

# Função Polinomial do 2º grau – Parte 2

André Luiz Cordeiro dos Santos, Gabriela dos Santos Barbosa, Josemeri Araujo Silva Rocha (coordenadora) e Luciane de Paiva Moura Coutinho.

## Introdução

Caro professor, a Unidade 17 do material do aluno traz algumas situações que envolvem o conceito de função do 2º grau. Antes de iniciar este módulo, é importante que você tenha amplo conhecimento da proposta apresentada.

Neste material, propomos algumas atividades para enriquecer a abordagem dos objetivos do módulo do aluno, que são os seguintes: consolidar conhecimentos obtidos na resolução de equações do 2º grau; conceituar função polinomial do 2º grau; determinar a lei de formação de uma função polinomial do 2º grau; determinar a imagem de elementos do domínio de uma função polinomial do 2º grau; construir, ler e analisar os gráficos de funções polinomiais do 2º grau; identificar a concavidade e outros elementos da parábola; identificar o crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 2º grau; resolver problemas de máximos e mínimos, associados à função polinomial do 2º grau; compreender os significados dos coeficientes da função do 2º grau e utilizar a função polinomial do 2º grau para resolver problemas. A ideia que norteou a equipe durante o processo de produção foi levar até você uma proposta que pudesse realmente contribuir para a ampliação do seu trabalho pedagógico nas aulas de matemática.

Sugerimos que a primeira aula desta unidade inicie-se com uma atividade disparadora. Esta atividade é um jogo, que utiliza um recurso tecnológico (computador com Internet ou datashow) e que tem por objetivo atingir o alvo com um projétil lançado a partir de um canhão. A trajetória descrita pelo projétil é uma parábola.

Na Seção 1, você pode optar pela atividade Planilhas eletrônicas, onde os alunos irão montar uma planilha eletrônica para construir gráficos de funções quadráticas. Poderá, ainda, convidar os alunos a descobrir as coordenadas do vértice e os zeros da função sem a necessidade de fórmulas, usando a atividade Parábolas.

Para trabalharmos a Seção 2, sugerimos duas atividades: uma é um jogo da memória e a outra propõe a reflexão sobre um problema que permite mostrar pontos de aproximação entre a Física e a Matemática.

Apresentamos na Seção 3 duas atividades que mostram as aplicações das funções quadráticas. Na primeira, propomos a reflexão sobre uma situação problema e, na segunda, a construção de retângulos, permitindo a integração entre as funções quadráticas e os conceitos de perímetro e área.

Por fim, aconselhamos que a última aula seja dividida em dois momentos. O primeiro consiste numa revisão geral do que foi trabalhado na unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o estudo. O segundo é um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos em detrimento da reprodução de exercícios feitos anteriormente.

As sugestões que elaboramos estão descritas e detalhadas nas tabelas e textos apresentados a seguir.

## Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	2	Expansão	4

Título da unidade	Tema
Função Polinomial do 2º grau – Parte 2	Função do 2º grau
Objetivos da unidade	
Consolidar conhecimentos obtidos na resolução de equações do 2º grau;	
Conceituar função polinomial do 2º grau;	
Determinar a lei de formação de uma função polinomial do 2º grau;	
Determinar a imagem de elementos do domínio de uma função polinomial do 2º grau;	
Construir, ler e analisar os gráficos de funções polinomiais do 2º grau;	
Identificar a concavidade e outros elementos da parábola;	
Identificar o crescimento e decrescimento de uma função polinomial do 2º grau;	
Resolver problemas de máximos e mínimos associados à função polinomial do 2º grau;	
Compreender os significados dos coeficientes da função do 2º grau;	
Utilizar a função polinomial do 2º grau para resolver problemas.	

Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	193 a 194
Seção 1 – Entendendo as parábolas	195 a 204
Seção 2 – Como construir o gráfico de uma função do 2º grau?	204 a 208
Seção 3 – Aplicações da função quadrática	208 a 214
Veja ainda...	214 a 215
O que perguntam por aí?	219 a 221

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

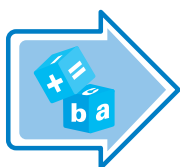
Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

## Recursos e ideias para o Professor

### Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



#### Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.



#### Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.



### Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



### Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.



### Exercícios

Proposições de exercícios complementares


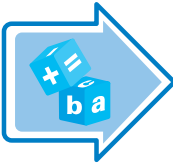
## Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Movimento de projétil	Computador com acesso à Internet, datashow	O objetivo do jogo é atingir o alvo com um projétil lançado a partir de um canhão. A trajetória descrita por esse projétil é uma parábola.	De acordo com a disponibilidade de computadores na escola.	30 minutos

## Seção 1 – Entendendo as parábolas

Páginas no material do aluno

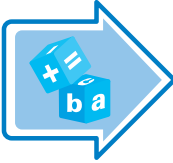
**195 a 204**

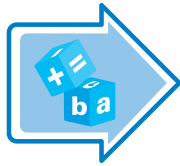
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Planilhas eletrônicas	Computadores com acesso à Internet; computador com acesso à Internet e datashow, e programa tipo BrOffice ou Excel	Os alunos irão montar uma planilha eletrônica para construir gráficos de funções quadráticas.	De acordo com a disponibilidade de computadores na escola.	30 minutos
	Parábolas	Papel, lápis e cartas do jogo	Neste jogo, os alunos irão descobrir as coordenadas do vértice e os zeros da função sem a necessidade de fórmulas.	Grupos de 4 alunos	30 minutos

## Seção 2 – Como construir o gráfico de uma função do 2º grau?

Páginas no material do aluno

**204 a 208**

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Memória das funções quadráticas	Um conjunto de cartas e uma ficha para criação de cartas para cada dupla	Como num jogo da memória tradicional, os alunos irão formar pares de cartas. No entanto, as cartas que formam os pares, em vez de serem idênticas, correspondem à representação gráfica e à lei de associação de uma mesma função quadrática.	Duplas	30 minutos



Integrando Matemática e Física: MRU	Uma ficha para cada dupla	Os alunos terão a oportunidade de discutir uma situação-problema modelada por uma função quadrática.	A atividade pode ser realizada em duplas.	30 minutos
-------------------------------------	---------------------------	--	---	------------

### Seção 3 – Aplicações da função quadrática

Páginas no material do aluno

**208 a 214**

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Valor máximo de uma função quadrática	Folha de atividades, disponibilizada no pen drive e calculadora	Os alunos discutirão uma situação-problema que pode ser modelada por uma função quadrática.	Duplas	30 minutos
	Funções quadráticas e áreas	Uma folha de papel milimetrado e uma régua para cada dupla	Os alunos calcularão a área de retângulos e associarão esse cálculo a funções quadráticas.	Duplas	30 minutos

### Seção Avaliação


Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questão dissertativa	Folha de atividades, lápis, borracha	Questão dissertativa para a avaliação da aprendizagem, envolvendo a modelagem do tamanho das marcas de derrapagem de um carro via função quadrática.	Individual	10 minutos



Questão objetiva	Folha de atividades, lápis, borracha	Questão objetiva relacionada à modelagem da propagação de uma informação via função quadrática.	Individual	10 minutos
Consolidação e registros de aprendizagem	Folha de atividades	Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática.	Individual	10 minutos



