Material do Professor

Introdução à Geometria Espacial

Érika Silos de Castro (coordenação), André Luiz Martins Pereira, Leo Akio Yokoyama e Luciana Felix da Costa Santos

Introdução

Na unidade 22 do material do aluno, é apresentada uma introdução à Geometria Espacial. Para isso, o material do aluno inicia uma reflexão sobre a tecnologia das imagens em 3D, utilizada pelos mais novos monitores e aparelhos de TV e esclarece o significado da sigla 3D a partir da ideia de 3 dimensões: altura, largura e comprimento. A partir dessa ideia, pretende-se que, nesta unidade, o aluno tenha a oportunidade de ampliar as discussões acerca de conhecimentos básicos da Geometria Espacial.

Para potencializar o material didático do aluno, pesquisamos e apresentamos alguns recursos e atividades. Nosso objetivo é colaborar com você, professor, ampliando ainda mais seu leque de opções para explorar este tema durante as aulas.

Sugerimos que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora. A proposta é que essa atividade seja realizada em grupo, promovendo uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, é esperado que eles desenvolvam algumas noções básicas relacionadas à noção de tridimensionalidade.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de se fazer alterações e adaptações quando necessárias.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro é dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo. O segundo é um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

Uma descrição destas sugestões está colocada nas tabelas a seguir, e seus detalhamentos no texto que segue.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	1	3	1	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Introdução à Geometria Espacial	Geometria Espacial
Objetivos da unidade	
Entender o conceito de dimensão.	
Entender os conceitos básicos de ponto, reta e plano.	
Identificar posições relativas entre pontos, retas e planos.	
Identificar poliedros e não poliedros.	
Identificar os elementos de um poliedro.	
Aplicar a relação de Euler.	
Seções	**Páginas no material do aluno**
Para início de conversa...	43 a 47
Seção 1 – Geometria espacial: conceitos básicos.	48 a 52
Seção 2 – Continuando com pontos, retas e planos: posições relativas.	53 a 61

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

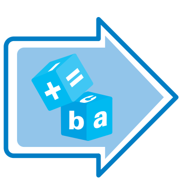
Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

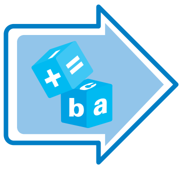
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Os sólidos de Platão.	Computadores para os alunos, applet disponível no material do professor.	Esta atividade foi adaptada da proposta "Sólidos Platônicos", elaborada pelo projeto "Conteúdos Digitais Para o Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística", do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF), disponível em http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html. Este aplicativo apresenta uma pequena enciclopédia virtual interativa sobre os sólidos platônicos, apresentando suas propriedades matemáticas, os aspectos históricos, suas aplicações e modelos virtuais interativos.	A turma pode ser dividida em duplas.	40 minutos
	Imaginando outras dimensões.	Folha de atividades, lápis, caneta.	A atividade a seguir se baseia na leitura de um texto elaborado a partir do enredo do romance proposto no livro "Planolândia", de Edwin A. Abbott, propondo um exercício de imaginação, em que os alunos se imaginarão como habitantes de outras dimensões. Esse exercício de imaginação se propõe a explorar os assuntos abordados sobre espaço tridimensional nesta unidade.	A turma pode ser dividida em duplas ou trios.	30 minutos

Seção 1 – Geometria Espacial: conceitos básicos

Páginas no material do aluno

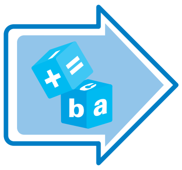
43 a 47

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Redescobrindo a Geometria Plana e Espacial.	Folha de atividades, folha em anexo, lápis, caneta, tesoura, cola e régua.	Esta atividade será dividida em duas partes, a primeira permitirá ao professor introduzir entidades fundamentais (ponto, reta, plano e espaço) como noções primitivas, enunciar os principais postulados que relacionam os conceitos primitivos da geometria. Já na segunda, será proposta a construção de um paralelepípedo a partir da sua planificação. Desta forma, acreditamos que os alunos possam identificar partes da reta, do plano e do espaço, e obter a noção de planificação (para montagem) de um modelo de um sólido através das ações que envolvem noções de plano e espaço. Finalmente, os alunos serão levados a ampliarem as discussões das etapas anteriores através de questões propostas numa folha de atividades.	A turma pode ser dividida em grupos de três ou quatro alunos.	40 minutos

Seção 2 – Continuando com pontos, retas e planos: posições relativas

Páginas no material do aluno

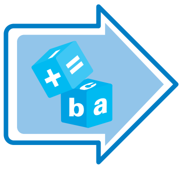
48 a 52

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	O paralelepípedo e seus elementos.	Folha de atividades, lápis/caneta.	A atividade a seguir convida os alunos a identificar posições relativas entre pontos, retas e planos a partir dos elementos de um paralelepípedo. Para isso, elaboramos algumas questões que estão disponíveis como folha de atividades.	Turma dividida em duplas ou trios.	30 minutos

Seção 3 – Sólidos Geométricos

Páginas no material do aluno

53 a 61

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Reconhecendo Sólidos Geométricos em objetos do cotidiano.	Folha de atividades, lápis/caneta e materiais de utilidades domésticas ou materiais de sucata (embalagens, caixa de fósforos, caixa de chocolate no formato de prisma, lata, copo, etc.)	Esta atividade propõe a utilização de materiais de utilidades domésticas ou materiais de sucata, como recursos para que os alunos reconheçam sólidos geométricos (poliedros e não poliedros) em diversos objetos do seu cotidiano, além de elucidar o conceito de um poliedro ser convexo ou não e de mostrar de forma empírica a Relação de Euler nos poliedros convexos.	A turma pode ser dividida em grupos de quatro ou cinco alunos.	40 minutos

	Identificando vértice, aresta e face de um poliedro.	Computadores para os alunos com o softwares "Poly Pro" e "3D Learning - Geometria Espacial" instalados, material do aluno, folha de atividades e lápis/caneta.	Esta atividade tem com o objetivo desenvolver a habilidade de visualização espacial com auxílio dos softwares "Poly Pro" e "3D Learning - Geometria Espacial", de modo que os alunos tenham a oportunidade de identificar as características que permitem diferenciar poliedros de não poliedros e identificar os elementos básicos dos poliedros a partir da interface dinâmica oferecida pelo software.	Turma dividida em duplas ou trios.	30 minutos

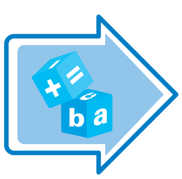
Avaliação – O que perguntam por aí?

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	ENEM - 2010	Imagem disponível para projeção neste material; material do aluno.		Turma dividida em duplas	

Avaliação – Momento de Reflexão

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões tanto objetivas como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Participação individual dos alunos.	40 minutos

Atividade complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de Fixação Complementares	Folhas de Atividades, lápis/caneta.		Turma dividida em duplas ou em trios.	

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Os sólidos de Platão.	Computadores para os alunos, applet disponível no material do professor.	Esta atividade foi adaptada da proposta "Sólidos Platônicos", elaborada pelo projeto "Conteúdos Digitais Para o Ensino e Aprendizagem de Matemática e Estatística", do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense (UFF), disponível em http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html. Este aplicativo apresenta uma pequena enciclopédia virtual interativa sobre os sólidos platônicos, apresentando suas propriedades matemáticas, os aspectos históricos, suas aplicações e modelos virtuais interativos.	A turma pode ser dividida em duplas.	40 minutos

Aspectos operacionais

A atividade inicialmente foi planejada para aplicação em laboratório de informática, onde cada aluno poderia interagir diretamente com o aplicativo proposto, mas caso a sua escola não disponha de um laboratório de informática, a mesma atividade poderá ser aplicada em sala de aula com um computador ligado a um projetor multimídia ou a uma TV. Nesse caso, os alunos poderão interagir com o aplicativo de maneira indireta e coletiva.

Neste aplicativo, são apresentadas diversas atividades que envolvem a visualização e que permitem ao aluno um contato interativo com a geometria espacial.

- Professor, solicite o acesso on-line http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html ou solicite a instalação off-line do aplicativo, isto é, sem a necessidade de conexão com a internet, nos computadores que serão utilizados para a atividade. Esta instalação pode ser feita a partir do próprio site ou utilizando o pacote de arquivos disponível e, também, no seu material.

- Após certificar-se de que o aplicativo foi devidamente instalado e testado, e confirmar a aplicação da atividade no laboratório, solicite que a turma se divida em duplas ou de acordo com a viabilidade de computadores de sua escola.
- Assim que os alunos estiverem com o aplicativo aberto, você poderá apresentar o aplicativo e orientá-los a fazer um passeio virtual pela atividade.
- Sugerimos que, após este momento, sejam exploradas as atividades com os sólidos platônicos, clicando, primeiramente, no ícone tetraedro para explorar propriedades matemáticas envolvidas, como planificação e montagem através da aba "Montar".
- Repita os mesmos procedimentos para os demais sólidos platônicos: cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

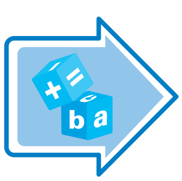
Aspectos pedagógicos

- Professor, o aplicativo pode ser executado em qualquer sistema operacional, porém, para executá-lo, é preciso que o computador tenha a linguagem JAVA instalada. A instalação da linguagem JAVA pode ser feita seguindo as orientações disponíveis no seguinte link: http://www.java.com/pt_BR/.
- Atenção: se você optar pelo uso da atividade off-line através de uma cópia local em seu computador ou no servidor do laboratório, é importante que os arquivos não estejam em um diretório cujo nome contenha acentos ou espaços. Também é importante lembrar que algumas distribuições Linux vêm com o interpretador JAVA GCJ Web Plugin, que não é compatível com o applet da atividade. Neste caso, recomendamos que você solicite ao responsável pelo laboratório da escola que instale o interpretador nativo da Sun, disponível no link http://www.java.com/pt_BR/.
- Sugerimos que você apresente o aplicativo aos alunos, resolvendo um dos desafios como exemplo e, a partir daí, deixe-os explorar livremente, tentando resolver os demais, intervindo apenas quando necessário.
- Este é um bom momento para se explorar as potencialidades do software, que permite quase simultaneamente, a montagem e desmontagem do sólido a partir da sua planificação, analisar seções planas, entre outras propriedades matemáticas.
- Outra sugestão, é que você utilize a lousa para apresentar a tabela:

Poliedro Regular	Número de Arestas Incidentes em Cada Vértice	Número de Vértices (V)	Número de Arestas (A	Número de Faces (F)	Valor de V - A + F
Tetraedro					
Cubo					
Octaedro					
Dodecaedro					
Icosaedro					

- Você pode orientar os alunos a usarem os softwares da atividade, para contar o número de vértices, arestas e faces dos sólidos platônicos e anotar os resultados na tabela acima. Dica: você pode usar os recursos de exibição de faces e de marcação de vértices para auxiliar na contagem. Para contar o número de faces mais facilmente, você pode planificar o sólido, usando a operação da aba "Montar".

