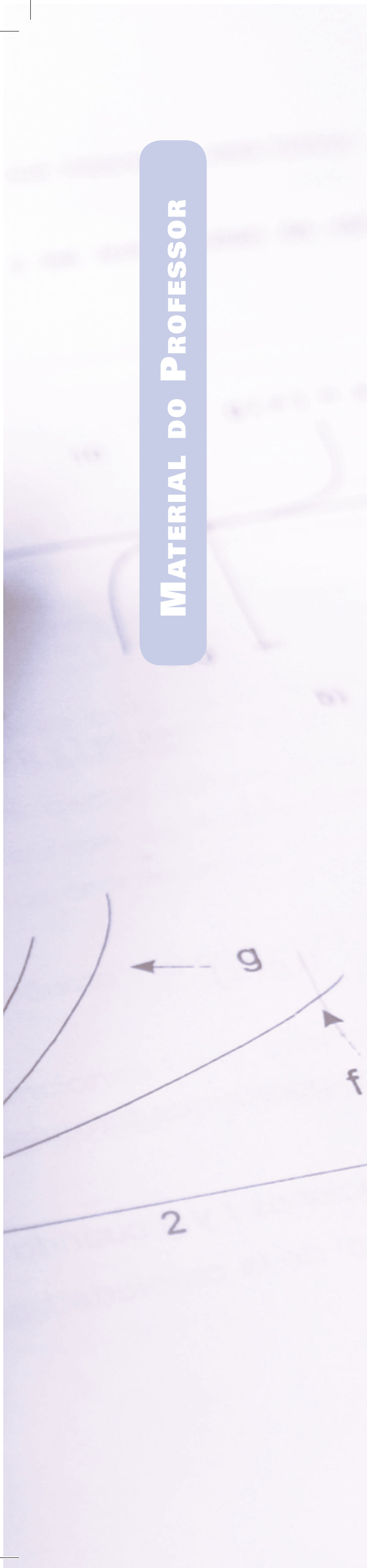


Volume 2 • Módulo 3 • Matemática • Unidade 6

Sistemas Lineares

Heitor Barbosa Lima de Oliveira (coordenação), Josemeri Araujo Silva Rocha (coordenação), Luciana Felix da Costa Santos, Luciane de Paiva Moura Coutinho, Patrícia Nunes da Silva. Rommulo Barreiro

Introdução

Na unidade 30 do material do aluno, são apresentadas várias situações cotidianas que envolvem Sistemas Lineares. Preparamos, com muito carinho, para você um material complementar para enriquecer a abordagem dos objetivos do módulo do aluno, que são os seguintes:

- Identificar uma equação linear;
- Encontrar a solução de uma equação linear;
- Identificar um sistema linear;
- Identificar sistemas possíveis e impossíveis;
- Identificar um sistema na forma escalonada;
- Resolver um sistema por escalonamento.

Com o intuito de ampliar as possibilidades de exploração do tema em suas aulas, pesquisamos alguns recursos e atividades para auxiliar a você, professor.

ue a primeira aula desta unidade se inicie com uma atividade disparadora, e por isso, ı *Explorando a Matemática Financeira*, os alunos deverão descobrir o valor de cada item envolve sistemas de equações. Já na atividade *Comendo Números*, os alunos assistirão é orientado por uma nutricionista a fazer uma dieta correta. O desenvolvimento desse stema linear.

estudo desta unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de fazer as alterações e adaptações que julgar necessárias.

Na Seção 1, a atividade *Café da Manhã Sistematizado* propõe que os alunos resolvam, de forma intuitiva, um problema sobre a quantidade de nutrientes necessárias ao ser humano no café da manhã. Já na atividade *Lucro ou Prejuízo*, propomos uma análise gráfica de duas equações que representam a receita e o custo para a fabricação de um determinado produto.

Para a Seção 2, escrevemos a atividade *Azul, Amarelo e Vermelho*, que promove uma discussão do sistema de equações pelo método gráfico e a atividade *Galinhas, Coelhos e Stringlings*, onde o tradicional problema da quantidade de animais de acordo com o número de patas e cabeças se transforma numa grande discussão acerca das mais diferentes formas de resolução de um sistema de equações.

A Seção 3 é contemplada pela atividade *Contagem de Passos*, onde utilizamos um áudio, e o problema é determinar o comprimento de uma ponte que será enfeitada com flores, associando-o a um sistema linear 3×2.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos: o primeiro dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo e o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

Uma descrição destas sugestões está colocada nas tabelas a seguir, e seus detalhamentos no texto que segue.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	3	6	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Sistemas Lineares	Sistemas Lineares
Objetivos da unidade	
Identificar uma equação linear;	
Aprender a encontrar a solução de uma equação linear;	
Identificar sistemas possíveis e impossíveis;	
Identificar um sistema na forma escalonada;	
Resolver um sistema por escalonamento.	

Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	5 e 6
Seção 1 – Problemas envolvendo equação linear.	7 a 9
Seção 2 – Aprendendo um pouco de Sistemas lineares 2 x 2.	9 a 14
Seção 3 – Aprendendo um pouco sobre Sistemas lineares m x n.	15 a 19
Resumo	20
Veja ainda	20
O que perguntam por aí?	21

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

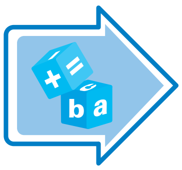
Proposições de exercícios complementares

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Sistemas lineares escondidos	Computador com acesso à internet, dicionário inglês-português.	Nesta atividade, os alunos irão se familiarizar com a construção de matrizes e a notação matricial através da resolução de quebra-cabeças que envolvem somas.	A atividade pode ser realizada em duplas ou segundo a disponibilidade de computadores da escola.	40 minutos
	Comendo Números	Computador com acesso à internet, Datashow, Pendrive.	Os alunos assistirão a um vídeo em que um rapaz é orientado por uma nutricionista a fazer uma dieta correta. O desenvolvimento destse bate papo resultará em um sistema linear.	O vídeo será assistido por toda turma. Em seguida, a discussão pode ser feita em grupo (sugestão de 4 alunos).	40 minutos

Seção 1 – Problemas envolvendo equação linear

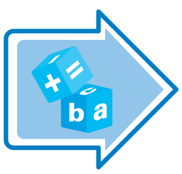
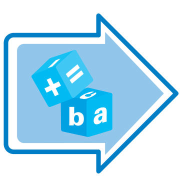
Páginas no material do aluno
7 e 9

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Café da Manhã Sistematizado.	Lousa, caneta para quadro, caderno, lápis.	A atividade propõe que os alunos resolvam, de forma intuitiva, um problema sobre a quantidade de nutrientes necessárias ao ser humano no café da manhã e que recai num sistema de equações.	A atividade deve ser desenvolvida em grupos de até 4 pessoas..	40 minutos.
	Lucro ou Prejuízo?	Computador com o software Geogebra instalado.	A atividade propõe uma análise gráfica de duas equações que representam a receita e o custo para a fabricação de um determinado produto. Baseada na atividade “Fazendo economia” do material da Fundação CECIERJ para a Formação Continuada de Professores da rede estadual do Rio de Janeiro.	Turma dividida em duplas.	40 minutos.

Seção 2 – Aprendendo um pouco de sistemas lineares 2 x 2

Páginas no material do aluno

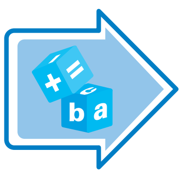
9 a 14

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Azul, Amarelo e Vermelho.	Lápis de cor azul, amarelo e vermelho, cópias dos cartões das equações e cópias da Folha de atividades – Azul, Amarelo e Vermelho, disponível no Pendrive.	Esta atividade promove a discussão do sistema de equações pelo método gráfico.	Turma dividida em duplas.	25 minutos.
	Galinhas, coelhos e Stringlings.	Cópias da Folha de atividades – Dieta de Cambridge (disponível no Pendrive).	O tradicional problema da quantidade de animais, de acordo com o número de patas e cabeças, se transforma numa grande discussão acerca das mais diferentes formas de resolução de um sistema de equações.	Turma dividida em duplas ou em trios.	40 minutos.