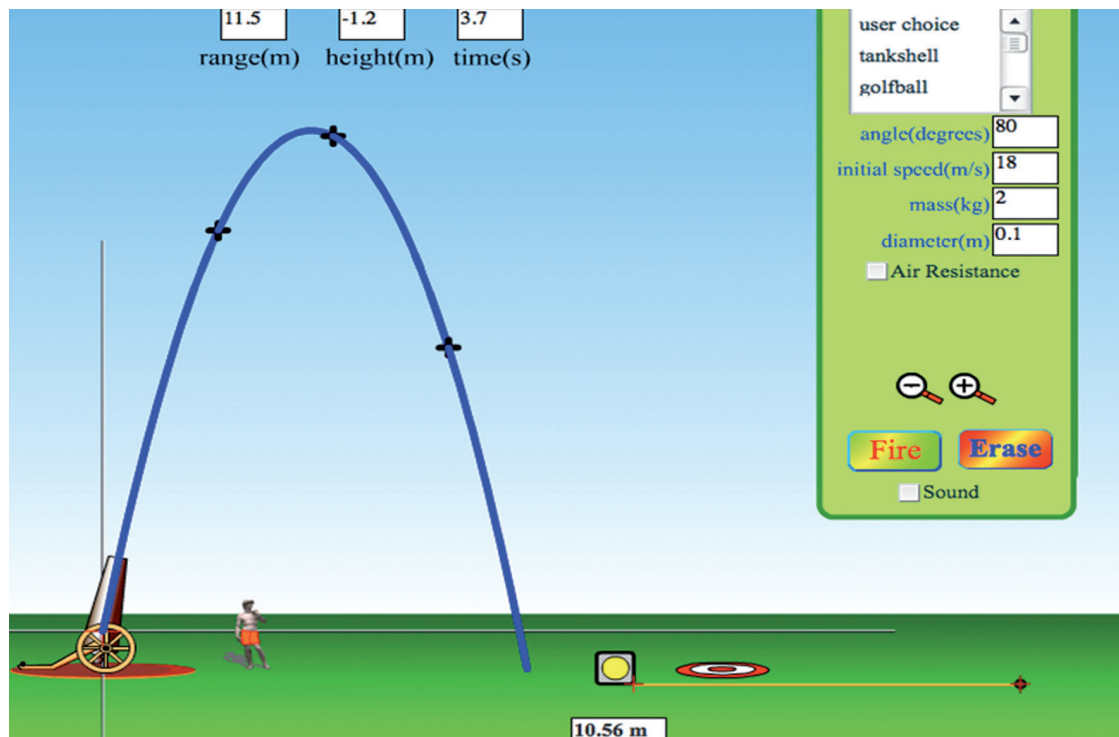
## Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Movimento de projétil	Computador com acesso à Internet, datashow	O objetivo do jogo é atingir o alvo com um projétil lançado a partir de um canhão. A trajetória descrita por esse projétil é uma parábola.	De acordo com a disponibilidade de computadores na escola.	30 minutos

## Aspectos operacionais

Professor, leve sua turma até o laboratório de informática de sua escola. Caso não seja possível, você pode utilizar um datashow em sala de aula e projetar a atividade para a turma acompanhar. Neste caso, permita que alguns alunos manipulem o computador para realizar a atividade e discuta com a turma o que foi feito.

Peça aos alunos para acessar – ou acesse, caso esteja usando o computador em sala - o simulador de lançamento de projéteis disponível em [portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=11673](http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=11673).





O objetivo da atividade é atingir o alvo com o projétil. Peça aos alunos que disparem o projétil aleatoriamente. Para isto, basta clicar no botão Fire. Em seguida, chame atenção para o fato de que eles podem modificar a massa (mass) e o diâmetro (diameter) dos projéteis, sua velocidade inicial (initial speed), o ângulo de lançamento (angle) e até mesmo o efeito da resistência do ar (air resistance), a fim de alterar a trajetória do projétil e aproximá-lo do alvo.

---

## Aspectos pedagógicos

Professor, esta é uma atividade introdutória, para que seus alunos familiarizem-se de maneira interativa com o estudo de funções quadráticas. Estimule-os primeiro a tentar acertar o alvo no chão, modificando as variáveis disponíveis: massa (mass), diâmetro (diameter), velocidade inicial (initial speed), ângulo de lançamento (angle) e efeito da resistência do ar (air resistance). Essas variáveis estão em Inglês no simulador. Portanto, você pode montar uma parceria com o (a) colega que ensina língua inglesa para explorar esse vocabulário. Outra parceria possível é com o (a) professor (a) de Física, principalmente no que diz respeito à influência que a variação da massa e do diâmetro do objeto passam a exercer sobre o formato da trajetória, quando ativamos os efeitos de resistência do ar.

Professor, lembre-se de que a curva descrita no problema somente será uma parábola, se desprezarmos a resistência do ar. Neste caso, para evitar possíveis erros conceituais, sugerimos que, depois da fase de ambientação com o aplicativo, seus alunos mantenham desmarcada a opção da resistência do ar.

Após essa primeira fase, peça que os alunos descrevam os principais atributos da curva realizada pelo projétil. Neste momento, estimule-os a observar características mais importantes: a curva sobe e desce (crescente e decrescente), tem um ponto mais alto (ponto de máximo) e corta o eixo x em dois pontos (tem duas raízes). Lembre-se de valorizar as outras considerações que os seus alunos apresentarem.


Ressalte as características dessa curva e mostre à turma que a curva do movimento do projétil é a curva que descreve a função quadrática.

Instigue os alunos a pesquisarem os usos da superfície parabólica, tais como nos refletores, faróis de carro e lanternas de mão – além, é claro, das antenas parabólicas.

## Seção 1 – Entendendo as parábolas

Páginas no material do aluno

195 a 204

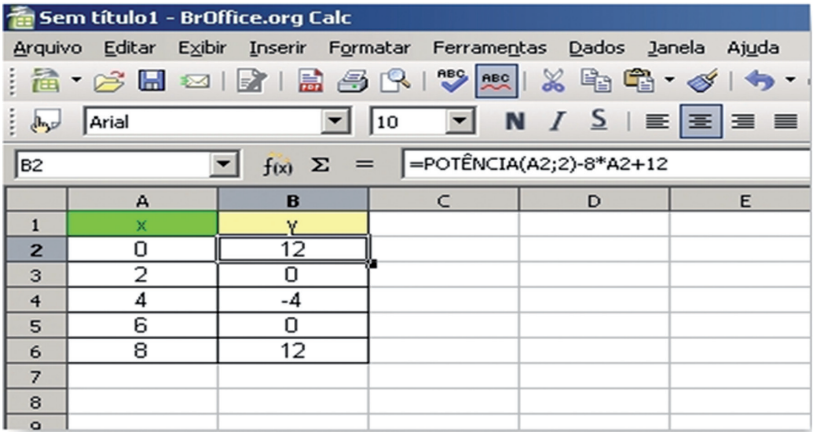
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Planilhas eletrônicas	Computadores com acesso à Internet; computador com acesso à Internet e datashow, e programa tipo BrOffice ou Excel	Os alunos irão montar uma planilha eletrônica para construir gráficos de funções quadráticas.	De acordo com a disponibilidade de computadores na escola.	30 minutos

## Aspectos operacionais

Professor, leve sua turma até o laboratório de informática de sua escola. Caso não seja possível, utilize o datashow em sala e permita que alguns alunos manipulem o computador, abrindo a discussão para todo o grupo.

