

# Matrizes e Determinantes

*Cleber Dias da Costa Neto, Heitor Barbosa Lima de Oliveira, Patrícia Nunes da Silva e Telma Alves. Juliana Bezerra.*

## Introdução

Na Unidade 29 do módulo 3 do material do aluno são apresentadas diversas situações e atividades sobre Matrizes e Determinantes.

Para auxiliá-lo, pesquisamos e elaboramos algumas atividades e recursos que podem complementar a exposição deste tema em suas aulas. O detalhamento dessas atividades está presente no texto que segue.

Sugerimos que a primeira aula dessa Unidade se inicie com uma atividade disparadora. É uma atividade cujo intuito, além de iniciar a exposição do tema, é promover uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, espera-se que os alunos consigam identificar e representar matrizes, e que efetuem cálculos envolvendo operações com matrizes.

Para dar sequência ao estudo dessa Unidade, abordando Matrizes e Determinantes, disponibilizamos alguns recursos complementares vinculados ao conteúdo do material didático. Tais recursos apresentam-se associados às atividades descritas detalhadamente neste material, estimulando à resolução de problemas que abordam operações e linguagem matriciais, além de aplicações que se utilizam do cálculo de determinantes. Sugerimos realização dessas atividades nas aulas subsequentes à aula inicial de acordo com a realidade da sua turma. Recomendamos que sejam feitas as alterações e adaptações sempre que achar necessário.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta Unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro, dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta Unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo. E o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos em detrimento da mera reprodução de exercícios feitos anteriormente. Também disponibilizaremos algumas questões de avaliações de larga escala, como ENEM, Vestibulares, Concursos Públicos, entre outros.

## Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	1	3	5	6 aulas de 2 tempos

Título da unidade	Tema
Conhecendo um pouco de Matrizes e Determinantes	Matrizes e Determinantes
Objetivos da unidade	
Identificar e representar os diferentes tipos de matrizes;	
Efetuar cálculos, envolvendo as operações com matrizes;	
Resolver problemas, utilizando as operações com matrizes e a linguagem matricial;	
Calcular o determinante de matrizes quadradas de ordem 2 e 3 .	
Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	51 e 52
Seção 1 – Conhecendo e construindo matrizes	53 a 57
Seção 2 – Vamos operar com matrizes?	57 a 67
Resumo	67
Veja ainda	67
O que perguntam por aí?	69 e 70
Caiu na rede	71
Respostas das atividades	72 a 74
Recursos Complementares	75

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspon-

dência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

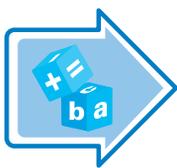
Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

## Recursos e ideias para o Professor

### Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



#### Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.



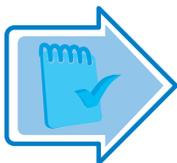
#### Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.



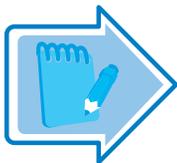
#### Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



#### Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.



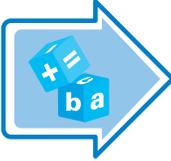
#### Exercícios

Proposições de exercícios complementares

## Atividade(s) inicial(is)

Descrevemos a seguir situações motivadoras nas quais queremos que os alunos iniciem uma discussão coletiva e se familiarizem com o conteúdo matemático a ser trabalhado de forma empírica e com atividades de fácil compreensão antes da formalização. Sugerimos que você escolha a que seja mais adequada à sua realidade ou, se preferir, utilize uma atividade própria.

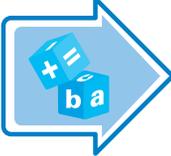
### Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Somas	Tesouras e cópias da folha de atividades — Somas (disponível na Seção Aspectos operacionais).	Nesta atividade, os alunos irão se familiarizar com a construção de matrizes e a notação matricial através da resolução de quebra-cabeças que envolvem somas.	Turma disposta em duplas.	20 minutos
	Figuras Secretas	Réguas e cópias da folha de atividades — Figuras secretas (disponível na Seção Aspectos operacionais).	Nessa atividade, os alunos irão se familiarizar com a notação para os elementos de uma matriz.	Turma disposta em duplas.	25 minutos

## Seção 1 – Conhecendo e construindo matrizes

Páginas no material do aluno

53 a 57

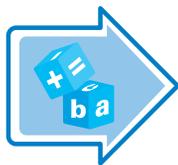
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Liga de Vôlei	Folha de atividades	Nesta atividade, os alunos trabalharão com a identificação e interpretação dos elementos de uma matriz para responderem às questões que seguem.	Turma dividida em duplas.	25 minutos.
	Cooperativa de leite	Vídeo “Cooperativa de leite” disponível em <a href="http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076">http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076</a> e cópias da Folha de Atividades – Cooperativa de leite (disponível na Seção Aspectos operacionais).	No vídeo utilizado nessa atividade, os membros de uma cooperativa de leite recorrem a matrizes para determinar a melhor localização de um tanque de refrigeração comunitário.  Obs.: Essa atividade está disponível em <a href="http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076">http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076</a>	Turma dividida em duplas.	40 minutos.

## Seção 2 – Vamos operar com matrizes?

Páginas no material do aluno

53 a 57

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Bombons a Granel	Vídeo Bombons a Granel disponível em <a href="http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055">http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055</a> , calculadoras e cópias da Folha de atividades – Bombons a Granel (disponível na Seção Aspectos operacionais).	No vídeo utilizado nessa atividade, com o auxílio de multiplicação de matrizes, uma vendedora de bombons aprende a determinar o preço de venda de seus produtos.  Obs.: Esta atividade está disponível em fonte: <a href="http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055">http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055</a>	Turma dividida em duplas.	25 minutos.
	Desenho Matrix	Datashow, computador, material disponível em <a href="http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html">http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html</a> , folha de atividades.	Esta atividade propõe uma reflexão sobre o que é uma matriz transposta através de sucessivas atividades envolvendo a alteração de imagens.  Obs.: Essa atividade foi adaptada de <a href="http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html">http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html</a> , acesso em 07/07/2013	Turma dividida em grupos de 4 alunos.	25 minutos.