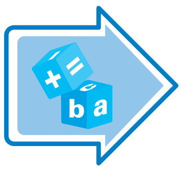
Seção 3 – Aprendendo um pouco de Sistemas lineares m x n

Páginas no material do aluno

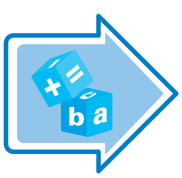
15 a 19

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Contagem de Passos.	Os dois módulos de áudio referentes ao recurso Contagem de Passos disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1308, calculadoras e cópias da Folha de atividades – Contagem de Passos, disponível no Pendrive.	No áudio utilizado nessa atividade, o problema de determinar o comprimento de uma ponte que será enfeitada com flores é associado a um sistema linear 3×2.	Turma dividida em duplas.	40 minutos.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade.	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade, dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões, tanto objetivas como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Individual	40 minutos

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de Fixação Complementares.	Folha de Atividades disponíveis no Pendrive, lápis/caneta.		Turma dividida em duplas ou em trios.	

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Sistemas lineares escondidos	Computador com acesso à internet, dicionário inglês-português.	Nesta atividade, os alunos irão se familiarizar com a construção de matrizes e a notação matricial através da resolução de quebra-cabeças que envolvem somas.	A atividade pode ser realizada em duplas ou segundo a disponibilidade de computadores da escola.	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, o jogo proposto está em inglês, mas este fato não impossibilita a execução da atividade mesmo que o jogador não tenha fluência na língua. Caso sinta necessidade, tente buscar ajuda com o seu colega de língua estrangeira.

Oriente seus alunos da seguinte maneira:

1ª etapa: Acessar o site http://www.mathplayground.com/algebraic_reasoning.html.

2ª etapa: Peça a seus alunos para clicarem no número 1 em Choose a starting level (Escolha o nível inicial), o que fará com que eles selecionem o nível 1 do jogo.

3ª etapa: O aluno deve digitar no quadro em branco o valor do item pedido. Este valor corresponde ao valor procurado para cada item (Find the value of ...). Eles variam a cada partida, e por isso, é difícil colocar a tradução de todos aqui, mas são vocabulários simples tal como flower (flor), guitar (violão), popcicle (picolé), que facilmente os alunos podem encontrar em um dicionário de bolso ou até mesmo em uma rápida pesquisa na internet.

4ª etapa: Clicando em Check, o aluno verá se acertou ou não. Caso tenha acertado, basta clicar em Next e ir para próxima questão. Caso tenha errado, ele pode tentar novamente, clicar em Hint para obter uma dica (que só será útil se o aluno souber inglês) ou até mesmo em Answer, para obter a resposta. A proposta é que o aluno responda às 10 questões do nível 1.

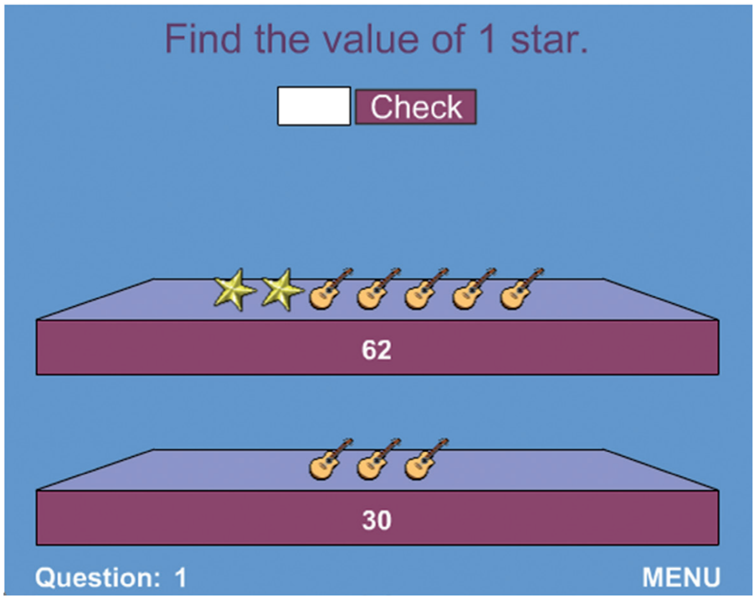
Aspectos pedagógicos

Professor, o objetivo desta atividade é que o aluno resolva, de maneira intuitiva, sistemas lineares, ainda sem utilizar a formalização do conteúdo. Desta maneira, há uma maior aproximação do aluno ao conteúdo que será trabalhado e por consequência uma "quebra" de possíveis barreiras que poderiam existir no desenvolvimento do assunto. O aluno irá mais confiante para as próximas aulas e entendendo a necessidade do assunto.

Outro aspecto que pode ser trabalhado é um projeto de vocabulários básicos com o professor de inglês ou até mesmo de tradução das dicas (Hint), o que seria um trabalho mais elaborado.

Você pode aproveitar esta atividade nas seções posteriores para introduzir os métodos de resolução de sistemas lineares, formalizando alguns exemplos que os alunos resolveram intuitivamente.

Como no seguinte exemplo:



Os alunos podem ter resolvido, por exemplo, este exercício de maneira não formal. Você pode utilizá-lo como motivação e estruturar um sistema. Pergunte-os as estratégias que eles utilizariam para resolvê-los e monte um paralelo com a formalização mais trivial como a descrita a seguir:

v - violão

e - estrela

Não se esqueça de enfatizar a importância da definição das incógnitas e que não precisam ser os habituais x e y, podendo ter relação com o objeto envolvido no problema para facilitar o aluno no final.

$3v = 30$

$5v + 2e = 62$

Se houver necessidade, faça uma revisão de resolução de equação de 1o grau.

$v = 30/3 = 10$

Como $v = 10$

Valor Violão: 10

$5 . 10 + 2e = 62$

$50 + 2e = 62$

$2e = 62 - 50$

$2e = 12$

$e = 12/2 = 6$

Valor Estrela: 6

Caso a turma se interesse, você pode sugerir que façam também as questões dos níveis 2 e 3.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Comendo Números	Computador com acesso à internet, Datashow, Pendrive.	Os alunos assistirão a um vídeo em que um rapaz é orientado por uma nutri-cionista a fazer uma dieta correta. O desenvolvimento destse bate papo resultará em um sistema linear.	O vídeo será assistido por toda turma. Em seguida, a discussão pode ser feita em grupo (sugestão de 4 alunos).	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, esta atividade se dará da seguinte maneira:

Primeiramente, exiba o vídeo disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1073 até os 5:53 minutos.

Após a exibição dessse trecho, peça para que, em grupos, os alunos definam, pesquisando em livros ou na internet, alguns conceitos fundamentais e que devem estar bem solidificados para o desenvolvimento do conteúdo ao longo destsa unidade. São eles:

- Incógnita.
- Equação linear.
- Sistema Linear.

Ao final, peça para que os grupos compartilhem com a turma o resultado da pesquisa.

Aspectos pedagógicos

Professor, de nada adianta uma série de estratégias de resolução de sistemas lineares se os alunos não sabem conceitos básicos e não entendem o motivo da resolução de inúmeras contas. Por isso, é fundamental que os alunos os entendam bem, antes de dar continuidade no estudo de sistema de equações.