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Imaginando outras dimensões.	Folha de atividades, lápis, caneta.	A atividade a seguir se baseia na leitura de um texto elaborado a partir do enredo do romance proposto no livro "Planolândia", de Edwin A. Abbott, propondo um exercício de imaginação, em que os alunos se imaginarão como habitantes de outras dimensões. Esse exercício de imaginação se propõe a explorar os assuntos abordados sobre espaço tridimensional nesta unidade.	A turma pode ser dividida em duplas ou trios.	30 minutos

Aspectos operacionais

Esta atividade foi baseada na sugestão apresentada na seção Para início de conversa... do material do aluno, conforme quadro a seguir:

Saiba Mais

Uma dica bacana é o livro " Planolândia: um romance de muitas dimensões" (*Flatland: A Romance of Many Dimensions*) escrito por Edwin A. Abbott. Nesse livro, Abbott usou o mundo bidimensional fictício de Flatland para fazer reflexões sobre a sociedade e uma importante análise sobre as dimensões. A versão original, em inglês, está disponível para download, na íntegra e gratuitamente, no site Domínio Píblico, do Ministério da Educação. Olink direto para o arquivo é http: www.dominiopublico.gov.br/download/texto/ph000007.pdf. A tradução para o portuguê foi feita pela Editora conrad, que também e responsável pela sua distribuição.

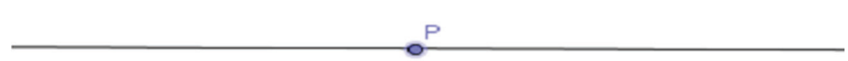
- Professor, primeiramente leia o texto a seguir para todos, promovendo assim, uma discussão coletiva.

Texto:

Imagine uma reta colocada na horizontal, para facilitar nossa descrição. Mas poderia ser uma reta qualquer. Diz-se que a reta tem apenas uma dimensão, pois tem apenas 1 grau de liberdade.

Como assim, 1 grau de liberdade?

Imagine um habitante desta reta chamado de “P”, ou seja, um ponto que não pode sair dela, mas pode deslocar-se ao longo de toda a sua extensão.

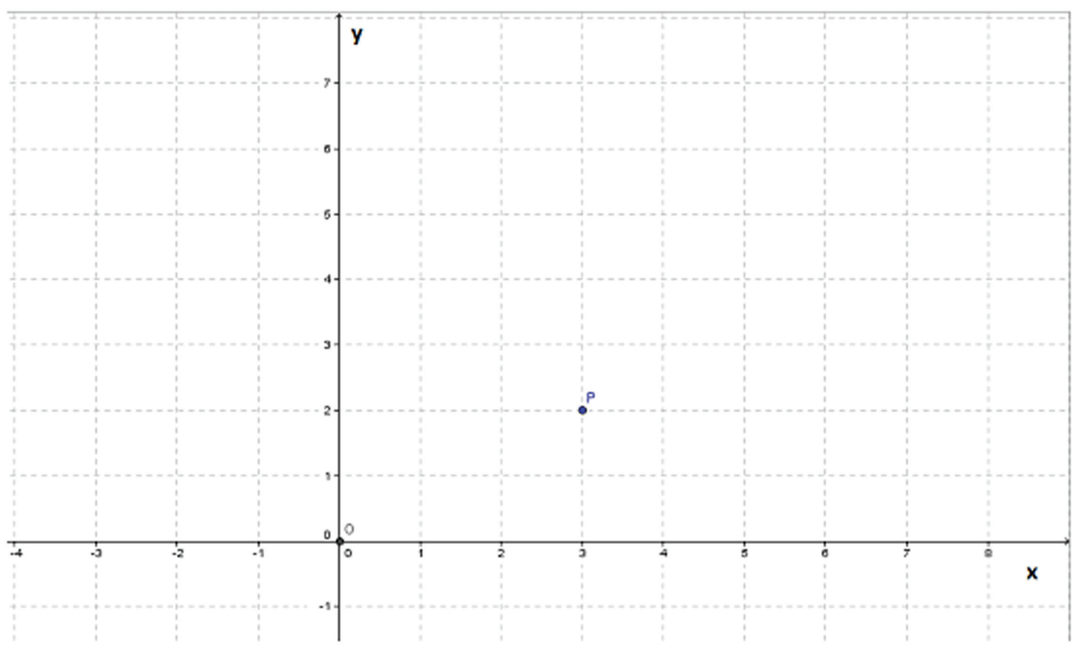


Observe que o ponto desloca-se apenas em **uma direção**, a direção da reta. No caso da reta na horizontal, o ponto P só pode se deslocar na direção (horizontal). Ele não pode ir para cima e para baixo, não pode sair da reta; só lhe é permitido ir para a direita ou esquerda.

Agora, imagine um mundo que fosse apenas um ponto e seu único habitante fosse o ponto P. Coitadinho, ele não pode nem se movimentar, ou seja, ele teria zero grau de liberdade...

Então, até agora, conseguimos imaginar como seria um mundo com dimensão zero (ponto) e um mundo com dimensão um (reta).

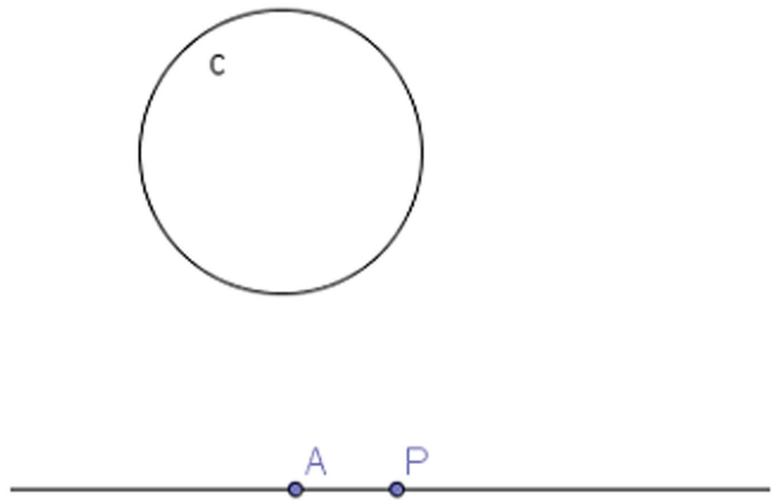
Por que não imaginarmos um mundo com duas dimensões? Vamos fazê-lo agora? Estamos no *plano*! E lá está nosso amigo, o ponto P. Desta vez, ele tem mais liberdade, mais precisamente, tem dois graus de liberdade: horizontal e vertical. Com essas duas componentes direcionais, o ponto P pode se deslocar por toda a extensão de um plano. Imagine os eixos cartesianos x e y.



Por exemplo, se o ponto P quiser se deslocar da origem O(0,0) até o ponto (3,2), basta ele ir 3 unidades para direita e 2 unidades para cima ou, ainda, 2 unidades para cima e 3 unidades para a direita.

Vamos imaginar esses "mundos" misturados?

Imagine que o ponto P, que estava inserido na reta horizontal, agora está conversando com um ponto A, também pertencente à reta, e ambos estão sendo observados por um habitante do plano, o círculo "c".



O círculo c pode enxergar os pontos A e P, mas estes não conseguem enxergar o círculo c, pois o único mundo que conhecem é a reta e só enxergam pontos à sua direita ou à sua esquerda. Por outro lado, o círculo c tem o poder de retirar o ponto P do seu mundo e colocá-lo de volta. Ele decide fazer isso para mostrar como é o mundo bidimensional para o ponto P. Nesse momento, o ponto P desaparece das vistas do seu amigo A e, instantes depois, reaparece como num passe de mágica.

Nossa imaginação pode fluir. Você, como um habitante da terceira dimensão, tem três graus de liberdade: as duas do plano do chão mais a altura. Ou seja, você pode se deslocar para qualquer ponto do espaço tridimensional. Então, você consegue observar o círculo c, mas ele não consegue observá-lo, já que vive num mundo bidimensional. Se você retirá-lo do plano e recolocá-lo, instantes depois ele desaparece do plano em que vive por alguns momentos e depois reaparece.

- Após esta leitura, solicite que os alunos organizem-se em duplas ou trios.
- Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades com antecedência.
- Distribua uma folha de atividades para cada grupo e oriente-os nas questões propostas.

Aspectos pedagógicos

- Solicite que os alunos, durante a leitura do texto, façam anotações sobre elementos que considerarem importantes, identificando percepções de conceitos matemáticos presentes, bem como de questões que julgarem pertinentes para discutir com a turma após a leitura;

- Peça aos alunos para refletirem sobre as possibilidades dos mundos com dimensão zero (ponto), um (reta), dois (plano), três (espaço tridimensional); e discuta com eles sobre exemplos de elementos dessas dimensões.
- Ao final da atividade, promova um debate sobre a atividade baseado nos exemplos, questionando a possibilidade da existência de uma quarta dimensão geométrica, pois é possível considerar o tempo como uma quarta componente dimensional. A teoria de espaço-tempo de Albert Einstein considera o tempo como uma 4ª dimensão temporal: o espaço tridimensional mais a dimensão tempo. Uma possível referência: http://pt.wikipedia.org/wiki/Quarta_dimens%C3%A3o
- Observe, nas respostas dos alunos, como seria uma possível ação com o auxílio da 4ª dimensão.
- Sugestão de aplicação da atividade com auxílio de recursos multimídia:

Esta mesma atividade poderá ser aplicada a partir da exibição do filme "Flatland". O filme pode ser encontrado em DVD nas locadoras (ver detalhes do filme em: http://store.flatlandthemovie.com, ou acessar o trailler em: http://www.youtube.com/watch?v=C8oiwnNlyE4), ou se você, professor, preferir, poderá acessar os episódios em:

- Episódio 1 - http://www.youtube.com/watch?v=cxUUTNtILk0
- Episódio 2 - http://www.youtube.com/watch?v=0pd8LH0FBY8
- Episódio 3 - http://www.youtube.com/watch?v=kSoEGkwv1mY
- Episódio 4 - http://www.youtube.com/watch?v=SZgVi788dqk
- Episódio 5 - http://www.youtube.com/watch?v=yerWRBdaVGQ
- Episódio 6 - http://www.youtube.com/watch?v=epM_zOX4u4k
- Episódio 7 - http://www.youtube.com/watch?v=Chd_MS3J9HA
- Episódio 8 - http://www.youtube.com/watch?v=94npBEuGVkw

Folha de Atividades – "Imaginando outras dimensões"

Nome da Escola:____

Nome: ____

Texto:

Imagine uma reta colocada na horizontal, para facilitar nossa descrição. Mas poderia ser uma reta qualquer. Diz-se que a reta tem apenas uma dimensão, pois tem apenas 1 grau de liberdade.