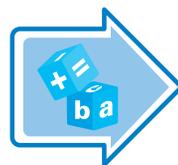
Determinantes e áreas	Calculadoras e cópias da Folha de atividades – Determinantes e áreas (disponível na Seção Aspectos operacionais).	Nesta atividade, os alunos utilizarão o valor do determinante de uma matriz para calcular a área de um triângulo. Obs: Propriedades dos determinantes e o cálculo da área de triângulos: exemplos significativos disponível em <a href="http://www.ime.usp.br/~rpm/conteudo/77/determinantes.pdf">http://www.ime.usp.br/~rpm/conteudo/77/determinantes.pdf</a>	Turma dividida em duplas.	25 minutos.
-----------------------	---	---	---------------------------	-------------

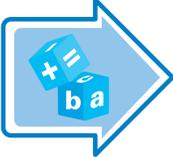


Campeonato de Determinantes	Cartões com números.	Esta atividade trabalha o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 2.	Turma dividida em grupos de 4 alunos.	25 minutos.
-----------------------------	----------------------	--	---------------------------------------	-------------

## Avaliação

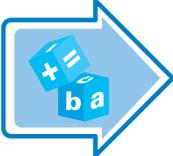
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Registros de aprendizagens	Cópias da folha de atividades	Esta etapa pode estar articulada à seção <b>“Veja ainda”</b> no material do aluno. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as resoluções dos exercícios de revisão, enfatizando as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta Unidade.	Individual	25 minutos





Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de avaliações de larga escala ou concurso	Cópias das questões.	Sugerimos, nesta etapa, a escolha de uma questão que contemple uma habilidade pretendida nesta Unidade para compor o instrumento avaliativo. A ideia é que o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como o ENEM, vestibulares, concursos, etc.	Individual	20 minutos

## Atividade Inicial



Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Somas	Tesouras e cópias da folha de atividades — Somas (disponível na Seção Aspectos operacionais).	Nesta atividade, os alunos irão se familiarizar com a construção de matrizes e a notação matricial através da resolução de quebra-cabeças que envolvem somas.	Turma disposta em duplas.	20 minutos

## Aspectos operacionais

- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades. Oriente-os a recortarem as peças e a montarem os quadrados mágicos.

- Ao final da atividade, represente cada um dos quebra-cabeças matricialmente. Por exemplo, esquematize no quadro:

$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{13}$
$a_{21}$	$a_{22}$	$a_{23}$
$a_{31}$	$a_{32}$	$a_{33}$

- Reforce o significado dos índices: o primeiro representa a linha, e o segundo, a coluna.
- Discuta coletivamente a resolução de cada um dos quebra-cabeças. Peça aos alunos que informem qual número foi colocado em cada uma das posições.

## Folha de atividades – Somas

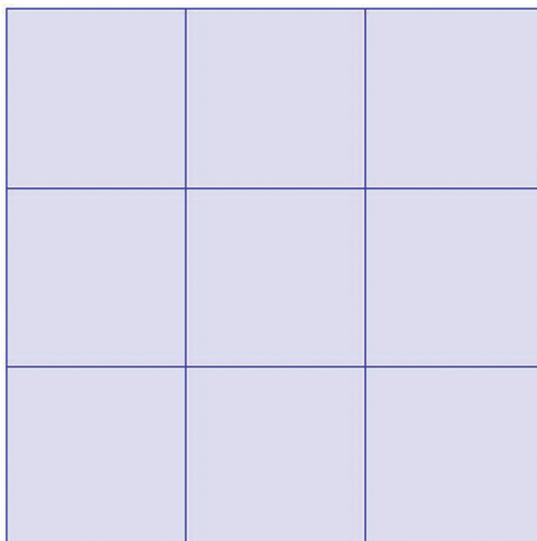
Nome da Escola: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

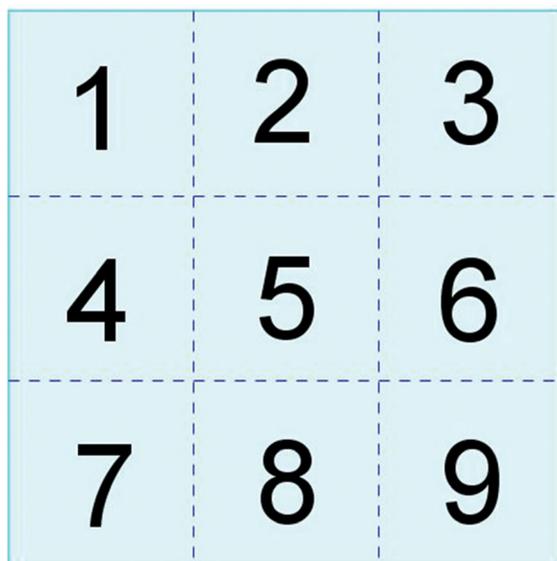
### Soma 15

Recorte as peças numeradas de 1 a 9 que estão na próxima folha.

Organize as peças numeradas de 1 a 9 no tabuleiro de modo que, ao efetuar a adição das 3 peças na horizontal, na vertical e também nas diagonais, a soma seja sempre igual a 15.



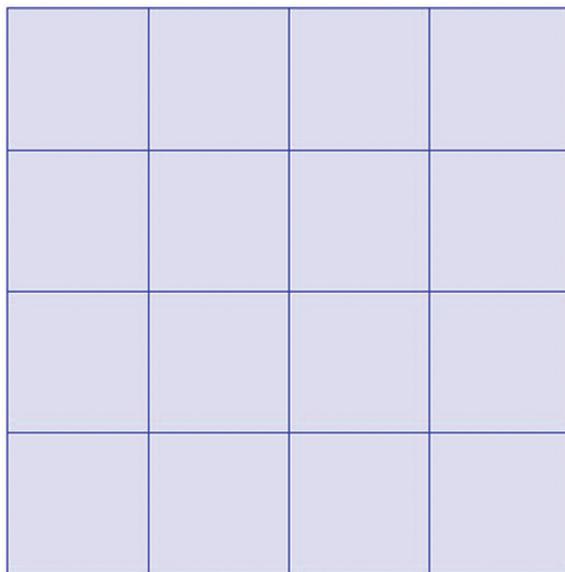
**Peças para recortar**



**Soma 28**

Recorte as peças numeradas que estão na próxima folha.

Organize as peças numeradas no tabuleiro de modo que, ao efetuar a adição das 4 peças na horizontal, na vertical e também nas diagonais, a soma seja sempre igual a 28.



**Peças para recortar**

9	9	9	9
9	9	8	8
8	6	6	5
5	5	5	2

**Soma 34**

Recorte as peças numeradas de 1 a 16 que estão na próxima folha.