- Incógnita - valor desconhecido geralmente representado por letras, utilizado para representar o valor ou valores que se pretende descobrir;
- Equação - modela matematicamente uma situação real que envolve uma igualdade de valores

Forma geral da equação linear:

$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$

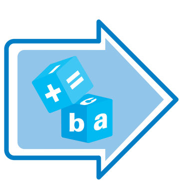
onde os elementos $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ são coeficientes das incógnitas $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ respectivamente e o termo b é o termo independente, ou seja, valor numérico real da equação linear;

- Sistema Linear - Conjunto finito de equações lineares.

Seção 1 – Problemas envolvendo equação linear

Páginas no material do aluno

7 e 9

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Café da Manhã Sistematizado.	Lousa, caneta para quadro, caderno, lápis.	A atividade propõe que os alunos resolvam, de forma intuitiva, um problema sobre a quantidade de nutrientes necessárias ao ser humano no café da manhã e que recai num sistema de equações.	A atividade deve ser desenvolvida em grupos de até 4 pessoas..	40 minutos.

Aspectos operacionais

Professor, hoje em dia, a alimentação representa um aspecto importante na vida da população mundial e desperta grande preocupação.

Baseado nisso, escolhemos esse tema para motivar e ilustrar nossa primeira atividade da Seção 1, dando continuidade ao assunto exibido no vídeo *Comendo Números* da Atividade 3 da seção "Pra início de conversa" .

Sabemos que o café da manhã deve ser a principal refeição do dia. Selecionamos alguns itens que podem compor o nosso café da manhã.

	Mamão Papaia (porção de 100 g)	Pão com Manteiga (porção de 50 g).	Café com Leite (porção de 200 ml).
Carboidrato (g)	6	32	4
Lipídio (g)	0	6	4
Proteína(g)	0	0	6

Informe a seus alunos que uma pessoa pesando 50 Kg necessita no seu café da manhã de aproximadamente:

- Carboidratos: 58 g.
- Lipídios: 14 g.
- Proteínas: 12 g.

Primeiramente, coloque no quadro negro a tabela nutricional e a quantidade necessária de cada item.

Em seguida, proponha a seus alunos que encontrem quantas porções de mamão papaia, café com leite e pão com manteiga uma pessoa de 50 kg precisa comer no café da manhã.

Aspectos pedagógicos

O objetivo desta atividade é que, sem o conhecimento de nenhuma nova estratégia, eles possam resolver o problema, de maneira intuitiva, com os conhecimentos que já possuem. Para que o aluno se sinta motivado em aprender mais e melhor sistemas lineares, separamos uma atividade que tem como pano de fundo a nutrição, um tema muito debatido na atualidade e que desperta bastante interesse de jovens e adultos.

Os alunos poderão optar por diversos caminhos para resolução do problema a seguir. Peça para que eles exponham em voz alta para a turma as estratégias utilizadas, mesmo aqueles que não conseguiram resolver todo o problema.

Com base no que for apresentado em sala, busque ressaltar os seguintes aspectos:

1. Defina as incógnitas:

c - café com leite;

m - mamão papaia;

p - pão com manteiga.

2. Mostre aos alunos que é mais fácil calcular o valor da proteína, pois só aparece no café com leite. Temos a seguinte equação:

0m + 0p + 6c = 12 => c = 2,

ou seja, café com leite equivale a 2 porções.

3. Depois, seguindo esta lógica, descubra o valor, utilizando o valor dos lipídios:

0m + 6p + 4.2 = 14 => 6p = 14 – 8 => 6p = 6 => p = 1

Ou seja, pão com manteiga equivale a 1 porção.

4. E, por fim, utilizando o valor dos carboidratos:

6m + 32. 1 + 4.2 = 58 => 6m = 58 - 32 – 8 => 6m = 18 => m = 3

Temos que precisamos de 3 porções de mamão. Ressalte com a turma a importância de ter 3 equações no sistema para encontrarmos o valor das 3 incógnitas.

Outro aspecto que pode ser abordado nesta atividade é um trabalho interdisciplinar com o professor de Biologia, sendo possível até uma palestra com um nutricionista para falar sobre a importância de uma alimentação saudável.

Seção 1 – Problemas envolvendo equação linear

Páginas no material do aluno

7 e 9

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Lucro ou Prejuízo?	Computador com o software Geogebra instalado.	A atividade propõe uma análise gráfica de duas equações que representam a receita e o custo para a fabricação de um determinado produto. Baseada na atividade "Fazendo economia" do material da Fundação CECIERJ para a Formação Continuada de Professores da rede estadual do Rio de Janeiro.	Turma dividida em duplas.	40 minutos.

Aspectos operacionais

No laboratório de informática, divida a turma em duplas ou conforme a disponibilidade de computadores na sala. Caso não seja possível fazer uso desse espaço, sugerimos que você leve para a sala de aula um computador com o software Geogebra instalado, além de um Datashow.

O Geogebra é um software matemático gratuito, dinâmico e de fácil manipulação, que pode ser baixado através do link http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/ .

Antes de iniciar a atividade, discuta com seus alunos alguns conceitos ligados à Matemática Financeira, que fazem parte do nosso dia a dia, como Custo, Receita e Lucro.

Peça que eles abram o arquivo *"Lucro ou Prejuizo.ggb"* (ele está disponível no Pendrive).

A equação da receita para certa marca de pasta de dentes é **R = 2,5x**, em que x é o número de tubos de pasta de dentes. A equação do custo é **C = 0,9x + 3000**, em que **x** é o número de tubos de pasta de dentes fabricados.

No gráfico tem-se a representação das equações da Receita e do Custo (em reais) para a fabricação de x pastas de dente.

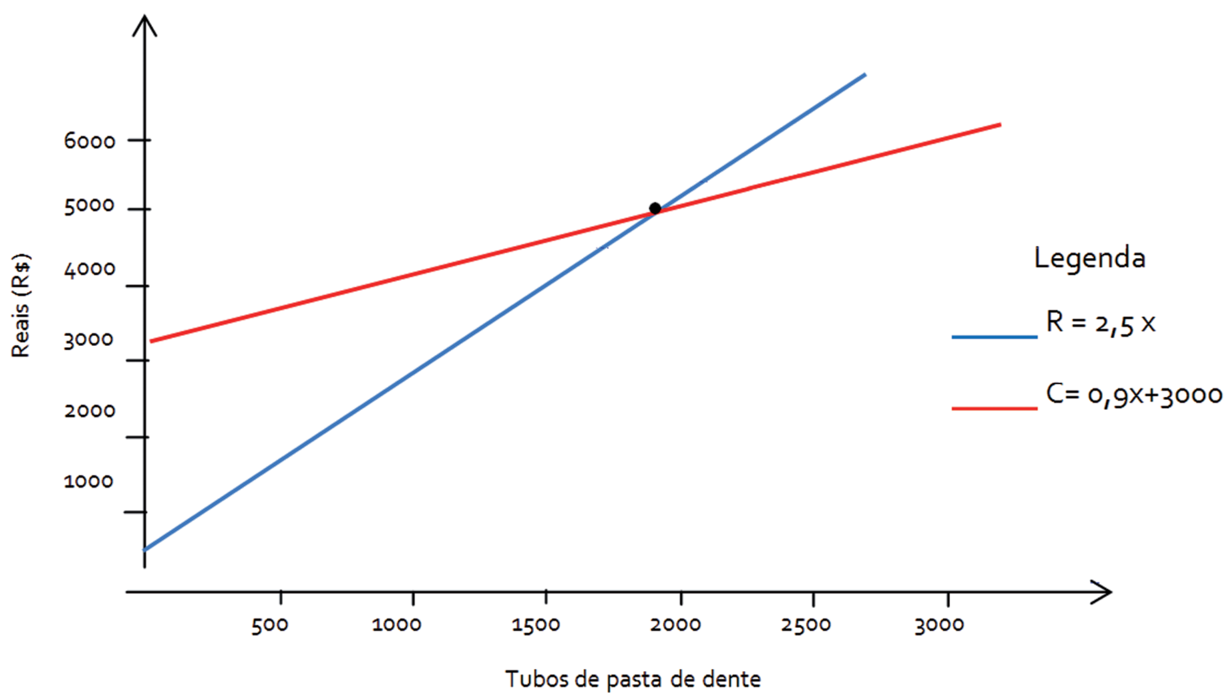


Figura 1 – Equação de Custo e Equação da Receita na fabricação de pastas de dente.