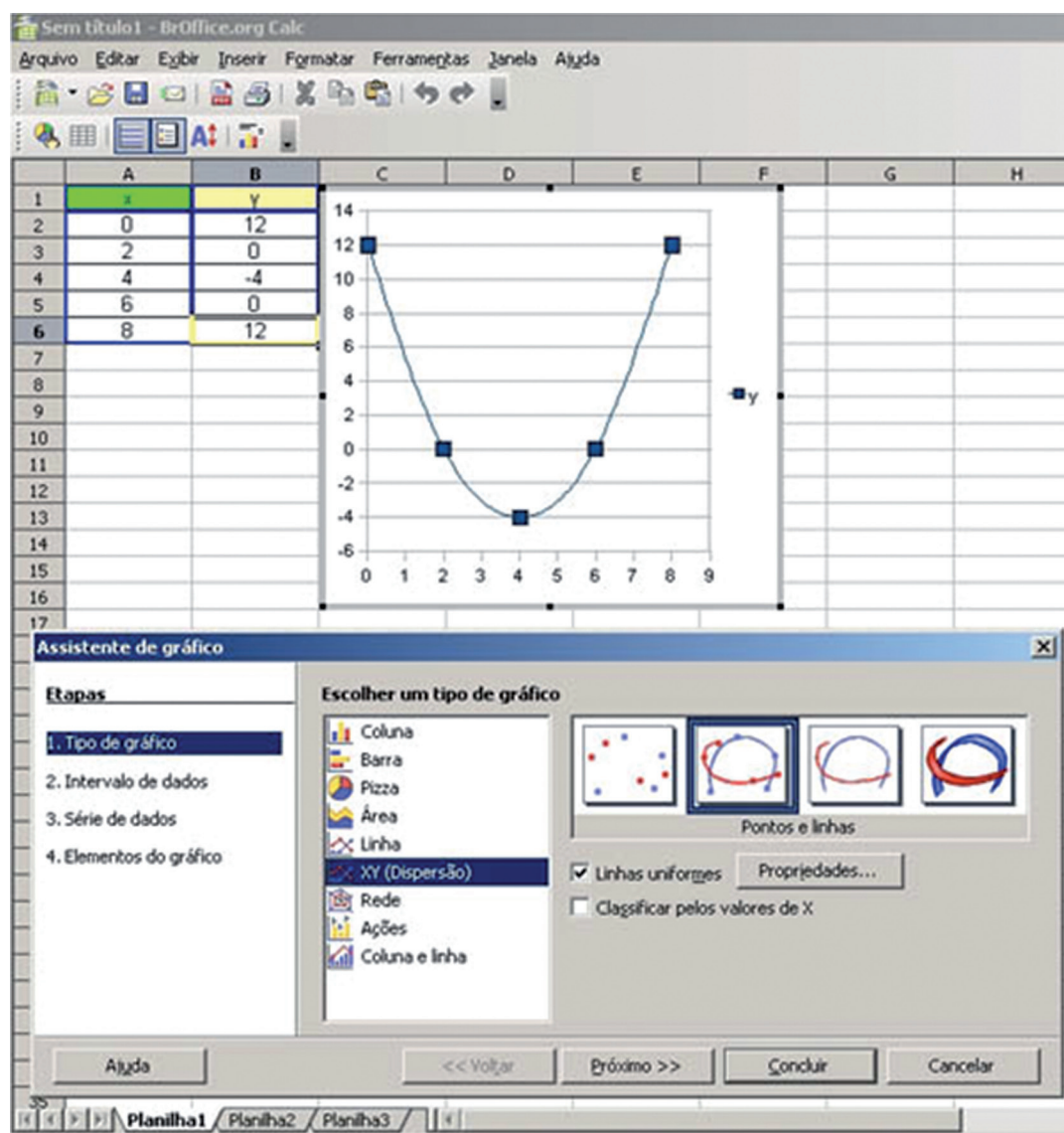
Eles deverão acessar uma nova planilha eletrônica com o BrOffice (<http://www.broffice.org/>) ou Excel. Primeiro, crie uma pequena tabela de valores de  $x$  e  $y$ . Na coluna dos valores de  $x$ , serão digitados os valores que formarão os pontos do eixo  $x$  do gráfico. Na coluna de valores de  $y$ , será digitada uma função quadrática na célula B2. Em seguida, os alunos precisarão copiar e colar a função nas demais células em branco. Para copiar a função, deverão clicar em editar no canto esquerdo superior do programa e clicar em copiar ou no atalho CTRL+C; para colar, precisarão clicar em editar no canto esquerdo superior do programa e clicar em colar - ou então usar o atalho CTRL+V. Usaremos, como ilustração, a função  $y = x^2 - 8x + 12$ .

Veja o exemplo abaixo.



	A	B	C	D	E
1	x	y			
2	0	12			
3	2	0			
4	4	-4			
5	6	0			
6	8	12			
7					
8					
9					

Observe que a função  $y = x^2 - 8x + 12$  é escrita na célula B2 da seguinte forma: =POTÊNCIA(A2;2)-8\*A2+12, onde A2 corresponde ao valor de x e o número 2 indica que o valor do x é elevado a dois (já que estão relacionados à função potência). Para construir o gráfico, basta selecionar as colunas, clicar no ícone de construção de gráficos e, em seguida, selecionar as opções apresentadas. Depois, os alunos deverão clicar em concluir.



## Aspectos pedagógicos

As planilhas eletrônicas são sempre uma boa oportunidade de ampliar o conhecimento dos alunos em informática. Pode acontecer de alguns alunos encontrarem dificuldades ao utilizar o computador. Neste caso, uma sugestão é dividir a turma por habilidades em informática. Em um grupo, você pode fazer um passo a passo, começando em ligar o

computador e abrir um programa até chegar em gerar e salvar um documento. Já no grupo mais avançado, talvez você encontre um pouco mais de dificuldade, já que normalmente o interesse deles se limita às redes sociais.

Neste caso, mostre a eles que as planilhas podem ser uma ferramenta interessante, uma vez que ajudam a resolver problemas com fórmulas já existentes ou com aquelas que você criar. Um aspecto importante em ambos os grupos é ambientar os alunos com a formatação das fórmulas nessas planilhas. Vejamos, como exemplo, a fórmula que será utilizada:

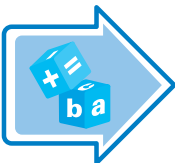
=POTÊNCIA(A2;2)-8\*A2+12 .

- o sinal = deve constar no início de toda fórmula
- mostre a seus alunos o significado da nomenclatura de cada célula. Por exemplo, a célula A1 corresponde à coluna A e à linha 1.
- a fórmula potência (x,y) é um comando do programa que representa  $x^y$
- o sinal de multiplicação é \*

Por fim, você pode sugerir aos seus alunos que construam o gráfico de outras funções quadráticas. Fazendo isso, eles poderão observar outros formatos e características, tais como o ponto de máximo/mínimo dos gráficos e as raízes da função.