Organize as peças numeradas de 1 a 16 no tabuleiro de modo que, ao efetuar a adição das 4 peças na horizontal, na vertical e também nas diagonais, a soma seja sempre igual a 34.


### Peças para recortar

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

---

### Aspectos pedagógicos

- Certifique-se de que todos os alunos compreenderam as regras de montagem de cada um dos quebra-cabeças. Certifique-se que eles não misturaram as peças dos diferentes quebra-cabeças.
- No momento de discussão das soluções, lembre-se de que eles admitem mais de uma solução. Considere as múltiplas possibilidades obtidas pelas duplas.
- Registre que cada solução encontrada é uma matriz de mesma ordem, porém com elementos diferentes; peça para que eles identifiquem esses elementos usando a notação de índices;
- Para explorar a atividade no sentido da linguagem matricial, aproveite para dar um nome diferente a cada matriz solução; pergunte, através da linguagem própria, elementos aleatórios das matrizes soluções, por exemplo: qual o elemento  $a_{23}$  da matriz A? Qual o elemento  $b_{32}$  da matriz B? Qual o elemento  $c_{14}$  da matriz C?

## Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Figuras Secretas	Réguas e cópias da folha de atividades — Figuras secretas (disponível na Seção Aspectos operacionais).	Nessa atividade, os alunos irão se familiarizar com a notação para os elementos de uma matriz.	Turma disposta em duplas.	25 minutos

### Aspectos operacionais

- Divida a turma em duplas e distribua as réguas e as folhas de atividades;
- Peça aos alunos que leiam a parte inicial do texto. Discuta com eles o exemplo apresentado no texto;
- Peça que resolvam os problemas propostos;
- Ao final, discuta coletivamente as soluções propostas pelas duplas.

### Folha de atividades – Figuras secretas

Nome da Escola: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Nessa atividade, a matriz  $A$  vai nos ajudar a construir uma figura secreta. Para construir a figura secreta, vamos ligar os pontos numerados com segmentos de reta. Para saber quais pontos unir, vamos consultar a matriz  $A$ . Se o elemento  $a_{ij}$  da matriz  $A$  é igual a 1, devemos ligar os ponto  $i$  e o ponto  $j$ . Se o elemento  $a_{ij}$  da matriz  $A$  é igual a 0, não devemos ligar os ponto  $i$  e o ponto  $j$ . Por exemplo, considere a matriz  $A$  e os pontos numerados de 1 a 3.

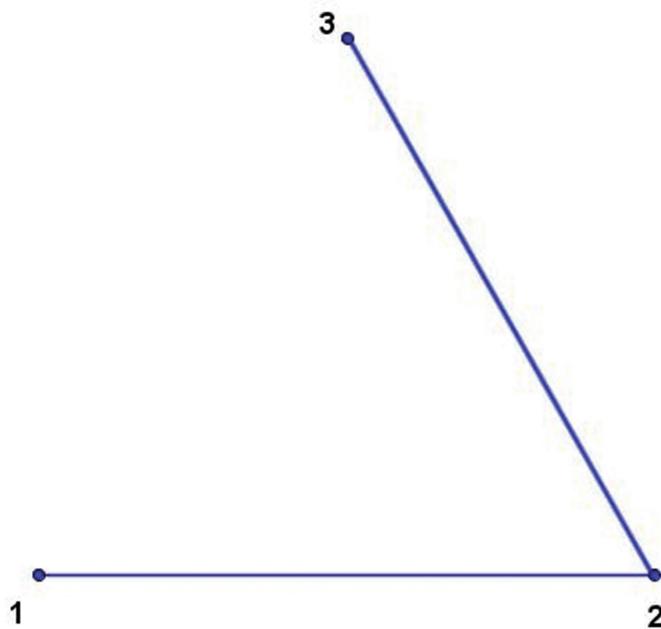
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3

1

2

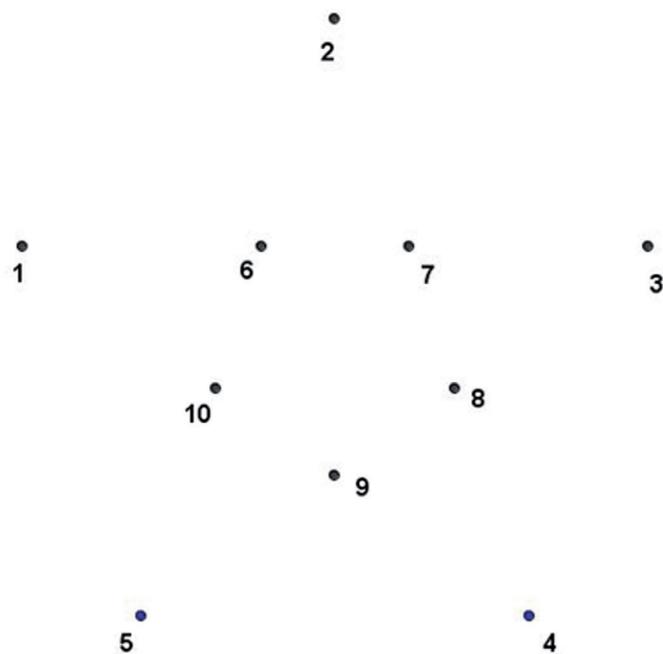
Vamos considerar apenas os elementos não nulos de  $A$ :  $a_{12}, a_{21}, a_{23}$  e  $a_{32}$ . Portanto, vamos ligar o ponto 1 ao ponto 2 e o ponto 2 ao ponto 3:



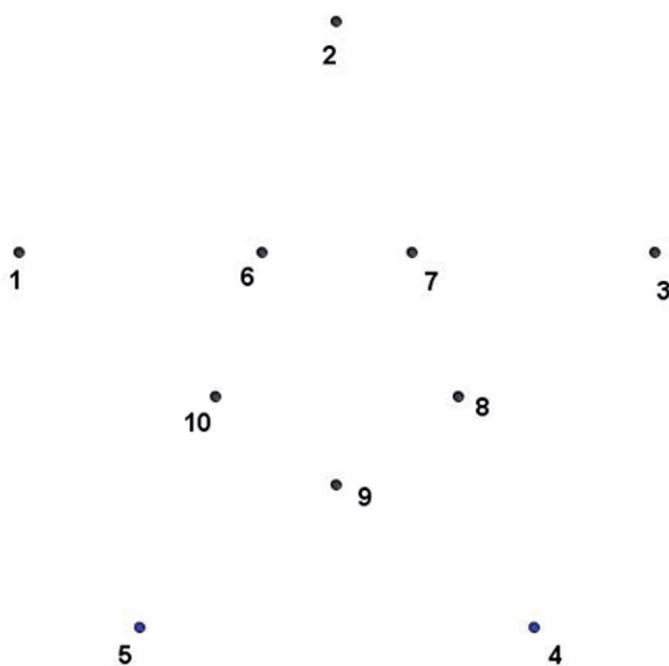
Problemas propostos

Considere a matriz  $A$  e os pontos numerados e construa a figura secreta. Lembre-se de que se  $a_{ij} = 1$ , então os pontos  $i$  e  $j$  devem ser ligados por um segmento.

$$1. A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$2. A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



---

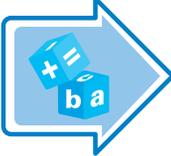
## Aspectos pedagógicos

- Discuta cuidadosamente com os alunos a convenção feita sobre os elementos da matriz  $A$ ;
- Se necessário, apresente mais um exemplo simples para que fique claro o processo de construção da figura a partir dos elementos de  $A$ ;
- Oriente os alunos a identificarem quais são os elementos não nulos da matriz. Em que linha ele está? Em que coluna? Essas informações vão dizer quais pontos devem ser ligados;
- Sugira aos alunos numerarem as linhas e as colunas para facilitar a identificação dos índices dos elementos da matriz  $A$ ;
- Talvez seja necessário representar no quadro os elementos das matrizes sob a notação de índices;
- Se possível, mostre que as matrizes em questão têm como eixo de simetria a diagonal principal da matriz. Explique o que isso significa nos problemas propostos, pois tem relação direta com a ligação entre os pontos;
- A dificuldade dos alunos pode surgir da confusão pela falta de prática com a linguagem.

## Seção 1 – Conhecendo e construindo matrizes

Páginas no material do aluno

53 a 57

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Liga de Vôlei	Folha de atividades	Nesta atividade, os alunos trabalharão com a identificação e interpretação dos elementos de uma matriz para responderem às questões que seguem.	Turma dividida em duplas.	25 minutos.

### Aspectos operacionais

- Divida a turma em duplas e distribua a folha de atividades;
- Relembre com os alunos como podemos identificar cada elemento em uma matriz, levando-se em consideração a linha e a coluna em que se encontram.

### Folha de atividades – Liga de Vôlei

Nome da Escola: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Quatro seleções (Rússia, Itália, Brasil e EUA) disputam a etapa final de um torneio internacional de vôlei no sistema “todos jogam contra todos” uma única vez. A campeã do torneio será a equipe que obtiver mais vitórias; em caso de empate no número de vitórias, a campeã é decidida pelo resultado obtido direto entre as equipes empatadas. Na matriz seguinte, o elemento  $a_{ij}$  indica o número de sets que a seleção  $i$  venceu no jogo contra a seleção  $j$ . Lembre que o jogo de vôlei termina quando uma equipe completa 3 sets.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Representando os termos  $i$  e  $j$  por:

1 = Rússia

2 = Itália

3 = Brasil

4 = EUA

Determine:

- a. O número de vitórias da equipe norte-americana;
- b. O placar do jogo Brasil x Itália;
- c. O número de sets marcados contra a Rússia;
- d. O campeão do torneio.

---

## Aspectos pedagógicos

- Os alunos podem demonstrar dificuldades em identificar os elementos da matriz. Caso isto ocorra, exponha alguns comentários de revisão ou explicação do tema para os alunos.
- Os alunos também podem confundir o número de sets vencidos com o número que representa um país. Procure deixar claro o que significa cada um.
- Explore com os alunos o motivo da diagonal principal ser formada apenas por zero caracterizando que nenhuma seleção vence a si própria. Procure, porém, deixar que os próprios alunos tentem chegar a essa conclusão.

## Seção 1 – Conhecendo e construindo matrizes

Páginas no material do aluno

53 a 57

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Cooperativa de leite	Vídeo “Cooperativa de leite” disponível em <a href="http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076">http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076</a> e cópias da Folha de Atividades – Cooperativa de leite (disponível na Seção Aspectos operacionais).	No vídeo utilizado nessa atividade, os membros de uma cooperativa de leite recorrem a matrizes para determinar a melhor localização de um tanque de refrigeração comunitário.  Obs.: Essa atividade está disponível em <a href="http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076">http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1076</a>	Turma dividida em duplas.	40 minutos.

### Aspectos operacionais

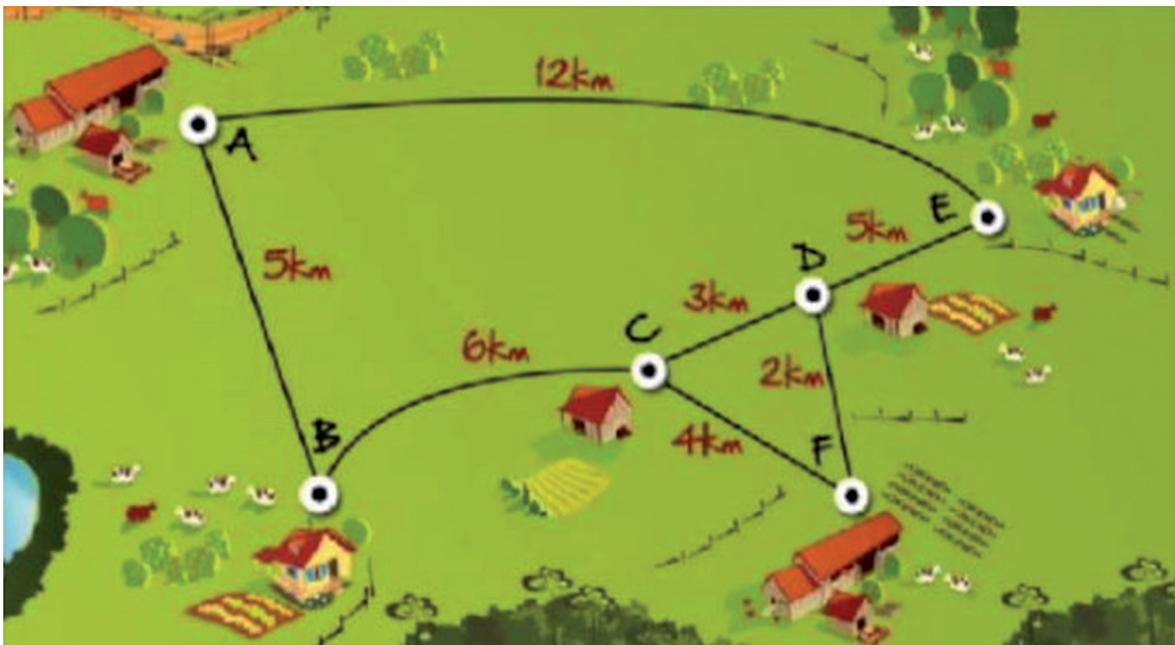
- Exiba o vídeo para a turma.
- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades.
- Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