Como assim, 1 grau de liberdade?

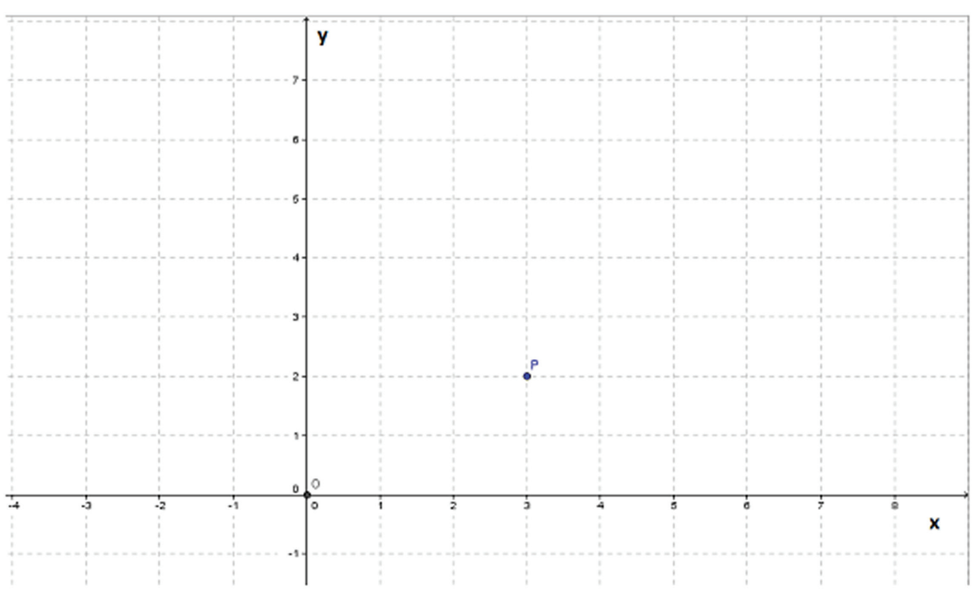
Imagine um habitante desta reta chamado de "P", ou seja, um ponto que não pode sair dela, mas pode deslocar-se ao longo de toda a sua extensão.

Observe que o ponto desloca-se apenas em **uma direção**, a direção da reta. No caso da reta na horizontal, o ponto P só pode se deslocar na direção (horizontal). Ele não pode ir para cima e para baixo, não pode sair da reta; só lhe é permitido ir para a direita ou esquerda.

Agora, imagine um mundo que fosse apenas um ponto e seu único habitante fosse o ponto P. Coitadinho, ele não pode nem se movimentar, ou seja, ele teria zero grau de liberdade...

Então até agora, conseguimos imaginar como seria um mundo com dimensão zero (ponto) e um mundo com dimensão um (reta).

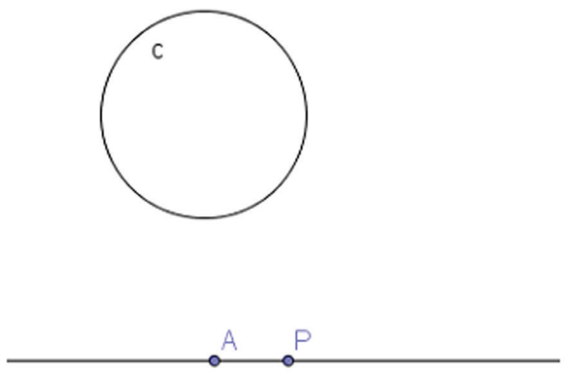
Por que não imaginarmos um mundo com duas dimensões? Vamos fazê-lo agora? Estamos no plano! E lá está nosso amigo, o ponto P. Desta vez, ele tem mais liberdade, mais precisamente, tem dois graus de liberdade: horizontal e vertical. Com essas duas componentes direcionais, o ponto P pode se deslocar por toda a extensão de um plano. Imagine os eixos cartesianos x e y.



Por exemplo, se o ponto P quiser se deslocar da origem O(0,0) até o ponto (3,2), basta ele ir 3 unidades para direita e 2 unidades para cima ou, ainda, 2 unidades para cima e 3 unidades para a direita.

Vamos imaginar esses "mundos" misturados?

Imagine que o ponto P, que estava inserido na reta horizontal, agora está conversando com um ponto A, também pertencente à reta, e ambos estão sendo observados por um habitante do plano, o círculo "c".

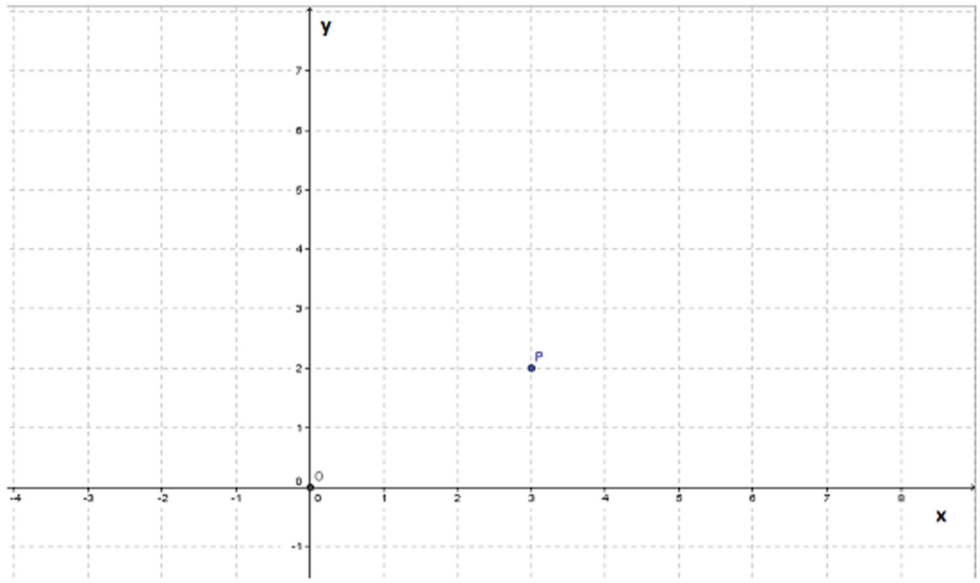


O círculo c pode enxergar os pontos A e P, mas estes não conseguem enxergar o círculo c, pois o único mundo que conhecem é a reta e só enxergam pontos à sua direita ou à sua esquerda. Por outro lado, o círculo c tem o poder de retirar o ponto P do seu mundo e colocá-lo de volta. Ele decide fazer isso para mostrar como é o mundo bidimensional para o ponto P. Nesse momento, o ponto P desaparece das vistas do seu amigo A e, instantes depois, reaparece como num passe de mágica.

Nossa imaginação pode fluir. Você, como um habitante da terceira dimensão, tem três graus de liberdade: as duas do plano do chão mais a altura. Ou seja, você pode se deslocar para qualquer ponto do espaço tridimensional. Então, você consegue observar o círculo c, mas ele não consegue observá-lo, já que vive num mundo bidimensional. Se você retirá-lo do plano e recolocá-lo, instantes depois ele desaparece do plano em que vive por alguns momentos e depois reaparece.

Atividade:

Imagine que você seja o ponto P(3,2) no plano (bidimensional).



a. Quantos graus de liberdade você tem? ____.

b. O que você poderia fazer para ir até o ponto de origem O(0,0), utilizando os graus de liberdade que possui? ____.

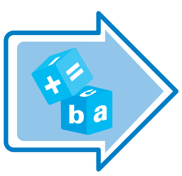
c. Se um habitante do espaço tridimensional retirasse você do plano, quantos graus de liberdade você passaria a ter? Por quê? ____
____.

Agora, é sua vez de imaginar como seria viver numa 4ª dimensão!

Discuta com seus colegas sobre quantos graus de liberdade você teria; que elementos você pode visualizar desta nova dimensão; esses elementos podem ver você nesta dimensão superior? Tente responder a essas questões, a partir de uma comparação dos exemplos citados no texto.

Seção 1 – Geometria Espacial: conceitos básicos

Páginas no material do aluno
43 a 47

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Redescobrindo a Geometria Plana e Espacial.	Folha de atividades, folha em anexo, lápis, caneta, tesoura, cola e régua.	Esta atividade será dividida em duas partes, a primeira permitirá ao professor introduzir entidades fundamentais (ponto, reta, plano e espaço) como noções primitivas, enunciar os principais postulados que relacionam os conceitos primitivos da geometria. Já na segunda, será proposta a construção de um paralelepípedo a partir da sua planificação. Desta forma, acreditamos que os alunos possam identificar partes da reta, do plano e do espaço, e obter a noção de planificação (para montagem) de um modelo de um sólido através das ações que envolvem noções de plano e espaço. Finalmente, os alunos serão levados a ampliarem as discussões das etapas anteriores através de questões propostas numa folha de atividades.	A turma pode ser dividida em grupos de três ou quatro alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

1ª parte:

Professor, primeiramente você pode usar uma folha de papel como exemplo e colocá-la sobre a mesa, levando os alunos a imaginarem o plano como se fosse essa folha de papel que se estende infinitamente em todas as direções.

A partir daí, você pode mostrar a eles que a noção primitiva "ponto" pode ser pensada como a marca deixada pela ponta do lápis ao tocar a folha. O desenho da parte de uma reta é feito com o auxílio de uma régua. Lembre-os de que a reta é ilimitada nos dois sentidos.

