e ressalte a importância de eles refletirem sobre os conteúdos que foram abordados nesta unidade enquanto estiverem fazendo as tarefas.

Após a resolução da tarefa 1, você poderá propor que o aluno, concomitante à realização da tarefa 2, registre individualmente, numa folha de papel, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade.

Aspectos pedagógicos

Esta etapa também pode ser articulada à seção "Veja ainda", disponível na **p. 74** do material do aluno.

Durante a execução da tarefa 1, verifique como os alunos utilizam as informações do enunciado e das figuras para a resolução dos problemas. Auxilie os alunos que apresentarem dificuldades, relembrando as definições e resultados.

O problema 2 pode ser um pouco mais difícil de visualizar, pois a junção dos 2 triângulos retângulos forma um terceiro triângulo retângulo. Ajude os alunos nessa percepção.

Durante a execução da tarefa 2, estimule que os alunos investiguem nos polígonos utilizados – quadrado e triângulo equilátero – onde aparecem os ângulos de 30°, 45° e 60°.

É muito importante que os alunos percebam que os valores de seno, cosseno e tangente desses ângulos são obtidos por procedimentos matemáticos.

Mesmo sabendo que decorar a tabela com os valores das razões trigonométricas é necessário, valorize a construção utilizada para a obtenção desses valores.

Folha de atividades – Revisão e registros de aprendizagens

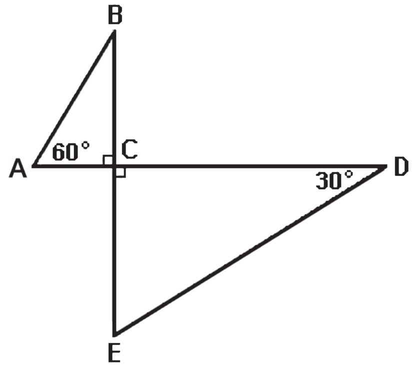
Nome da escola:____

Nome do aluno:____

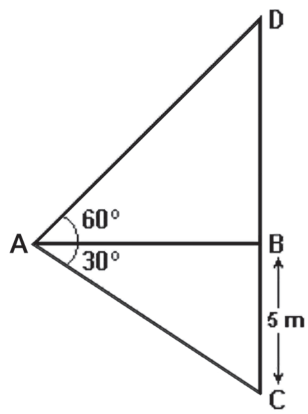
Tarefa 1

Resolva os exercícios que seguem, para o aprimoramento e registro das aprendizagens que obteve durante as últimas aulas.

1. Temos que CD = 2. BC e que a distância de D a E é 12m. Calcule o comprimento de AC.



2. Calcule o comprimento de BD.

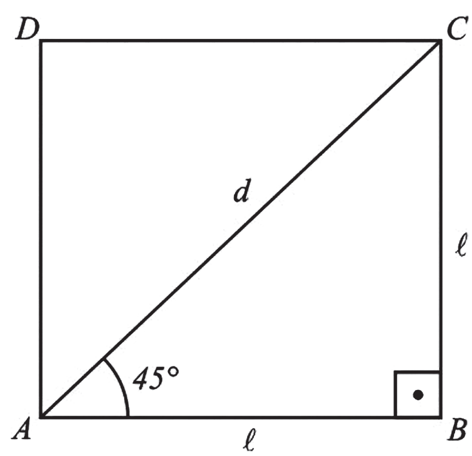


Tarefa 2

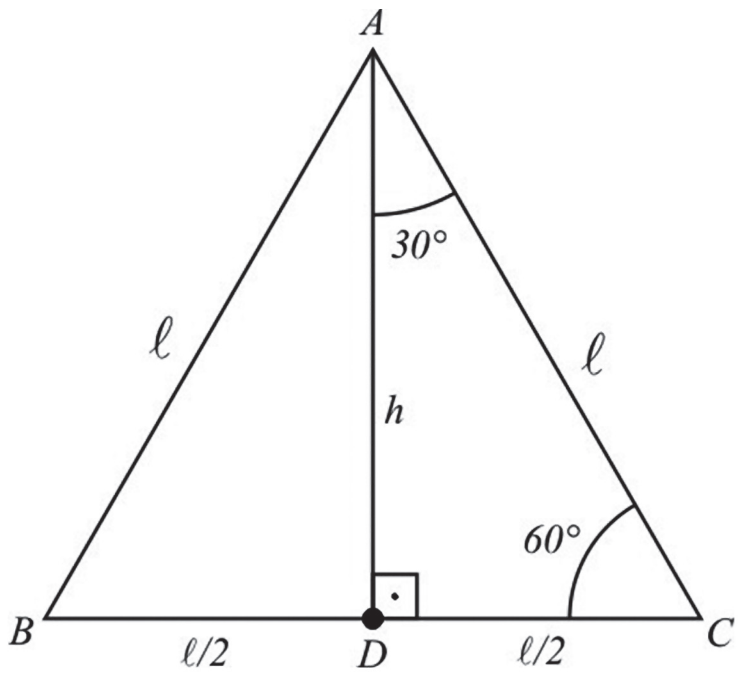
Os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30°, 45° e 60° não caíram do céu. É possível obtermos esses valores por intermédio das definições das razões trigonométricas e da utilização de polígonos especiais.