### Folha de atividades – Cooperativa de leite

Nome da Escola: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Os membros da cooperativa vão dividir os custos de transporte do leite. Desse modo, a fazenda em que o tanque de leite será instalado deve ser escolhida de modo que a soma das distâncias que serão percorridas por todos os fazendeiros seja a menor possível.



**Problema**

- Preencha a matriz com os menores trajetos entre as fazendas. Na matriz, por exemplo, o cruzamento da linha indicada por C e da coluna indicada por E deve indicar qual é o menor entre as fazendas C e E.

	A	B	C	D	E	F
A						
B						
C						
D						
E						
F						

- Para preencher a tabela abaixo, considere que o tanque foi instalado na fazenda indicada em cada linha e determine a soma das distâncias que seriam percorridas por todos os fazendeiros.

	SOMA
A	
B	
C	
D	
E	
F	

- Determine em qual fazenda o tanque deve ser instalado para que a soma das distâncias que serão percorridas por todos os fazendeiros seja a menor possível.

## Aspectos pedagógicos

- Os alunos podem encontrar dificuldade em compreender o preenchimento da tabela de distâncias. Discuta com eles as distâncias entre algumas fazendas e ilustre o preenchimento de algumas posições da tabela.
- É interessante fazer uma simulação com apenas três pontos para que os alunos compreendam o que é pedido e realmente tentem fazer a atividade; muitas vezes, o aluno deixa de fazer porque acha a tarefa muito complicada.
- Explore a simetria da matriz das distâncias: o menor trajeto entre as fazendas C e E também é o menor trajeto entre as fazendas E e C.

### Seção 2 – Vamos operar com matrizes?

Páginas no material do aluno

53 a 57

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Bombons a Granel	Vídeo Bombons a Granel disponível em <a href="http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055">http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055</a> , calculadoras e cópias da Folha de atividades – Bombons a Granel (disponível na Seção Aspectos operacionais).	No vídeo utilizado nessa atividade, com o auxílio de multiplicação de matrizes, uma vendedora de bombons aprende a determinar o preço de venda de seus produtos.  Obs.: Esta atividade está disponível em fonte: <a href="http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055">http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1055</a>	Turma dividida em duplas.	25 minutos.

---

## Aspectos operacionais

- Exiba o vídeo para a turma.
- Divida a turma em duplas e distribua as calculadoras e as folhas de atividades.
- Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

### Folha de atividades – Bombons a Granel

Nome da Escola: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Considere a tabela

	AO LEITE	MEIO AMARGO	DIET
KIT 1	20	15	5
KIT 2	15	20	5
KIT 3	5	5	30
KIT 4	24	24	2

Em cada linha da tabela acima, vemos a composição de cada kit vendido. Quantos bombons ao leite, meio amargo e diet compõem cada um dos kits.

Já na tabela abaixo, vemos o preço, as calorias e as gorduras totais presentes em cada um dos bombons produzidos.

	PREÇO	CALORIAS	GORDURAS TOTAIS (g)
AO LEITE	R\$ 1,00	85	7,0
MEIO AMARGO	R\$ 1,50	80	6,5
DIET	R\$ 2,00	70	2,0

#### Problema

1. Quantos bombons há no Kit 2?
2. Para cada um dos kits, determine o preço de venda, o total de calorias e de gorduras totais presentes.

---

## Aspectos pedagógicos

- É possível que os alunos encontrem dificuldade em interpretar os elementos das matrizes construídas. Considere um elemento de cada matriz e interprete seu significado no contexto do problema para facilitar a compreensão de cada uma das matrizes consideradas.

- O aluno deve interiorizar que cada elemento da matriz guarda uma informação que relaciona dois atributos, por exemplo: são 20 bombons ao leite no kit 1; o bombom meio amargo contém 80 calorias.
- É possível que os alunos encontrem dificuldade em efetuar a multiplicação das matrizes. Considere um dos kits vendidos e discuta com os alunos como o seu preço deveria ser calculado. Mostre que o procedimento de cálculo coincide com a “multiplicação” da linha do kit pela coluna dos preços dos bombons.
- É possível que os alunos não optem por efetuar a multiplicação de matrizes para resolução do segundo problema. Estimule-os a relacionar os cálculos exigidos para resolver o problema com os envolvidos na multiplicação das matrizes de composição dos kits pela que informa preços, calorias e gorduras totais de cada tipo de bombom.