Ao observar o gráfico, eles devem responder às seguintes perguntas:

a. Se a empresa de pasta de dente vender 2500 tubos, a companhia ganha ou perde dinheiro? Por quê?

b. Se a empresa de pasta de dente vender 1600 tubos, a companhia ganha ou perde dinheiro? Por quê?

c. Com certa quantidade de pasta de dente vendida, a empresa iguala custo e receita em suas contas e, a partir daí, começa a ter lucro. Qual o ponto do gráfico que representa esta situação?

d. Como encontrar este ponto? Que cálculos você pode fazer para encontrar o número x que representa o número de tubos de pasta de dente, a partir do qual a empresa começa a ter lucro?

Aspectos pedagógicos

O objetivo dos itens (a) e (b) é fazer com que os alunos percebam que quando o custo é maior do que a receita, a empresa tem prejuízo e que quando o contrário ocorre, a empresa tem lucro. Assim, quando a quantidade vendida é 2500 tubos, a empresa tem lucro e quando vende 1600 tubos de pasta de dente, a empresa tem prejuízo.

Nos itens (c) e (d) você, professor, deve fazer com que os alunos percebam que o ponto de interseção entre as retas que representam a Receita e o Custo é a solução do sistema $\begin{cases} R = 2.5x \\ C = 0.9x + 3000 \end{cases}$ (que, inicialmente, apresenta 2 equações e 3 incógnitas).

Impondo a condição R = C e usando uma das duas letras o sistema pode ser reescrito, agora com duas incógnitas, como $\begin{cases} R = 2.5x \\ R = 0.9x + 3000 \end{cases}$.

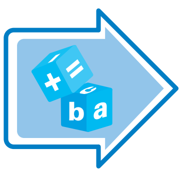
Nesse ponto, ou seja, para 1875 tubos de pasta vendidos a empresa “sai do vermelho” e não tem nem ganhos nem perdas. A partir desse ponto, a empresa começa a ter lucro.

Outra forma de verificar a quantidade de tubos a serem vendidas para igualar Receita e Custo é no utilizar a ferramenta  ,interseção entre dois objetos. Para isso, basta escolher a ferramenta e selecionar as duas retas traçadas. Aparecerá no canto esquerdo da tela o ponto A de abscissa 1875.

Seção 2 – Aprendendo um pouco de sistemas lineares 2 x 2

Páginas no material do aluno

9 a 14

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Azul, Amarelo e Vermelho.	Lápis de cor azul, amarelo e vermelho, cópias dos cartões das equações e cópias da Folha de atividades – Azul, Amarelo e Vermelho, disponível no Pendrive.	Esta atividade promove a discussão do sistema de equações pelo método gráfico.	Turma dividida em duplas.	25 minutos.

Aspectos operacionais

Imprima os cartões a seguir, disponibilizados no *pendrive*, recorte-os e deixe-os sobre a sua mesa, voltados para baixo.

$x + y = 1$	$x - y = 5$
$x - y = 3$	$2x + 2y = 6$
$x + y = 3$	$2x - 2y = 6$

$2x - 2y = 2$

Cartões com as equações

Distribua a folha de atividades para cada dupla. Deixe que cada dupla se dirija à sua mesa para sortear os dois cartões contendo as equações que irão compor a atividade. Peça que a dupla escreva, no local apropriado, as equações sorteadas, conforme indicação na folha de atividades.

Com o sistema de equações pronto, cada integrante da dupla irá escolher um lápis da cor azul, amarela ou vermelha para pintar na malha quadriculada os quadradinhos que correspondem às coordenadas de solução da sua equação. O outro integrante da dupla escolherá outra cor de lápis e fará o mesmo processo com a sua respectiva equação.

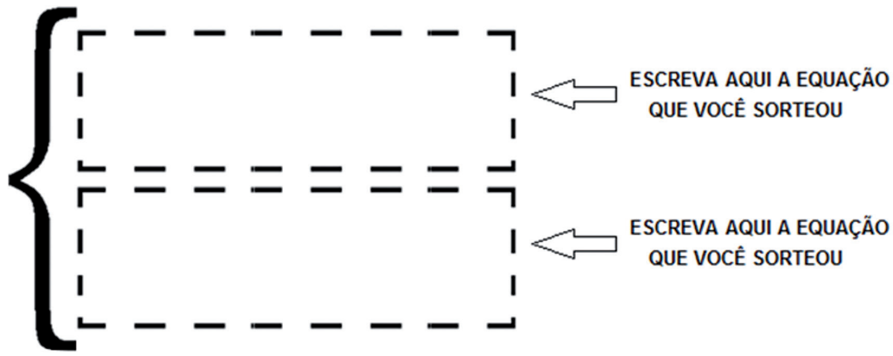
As possíveis interseções dos gráficos aparecerão em cores diferentes pela própria interação dos lápis azul, amarelo e vermelho. Isto chamará a atenção dos alunos para a presença desta interseção que irá definir se o sistema é Possível Determinado (quando houver uma única interseção), Possível Indeterminado (quando houver várias interseções) ou Impossível (quando não houver interseções).

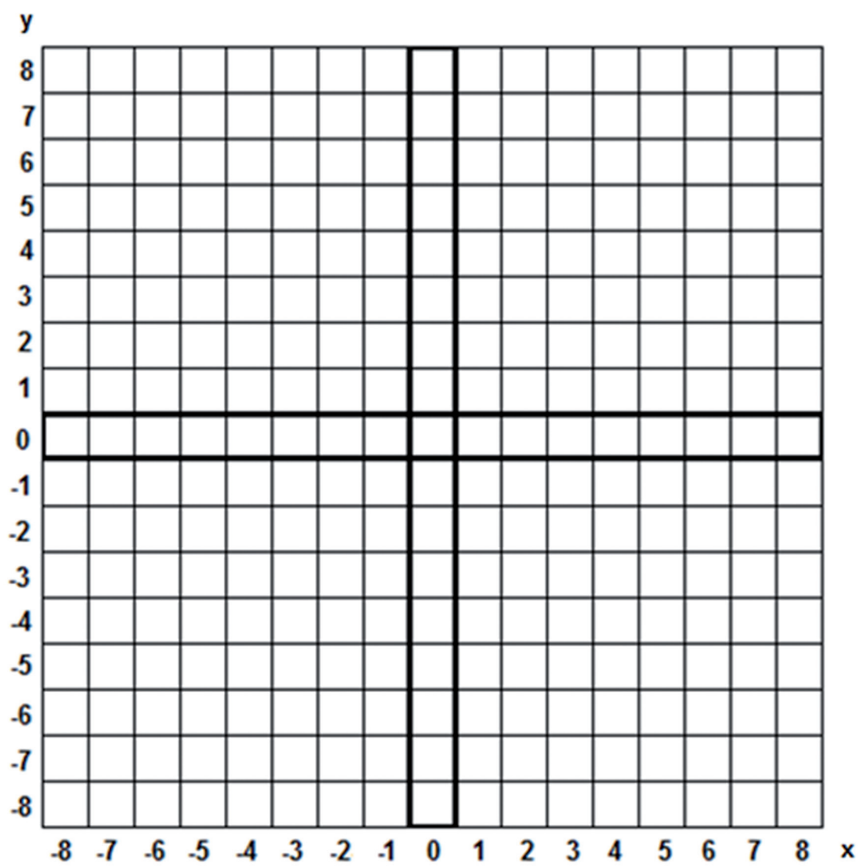
Ao final, a dupla irá indicar a conclusão que chegou com a discussão do sistema.