O material do aluno traz um quadro (p. 46) com um pouco da história da Matemática e a definição desses conceitos primitivos:

Saiba Mais

Estes conceitos foram propostos pela primeira vez pelo matemático grego Euclides, que viveu na Alexandria da primeira metade do séc. III a.C. (a data e o local de seu nascimento não são precisos).

Euclides possivelmente adquiriu seus primeiros conhecimentos matemáticos dos discípulos de outro importante filósofo grego: Platão. Amais importante obra de Euclides foi "Os Elementos". São treze capítulos fundamentais para matemática sobre Aritmética, Geomentria e Álgebra.

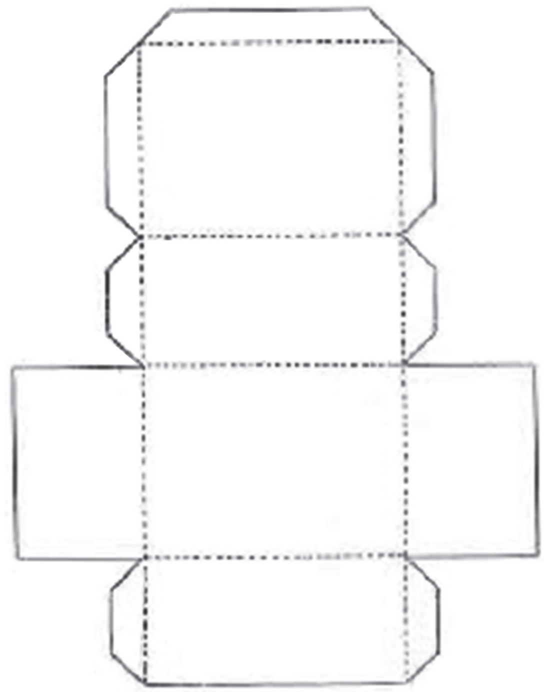
A obra "Os Elementos" já está em domínio público e pode ser baixada gratuitamente no portal Domínio Público, do Ministério da Educação. O link direto para o arquivo é http:www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf.

Nos Elementos, Euclides afirma que "ponto é o que não tem partes ou grandeza alguma", "linha é o que tem comprimento sem largura" e "superfície é o que tem comprimento e largura". Parecido com o que acabamos de ver? E olha que o livro já tem mais de dois mil anos!

Nesta etapa, você pode recorrer às aproximações e aos exemplos intuitivos ilustrados na seção *Para início de conversa...* e na seção 1, *Geometria espacial: conceitos básicos* do material do aluno.

2ª parte:

Após esta etapa, você pode utilizar a planificação para montagem de um paralelepípedo a seguir, e disponível no seu material, pedir que os alunos escolham um dos retângulos dessa planificação, nomeando os vértices como A, B, C e D e sobre este retângulo e considerando a aresta AB. Peça que eles marquem dois pontos, E e F, entre A e B , e assim identifiquem que A, B, E e F são colineares ou alinhados. Oriente-os a observarem que os pontos A, B, C e D são coplanares.



Estabeleça uma discussão com os alunos, indagando-os sobre as seguintes questões:

- Numa reta, bem como fora dela, existem quantos pontos?
- Por dois pontos distintos, passam quantas retas?
- Num plano, bem como fora dele, existem quantos pontos?
- Por três pontos distintos passam quantos planos?

Após uma discussão informal destas questões, você, professor, pode formalizar estas respostas como postulados:

P1- Numa reta, bem como fora dela, há infinitos pontos;

P2- Por dois pontos distintos, passa uma única reta;

P3- Num plano, bem como fora dele, há infinitos pontos;

P4- Por dois pontos distintos (ou pela reta que eles determinam), passam infinitos planos;

P5- Por três pontos distintos não colineares, passa um único plano;

P6- Se dois pontos distintos pertencem a um plano, então, a reta que eles determinam está contida no plano.

Após esta discussão coletiva:

- Solicite que os alunos organizem-se em grupos de três ou quatro;

- Distribua um modelo de planificação para cada aluno e oriente-os a montarem um modelo para o paralelepípedo.
- Distribua uma folha de atividades para cada aluno, promovendo uma ampliação das discussões propostas nas etapas anteriores.

Aspectos pedagógicos

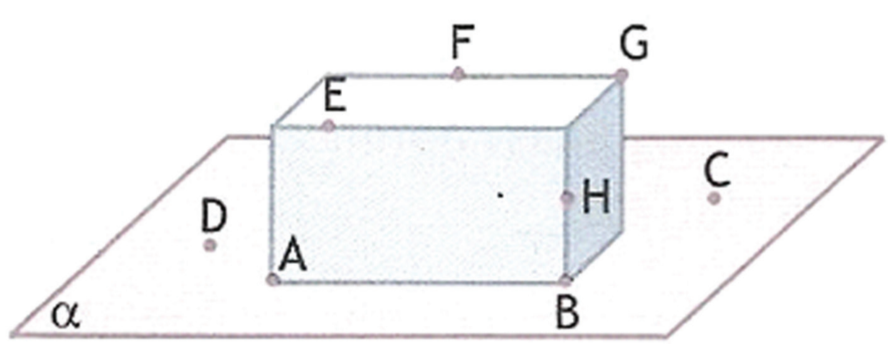
- Professor, você pode usar o material concreto (o modelo montado do paralelepípedo) para simular situações de investigação. Para isso, estimule os alunos a observarem, explorarem e manipulem este material de forma a auxiliar no desenvolvimento de noções geométricas não somente pelo treinamento de memorização e técnicas operatórias.
- Após montarem o paralelepípedo, você pode estimulá-los a identificarem objetos do seu cotidiano que apresentem formas similares àquela montada (ex.: caixas de sapato, de pasta de dente, etc.).
- Também seria interessante instigá-los a identificarem objetos que representem formas planas e outros que representem formas espaciais.
- Para complementar esta atividade, você pode recorrer à atividade multimídia, disponível *on-line* no site http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-html/pdp-br.html e *off-line* no seu material.

Folha de Atividades – "Redescobrindo a Geometria Plana e Espacial"

Nome da Escola:____

Nome: ____

A partir das discussões promovidas em aula, observe a figura e responda às questões propostas:



Questão 1: Existe uma reta que passe por G e C da figura?

____.

Questão 2: Dois pontos são sempre colineares? Justifique a sua reposta.

____.

Questão 3: Sob que condições três são colineares? Que figura geométrica plana pode ser formada por três pontos não colineares?

____.

Questão 4: Os pontos A, B, E e H são coplanares? E os pontos A, B e G? E os pontos E, F, G e H?

____.

Questão 5: Três pontos distintos são coplanares? Baseado nesta resposta, você saberia justificar por que uma mesa com três pés é mais firme do que uma com quatro? Que postulado de Euclides, justifica esta resposta?

____

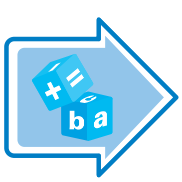
____

____.

Seção 2 – Os logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais.

Páginas no material do aluno

53 a 61

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	O paralelepípedo e seus elementos.	Folha de atividades, lápis/caneta.	A atividade a seguir convida os alunos a identificar posições relativas entre pontos, retas e planos a partir dos elementos de um paralelepípedo. Para isso, elaboramos algumas questões que estão disponíveis como folha de atividades.	Turma dividida em duplas ou trios.	30 minutos

Aspectos operacionais

Professor, a partir da representação plana do paralelepípedo a seguir, você poderá trabalhar posições relativas entre pontos, retas e planos. Para isso, sugerimos algumas questões numa folha de atividades, disponível no seu material, que foram planejadas para serem realizadas após as atividades propostas *na seção 2 - Continuando com pontos, retas e planos: posições relativas* do material do aluno.

Primeiramente, os alunos serão levados a observarem os pontos, retas e planos a partir da observação dos elementos da figura dada, para que ao final, possam identificar algumas posições relativas entre esses elementos.

Aspectos pedagógicos

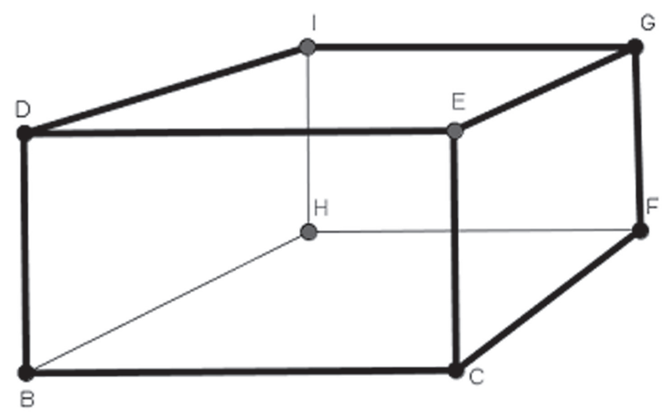
- Solicite que os alunos organizem-se em duplas ou trios;
- Primeiramente deixe-os analisar a figura e as questões propostas;
- Se achar necessário, você pode levar uma caixa na forma de paralelepípedo (de sapatos, de leite, etc.) para auxiliá-los na transição da visualização plana para a espacial;
- Estimule os alunos a identificarem os vértices do paralelepípedo como pontos, suas arestas como segmentos de reta e suas faces como planos. E, a partir dessas observações, analisarem algumas posições relativas.
- Ao final da atividade, promova um debate sobre a atividade baseado nos resultados obtidos, questionando:
  - Um plano pode ser definido com apenas 3 pontos?;
  - Apesar de a reta ser definida por 2 pontos, quantos pontos há numa reta?
  - E num segmento de reta?
- Esta é uma boa oportunidade de lembrar a eles que três pontos definem um plano. No entanto, ao visualizarem uma face do paralelepípedo, poderão notar que cada vértice está no plano gerado pelos outros três da mesma face.

Folha de Atividades – "O paralelepípedo e seus elementos"

Nome da Escola:____

Nome: ____

Observe a representação em perspectiva do paralelepípedo a seguir:



1. Tente identificar todos os pontos, retas (segmentos) e planos definidos pelos pontos da figura acima.

   a. Quantos pontos você encontrou? Quais?

   b. Quantas retas você identificou a partir das arestas do paralelepípedo? Quais?

   c. Quantos planos formam as faces do paralelepípedo? Quais?