## Seção 2 – Vamos operar com matrizes?

Páginas no material do aluno

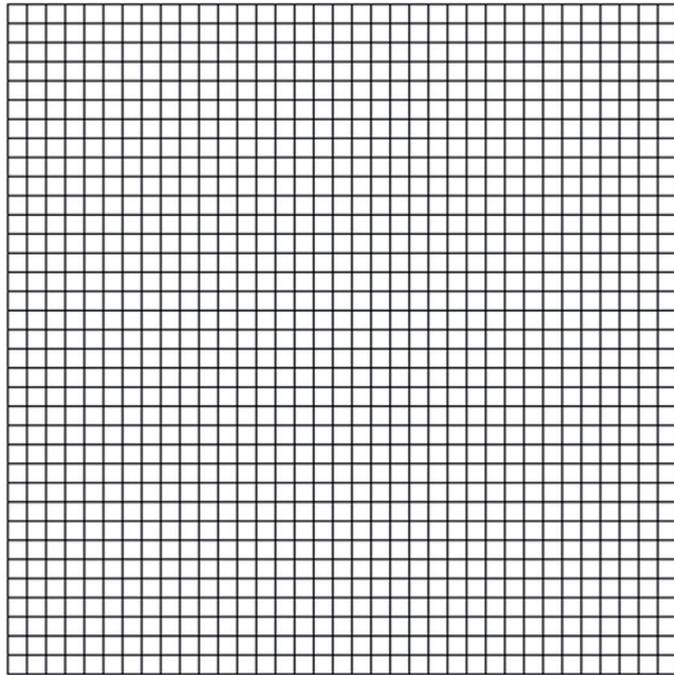
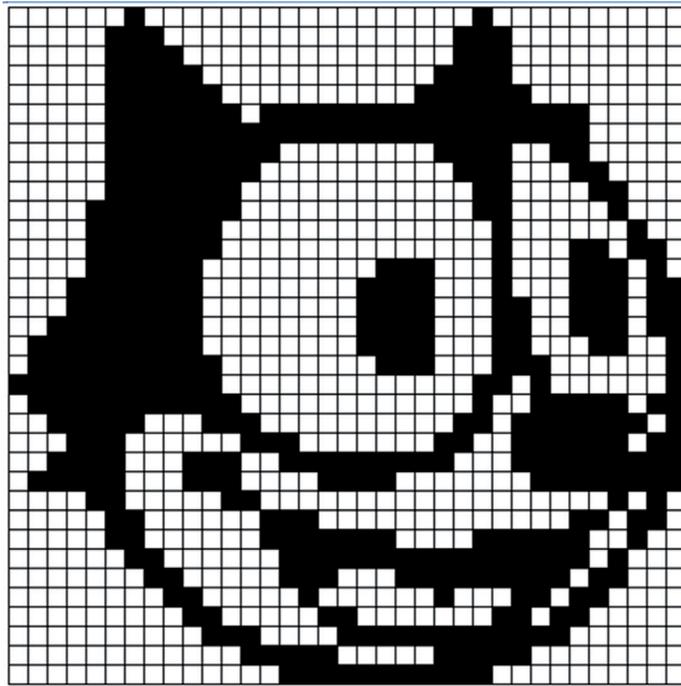
**53 a 57**

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Desenho Matrix	Datashow, computador, material disponível em <a href="http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html">http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html</a> , folha de atividades.	Esta atividade propõe uma reflexão sobre o que é uma matriz transposta através de sucessivas atividades envolvendo a alteração de imagens.  Obs.: Essa atividade foi adaptada de <a href="http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html">http://www.uff.br/cdme/matrix/matrix-html/matrix_boolean/matrix_boolean_br.html</a> , acesso em 07/07/2013	Turma dividida em grupos de 4 alunos.	25 minutos.

### Folha de atividades – Desenho Matrix

Nome da Escola: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_



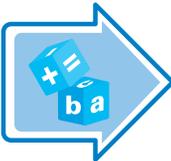
## Aspectos pedagógicos

- Apresente os conceitos de matriz transposta para os alunos antes mesmo de iniciar a atividade. Se preferir, utilize o primeiro desafio contido nesta atividade para mostrar aos alunos o que são matrizes transpostas.
- Talvez seja interessante explicar a transformação matricial antes mesmo da exibição das opções para os alunos. Mas isso fica a critério do professor.
- Sugira aos alunos que façam suas análises, explorem as transformações e esbocem a figura (ou, pelo menos, parte) na folha de atividades para que possam ter maior clareza na determinação da opção correta.
- Para cada um dos desafios contidos nesta atividade, é muito importante que seja discutida a transformação pedida. A sugestão é que o professor utilize as dicas que o próprio material produz, principalmente a DICA 2, que aparece mediante sucessivas marcações incorretas. Nessa dica, os alunos podem visualizar melhor a transformação sendo feita. Sugerimos que o professor prepare com antecedência esta explicação da DICA 2, evitando que a atividade se torne um jogo de tentativa e erro, o famoso “chute”, tornando a atividade desinteressante para o aluno.

### Seção 2 – Vamos operar com matrizes?

Páginas no material do aluno

53 a 57

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Determinantes e áreas	Calculadoras e cópias da Folha de atividades –	Nesta atividade, os alunos utilizarão o valor do determinante de uma matriz para calcular a área de um triângulo.	Turma dividida em duplas.	25 minutos.
		Determinantes e áreas (disponível na Seção Aspectos operacionais).	Obs: Propriedades dos determinantes e o cálculo da área de triângulos: exemplos significativos disponível em <a href="http://www.ime.usp.br/~rpm/conteudo/77/determinantes.pdf">http://www.ime.usp.br/~rpm/conteudo/77/determinantes.pdf</a>		

## Aspectos operacionais

- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades.
- Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