Folha de atividades – Azul, Amarelo e Vermelho

Nome da Escola: ____

Nome: ____


ESCREVA AQUI A EQUAÇÃO QUE VOCÊ SORTEOU
ESCREVA AQUI A EQUAÇÃO QUE VOCÊ SORTEOU


y
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8
x

Conclusão

- ☐ Sistema Possível e Determinado
- ☐ Sistema Possível e Indeterminado
- ☐ Sistema Impossível

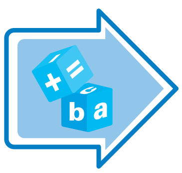
Aspectos pedagógicos

- Esta atividade não é um jogo e também não se propõe a fazer com que os alunos disputem. É uma interação entre eles que pode gerar gráficos diferentes com cores diferentes que, além de um importante gancho para o professor, é um trabalho bonito. Seria interessante que a folha de atividades pudesse ser exposta na sala de aula como trabalho dos alunos.
- Os pares ordenados obtidos para cada uma das equações devem respeitar os limites da malha quadriculada. Alguns alunos podem se sentir incomodados por haver colunas que não possuirão correspondência com as linhas exatamente por esta limitação da malha. Instrua-os neste sentido.
- A atividade gera imagens bonitas devido ao uso das cores primárias. A interseção das cores gera novas cores que serão usadas como um ponto de atenção para os alunos. Este ponto ou estes pontos irá(irão) definir se o sistema é determinado (uma interseção), indeterminado (diversas interseções) ou impossível (nenhuma interseção).

Seção 2 – Aprendendo um pouco de sistemas lineares 2 x 2

Páginas no material do aluno

9 a 14

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Galinhas, coelhos e Stringlings.	Cópias da Folha de atividades – Dieta de Cambridge (disponível no Pendrive).	O tradicional problema da quantidade de animais, de acordo com o número de patas e cabeças, se transforma numa grande discussão acerca das mais diferentes formas de resolução de um sistema de equações.	Turma dividida em duplas ou em trios.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Divida a turma em duplas ou trios e distribua as folhas de atividades contendo uma descrição do problema das galinhas e dos coelhos. À medida que os alunos forem desenvolvendo as soluções, aproxime-se de cada grupo separadamente e peça para que eles expliquem o raciocínio utilizado para solucionar o problema.

Somente permita que os alunos avancem para a segunda parte da atividade após a conclusão e explicação da primeira parte.

Folha de atividades – Galinhas, coelhos e Stinglings

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Parte 1

Problema:

Num quintal existem galinhas e coelhos, ao todo 11 cabeças e 30 pés. Quantas são as galinhas e quantos são os coelhos do quintal?

Resolva o problema acima de duas maneiras diferentes.

Parte 2

Problema:

Num planeta distante daqui, os Stringlings são povos muito diferentes de nós. Os Stringlings do sexo masculino possuem 2 cabeças e 3 patas e os de sexo feminino, 3 cabeças e 5 patas. Um ambiente de estudos daquele planeta reunia Stringlings de ambos os sexos, num total de 107 cabeças e 172 patas.

Utilize as duas formas de resolução aplicadas na 1ª parte desta atividade para resolver o problema dos Stringlings. Verifique se é possível utilizar o mesmo raciocínio (de forma adaptada), neste segundo problema, discutindo com seu grupo se o método de resolução utilizado anteriormente é específico para o 1º problema ou se é generalizável para todos os problemas similares a este.

Aspectos pedagógicos

Em geral, os alunos aplicam como primeiro método de resolução um sistema de equações. Mas o problema quer discutir métodos de resoluções variados através, principalmente, da aritmética. E é neste ponto que os alunos mostram mais dificuldades. Busque orientá-los dando-lhes sugestões de ideias para as resoluções diferentes para cada grupo, pois esta atividade fica mais interessante quando surgem diversos tipos de resolução. Afinal, isto permite que haja uma boa discussão sobre o problema em sala de aula.

Algumas soluções diferentes do sistema de equações podem claramente servir apenas para aquele problema das galinhas e coelhos. Não interfira junto ao grupo caso isso ocorra, pois o segundo problema poderá mostrar que não é possível resolver, daquela maneira, aquele outro problema. Isso vai enriquecer muito a discussão em sala de aula.

Oriente os alunos nas diferentes maneiras de resolução do sistema de equações e verifique quais os métodos utilizados para esta resolução. Podem ocorrer dificuldades neste momento da atividade por parte dos grupos. A ideia é que eles não fiquem "travados" nesta parte do desenvolvimento da atividade, pois a criação de mais um método de resolução do problema é um ponto de suma importância para a discussão proposta.

Aproveite métodos aritméticos para justificar a construção das equações do sistema da 1ª parte da atividade. Esta discussão auxilia no entendimento da modelagem dos dados fornecidos na questão através de variáveis, isto é, num âmbito mais algébrico.

Possíveis soluções para o problema das galinhas e coelhos.

1º método:

$$\begin{cases} x + y = 11 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$$

$x= 11-y \Rightarrow$ substituindo na segunda equação

$2(11-y)+4y=30$

$22-2y+4y=30$

$2y=30-22$

$2y=8$

$\boldsymbol{y=4}$

Portanto, $x = 11 - 4 =$ **7**

Logo, são 7 galinhas e 4 coelhos.

2º método:

Se dos 11 animais (11 cabeças), 8 fossem galinhas, o nº de coelhos seria $11 - 8 = 3$; se fossem 6 as galinhas, os coelhos seriam $11 - 6 = 5$ e se fossem 3 as galinhas, os coelhos seriam $11 - 3 = 8$. Dessa forma, se existem 11 animais e o nº de galinhas é x, o nº de coelhos é $11 - x$. Então, como existem x galinhas, existem no quintal $2x$ pés de galinhas e, sendo $11 - x$ o nº de coelhos, $4.(11 - x)$ é o nº de pés de coelhos. O problema nos informa que no quintal existem 30 pés (nº de pés de galinha + nº de pés de coelhos). Simbolicamente, temos: $2x + 4(11 - x) = 30$.

Resolvendo esta equação, encontramos $x = 7$.

Logo, o nº de galinhas é 7 e o nº de coelhos é $11 - 7 = 4$.

3º método:

Se no quintal existissem apenas galinhas, o nº de pés seria 22, visto que, uma galinha possui 2 pés e 11 galinhas totalizariam $2.11 = 22$ pés. Porém, o nº de pés registrados no quintal foi de 30, faltando então $30 - 22 = 8$ pés, o que nos levou a afirmar que, no quintal, havia animais com mais de 2 pés, no caso os coelhos com 4. Esses 8 pés são de coelhos. Dando 2 para cada um, encontramos a quantidade dos mesmos. Logo o nº de coelhos é 4 (8 : 2). Se o nº de coelhos é 4, o nº de galinhas é 7 (11 – 4).