## Seção 1 – Entendendo as parábolas

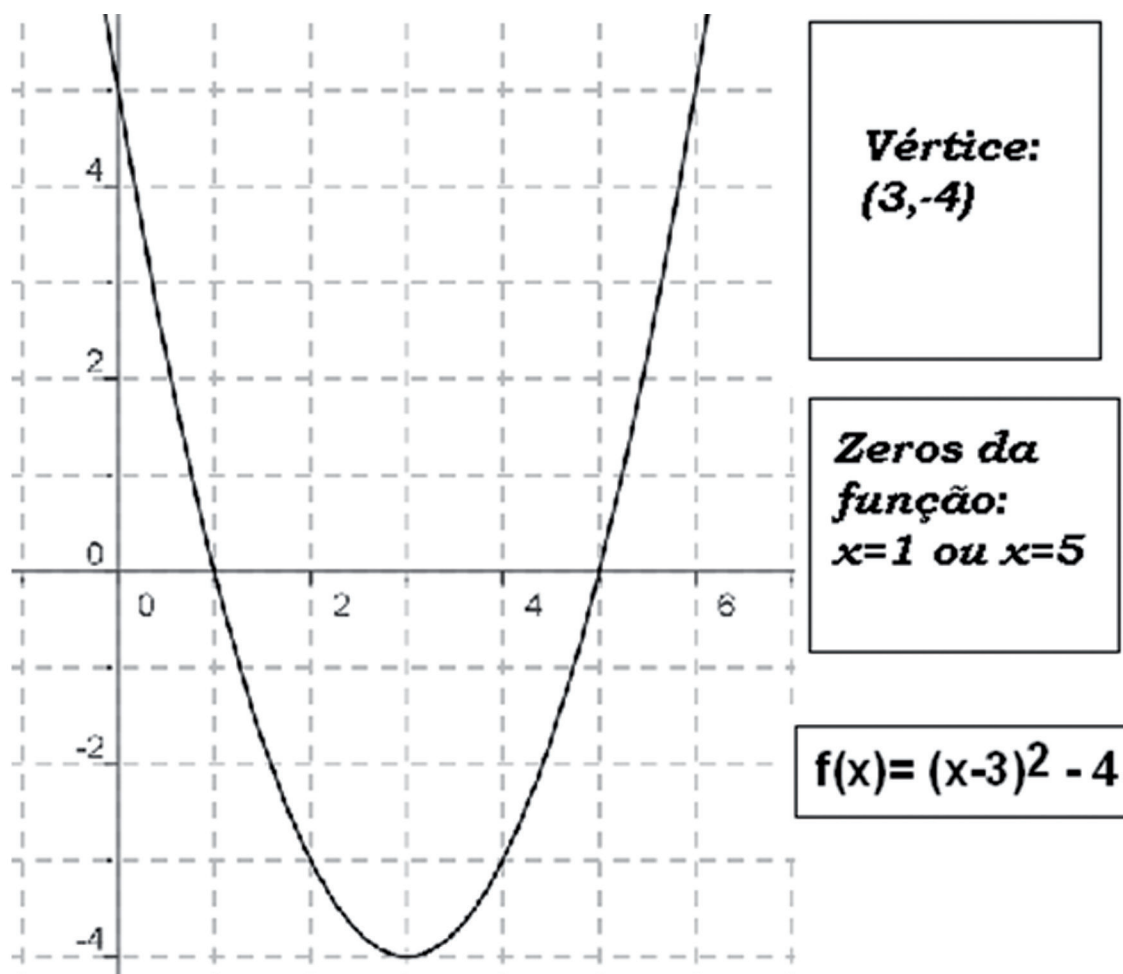
Páginas no material do aluno  
**195 a 204**

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Parábolas	Papel, lápis e cartas do jogo	Neste jogo, os alunos irão descobrir as coordenadas do vértice e os zeros da função sem a necessidade de fórmulas.	Grupos de 4 alunos	30 minutos

## Aspectos operacionais

Professor, primeiro elabore as 32 cartas que compõem o jogo. Cada uma dessas cartas descreve um atributo de 8 funções distintas, havendo 4 cartas associadas a cada função. As cartas contêm a expressão algébrica, o gráfico, as coordenadas do vértice ou os zeros dessa função e devem ser feitas de acordo com o modelo a seguir:

Associadas à função  $f(x) = (x-3)^2 - 4$ , temos:



Lembre-se: cada carta deve conter apenas um dos quatro itens relacionados à função - expressão algébrica, gráfico, vértices ou zeros da função.

Cada grupo recebe um kit do jogo (contendo 32 cartas) embaralhado, com todas as cartas com a face principal oculta.

Comece o jogo com toda turma ao mesmo tempo. Os participantes deverão desvirar as cartas e começar a identificar as 4 peças associadas a cada uma das funções. Será vencedor o grupo que acabar primeiro, fazendo as identificações corretamente.

---

## Aspectos pedagógicos

Normalmente, nossos alunos ficam "viciados" em resolver problemas de forma mecânica e não param para analisar o que está sendo pedido. Um exemplo muito comum desse comportamento é o dos alunos que tentam resolver equações como  $x = 1$ .

Essa atividade tem como objetivo estimular tanto a análise de aspectos aritméticos como a de aspectos geométricos. Os alunos acabarão percebendo que representar a função quadrática por  $f(x) = a(x-p)^2 + q$ , onde  $a$ ,  $p$ ,  $q$  são constantes reais e  $a \neq 0$ , pode trazer algumas vantagens. Através de um exemplo, mostre aos alunos que, neste caso:

- As coordenadas do vértice são dadas por  $(p, q)$ ;
- Se o ponto é de máximo se  $a > 0$  e de mínimo se  $a < 0$ ;

Analise também as condições para a curva cortar o eixo  $x$ .

Vejam os seguintes exemplos:  $(x-3)^2 + 6 = 0$ . As coordenadas do vértice são  $(3, 6)$ . Como  $a = 1$ , ou seja,  $a > 0$ , o gráfico terá ponto de máximo. A função não tem raiz real, uma vez que  $(x-3)^2 = -6$  não tem solução real. Contudo, se a função tiver raiz real - tal como a função  $(x+5)^2 - 16 = 0$  - mostre que é possível encontrar as raízes da seguinte maneira:

Se  $(x+5)^2 = 16$  então  $(x+5) = 4$  ou  $(x+5) = -4$

Se  $(x+5) = 4$ , teremos

$$x = 4 - 5$$

$$x = -1$$

Agora, se  $(x+5) = -4$ , teremos

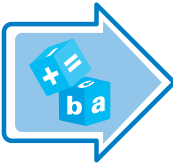
$$x = -4 - 5$$

$$x = -9$$

## Seção 2 – Como construir o gráfico de uma função do 2º grau?

Páginas no material do aluno

**204 a 208**

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Memória das funções quadráticas	Um conjunto de cartas e uma ficha para criação de cartas para cada dupla	Como num jogo da memória tradicional, os alunos irão formar pares de cartas. No entanto, as cartas que formam os pares, em vez de serem idênticas, correspondem à representação gráfica e à lei de associação de uma mesma função quadrática.	Duplas	30 minutos

---

## Aspectos operacionais

Recomendamos aqui um jogo da memória semelhante ao que apresentamos para a seção 3 da unidade 1. Como mencionamos naquela ocasião, no jogo da memória tradicional, os participantes arrumam as cartas viradas sobre a mesa de modo que não seja possível ver o que está desenhado ou escrito em cada uma. Cada jogador desvira duas cartas e observa seus conteúdos. Se estes forem diferentes, as cartas são viradas novamente e é a vez do outro jogador fazer o mesmo. Porém, se os conteúdos das cartas forem idênticos, o jogador recolhe para si as duas cartas e desvira outras duas. Ganha o jogo o jogador que tiver o maior número de pares de cartas idênticas.