### Folha de atividades - Determinantes e Áreas

Nome da Escola: \_\_\_\_\_

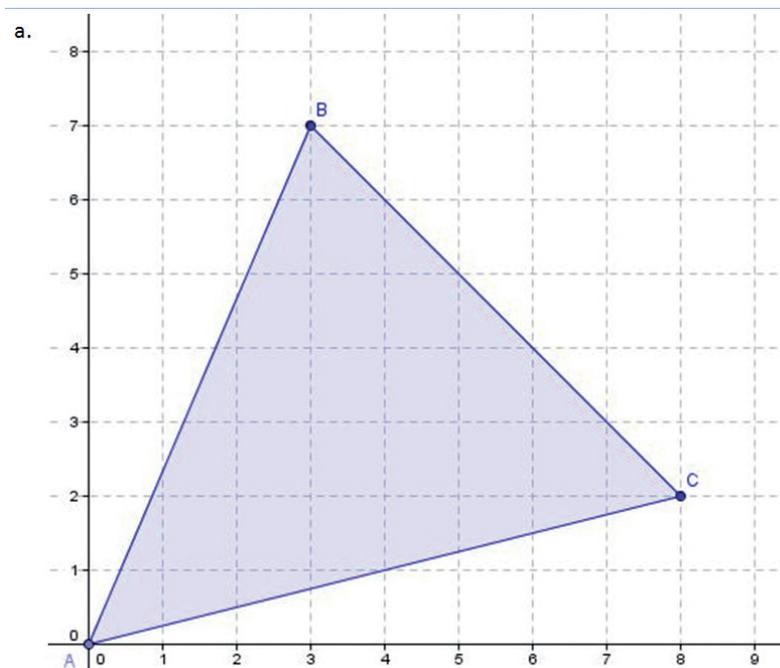
Nome: \_\_\_\_\_

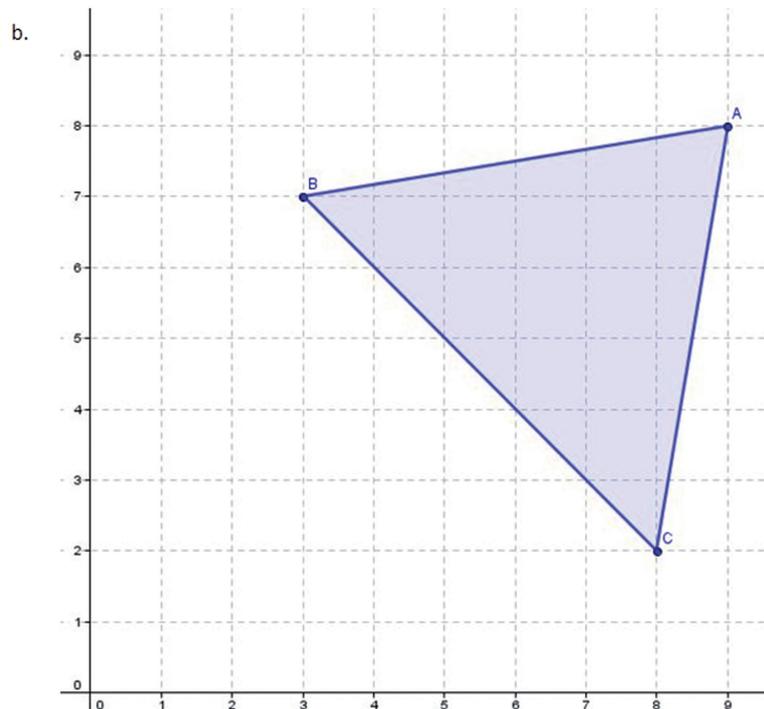
Hoje vamos utilizar o determinante para calcular a área de um triângulo. Se os vértices de um triângulo  $ABC$  são os pontos  $A=(x_A, y_A)$ ,  $B=(x_B, y_B)$  e  $C=(x_C, y_C)$ , a área do triângulo  $ABC$  pode ser calculada por:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\det S|, \text{ com } S = \begin{bmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{bmatrix}$$

#### Problemas

1. Calcule as áreas do triângulo cujos vértices são os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ :





---

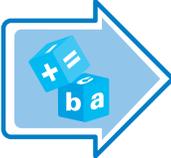
## Aspectos pedagógicos

- Como a fórmula da área envolve o uso da função módulo e a identificação das coordenadas cartesianas dos vértices dos triângulos, é interessante fazer uma revisão desses conceitos.
- Além disso, os alunos podem querer saber o porquê da utilização da fórmula. Mostre que tem relação com a distância entre pontos.
- Enfatize que outras aplicações, principalmente na área de tecnologia, são realizadas com o uso e cálculo de matrizes e determinantes.

## Seção 2 – Vamos operar com matrizes?

Páginas no material do aluno

53 a 57

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Campeonato de Determinantes	Cartões com números.	Esta atividade trabalha o cálculo de determinantes de matrizes de ordem 2.	Turma dividida em grupos de 4 alunos.	25 minutos.

### Aspectos operacionais

Inicialmente, todos os cartões deverão estar cortados e colocados sobre a mesa do professor. Produza a quantidade de cartões compatível com o número de alunos da turma. Escolha os números que achar conveniente, de forma que, inicialmente, seus alunos tenham maior facilidade nos cálculos.

Cada aluno deverá pegar um cartão aleatoriamente, sem poder ver e nem mostrar o número contido neste cartão (se quiser, coloque os cartões em envelopes, para garantir o sigilo).

Em seguida, os alunos deverão sentar-se nos grupos previamente estabelecidos com as carteiras no formato de uma matriz  $2 \times 2$ .

No verso de cada cartão, ainda sem ser exibido, o grupo deverá escrever a lápis as seguintes indicações de posição na matriz:  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ , e, então, ocuparem os respectivos lugares nas composições das matrizes.

Após determinarem as “linhas” e “colunas” da matriz  $2 \times 2$ , os números contidos nos cartões podem ser exibidos. Então, dará início a etapa de cálculo dos determinantes das matrizes formadas por cada grupo através da seguinte operação:  $a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$ .

É muito importante que os grupos não exponham os resultados para os demais grupos.

Pode acontecer que a quantidade de alunos presentes na sala de aula no dia desta aplicação não seja um número múltiplo de 4. Assim, os alunos que “sobrarem” também terão o direito de escolher os seus cartões e ocuparão uma posição de coringa na atividade, uma vez que não determinaram uma posição  $a_{ij}$ . O coringa será utilizado neste instante do desenvolvimento da atividade, sempre mantendo seu cartão sob sigilo.

Quando os determinantes já tiverem sido calculados, cada grupo terá a oportunidade de efetuar uma troca de um dos seus componentes. Para isso, preferencialmente, deverá substituir um dos alunos presentes naquele grupo por um dos alunos “coringas”, devendo ocupar a mesma posição na matriz que o aluno substituído. (Neste momento, o aluno que estiver entrando no grupo deverá anotar no verso do seu cartão a posição que passou a ocupar na matriz).

O aluno substituído ocupará a posição de “coringa”, porém respeitando a marcação de posição na matriz  $a_{11}$  ou  $a_{21}$  ou  $a_{12}$  ou  $a_{22}$  presente no verso do seu cartão. Caso haja algum grupo interessado em trocar seu componente por algum coringa oriundo de outro grupo (isto é, que possui a marcação de posição na matriz), a troca deverá ser feita por um aluno que ocupa a mesma posição na matriz, garantindo sempre a constituição correta de todos os termos da mesma. Somente após seu posicionamento no grupo, seu cartão poderá ser exibido e, assim, o determinante recalculado.

Vence o jogo o grupo que, após as trocas realizadas, conseguir o maior determinante.