2. Complete corretamente as lacunas com os símbolos $\in$ ou $\notin$ para relacionar pontos a retas ou a planos:

   a. B _____ reta BD

   b. C _____ reta BC

   c. H _____ reta EG

   d. H _____ reta HF

   e. I _____ reta DE

   f. E _____ reta GI

   g. G _____ plano EFC

   h. H ______ plano BCD

   i. F _____ plano BCH

j. E _____ plano GHI

k. D ______ plano EGI

l. C _____ plano BDH

3. Identifique a posição relativa entre as retas abaixo:

a. retas BC e BD ____________________.

b. retas DE e IG ____________________.

c. retas CF e DE ____________________.

d. retas BC e EG ____________________.

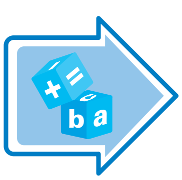
e. retas HF e BH ____________________.

f. retas EG e BH____________________.

Seção 3 – Sólidos Geométricos

Páginas no material do aluno

62 a 70

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Reconhecendo Sólidos Geométricos em objetos do cotidiano.	Folha de atividades, lápis/caneta e materiais de utilidades domésticas ou materiais de sucata (embalagens, caixa de fósforos, caixa de chocolate no formato de prisma, lata, copo, etc.)	Esta atividade propõe a utilização de materiais de utilidades domésticas ou materiais de sucata, como recursos para que os alunos reconheçam sólidos geométricos (poliedros e não poliedros) em diversos objetos do seu cotidiano, além de elucidar o conceito de um poliedro ser convexo ou não e de mostrar de forma empírica a Relação de Euler nos poliedros convexos.	A turma pode ser dividida em grupos de quatro ou cinco alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Na seção 3 - *Sólidos Geométricos* do material do aluno, é introduzida uma discussão a respeito de objetos reais em que podemos encontrar representações de sólidos geométricos e identificá-los entre representações de poliedros e não poliedros.

A partir da definição de poliedro como o sólido limitado por regiões poligonais pla¬nas, primeiramente, propõe-se aos alunos a separação dos materiais trazidos para a aula em poliedros e não poliedros, depois pede-se que os alunos classifiquem os poliedros em convexos e não convexos, para que, ao final da atividade, possam experimentar a validade da relação de Euler para os convexos.

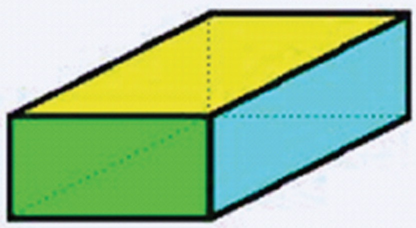
- Professor, você pode levar para a aula ou solicitar na aula anterior que os alunos levem materiais de utilidades domésticas ou materiais de sucata, como copo, lata, caixas, objetos com formas variadas;
- Divida a turma em grupos de quatro ou cinco alunos e distribua entre os grupos alguns dos materiais levados para a aula.
- Uma vez que os materiais tenham sido distribuídos, peça para que os alunos os manuseiem livremente, para que possam observar características e se familiarizar com esses objetos.
- Em seguida, peça aos seus alunos que identifiquem, de acordo com a definição de poliedro apresentada no material do aluno (p. 62), os materiais que representam poliedros e os que não representam e, depois, separem os poliedros em convexos e não convexos, de acordo com os exemplos apresentados no material do aluno (p. 64).
- Após esta etapa, distribua uma folha de atividades para cada aluno e solicite que eles realizem as questões propostas.

Aspectos pedagógicos

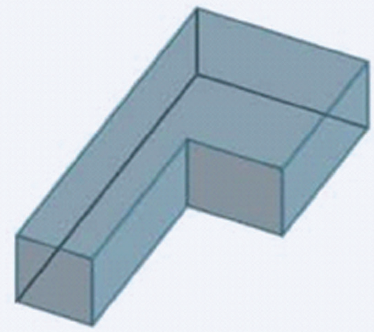
- Professor, oriente os alunos a observarem características dos materiais recebidos, quanto às faces, por exemplo, se o sólido apresentado é limitado por faces poligonais planas, assim como vértices e arestas.
- Dependendo da quantidade de materiais disponíveis, você pode utilizar como sólidos aquelas embalagens sem tampa, mas é importante chamar atenção dos alunos para a necessidade desta face, quando queremos visualizar o sólido como um todo, por exemplo os poliedros. Você pode levar os alunos a imaginarem uma tampa para que possam compor as faces do poliedro analisado.
- Ainda nesta discussão, você pode trabalhar a ideia de poliedros convexos e não convexos a partir dos materiais concretos apresentados ou apresentando exemplos de acordo com o quadro apresentado no material do aluno (p. 64) e ilustrado a seguir:

Poliedro Convexo

Um poliedro é convexo se o segmento que liga dois de seus pontos está sempre contido no poliedro.



exemplo de poliedro convexo



exemplo de poliedro não convexo

- Professor, após essa primeira discussão, auxilie os alunos na resolução das questões propostas na folha de atividades, usando somente os poliedros convexos. Verifique se os grupos estão obtendo os valores desejados na tabela, orientando-os quando necessário.

Objeto	N° de Vértices (V)	N° de Faces (F)	N° de Arestas (A)	V + F - A

- Estimule uma discussão entre os grupos para que tentem perceber a relação entre o número de vértices, faces e arestas desses poliedros convexos. Após preencherem a tabela, você pode pedir que cada grupo troque as folhas com os outros grupos e observem os resultados obtidos na última coluna da tabela, indagando-os sobre o que observam. Espera-se que, após esta discussão, os alunos percebam que o valor é sempre igual a 2.
- Por fim, utilize a lousa para concluir com os alunos a Relação de Euler: **V + F = A + 2**.

Folha de Atividades – "Reconhecendo Sólidos Geométricos em objetos do cotidiano"

Nome da Escola:____

Nome: ____

A partir dos objetos e materiais trazidos para a aula, respondam às questões propostas:

Questão 1: Quais dos objetos analisados representam poliedros?

____

____.

Questão 2: Quais dos objetos que foram classificados como poliedros são convexos e quais são não convexos?

____

____

____.

Questão 3: Com somente os objetos que foram classificados como poliedros convexos, preencha a seguinte tabela:

Objeto	N° de Vértices (V)	N° de Faces (F)	N° de Arestas (A)	V + F - A

Questão 4: Você consegue observar se existe alguma relação entre os números de vértices, faces e arestas dos objetos selecionados na questão 3? Dica: Observe a última coluna da tabela.

Seção 3 – Sólidos Geométricos

Páginas no material do aluno

62 a 70

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Identificando vértice, aresta e face de um poliedro.	Computadores para os alunos com o softwares *"Poly Pro"* e "3D Learning - Geometria Espacial" instalados, material do aluno, folha de atividades e lápis/caneta.	Esta atividade tem com o objetivo desenvolver a habilidade de visualização espacial com auxílio dos softwares "Poly Pro" e "3D Learning - Geometria Espacial", de modo que os alunos tenham a oportunidade de identificar as características que permitem diferenciar poliedros de não poliedros e identificar os elementos básicos dos poliedros a partir da interface dinâmica oferecida pelo software.	Turma dividida em duplas ou trios.	30 minutos

Aspectos operacionais

Esta atividade foi elaborada para ser aplicada em laboratório de informática em complementação à atividade 4 proposta no material do aluno. Nessa atividade, são apresentadas representações planas de objetos espaciais. No entanto, não podemos considerar que seja absolutamente fácil para os alunos visualizar esses objetos a partir de tais representações. Esta atividade complementar poderá auxiliar você, professor, nesse processo.

Esta atividade tem com o objetivo desenvolver a habilidade de visualização espacial com auxílio dos softwares *"Poly Pro"* e "3D Learning - Geometria Espacial". Além disso, os alunos terão a oportunidade de identificar as características que permitem diferenciar poliedros de não poliedros (também chamados de corpos redondos em algumas literaturas) a partir da interface dinâmica oferecida pelo *software* e identificar os elementos básicos dos poliedros.

- Inicialmente, você, professor, deverá estabelecer juntamente com a sua turma uma analogia entre os elementos do poliedro: vértice, aresta e face, com as noções primitivas de ponto, reta e plano, respectivamente.
- Leve, então, os seus alunos até o laboratório de informática (certifique-se de que os softwares "Poly Pro" e "3D Learning - Geometria Espacial", já estejam devidamente instalados e prontos para serem acessados pelos alunos) e peça para que eles formem duplas ou trios.
- Em seguida, você, professor, poderá aplicar a atividade proposta na Folha de Atividades (que está disponível em seu Grid de aula no seu DVD).

Atividade:

1. Abra o *software* **Poly Pro**. Em seguida, selecione as opções "Sólido de Arquimedes" e depois "Cuboctaedro" nas caixas flutuantes na janela de ferramentas. Esse sólido corresponde ao primeiro exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre ele e arraste para movê-lo e girá-lo livremente.
2. Agora abra o software **3D Learning - Geometria Espacial**.
    a. Na caixa de ferramentas (apresentada do lado direito da tela) clique sobre a ferramenta "Inserir Objetos" ( ). Na janela que se abrirá, selecione o objeto "cilindro" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao primeiro exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.
    b. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "esfera" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao segundo exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.
    c. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "paralelepípedo" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao segundo exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.
    d. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "octaedro" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao terceiro exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.
    e. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "cone" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao terceiro exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.
    f. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "pirâmide" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao quarto exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.
3. Agora que você já explorou quase todos os sólidos apresentados na atividade 4 através dos *softwares*, destaque:
    a. O que você observou em relação às características que os poliedros têm em comum?
    b. O que você observou em relação às características que os não poliedros têm em comum?

4. A partir do que foi observado no item anterior, responda:

   a. Sobre as superfícies dos poliedros observados podemos identificar elementos de 2, 1 ou nenhuma dimensão? Tomando como exemplo o octaedro, quantos são os elementos de 2, 1 e nenhuma dimensão sobre a sua superfície? (Esses são os números de faces, arestas e vértices desse poliedro)

   b. É possível identificar, da mesma forma, os mesmos elementos também na superfície dos não poliedros? Em que estes se diferem dos poliedros?