Nesta atividade, a ideia é a mesma do jogo da memória tradicional, porém as cartas que formam pares não são idênticas: elas correspondem à representação gráfica e à lei de associação de uma mesma função quadrática. A lei de associação é apresentada na forma  $y = ax^2 + bx + c$ . Nas representações gráficas, procuramos destacar as raízes, o ponto onde o gráfico da função intercepta o eixo  $y$  e o vértice da parábola.

Para começar, professor, você pode distribuir um conjunto de cartas para cada dupla. Na dupla, um será adversário do outro. Peça-lhes que observem atentamente as cartas e, antes de iniciarem o jogo, identifiquem os pares correspondentes. Se necessário, faça uma pequena revisão sobre os principais aspectos algébricos e gráficos de uma função quadrática. Comente sobre as propriedades da parábola, principalmente sobre a sua simetria. Finalizando, você pode ainda propor aos alunos que criem novas cartas, incrementando o jogo. Por isto, segue em anexo uma ficha com cartas em branco.

---

## Aspectos pedagógicos

Como já sabemos, é importante que os alunos apropriem-se do material e as chances disto acontecer aumentam bastante se, antes de jogarem, eles manipularem as cartas, efetuando a leitura e a interpretação dos conteúdos de cada uma.

Professor, é aconselhável que você relembre com seus alunos as propriedades das funções quadráticas que podem ser facilmente observáveis. Elas certamente ajudarão na identificação das cartas que formam pares. Como exemplo, considerando a lei  $y = ax^2 + bx + c$ , podemos citar: a) se  $a > 0$ , a concavidade da parábola é para cima e se  $a < 0$ , a concavidade da parábola é para baixo; b) a parábola intercepta o eixo  $y$  no ponto  $(0, c)$ ; c) se  $c = 0$ , a parábola passa pela origem; e d) a soma e o produto das raízes são, respectivamente,  $-b/a$  e  $c/a$ .

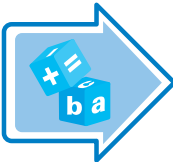
Pesquisas mais recentes em Educação Matemática, como as realizadas por Macedo e Machado (2006) e Macedo, Petty e Passos (2010), têm mostrado que quando os alunos, além de jogar, inventam novos jogos ou novos elementos para um jogo que já estão jogando - como novas cartas ou novas regras - o processo de aprendizagem avança consideravelmente. Foi com base nestas ideias que sugerimos que você finalize a atividade propondo a seus alunos a criação de novos pares de cartas.

Inicialmente, os alunos poderão achar esta tarefa difícil. Porém, se você criar as primeiras cartas em parceria com eles, acreditamos que conseguirão finalizar a criação sem a sua ajuda.

## Seção 2 – Como construir o gráfico de uma função do 2º grau?

Páginas no material do aluno

**204 a 208**

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Integrando Matemática e Física: MRU	Uma ficha para cada dupla	Os alunos terão a oportunidade de discutir uma situação-problema modelada por uma função quadrática.	A atividade pode ser realizada em duplas.	30 minutos

### Aspectos operacionais

Professor, esta atividade deve ser realizada em duplas. Acesse a ficha que está no pen drive e imprima uma cópia para cada uma das duplas que serão formadas em sua turma. Leia a situação-problema proposta na ficha.

Comece esta atividade, conversando com os alunos sobre o enredo do problema que lhes será proposto. O que é um sinalizador? Para que ele serve? Por que ele é útil nos navios? Como é o seu lançamento? Trata-se de um lançamento vertical ou de um lançamento oblíquo? Debater sobre estas questões é imprescindível para a compreensão da situação que o problema apresenta.

Em seguida, entregue uma ficha para cada dupla e peça aos alunos que tentem realizar todas as tarefas ali presentes. Num segundo momento, convide-os para irem até a lousa explicar o que entenderam da situação e o que fizeram para responder à questão central do problema.

Para finalizar, sugerimos que você reflita com a turma sobre as aproximações da Matemática com a Física – afinal, problemas de lançamento (tanto oblíquo quanto vertical) são estudados na Física. É aconselhável, inclusive, propor-lhes que perguntem ao professor de Física sobre as aplicações das funções quadráticas nesta área do conhecimento humano. Se isso acontecer, não deixe de reservar um tempo nas aulas futuras para que os alunos exponham os aspectos que descobrirem.



## Aspectos pedagógicos

Nesta atividade, propomos a discussão de uma situação-problema modelada por uma função quadrática. É possível responder à questão que ela nos coloca, apenas efetuando cálculos algébricos. Entretanto, na ficha de atividades, sugerimos que, antes de resolver a questão, os alunos preencham uma tabela e, em seguida, construam um gráfico com os dados da tabela. Acreditamos que, neste caso, a construção do gráfico irá ajudar os alunos na interpretação da situação.

Professor, durante a execução da atividade, é importante ficar especialmente atento e sinalizar para os seus alunos alguns equívocos que eles poderão cometer, enquanto cumprem cada tarefa proposta. Por exemplo, no preenchimento da tabela, eles podem escolher os valores de  $t$ , porém os valores de  $h$  são obtidos por meio da substituição dos valores de  $t$  na lei de que associa a altura atingida ao tempo de lançamento. Neste processo, há grandes chances de ocorrerem erros de cálculos e trocas de sinais. Além disso, na construção do gráfico, a parábola não pode ser prolongada indefinidamente - afinal nem  $t$  nem  $h$  podem assumir valores negativos. É necessário ainda utilizar uma escala apropriada nos eixos. Caso contrário, o gráfico, que é uma parábola, acaba se transformando numa reta ou numa união de segmentos retos – o que também é um erro muito comum.

A simples observação dos dados da tabela e do gráfico conduzirá os alunos a reconhecer que a altura atingida pelo foguete é maior ou igual a 14 m no intervalo de 1 a 4 segundos, o que nos permite afirmar que o foguete emite luz útil durante 3 segundos.

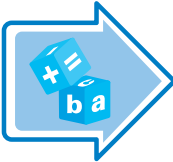
Porém, não perca a oportunidade de lhes mostrar que outra maneira de obter este intervalo é substituir, na lei de associação, o  $h$  por 14 e, em seguida, resolver a equação do 2º grau assim obtida. Se fizer isso, aproveite também para questionar os alunos sobre qual dos dois métodos eles preferem. Certamente, haverá aqueles que preferem o método da construção do gráfico e aqueles que preferem a resolução da equação. O importante é que percebam que, independente das preferências individuais, o segundo método é mais geral, pois se os extremos do intervalo não fossem números inteiros, dificilmente seriam descobertos durante o preenchimento da tabela. Na maioria das vezes, quando preenchemos uma tabela para, em seguida, construirmos o gráfico de uma função, só atribuímos à variável livre valores que são números inteiros.