4º método:

Se no quintal os animais fossem só coelhos, o nº de pés seria 44, pois cada coelho possui 4 pés e o total de pés de 11 coelhos é de $11 . 4 = 44$, resultado este que não bate com o nº de pés fornecido no problema. O nº de pés excedentes 14 (44 – 30) corresponde aos pés de galinhas contados a mais que devem ser retirados aos pares, facilitando o cálculo da quantidade dessas galinhas. Sendo assim, o nº de galinhas é 7 (14 : 2) e o nº de coelhos 4 (11-7).

5º método:

Primeiro, vamos ao quadro enumerar as cabeças, simbolizando cada uma delas com uma bolinha, fazendo a contagem;

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Vamos agora colocar dois pezinhos em cada uma dos animais. Foram colocados 22 (vinte e dois) pezinhos. Então, estão sobrando pés!

Sobraram $30 - 22 = 8$ (oito) pés .

Então, vamos dar mais dois pés para alguns animais, para poder “gastar” esses 8 (oito) pés que sobraram. Com isso, 7 animais ficaram com dois pés e 4 ficaram com 4 pés. Portanto, no quintal existem 7 galinhas e 4 coelhos .

6º método:

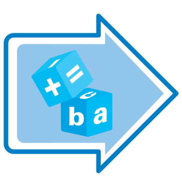
Galinhas	Coelhos	Total de cabeças	Pés de galinha	Pés de coelho	Total de pés
2	9	11	2.2=4	4.9=36	40
3	8	11	2.3=6	4.8=32	38
4	7	11	2.4=8	4.7=28	36
...	...	...	...	...	...
7	**4**	**11**	**2.7=14**	**4.4=16**	**30**

OBS: Existem mais de 20 maneiras diferentes de resolução para o mesmo exercício.

Seção 3 – Aprendendo um pouco de Sistemas lineares m x n

Páginas no material do aluno

15 a 19

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Contagem de Passos.	Os dois módulos de áudio referentes ao recurso Contagem de Passos disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1308, calculadoras e cópias da Folha de atividades – Contagem de Passos, disponível no Pendrive.	No áudio utilizado nessa atividade, o problema de determinar o comprimento de uma ponte que será enfeitada com flores é associado a um sistema linear 3×2.	Turma dividida em duplas.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Reproduza o primeiro módulo do recurso *Contagem de Passos* para a turma. Após o primeiro módulo, discuta com os alunos como representar o problema, estratégias e possibilidades de resolvê-lo. Estimule-os a representar geometricamente o problema e a identificar quais são as incógnitas envolvidas.

Divida a turma em duplas e distribua as calculadoras e as folhas de atividades. Em seguida, reproduza o segundo módulo do recurso *Contagem de Passos* para a turma.

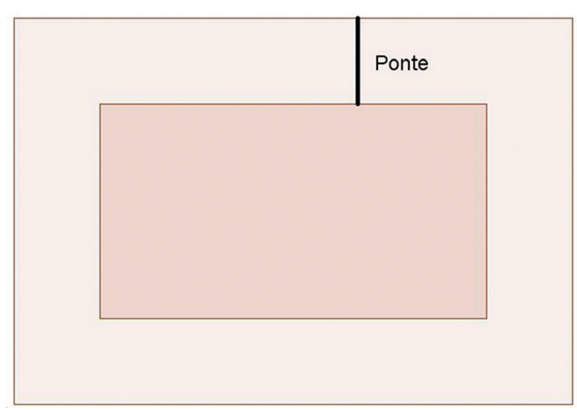
Depois que as duplas trabalharem com o problema proposto, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

Folha de atividades – O comprimento da ponte

Nome da Escola: ____

Nome: ____

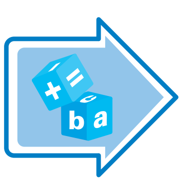
1. Vamos determinar o comprimento da ponte pela qual a mãe de Jéssica caminha todos os dias. Sabemos que uma ponte liga duas pistas retangulares: uma externa e uma interna. Elas estão separadas por um rio. Os lados dos retângulos são paralelos e a ponte é perpendicular às pistas. A distância entre os lados paralelos das pistas retangulares é sempre a mesma. Na figura a seguir, representamos as pistas e a ponte:



Além disso, sabemos que, para dar uma volta em cada pista passando-se uma vez pela ponte, a mãe de Jéssica dá 5.320 passos. Nos dias em que a mãe de Jéssica dá duas voltas na pista maior, uma, na pista menor e passa uma vez pela ponte, ela dá 8.120 passos. Qual é o comprimento da ponte em metros sabendo que cada passo da mãe de Jéssica mede 0,75 metros?

- Se julgar necessário, revise o conceito de perímetro de um retângulo.;
- Escutar o áudio exige dos alunos um esforço de abstração. É recomendável sugerir que façam anotações para melhor compreensão do problema.;
- Após a distribuição da folha de atividades, oriente os alunos a associarem o conteúdo do segundo módulo do recurso *Contagem de Passos* com a representação geométrica das pistas e da ponte, apresentadas na folha de atividades.;
- É possível que os alunos não consigam expressar as medidas dos lados do retângulo maior em função das medidas dos lados do retângulo menor e do comprimento da ponte. Destaque as informações, dadas no problema, que permitem essa associação.;
- O sistema tem mais incógnitas do que equações. No entanto, estamos apenas interessados em determinar uma das incógnitas. Explore com os alunos o caráter indeterminado do sistema. Na resolução, fica determinado que o comprimento da ponte é igual a 30 metros. No entanto, não é possível determinar unicamente as medidas dos lados das pistas retangulares. Ao final da resolução, sabemos, por exemplo, que o perímetro da pista retangular interna é igual a 1.860 metros. Peça que escolham valores para essas medidas e determinem possíveis configurações das pistas. Por exemplo, a pista interna é um quadrado, cujo lado mede 465 metros e a externa, um quadrado, cujo lado mede 525 metros.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade.	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade, dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões, tanto objetivas como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Individual	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinados à Unidade 10. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades, disponível para reprodução neste material, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões para os alunos, que podem complementar às suas no que tange à avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas:

- Identificar uma equação linear.
- Aprender a encontrar a solução de uma equação linear.
- Identificar um sistema linear.
- Identificar sistemas possíveis e impossíveis.
- Identificar um sistema na forma escalonada.
- Resolver um sistema por escalonamento.

Para ajudá-lo nos seus registros, sugerimos as questões a seguir, disponíveis na folha de atividades:

- Qual foi o conteúdo matemático que você estudou nesta unidade?
- Dê exemplos de situações do seu cotidiano em que seja possível modelar a partir de um sistema de equações lineares.
- Como podemos caracterizar um sistema linear
  - Possível e determinado?
  - Indeterminado?
  - Impossível?

Sugerimos também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros a serem entregues ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar, com você, como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho, para, se for o caso, repensá-los de acordo com as características apresentadas.

Etapa 2: Questões objetivas e discursivas.

Sugerimos nesta etapa, a escolha de, pelo menos, uma questão objetiva e uma discursiva que contemplem uma habilidade pretendida nesta unidade, para compor o instrumento avaliativo.