Os *softwares* "Poly Pro" e "3D Learning - Geometria Espacial" (ambos livres), bem como suas instalações, estão disponíveis em seu DVD. No entanto, para que o *software* "3D Learning - Geometria Espacial" seja devidamente registrado em seu computador ou nos computadores do laboratório de informática da sua unidade escolar, é necessário efetuar um cadastro no endereço http://www.christmas.com.br/3dlearning/cadastro/. Esse cadastro é indispensável para a obtenção do número de registro do software.

Aspectos pedagógicos

- Deixe que os alunos manipulem livremente os *softwares* e as representações dinâmicas dos sólidos.
- Discuta com os alunos quais as características dos poliedros e não poliedros. Deixe que eles indiquem suas próprias caracterizações, mesmo que sejam informais. Adeque suas propostas à linguagem matemática, quando possível.
- Ao final da atividade, você pode promover um debate a partir dos resultados obtidos na folha de atividades em relação às diferenças entre os tipos de sólidos trabalhados.
- Caso a sua unidade escolar não disponha de um laboratório de informática, a mesma atividade poderá ser aplicada em sala de aula com auxílio de um computador ligado a um projetor multimídia ou a uma TV. Nesse caso, os alunos poderão interagir com o *software* de maneira indireta e coletiva.

Folha de Atividades – Identificando vértice, aresta e face de um poliedro

Nome da Escola: ____

Nome: ____

1. Abra o software Poly Pro. Em seguida, selecione as opções "Sólido de Arquimedes" e depois "Cuboctaedro" nas caixas flutuantes na janela de ferramentas. Esse sólido corresponde ao primeiro exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre ele e arraste para movê-lo e girá-lo livremente.

2. Agora abra o software 3D Learning - Geometria Espacial.

   a. Na caixa de ferramentas (apresentada do lado direito da tela) clique sobre a ferramenta "Inserir Objetos" ( ). Na janela que se abrirá, selecione o objeto "cilindro" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao primeiro exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   b. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "esfera" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao segundo exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   c. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "paralelepípedo" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao segundo exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 60). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   d. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "octaedro" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao terceiro exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   e. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "cone" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao quarto exemplo de não poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

   f. Na mesma janela objetos já aberta, selecione o objeto "pirâmide" e clique em "Inserir". Esse sólido corresponde ao quarto exemplo de poliedro apresentado na atividade 4 (página 61). Clique sobre o objeto e sobre grid, arrastando-os para movê-lo e girá-lo livremente.

3. Agora que você já explorou quase todos os sólidos apresentados na atividade 4 através dos softwares, destaque:

   a. O que você observou em relação às características que os poliedros têm em comum?

   b. O que você observou em relação às características que os não poliedros têm em comum?

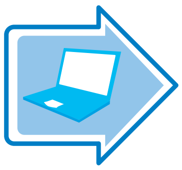
4. A partir do que foi observado no item anterior, responda:

   a. Sobre as superfícies dos poliedros observados podemos identificar elementos de 2, 1 ou nenhuma dimensão? Tomando como exemplo o octaedro, quantos são os elementos de 2, 1 e nenhuma dimensão sobre a sua superfície? (Esses são os números de faces, arestas e vértices desse poliedro)

   b. É possível identificar, da mesma forma, os mesmos elementos também na superfície de todos os não poliedros? Em que estes se diferem dos poliedros?

   c. Um dos sólidos apresentados na atividade 4 não foi explorado com auxílio dos softwares. Você seria capaz de indicar algum objeto cuja forma se assemelhe à desse sólido?

Avaliação – O que perguntam por aí?

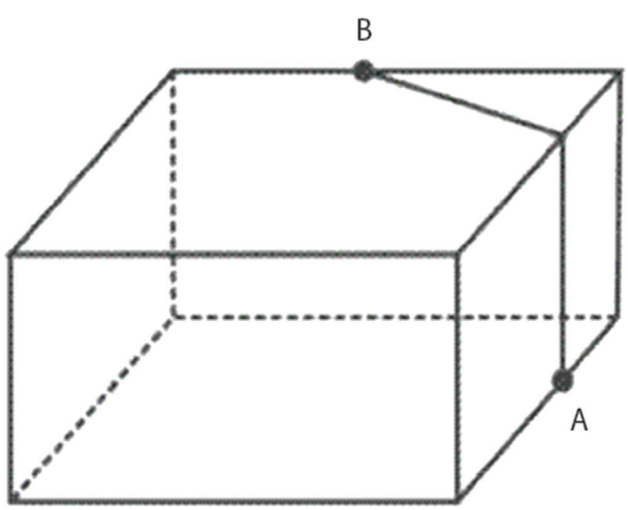
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	ENEM - 2010	Imagem disponível para projeção neste material; material do aluno.		Turma dividida em duplas	

Aspectos operacionais

Na seção O que perguntam por aí? do material do aluno, a atividade é uma questão do ENEM que envolve noção básica de geometria espacial. Você poderá trabalhar esta proposta com a imagem disponível neste material e pedir que os alunos discutam e resolvam a seguinte questão proposta:

ENEM - 2010

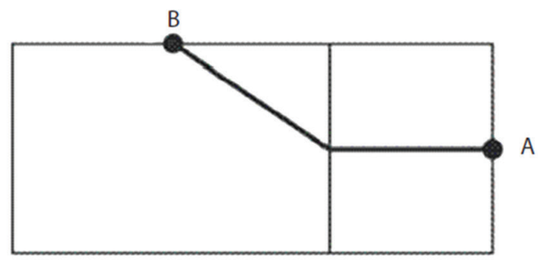
A figura seguinte representa um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B:



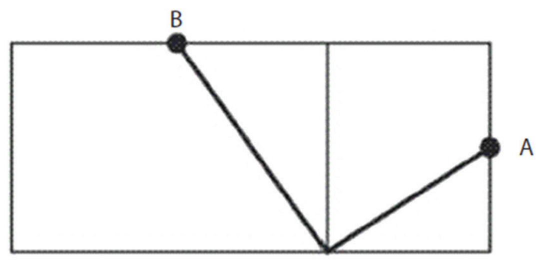
Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em A. Afim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

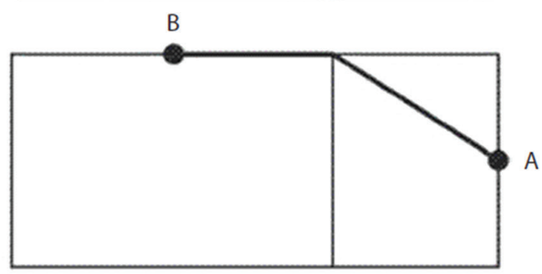
a)



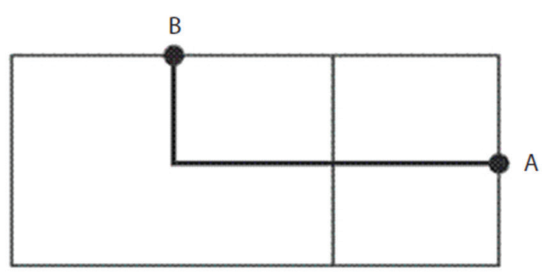
b)



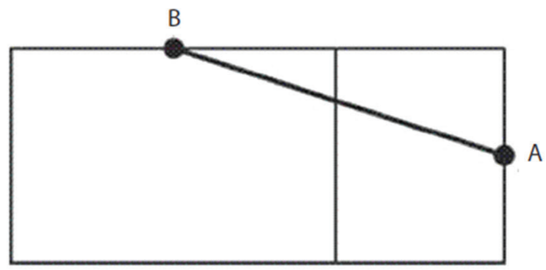
c)



d)



e)



- Após a resolução desta questão em aula, você pode promover uma análise coletiva das respostas encontradas pelos alunos, com uma breve discussão a respeito dos possíveis erros (erros mais comuns) por eles cometidos.

Gabarito comentado:

Gabarito E: perceba o seguinte: o retângulo em que se situa o ponto B é o teto da sala eo retângulo em que se situa o ponto A é uma das paredes. Conseguiu ver? Muito bem. Então, num pimeiro momento, podemos afirmar que os pontos estão em planos diferentes e, neste caso, um fio que percorresse o caminho mais curto entre A e B passaria pelo meio da sala. No entanto, o fato de o fio "correr" por dentro da parede faz com que as coisas mudem de figura: podemos considerar que os planos do teto e da parede são, na verdade, um plano contínuo. Dessa maneira, os pontos A e B estarão no memso plano e a menor distância entre eles será o tamanho da linha reta que os une. Assim, a resposta é letra E.

Avaliação – Momento de Reflexão

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões tanto objetivas como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Participação individual dos alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado à unidade 2. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades, disponível para reprodução neste material, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões para os alunos, que podem complementar às suas no que tange à avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas:

- Identificar posição relativa entre pontos, retas e planos.
- Identificar Poliedros e Não Poliedros
- Aplicar a Relação de Euler.

Para ajudá-lo nos seus registros, sugerimos as questões a seguir, disponíveis na folha de atividades:

- Qual foi o conteúdo matemático que você estudou nesta unidade?
- Dê exemplos de objetos do seu cotidiano que representem modelos de sólidos estudados nesta unidade. Tente nomear esses sólidos.
- Quais dos sólidos citados acima são poliedros? Algum entre eles não é convexo?
- Que relação importante você aprendeu para relacionar os elementos de um poliedro convexo?

Sugerimos, também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros a serem entregues ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho para, se for o caso, repensá-los de acordo com as características apresentadas.

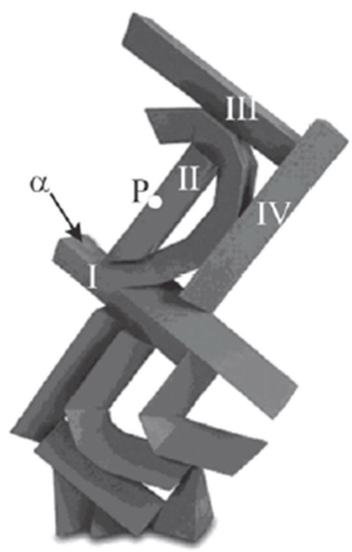
Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Sugerimos nesta etapa a escolha de, pelo menos, uma questão objetiva e uma discursiva que contemple uma habilidade pretendida nesta unidade para compor o instrumento avaliativo.