Por fim, os lançamentos são estudados regularmente na Física e o problema proposto nesta atividade já é um bom exemplo de um ponto de aproximação entre esta ciência e a Matemática. Entrevistando o professor de Física, os alunos ainda poderão reconhecer muitos outros exemplos. Você mesmo, professor de Matemática, pode esclarecer que as fórmulas da Física são leis de associação de funções. Na maioria dos casos, são funções de mais de uma variável – mas não deixam de ser funções por causa disso. Voltando as atenções para as funções quadráticas, você pode citar que a equação horária da posição no movimento uniformemente variado (MUV), que é  $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ , é uma função quadrática, uma vez que  $s_0$ ,  $v_0$  e  $a$  são constantes. Acrescente apenas que, neste caso, não é  $y$  que está em função de  $x$ : é  $s$  que está em função de  $t$ . No entanto, essa troca das letras não altera nenhum aspecto conceitual.

### Seção 3 – Aplicações da função quadrática

Páginas no material do aluno

208 a 214

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Valor máximo de uma função quadrática	Folha de atividades, disponibilizada no pen drive e calculadora	Os alunos discutirão uma situação-problema que pode ser modelada por uma função quadrática.	Duplas	30 minutos

### Aspectos operacionais

Nesta atividade, propomos a reflexão sobre uma situação-problema que pode ser modelada por uma função quadrática. Enfatizaremos dois aspectos: a identificação da lei de associação da função quadrática, feita a partir da observação de regularidades da situação, e a obtenção das coordenadas do vértice da parábola que corresponde ao gráfico desta função.

A atividade prevê alguns cálculos, que podem ser agilizados pela utilização de uma calculadora comercial. Por isto, peça previamente aos alunos que tragam uma calculadora para esta aula.

Para realizar esta atividade, você, professor, irá distribuir uma ficha como a que segue em anexo para cada dupla. No desenvolvimento, procure incentivar seus alunos a preencher a tabela constante na ficha, antes mesmo de responder a qualquer pergunta ou tentar solucionar o problema. O preenchimento da tabela irá ajudá-los na observação do comportamento das variáveis envolvidas na situação e, conseqüentemente, na modelagem. Se for preciso, desenhe uma tabela na lousa e preencha as primeiras linhas com a colaboração dos alunos.

No segundo momento da atividade, é aconselhável que você reflita com as duplas sobre as estratégias que empregaram em suas soluções. Como calculavam a receita do restaurante a cada linha da tabela? Como calculavam o número de clientes perdidos a cada novo preço do quilo da comida? E a quantidade de quilos vendidos? Por que a receita não aumenta sempre?

### Aspectos pedagógicos

Solucionar o problema proposto na ficha pode não ser uma tarefa simples para nossos alunos do Ensino Médio. Entretanto, as questões colocadas após o enunciado podem torná-la mais fácil. É possível que, inicialmente, os alunos nem reconheçam as relações entre a situação exposta e os conhecimentos que estão construindo acerca das funções quadráticas. Respondendo às questões, preenchendo a tabela e construindo o gráfico, os alunos vão gradu-

almente penetrando no universo da situação problema e reconhecendo que: a) para obter a receita do restaurante, é necessário multiplicar a quantidade de quilos vendida pelo preço do quilo; b) para obter o número de clientes perdidos, deve-se multiplicar o valor do aumento no preço do quilo de comida por 10 (número de clientes perdidos a cada real aumentado) e c) para descobrir os quilos de comida vendidos, basta multiplicar o valor do aumento no preço do quilo de comida por 5 (quantidade de quilos que o restaurante deixa de vender a cada real que aumenta no preço) e, em seguida, subtrair este resultado de 150.

Na última linha da tabela, os alunos terão oportunidade de escrever expressões gerais para a quantidade de quilos vendida e para o novo preço por quilo. Assim, poderão chegar à lei que associa a receita do restaurante ao valor do aumento no preço por quilo. Para que os alunos consigam deduzir estas expressões, você pode lhes sugerir que preencham as linhas anteriores da tabela, não só com os números, mas também com a sentença matemática dos cálculos que fizeram para obtê-los. É desta forma que irão observar as regularidades no comportamento de cada variável.

Você pode aproveitar a oportunidade para discutir com seus alunos, ainda que informalmente, o teorema de caracterização das funções quadráticas. Este teorema permite-nos, entre outras coisas, reconhecer se determinados dados podem ou não ser modelados por uma função quadrática.

No livro *A Matemática no Ensino Médio – Volume 1*, o professor Elon Lages Lima e os demais autores afirmam que “a fim de que uma função real contínua seja quadrática é necessário e suficiente que toda progressão aritmética não constante seja transformada por esta função numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada” (LIMA et al. 1998, p. 149). Assim, verifique com os alunos que a primeira coluna da tabela apresenta uma progressão aritmética de razão 1, enquanto a última apresenta uma progressão aritmética de segunda ordem - ou seja, as diferenças entre termos consecutivos desta coluna formam uma progressão aritmética não constante.

A construção do gráfico permite uma nova forma de representação para os dados e, como já comentamos em outras aulas, a possibilidade de representar um conceito de diversas formas contribui bastante no seu processo de aprendizagem. Construindo o gráfico, os alunos podem concluir que, conforme o valor do aumento no preço por quilo cresce, a receita do restaurante cresce até determinado valor. Deste valor em diante, começa a diminuir. Como buscamos o ponto onde a receita será máxima, empregaremos a fórmula que nos fornece a abscissa do vértice da parábola e concluiremos que a receita máxima ocorrerá quando o aumento for de 4 reais - ou seja, quando o preço por quilo for 16 reais.

Vale ressaltar que uma dúvida frequente dos alunos de Ensino Médio é referente ao emprego das fórmulas que fornecem as coordenadas do vértice de uma parábola. Eles tendem a acreditar que, quando se deseja o ponto máximo, emprega-se uma fórmula e, quando se deseja o ponto mínimo, emprega-se alguma outra fórmula. É importante que você esclareça que, independente de o ponto ser de máximo ou de mínimo, as fórmulas e processos empregados nos cálculos de suas coordenadas serão os mesmos. Se for preciso, retome a situação proposta no material do aluno - que requer as coordenadas do ponto em que uma função quadrática assume seu valor mínimo - e compare com a situação proposta aqui. Além disso, algumas vezes os alunos costumam confundir e encontrar a abscissa do vértice quando a situação problema requer a ordenada do vértice e vice versa. Para evitar isso, você pode insistir na identificação dos dados do contexto que estão sendo representados por cada variável.

## Folha de atividades – Valor máximo de uma função quadrática

Nome da Escola: \_\_\_\_\_

Nome dos Alunos: \_\_\_\_\_

O problema a seguir foi adaptado do livro A Matemática do Ensino Médio – Volume 1 (LIMA et al, 1998, p. 147). Trata-se de uma situação problema vivida comumente no comércio.