---

## Aspectos pedagógicos

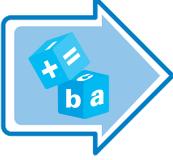
- Oriente os alunos para o cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem 2.
- A presença de números negativos pode ser um elemento dificultador para o cálculo dos determinantes, assim como o número zero. Observe de perto cada cálculo, para que o grupo sempre trabalhe com valores corretos para uma melhor tomada de decisão acerca das trocas a serem realizadas.
- A atividade foi pensada tendo os cartões sob sigilo. O professor pode experimentar realizar novamente a atividade excluindo a necessidade de manutenção de sigilo dos cartões. Assim, os alunos poderão traçar estratégias de cálculo mais sofisticadas que podem enriquecer os conceitos trabalhados.

## Atividades de Avaliação

Nesta seção, apresentaremos atividades que retomam as habilidades verificadas nas seções anteriores, com o intuito de consolidar e avaliar o processo de ensino/aprendizagem do conteúdo proposto. Uma parte dessa seção também enfatizará a reflexão do aluno sobre os conteúdos abordados.

Sugerimos a utilização dos dois últimos tempos de aula destinados a esta Unidade. A seguir, apresentamos sugestões para a retomada dos conteúdos trabalhados e para a avaliação das habilidades pretendidas. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir:

## Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Registros de aprendizagens	Cópias da folha de atividades	Esta etapa pode estar articulada à seção <b>“Veja ainda”</b> no material do aluno. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as resoluções dos exercícios de revisão, enfatizando as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta Unidade.	Individual	25 minutos

## Aspectos operacionais

Peça que os alunos resolvam os exercícios da folha de atividades para o aprimoramento e registro das aprendizagens que obtiveram durante as últimas aulas.

### Folha de atividades – Matrizes

Nome da Escola: \_\_\_\_\_

Nome: \_\_\_\_\_

Um grupo de alunos dos cursos 1, 2 e 3 solicita transferência para outro curso, escolhido entre os mesmos 1, 2 e 3. A matriz abaixo representa o resultado obtido após as transferências:

Se  $i \neq j$ , o elemento representa o número de estudantes do curso  $i$  que se transferiram para o curso  $j$ :

Se  $i = j$ , o elemento representa o número de estudantes do curso  $i$  que permaneceram no curso  $i$ .

$$\begin{bmatrix} 132 & 7 & 8 \\ 12 & 115 & 13 \\ 14 & 15 & 119 \end{bmatrix}$$

Admitindo que cada aluno pode matricular-se em apenas um curso, responda às perguntas:

- Quantos alunos permaneceram nos cursos 1, 2 e 3?
- Qual é o total de alunos transferidos?
- Quantos alunos se transferiram do curso 1?
- Antes das transferências, quantos alunos existiam no curso 1?
- Após as transferências, quantos alunos existem no curso 2?
- Quantos alunos foram transferidos para o curso 3?
- Qual o total de alunos nos cursos 1, 2 e 3?
- Considera essa forma de representação das informações, em uma matriz, eficaz? Por quê?

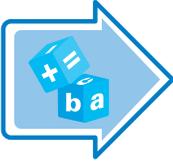
---

## Aspectos pedagógicos

Os alunos ainda podem cometer erros simples, porém graves, como a troca na identificação de  $i$  como linha e  $j$  como coluna. Essa troca leva a um erro de interpretação da matriz.

Se os alunos demonstrarem dificuldades maiores na resolução desta atividade, oriente-os, por exemplo, realizando a letra A, para que, assim, possam entender como é possível realizar a interpretação dos dados proposta na atividade.

## Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de avaliações de larga escala ou concurso	Cópias das questões.	Sugerimos, nesta etapa, a escolha de uma questão que contemple uma habilidade pretendida nesta Unidade para compor o instrumento avaliativo. A ideia é que o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como o ENEM, vestibulares, concursos, etc.	Individual	20 minutos

## Aspectos operacionais

A seguir, oferecemos questões matrizes: representação, linguagem e multiplicação.

### Questão 1

Prova: UNICENTRO - 2012 - UNICENTRO - Vestibular - ADAPTADA

Três amigos, P, Q e W, resolveram dar aulas de Química, Física e Matemática. P resolveu fazer uma tabela das aulas do grupo e construiu duas matrizes, M e N. Sabe-se que os elementos de cada linha de M correspondem às quantidades dos três tipos de aulas ministradas por P (1a linha), Q (2a linha) e W (3a linha), e que os elementos da coluna correspondem às quantidades de um mesmo tipo de aula. Os elementos de N correspondem aos preços unitários, em reais, de cada tipo de aula.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Nessas condições, é correto afirmar que,

- a. P recebeu 134 reais e Q recebeu 40 reais;
- b. Q recebeu 115 reais e W recebeu 48 reais;
- c. W recebeu 68 reais e P recebeu 134 reais;
- d. P recebeu 149 reais e Q recebeu 115 reais.

## Questão 2

Prova: COMPERVE - 2008 - UFRN - Vestibular

Uma companhia de aviação pretende fazer manutenção em três de seus aviões e, para isso, definiu o período de 4 dias, a contar da aprovação das propostas, para a conclusão do serviço. Os orçamentos (em milhares de reais) das três empresas que apresentaram propostas estão indicados na matriz  $A_{3 \times 3}$  abaixo, onde cada  $a_{ij}$  corresponde ao orçamento da empresa  $i$  para a manutenção do avião  $j$ ,

$$\begin{pmatrix} 23 & 66 & 17 \\ 19 & 62 & 12 \\ 28 & 57 & 08 \end{pmatrix}$$

Como cada uma dessas empresas só terá condições de efetuar, no prazo estabelecido, a manutenção de um avião, a companhia terá que escolher, para cada avião, uma empresa distinta.

A escolha que a companhia de aviação deverá fazer para que sua despesa seja a **menor** possível será:

- a. empresa 1: avião 1; empresa 2: avião 3 e empresa 3: avião 2.
- b. empresa 1: avião 1; empresa 2: avião 2 e empresa 3: avião 3.
- c. empresa 1: avião 3; empresa 2: avião 2 e empresa 3: avião 1.
- d. empresa 1: avião 2; empresa 2: avião 3 e empresa 3: avião 1.

---

## **Aspectos pedagógicos**

- Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas.
- Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Pondere as equivocadas, ressaltando onde reside o erro.
- As questões objetivas de vestibulares ou ENEM, em geral, têm em suas alternativas erradas sempre uma justificativa com erro plausível. Obviamente, isso não está evidente na alternativa. Dessa forma, procure identificar o erro que gerou cada uma das alternativas e discuta com os alunos.