Sugestões de questões objetivas para a avaliação:

Questão 1: (ENEM - 2009)

Suponha que, na escultura do artista Emanoel Araújo, mostrada na figura a seguir, todos os prismas numerados em algarismos romanos são retos, com bases triangulares, e que as faces laterais do poliedro II são perpendiculares à sua própria face superior, que, por sua vez, é um triângulo congruente ao triângulo base dos prismas. Além disso, considere que os prismas I e III são perpendiculares ao prisma IV e ao poliedro II.



Imagine um plano paralelo à face α do prisma I, mas que passe pelo ponto P pertencente à aresta do poliedro II, indicado na figura. A interseção desse plano imaginário com a escultura contém

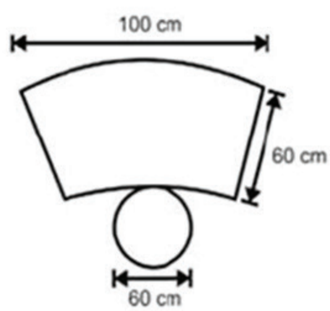
- **A** dois triângulos congruentes com lados correspondentes paralelos.
- **B** dois retângulos congruentes e com lados correspondentes paralelos.
- **C** dois trapézios congruentes com lados correspondentes perpendiculares.
- **D** dois paralelogramos congruentes com lados correspondentes paralelos.
- **E** dois quadriláteros congruentes com lados correspondentes perpendiculares.

Questão 2: (ENEM - 2010)

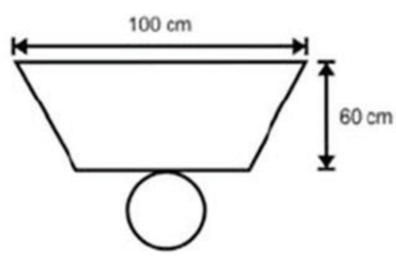
Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.

Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

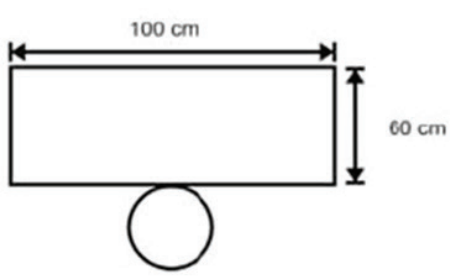
A



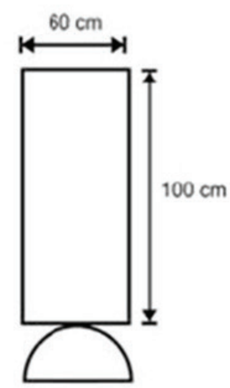
B



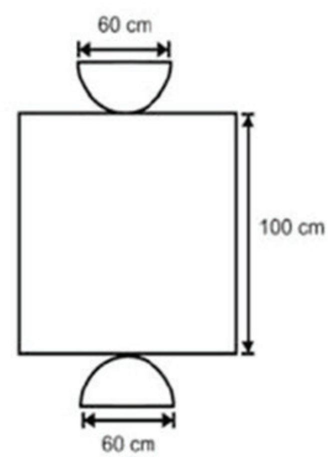
C



D

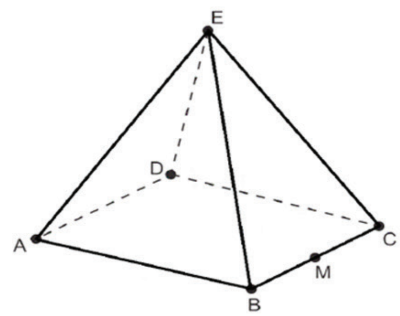


E



Questão 3: (ENEM- 2012)

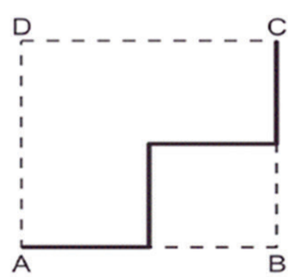
João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.



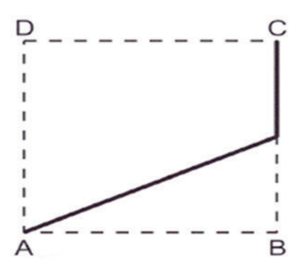
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

O desenho que Bruno deve fazer é

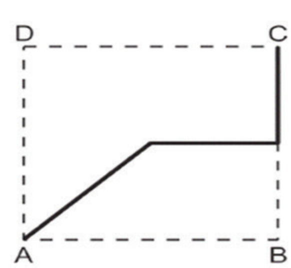
A



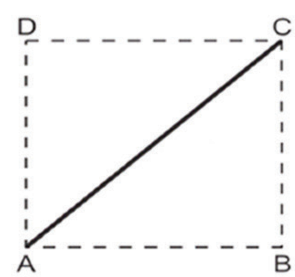
B



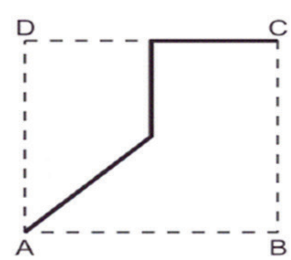
C



D



E

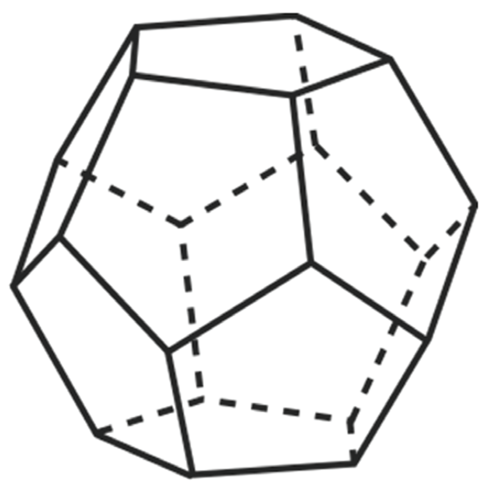


Respostas das questões objetivas sugeridas:

1. (A)
2. (E)
3. (C)

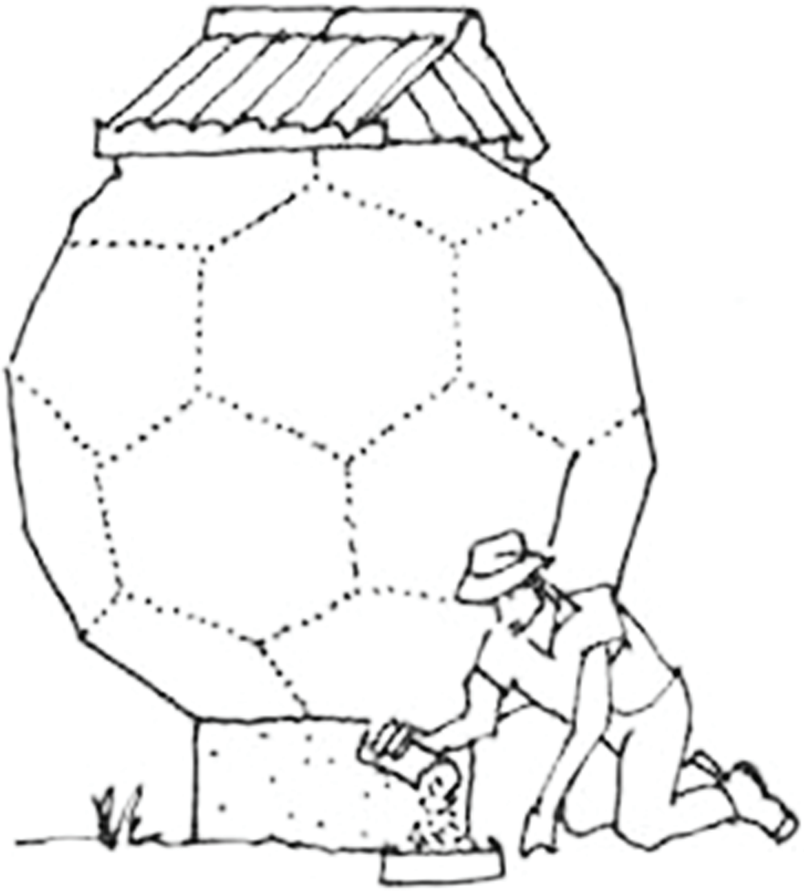
Sugestões de questões discursivas para a avaliação:

Questão 1: A figura abaixo mostra um dodecaedro regular, poliedro convexo com 20 vértices e 12 faces, todas pentagonais.



Seja C o conjunto de todos os triângulos que podem ser formados ligando quaisquer dos 20 vértices de um dodecaedro regular. O número de triângulos de C que não estão contidos em uma das faces será:

Questão 2: No México, há mais de mil anos, o povo Asteca resolveu o problema de armazenagem da pós--colheita de grãos com um tipo de silo em forma de bola colocada sobre uma base circular de alvenaria. A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 placas pentagonais.



Quantas arestas e quantos vértices tem esse silo?

Questão 3: Num poliedro convexo, o número de vértices é 5 e o de arestas é 10. Qual é o número de faces?

Questão 4: Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro que satisfaz a relação de Euler, com 60 faces triangulares. Calcular o número de vértices desse cristal.

Questão 5: Um poliedro convexo tem cinco faces triangulares e três pentagonais. O número de arestas e o número de vértices deste poliedro são:

Respostas e comentários das questões discursivas sugeridas:

Questão 1: Observe que, para obter o número de elementos de C (conjunto de todos os triângulos que podem ser formados ligando quaisquer dos 20 vértices de um dodecaedro regular), podemos fazer $C_{20,3}=\dfrac{20!}{3!17!}=1140$. No entanto, o problema pede o número de triângulos de C que não estão contidos em uma das faces. Note que em cada face há $C_{5,3}=\dfrac{5!}{3!2!}=10$ triângulos e, como há 12 faces, precisamos subtrair 12X10=120 triângulos; daí, o número de triângulos procurado ser 1140-120=1020.

Questão 2: Como o poliedro tem 12 faces pentagonais e 20 faces hexagonais, então F = 12 + 20 = 32. Para obter o número de arestas, podemos contar pelas faces pentagonais, ou seja, 5 . 12 = 60 e pelas faces hexagonais temos 6 . 20 = 120. Observando que cada aresta foi contada 2 vezes, temos que 2A = 60 + 120, isto é, 2A = 180, logo A = 90 arestas.