Sugestões de questões objetivas para a avaliação:

Questão 1: (FUVEST 2012)

Em uma festa com n pessoas, em um dado instante, 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram, a seguir, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. O número n de pessoas presentes inicialmente na festa era igual a:

(A) 100 (B) 105 (C) 115 (D) 130 (E) 135

Questão 2: (ESPM 2012)

Carlinhos possui certa quantidade de bolinhas de gude e algumas latinhas onde guardá-las. Ao colocar 4 bolinhas em cada lata, sobraram 2 bolinhas, mas quando colocou 5 bolinhas em cada lata, a última ficou com apenas 2 bolinhas. Podemos afirmar que todas as latas ficariam com o mesmo número de bolinhas se ele tivesse:

(A) 36 bolinhas (B) 42 bolinhas (C) 49 bolinhas

(D) 55 bolinhas (E) 63 bolinhas

Questão 3: (ENEM 2011)

O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$100 000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$350 000,00, enquanto a segunda cobrou R$120 000,00 por km construído (n) acrescidos de um valor fixo de R$150 000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada. Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

(A) $100n + 350 = 120n + 150$

(B) $100n + 150 = 120n + 350$

(C) $100 (n + 350) = 120 (n + 150)$

(D) $100 (n + 350\,000) = 120 (n + 150\,000)$

(E) $350 (n + 100\,000) = 150 (n + 120\,000)$

Questão 4: (Vunesp 2010)

Considere o seguinte sistema linear: $\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ x + 2y + 4z = 9 \\ -x + 4y + 2z = 9 \end{cases}$

Pode-se afirmar que o valor de z é:

(A) –2. (B) –1. (C) 0. (D) 1. (E) 2.

Questão 5: (UERJ 2004)

Um comerciante deseja totalizar a quantia de R$500,00 utilizando cédulas de um, cinco e dez reais, num total de 92 cédulas, de modo que as quantidades de cédulas de um e de dez reais sejam iguais. Neste caso, a quantidade de cédulas de cinco reais de que o comerciante precisará será igual a:

(A) 12 (B) 28 (C) 40 (D) 92

Respostas das questões objetivas sugeridas

1. (D) 2. (D) 3.(A) 4.(E) 5.(A)

Sugestões de questões discursivas para a avaliação:

Questão 1: (FUVEST)

Se Amélia der R$3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia. Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$6,00 a mais do que Amélia. Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria. Quanto possui cada uma das meninas Amélia, Lúcia e Maria?

Questão 2: (UERJ)

Um negociante de carros dispõe de certa quantia, em reais, para comprar dois modelos de carro, A e B. Analisando as várias possibilidades de compra, concluiu, em relação a essa quantia, que:

- faltariam R$10.000,00 para comprar cinco unidades do modelo A e duas do modelo B;
- sobrariam R$29.000,00,se comprasse três unidades de cada modelo;
- gastaria exatamente a quantia disponível, se comprasse oito unidades do modelo B.

Estabeleça a quantia de que o negociante dispõe.

Questão 3: (UERJ)

Os alunos de uma escola, para serem aprovados no exame final, deverão obter, pelo menos, sessenta pontos em uma prova de cem questões. Nesta prova, cada questão respondida corretamente vale um ponto e quatro questões erradas, ou não-respondidas, anulam uma questão correta. Calcule o número mínimo de questões que um mesmo aluno deverá acertar para que:

a. obtenha uma pontuação maior do que zero;

b. seja aprovado.

Questão 4: (UFF)

Determine os valores de a para que o sistema:

$S:\begin{cases} ax + a^2 y = a^2 \\ a^6 x + a^5 y = a^4 \end{cases}$, seja:

a. possível e determinado;

b. indeterminado;

c. impossível.

Questão 5: (Unicamp)

Uma empresa deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha-do-pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R$5,00, o quilo da castanha-de-caju, R$20,00 e o quilo de castanha-do-pará, R$16,00. Cada lata deve conter meio quilo da mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$5,75. Além disso, a quantidade de castanha-de-caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.

a. Escreva o sistema linear que representa a situação descrita acima.

b. Resolva o referido sistema, determinando as quantidades, em gramas, de cada ingrediente por lata.

Respostas e comentários das questões discursivas sugeridas:

Questão 1:

Chamando a quantia em dinheiro que Amélia possui de x, a quantia em dinheiro que Lúcia possui de y e a quantia em dinheiro que Maria possui de z, podemos determinar três equações que relacionam essas quantias de acordo com as informações do problema:

Informação	Equação
Se Amélia der R$3,00 a Lúcia, então ambas ficarão com a mesma quantia.	$x-3=y+3$
Se Maria der um terço do que tem a Lúcia, então esta ficará com R$6,00 a mais do que Amélia.	$y+\frac{z}{3}=x+6$
Se Amélia perder a metade do que tem, ficará com uma quantia igual a um terço do que possui Maria.	$\frac{x}{2}=\frac{z}{3}$

Assim podemos montar o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x-3=y+3 \\ y+\frac{z}{3}=x+6 \\ \frac{x}{2}=\frac{z}{3} \end{cases}$

De acordo com a terceira equação, podemos substituir $\frac{x}{2}$ no lugar de $\frac{z}{3}$ na segunda equação e assim teremos:

$$\begin{cases} x-3=y+3 \\ y+\frac{x}{2}=x+6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x-6 \\ y+\frac{x}{2}=x+6 \end{cases}$$

Substituindo o valor de y da primeira equação na segunda, temos: $x-6+\frac{x}{2}=x+6$

Resolvendo a equação do primeiro grau resultante, temos: $\cancel{x}-6+\frac{x}{2}=\cancel{x}+6 \Rightarrow \frac{x}{2}=12 \Rightarrow x=24$

Substituindo este valor nas demais equações do sistema original, temos:

$x-3=y+3 \Rightarrow 24-3=y+3 \Rightarrow y=24-6 \Rightarrow y=18$ e $\frac{x}{2}=\frac{z}{3} \Rightarrow \frac{24}{2}=\frac{z}{3} \Rightarrow \frac{z}{3}=12 \Rightarrow z=36$

Logo, Amélia possui R$24,00, Lúcia possui R$18,00 e Maria possui R$36,00.

Questão 2:

Chamando a quantia em dinheiro que o negociante possui de x, o valor do carro de modelo A de y e o valor do carro de modelo B de z, podemos determinar três equações que relacionam essas quantias de acordo com as informações do problema:

Informação	Equação
Faltariam R$10.000,00 para comprar cinco unidades do modelo A e duas do modelo B.	$x + 10000 = 5y + 2z$
Sobrariam R$29.000,00, se comprasse três unidades de cada modelo.	$x - 29000 = 3y + 3z$
Gastaria exatamente a quantia disponível, se comprasse oito unidades do modelo B.	$x = 8z$

Assim, podemos montar o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x+10000=5y+2z \\ x-29000=3y+3z \\ x=8z \end{cases}$

De acordo com a terceira equação, podemos substituir 8z no lugar de x na primeira e na segunda equações e assim teremos:

$$\begin{cases} 8z+10000=5y+2z \\ 8z-29000=3y+3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8z-2z-5y=-10000 \\ 8z-3z+3y=29000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6z-5y=-10000x(-3) \\ 5z-3y=29000x(5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -18z+15y=30000 \\ 25z-15y=145000 \end{cases}$$

Somando as duas equações obtidas, temos: $7z=175000 \Rightarrow z=25000$. Substituindo o valor de z na terceira equação do sistema original, temos: $x=8z \Rightarrow x=8x25000 \Rightarrow x=200000$

Logo, o negociante dispõe de R$ 200 000,00.