Um restaurante a quilo vende 150 kg de comida por dia, a 14 reais o quilo. Uma pesquisa de opinião revelou que, por cada real de aumento no preço, o restaurante perderia 20 clientes com um consumo médio de 250 g cada. Qual deve ser o valor do quilo de comida para que o restaurante tenha a maior receita possível?

Antes de resolver o problema, reflita um pouco sobre as questões a seguir. Elas poderão lhe ajudar na solução.

- a) Vendendo 150 kg de comida por dia, a 14 reais o quilo, que quantia o restaurante arrecada?

---

---

---

- b) Imagine que o restaurante aumentou o preço do quilo da comida para 15 reais. Quantos clientes ele perdeu? Quantos quilos de comida ele passou a vender? E que quantia passou a arrecadar?

---

---

---

- c) Agora imagine que o restaurante aumentou o preço do quilo da comida para 16 reais. Quantos clientes ele perdeu? Quantos quilos de comida ele passou a vender? E que quantia passou a arrecadar?

---

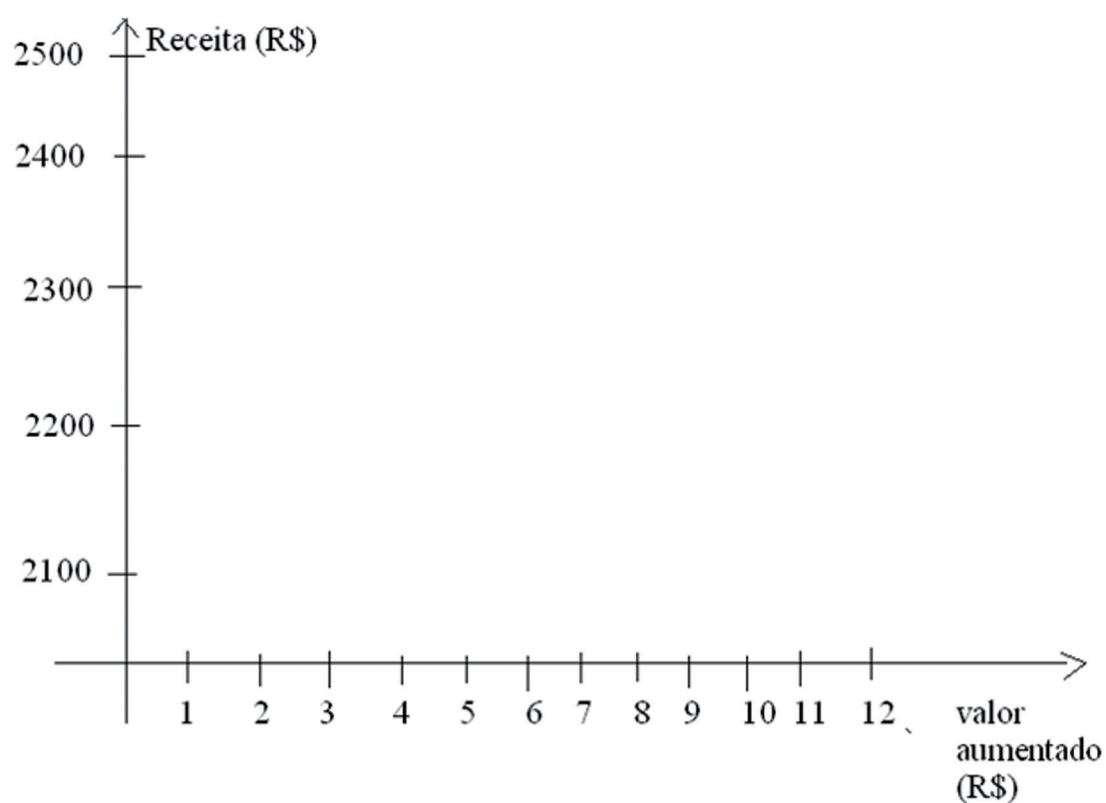
---

---

- d) Complete a tabela de acordo com os dados do problema:

Valor aumentado no preço de cada quilo em reais	Novo preço do quilo	Número de clientes perdidos	Quantidade de quilos vendidos	Receita
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
x				

- e) Colocando no eixo x (primeira coluna) os valores aumentados no preço de cada quilo e, no eixo y, os valores da receita (última coluna), construa um gráfico com os dados da tabela.



f) Agora volte à pergunta do problema e tente respondê-la.

---

---

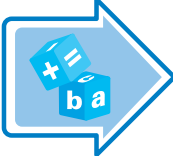
---

---

### Seção 3 – Aplicações da função quadrática

Páginas no material do aluno

208 a 214

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Funções quadráticas e áreas	Uma folha de papel milimetrado e uma régua para cada dupla	Os alunos calcularão a área de retângulos e associarão esse cálculo a funções quadráticas.	Duplas	30 minutos

### Aspectos operacionais

A atividade prevê a utilização de réguas e papéis milimetrados. Por isto, peça, com antecedência, que os alunos tragam estes materiais para a aula. Para realizar esta atividade, peça aos alunos que desenhem no papel milimetrado o maior número possível de retângulos com perímetro de 20 cm e escrevam ao lado de cada um a sua área. Estimule a construção de retângulos cujas dimensões não são números inteiros - como, por exemplo, o retângulo cujas dimensões são respectivamente 0,5 cm e 9,5 cm.

Em seguida, construa no quadro uma tabela como a que segue e preencha-a com dados fornecidos pelos alunos:

Dimensões	Área

Vale mencionar que a sua tabela pode ter mais linhas do que a que colocamos aqui. Procure usar todos os dados que os alunos fornecerem e dê ainda novos exemplos. Quanto mais casos eles observarem, mais segurança terão para afirmar que, entre todos os retângulos de perímetro 20 cm, o que tem a maior área é o quadrado de lado 5 cm.

Em seguida, sugerimos que você reflita com os alunos sobre as seguintes questões: se o perímetro dos retângulos é 20 cm, qual é a medida do semiperímetro, isto é, quanto é a soma da medida do comprimento com a medida da altura em cada retângulo? Se identificarmos com a letra  $x$  o comprimento, que expressão poderá identificar a largura de cada retângulo? E que expressão poderá identificar a área de cada retângulo?

## Aspectos pedagógicos

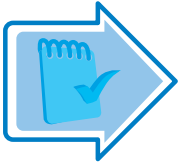
Nesta atividade, propomos o desenho, no papel milimetrado, de retângulos diferentes que possuem o mesmo perímetro. A questão a ser discutida é: entre todos os retângulos que têm o mesmo perímetro, qual é o que possui a maior área? A ênfase está na comprovação, por meio dos desenhos, de um resultado que pode ser obtido por meio do emprego dos conhecimentos relacionados a funções quadráticas.

Professor, durante a execução da atividade, você poderá verificar que seus alunos não se recordam ou confundem os conceitos de perímetro e área. Se for necessário, faça uma revisão destes conceitos. Além de serem necessários nesta atividade, estes são conceitos fundamentais, envolvidos em muitas situações cotidianas. Outro aspecto que você poderá observar é que alguns alunos não consideram que o quadrado também é um retângulo. Se este equívoco não for desfeito, a atividade ficará sem sentido.

Note que o elo entre os retângulos e o estudo das funções quadráticas será explicitado pelas reflexões que você trazer após o preenchimento da tabela. Por isto, convidamos você a dar atenção e ênfase especial a elas.