Como o poliedro é convexo, podemos usar a relação de Euler (V + F = A + 2) para calcular o número de vértices. Assim, V + 32 = 90 + 2, portanto V = 92 – 32, ou seja V = 60 vértices.

Questão 3: Como o poliedro é convexo, podemos usar a relação de Euler (V + F = A + 2) para calcular o número de faces. Assim, 5 + F = 10 + 2, portanto F = 12 – 5, ou seja F = 7 faces.

Questão 4: Como podemos usar a relação de Euler (V + F = A + 2) e sabendo que F = 60 faces triangulares , podemos calcular o número de arestas fazendo 60 . 3 =180. Observando que cada aresta foi contada 2 vezes, temos que 2A = 180, logo A = 90 arestas. Assim, V + 60 = 90 + 2, portanto V=92-60, ou seja V = 32 vértices.

Questão 5: Como o poliedro tem 5 faces triangulares e 3 faces pentagonais, então F = 5 + 3 = 8. Para obter o número de arestas, podemos contar pelas faces triangulares, ou seja, 3 . 5 = 15 e pelas faces pentagonais temos 5 . 3 = 15. Observando que cada aresta foi contada 2 vezes, temos que 2A=15 +15, isto é, 2A = 30, logo A = 15 arestas.

Como o poliedro é convexo, podemos usar a relação de Euler (V + F = A + 2) para calcular o número de vértices. Assim, V + 8 = 15 + 2, portanto V = 17 – 8, ou seja V = 9 vértices.

Folha de Atividades – Avaliação

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Momento de Reflexão

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na unidade 2 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

Questão 1:

Qual foi o conteúdo matemático que você estudou nesta unidade?

____.

Questão 2:

Dê exemplos de objetos do seu cotidiano que representem modelos de sólidos estudados nesta unidade. Tente nomear esses sólidos.

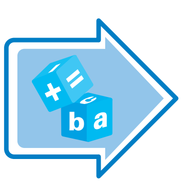
Questão 3:

Quais dos sólidos citados acima são poliedros? Algum entre eles não é convexo? Se positivo, identifique-os.

Questão 4:

Que relação importante você aprendeu para relacionar os elementos de um poliedro convexo? Escreva o nome e a equação que a representa.

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de Fixação Complementares	Folhas de Atividades, lápis/ caneta.		Turma dividida em duplas ou em trios.	

Aspectos operacionais

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação das noções iniciais da Geometria espacial, trabalhadas ao longo dessa unidade tanto no material do aluno quanto nas atividades sugeridas neste material. Com esses exercícios, você, professor, terá a oportunidade de fixar os conceitos de dimensão, ponto, reta e plano, as diferenças entre poliedros e não poliedros e seus elementos e a aplicação da relação de Euler.

Esses exercícios foram distribuídos em uma "Folha de atividades" – que se encontra disponível para reprodução no "pendrive do professor" – que poderá ser aplicada de forma fracionada ao término de cada seção do material do aluno ou de uma só vez no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados.

Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo no Grid de aula de seu pendrive.

Aspectos pedagógicos

- Peça que os alunos organizem-se em duplas ou em trios. Mas procure distribuir uma folha de atividades para cada aluno, para que todos possam ficar com uma cópia do material, tornando-a mais uma fonte de consulta.
- Escolha previamente quais os exercícios se adequam melhor à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos na Unidade 2.
- Depois de os alunos concluírem o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, procure discutir as soluções apresentadas por eles, valorizando cada estratégia, mesmo que esta não os tenha conduzido a uma resposta verdadeira.
- Procure incentivar os alunos a executar tais exercícios sem a sua intervenção, enquanto professor. Esses exercícios podem favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

Folha de Atividades – "Exercícios de Fixação Complementares "

Nome da Escola: ____

Nome: ____

1. Responda às perguntas no espaço entre parênteses usando (P) para ponto, (R) para reta e (S) para plano.

   a. (   ) Olhando para o mapa do seu estado, você identifica a cidade onde você mora. Qual é a ideia que você tem dessa representação?

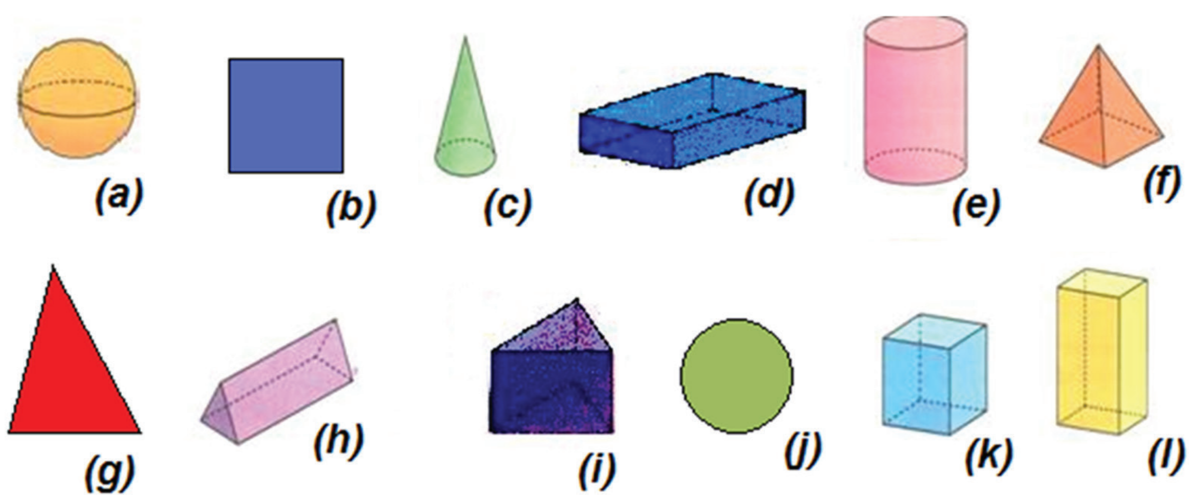
b. (   ) Lendo uma página do livro de matemática, qual é a ideia que uma folha deste livro lhe traz?

c. (   ) Assistindo a um jogo de futebol, você observa a linha divisória do campo. Qual é a ideia que esta linha divisória lhe dá?

d. (   ) Quando você olha o vidro colocado em uma janela, qual a ideia que este vidro lhe dá?

e. (   ) Você está vendo um palito de churrasco. Que ideia esse palito lhe traz?

2. Em Geometria, qualquer figura que pode estar toda contida em um plano é uma figura plana. As que não podem estar contidas inteiramente em um plano, por possuírem três dimensões, são chamadas de espaciais. As figuras geométricas espaciais mais conhecidas compõem dois grupos: os poliedros e os corpos redondos. Analise as figuras geométricas representadas abaixo e responda:



a. Quais delas são figuras planas? ________________________________

b. Quais são os corpos redondos? ________________________________

c. Quais são os poliedros? ________________________________

3. Determine o número de vértices de um poliedro convexo de 10 faces e 30 arestas.

____.

4. Determine o número de faces de um poliedro convexo de 12 vértices, cujo número de arestas é o dobro do número de faces.

____.

5. Determine o número de vértices de um poliedro convexo de 9 faces, das quais 4 são triangulares e 5 são quadrangulares.

____.

6. Determine o número de faces de um poliedro convexo de 6 vértices, sabendo que de cada vértice partem 4 arestas.

____.

7. Um professor de matemática decidiu que, na festa de aniversário de 6 anos de seu filho, seriam distribuídos, como "lembrancinha", pequenos poliedros coloridos, feitos de madeira. Contratou um marceneiro para fazer trinta poliedros e lhe passou a seguinte orientação:

- Todos os poliedros devem ser regulares e a aresta de cada um deve medir 4 cm.
- 10 deles devem ser pintados de azul, ter 6 arestas e 4 vértices.
- Outros 10 devem ser pintados de rosa e ter 12 faces pentagonais.
- Os 10 poliedros restantes devem ser pintados de amarelo e ter oito faces triangulares.

De acordo com a orientação do professor:

a. Que tipos de poliedros o marceneiro deve confeccionar?

____.

b. Quantas arestas terá o poliedro rosa?

____.

c. Quantos vértices terá o poliedro amarelo?

____.

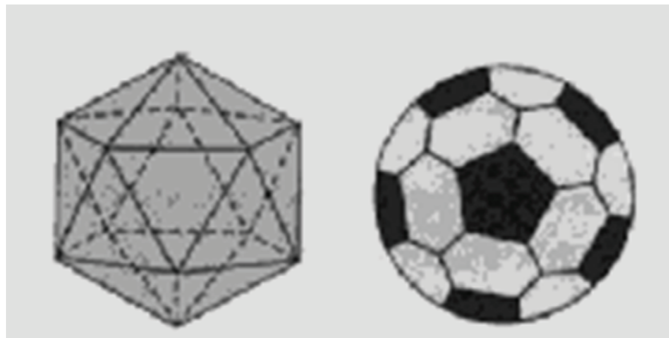
8. Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais.

____.

9. (Unirio) Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares. O número de vértices desse cristal é igual a:

(A) 35 (B) 34 (C) 33 (D) 32 (E) 31

10. (UERJ) Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais tiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a 1/3 da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras.



Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha. Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

(A) 7,0 m (B) 6,3 m (C) 4,9 m (D) 2,1 m

Respostas da Folha de Atividades – Exercícios Complementares

1. a) (P) b) (S) c) (R) d) (S) e) (R)
2. a) b, g, j b) a, c, e c) d, f, h, i, k, l
3. 18 vértices
4. 10 faces
5. 9 vértices
6. 8 faces
7. a) 10 tetraedros azuis, 10 dodecaedros rosas e 10 octaedros amarelos.

   b) 30 arestas (se são doze faces pentagonais e o pentágono possui 5 lados, teríamos um total de 60 arestas. Mas cada aresta pertence a dois pentágonos, logo elas estão contadas duas vezes. Assim, 30 é o número de arestas do dodecaedro regular).

   c) 6 vértices (aqui basta aplicar a relação de Euler. O octaedro regular possui 8 faces com 3 lados cada, logo terá 12 arestas.)

(Obs.: Esse exercício é um bom momento para apresentar os ditos poliedros de Platão: tetraedro, hexaedro ou cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro).

8. 10 vértices (aqui basta aplicar a relação de Euler. O número de faces é dado e o número de arestas pode ser obtido dividindo pela metade o número total de lados das faces indicadas).

9. D

10. B