1. Defina seno, cosseno e tangente como razões entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo;

2. A partir do quadrado a seguir, deduza o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 45°;



3. A partir do triângulo equilátero a seguir, e uma de suas alturas, deduza o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de 30° e 60°.



Seção Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de avaliação de larga escala	Folha de atividades	Sugerimos, nesta etapa, a escolha de uma questão que contemple uma habilidade pretendida nesta unidade para compor o instrumento avaliativo. A ideia é que o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como o ENEM, os vestibulares, os concursos, etc	Individualmente	20 minutos

Aspectos operacionais

Distribua as folhas de atividade para cada aluno. Em seguida, leia o texto com os alunos.

Aspectos pedagógicos

Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas.

Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Pondere sobre as soluções equivocadas, ressaltando onde reside o erro.

As questões objetivas de vestibulares, em geral, têm sempre uma justificativa com erro plausível em suas alternativas erradas. Obviamente, isso não está evidente na alternativa. Dessa forma, procure identificar o erro que gerou cada uma das alternativas e discuta com os alunos.

Folha de atividades – Questões de avaliação de larga escala

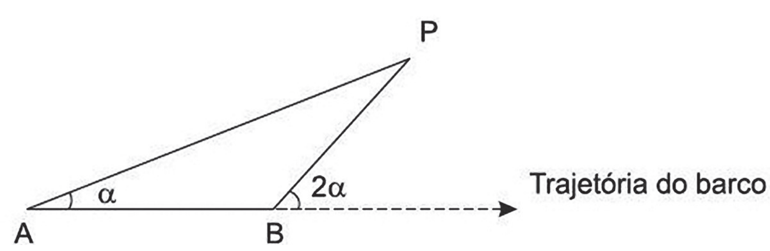
Nome da escola:____

Nome do aluno:____

Questão 1 (ENEM 2011)

Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual *a*, fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B, de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia; no entanto, sob um ângulo visual 2α.

A figura ilustra essa situação:



Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será:

a. 1000 m.

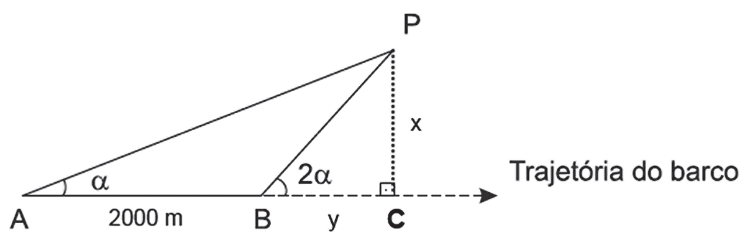
b. 1000 m.

c. 2000 m.

d. 2000 m.

e. 2000 m.

Resolução comentada



A menor distância entre o ponto P e o barco é determinada pelo segmento PC, que mede x, de acordo com a figura acima.

A partir do triângulo APC, temos $\tan 30° = \dfrac{x}{2000+y} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x}{2000+y}$ (1)

A partir do triângulo APC, temos $\tan 60° = \dfrac{x}{y} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{x}{y} \Rightarrow x = \sqrt{3}.y$ (2)

Substituindo (2) em (1)**,** temos

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}.y}{2000+y} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{y}{2000+y} \Rightarrow 3y = 2000 + y \Rightarrow 2y = 2000 \Rightarrow y = 1000$$

Logo, a partir de (2), podemos escrever que x =1000 $\sqrt{3}$ m.

Letra B

Questão 2 (CAp-UFRJ – Admissão para o 2º ano do EM em 2011)

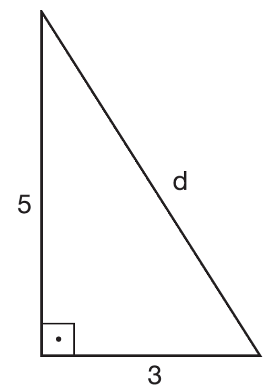
João e Pedro partem de um mesmo lugar para uma caminhada em um terreno plano. João caminha 5 km na direção norte, e Pedro, 3 km na direção leste.

a. Ao final dessa caminhada, qual a distância aproximada entre João e Pedro (utilize um valor inteiro)?

b. Após o percurso descrito, João encontra-se de costas para o ponto de partida e gira 60° no sentido horário, caminhando mais 3 km nessa direção. Pedro retorna ao ponto de origem. Qual a distância entre eles após essa nova caminhada?

Resolução comentada

a. Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:



$d^2 = 5^2 + 3^2$

$d^2 = 25 + 9$

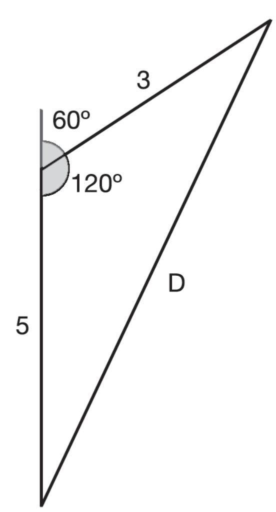
$d^2 = 34$

$d = \sqrt{34}$

$d \cong 6$

A distância será de aproximadamente 6 quilômetros.

b. Utilizando a lei dos cossenos, temos:



$D^2 = 5^2 + 3^2 - 2.5.3.\cos 120°$

$D^2 = 25 + 9 + 30.\cos 60°$

$D^2 = 34 + 30.1/2$

$D^2 = 49$

$D = 7$

A distância será de 7 quilômetros.