Se identificarmos com a letra  $x$  o comprimento, a expressão que identificará a largura de cada retângulo é  $10 - x$  e a área será uma função de  $x$  dada por  $A(x) = (10 - x)x$ . Esta, por sua vez, é uma função quadrática que assume seu valor máximo, quando  $x$  for igual a 5.

### Seção Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questão dissertativa	Folha de atividades, lápis, borracha	Questão dissertativa para a avaliação da aprendizagem, envolvendo a modelagem do tamanho das marcas de derrapagem de um carro via função quadrática.	Individual	10 minutos

## Aspectos operacionais

Nossa sugestão é que você utilize o último tempo de aula desta unidade para a consolidação e avaliação do conteúdo estudado junto à turma. Conforme afirmamos na introdução, é importante que este momento esteja dividido em duas partes: uma relacionada mais diretamente ao conteúdo propriamente dito e outra relacionada aos registros de aprendizagem. Para a primeira etapa, disponibilizamos uma questão dissertativa e uma questão objetiva. A questão dissertativa, que apresentamos a seguir, também pode complementar o que foi proposto no material do aluno na seção O que perguntam por aí?. A ideia é aplicá-la individualmente em sala e, ao final, fazer uma discussão com todo o grupo.

## Aspectos pedagógicos

Para responder ao item (a), basta que o aluno substitua o valor da velocidade dada, de 55 km/h, na função quadrática que permite calcular o comprimento da marca de derrapagem em pistas úmidas.

No item (b), o importante não é que aluno calcule o comprimento da derrapagem, mas analise a tabela e faça comparações com os valores já listados para chegar à resposta correta. Caso ele sinta dificuldades, mostre que, ao atingir 80 km/h, o comprimento da derrapagem em pista úmida chega a 40,38 m. Assim, se a velocidade fosse de 72 km/h, essa distância seria ainda menor, não podendo atingir os 45 m de comprimento.

Para o item (c) também deve ser utilizada a comparação entre os valores listados na tabela para pista úmida e os valores propostos na questão.

### Folha de atividades – Desperdício de água

Nome da Escola: \_\_\_\_\_

Nome do Aluno: \_\_\_\_\_

Investigadores de acidentes automobilísticos frequentemente usam o comprimento de marcas de derrapagem para estimar a velocidade dos veículos envolvidos em um acidente. O comprimento da marca de derrapagem depende de vários fatores, incluindo o peso e a marca do veículo, o tipo de superfície e as condições da estrada no momento do acidente. Foram realizados testes para determinar o comprimento da marca de derrapagem, feita por um mesmo veículo em pista de asfalto seca e em pista de asfalto úmida. Os resultados estão listados na tabela a seguir.



Velocidade Km/h)	Comprimento da marca da derrapagem	
	Asfalto úmido (metros)	Asfalto seco (metros)
32	6,59	<b>4,8</b>
48	14,27	<b>9,9</b>
64	25,53	<b>18,3</b>
80	40,38	<b>28,2</b>
96	58,81	<b>39,9</b>

Usando o recurso de regressão quadrática em uma calculadora gráfica, encontra-se um modelo para o comprimento da marca de derrapagem em pistas úmidas, dado pela função quadrática:


$$C(x) = 0,007x^2 - 0,08x + 1,98$$

em que  $x$  é a velocidade em Km/h.

Com base nas informações, responda aos itens a seguir:

- (a) Qual o comprimento da marca de derrapagem deste veículo, se ele estivesse trafegando a 55 Km/h?
- (b) Sem fazer cálculos, observando apenas a tabela, responda: Se este veículo estivesse a 72 Km/h, sua marca de derrapagem poderia ter 45 m de comprimento?
- (c) Se o comprimento da marca de derrapagem do veículo for superior a 65 m, pode-se afirmar que o veículo tinha velocidade superior a 100 Km/h?

## Seção Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questão objetiva	Folha de atividades, lápis, borracha	Questão objetiva relacionada à modelagem da propagação de uma informação via função quadrática.	Individual	10 minutos

## Aspectos operacionais

Disponibilizamos uma questão objetiva para a avaliação das habilidades matemáticas desenvolvidas neste módulo. Ela também pode complementar o que foi proposto no material do aluno na seção O que perguntam por aí?. A ideia é aplicá-la individualmente em sala e, ao final, fazer uma discussão com todo o grupo.

## Aspectos pedagógicos

Sugerimos nesta etapa, a escolha de questões objetivas que contemplem uma habilidade pretendida nesta unidade, para compor o instrumento avaliativo. Se desejar, você pode buscar outras questões de acordo com o perfil da sua turma. A ideia é que, além de avaliar o aprendizado, o aluno familiarize-se com questões cobradas em avaliações de larga escala, como Enem, vestibulares, concursos etc.

Você pode intervir junto aos alunos na resolução do problema, caso observe alguma dificuldade ou insegurança. É provável que a partir disto eles consigam desenvoltura para seguir adiante. Tente estimular as ideias que levem às respostas desejadas. Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas. Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Neste momento, é importante que você pondere as respostas equivocadas, ressaltando onde reside o erro.

### Folha de atividades – Questão de avaliação discursiva

Nome da escola: \_\_\_\_\_

Nome do aluno: \_\_\_\_\_


Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, esta rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo  $R$  a rapidez de propagação,  $P$  o público-alvo e  $x$  o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se

$$R(x) = kx \cdot (P - x)$$

onde  $k$  é uma constante positiva característica do boato. Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44.000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá, quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

- (a) 11.000
- (b) 22.000
- (c) 33.000
- (d) 38.000
- (e) 44.000

## Seção Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Consolidação e registros de aprendizagem	Folha de atividades	Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática.	Individual	10 minutos

## Aspectos operacionais

Para complementar as questões que você irá propor aos alunos, apresentamos, na folha de atividades, algumas questões que têm por objetivo avaliar o desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas, mas privilegiando a reflexão acerca do conteúdo estudado. Esta questão também pode ser articulada à seção Veja ainda disponível na p. 65 do material do aluno.

## Aspectos pedagógicos

Certifique-se de fazer com que os resultados deste momento de avaliação indiquem os pontos em que os alunos ainda não conseguiram êxito no aprendizado. Parabenize e elogie o quanto for necessário, para que este momento de avaliação torne-se agradável.

Ao final dos registros de avaliação, compartilhe as informações com os alunos. Indique exercícios e atividades para que as dúvidas e erros possam ser devidamente contornados.

### Folha de atividades – Consolidação e registros de aprendizagem

Nome da escola: \_\_\_\_\_

Nome do aluno: \_\_\_\_\_

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na Unidade 17 e registre as aprendizagens matemáticas realizadas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

1) Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?

---

2) Você poderia apresentar a expressão geral de uma função quadrática? Sob que condições existem raízes reais?

---

3) Para  $y=2x^2-x-1$ , identifique os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . A seguir, determine suas raízes.

---

4) Esboce o gráfico da função quadrática  $y=-x^2+4x+4$ . Esta função quadrática possui um valor mínimo? E um valor máximo? A partir do seu gráfico, explique sua resposta.

---

5) Você seria capaz de descrever uma situação do cotidiano em que o conceito de função quadrática é útil? Qual?

---