Questão 3:

Chamando a quantidade de questões respondidas corretamente de x, a quantidade de questões erradas ou não respondidas de y e a pontuação da prova de z, podemos determinar duas equações que relacionam essas quantias de acordo com as informações do problema:

Informação	Equação
Uma prova de cem questões.	$x + y = 100$
Nesta prova, cada questão respondida corretamente vale um ponto e quatro questões erradas, ou não -respondidas, anulam uma questão correta.	$x - \frac{y}{4} = z$

Assim podemos montar o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x+y=100 \\ x-\frac{y}{4}=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=100-x \\ x-\frac{y}{4}=z \end{cases}$

a. Para que um aluno obtenha uma pontuação maior que zero, o valor de z deve ser maior que zero. Logo: $x-\frac{y}{4}=z>0 \Rightarrow x-\frac{100-x}{4}>0 \Rightarrow 4x-100+x>0 \Rightarrow 5x>100 \Rightarrow x>20$. Ou seja, o aluno deverá acertar a um número mínimo de 21 questões.

b. Para que um aluno seja aprovado, é necessário que ele obtenha uma pontuação de, pelo menos, sessenta pontos, isto é, o valor de z deve ser maior ou igual a sessenta. Logo:

$$x-\frac{y}{4}=z\geq 60 \Rightarrow x-\frac{100-x}{4}\geq 60 \Rightarrow 4x-100+x\geq 240 \Rightarrow 5x>340 \Rightarrow x\geq 68 .$$

Ou seja, o aluno deverá acertar um número mínimo de 68 questões.

Questão 4:

Para facilitar a interpretação geométrica das equações do sistema dado, podemos reescrevê-las da seguinte forma:

$$S:\begin{cases} ax+a^2y=a^2 \\ a^6x+a^5y=a^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{ax}{a^2}+\frac{a^2y}{a^2}=\frac{a^2}{a^2} \\ \frac{a^6x}{a^5}+\frac{a^5y}{a^5}=\frac{a^4}{a^4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{a}+y=1 \\ ax+y=\frac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{a}x+1 \\ y=-ax+\frac{1}{a} \end{cases}$$

a. Para que o sistema S seja possível e determinado, as retas que representam os gráficos das duas equações devem interceptar-se em um único ponto, ou seja, devem ter coeficientes angulares distintos. Assim, se:

$$-\frac{1}{a}\neq -a \Rightarrow \frac{1}{a}\neq a \Rightarrow a^2\neq 1 \Rightarrow a\neq 1 \text{ e } a\neq -1$$

Logo, temos que para quaisquer valores de a diferentes de 1 e -1, o sistema S será possível e determinado.

b. Para que o sistema S seja indeterminado, as retas que representam os gráficos das duas equações devem coincidir em todos os pontos, ou seja, devem ter coeficientes angulares e lineares idênticos. Assim:

$$-\frac{1}{a}=-a \Rightarrow \frac{1}{a}=a \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=1 \text{ e } a=-1 \text{ e } \frac{1}{a}\neq 1 \Rightarrow a\neq 1$$

Logo, temos que para a igual a -1, o sistema S será impossível.

Questão 5:

Chamando a quantidade (em quilogramas) de amendoim contida em cada lata de x, a quantidade (em quilogramas) de castanha-de-caju contida em cada lata de y e a quantidade (em quilogramas) de castanha-do-pará contida em cada lata de z, podemos determinar três equações que relacionam essas quantias de acordo com as informações do problema:

Informação	Equação
Cada lata deve conter meio quilo da mistura.	$x+y+z=\frac{1}{2}$
O custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$5,75.	$5x+20y+16z=5{,}75$
A quantidade de castanha-de-caju em cada lata deve ser igual a um terço da soma das outras duas.	$y=\frac{x+z}{3}$

a. Assim podemos montar o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x+y+z=\dfrac{1}{2} \\ 5x+20y+16z=5{,}75 \\ y=\dfrac{x+z}{3} \end{cases}$.

b. De acordo com a terceira equação, podemos substituir $\dfrac{x+z}{3}$ no lugar de y na primeira e na segunda equações e assim teremos:

$$\begin{cases} x+\dfrac{x+z}{3}+z=\dfrac{1}{2} \\ 5x+20\dfrac{x+z}{3}+16z=5{,}75 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+2x+2z+6z=3 \\ 15x+20(x+z)+48z=17{,}25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x+8z=3 \\ 35x+68z=17{,}25 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3-8z}{8} \\ 35x+68z=17{,}25 \end{cases} \Rightarrow 35\left(\dfrac{3-8z}{8}\right)+68z=17{,}25 \Rightarrow 105-280z+544z=138 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 264z=33 \Rightarrow z=\frac{33}{264} \Rightarrow z=\frac{1}{8}.$$

Substituindo o valor de z na equação 8x + 8z = 3, temos:

$$8x+8z=3 \Rightarrow 8x+8\times\frac{1}{8}=3 \Rightarrow 8x+1=3 \Rightarrow 8x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{8} \Rightarrow x=\frac{1}{4}$$

Substituindo os valores de x e z na equação $x+y+z=\dfrac{1}{2}$, temos:

$$x+y+z=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4}+y+\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8} \Rightarrow y=\frac{1}{8}$$

Logo, em cada lata há ¼ de quilograma ou 250g de amendoim, 1/8 de quilograma ou 125g de castanha- de-caju e 1/8 de quilograma ou 125g de castanha-do-pará.

Folha de atividades – Avaliação

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Momento de Reflexão:

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na Unidade 10 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

Questão 1: Qual foi o conteúdo matemático que você estudou nesta unidade?

Questão 2: Dê exemplos de situações do seu cotidiano em que seja possível modelar a partir de um sistema de equações lineares.

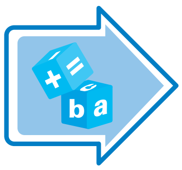
Questão 3: Como podemos caracterizar um sistema linear:

a. Possível e determinado?

b. Indeterminado?

c. Indeterminado?

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de Fixação Complementares.	Folha de Atividades disponíveis no Pendrive, lápis/caneta.		Turma dividida em duplas ou em trios.	

Aspectos operacionais

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação das noções iniciais da Geometria espacial, trabalhadas ao longo desta unidade, tanto no material do aluno, quanto nas atividades sugeridas neste material. Com esses exercícios, você, professor, terá a oportunidade de fixar os conceitos de dimensão, ponto, reta e plano, as diferenças entre poliedros e não poliedros e seus elementos e a aplicação da relação de Euler.

Esses exercícios foram distribuídos em uma "Folha de atividades" – que se encontra disponível para reprodução no pendrive – que poderá ser aplicada, de forma fracionada,ao término de cada seção do material do aluno ou, de uma só vez, no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados.

Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo no Grid de aula de seu pendrive .

Aspectos pedagógicos

- Peça que os alunos se organizem em duplas ou em trios. Mas procure distribuir uma folha de atividades para cada aluno para que todos possam ficar com uma cópia do material tornando-o mais uma fonte de consulta.
- Escolha previamente quais os exercícios se adéquam melhor à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos na Unidade 2.
- Depois de os alunos concluírem o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, procure discutir as soluções apresentadas pelos alunos, valorizando cada estratégia mesmo que esta não o tenha conduzido a uma resposta verdadeira.

- Procure incentivar os alunos a executar tais exercícios sem a sua intervenção, enquanto professor. Esses exercícios podem favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos, no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

Folha de atividades – "Exercícios de Fixação Complementares "

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Questão 1: Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras, por apenas 2 pessoas, num total de 38 fregueses. O número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas é:

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

Questão 2: O diretor de uma empresa, o Dr. Antonio, convocou todos os seus funcionários para uma reunião. Com a chegada do Dr. Antonio à sala de reuniões, o número de homens presentes na sala ficou quatro vezes maior que o número de mulheres também presentes na sala. Se o Dr. Antonio não fosse à reunião e enviasse sua secretária, o número de mulheres ficaria a terça parte do número de homens. A quantidade de pessoas, presentes na sala, aguardando o Dr. Antonio é:

(A) 14 (B) 15 (C) 18 (D) 19 (E) 20

Questão 3: A empresa Brinque Muito realizou uma grande doação de brinquedos para um orfanato. Essa doação compreendeu 535 brinquedos, entre bolas e bonecas, 370 brinquedos entre bonecas e carrinhos, e o total da doação entre bolas e carrinhos foi de 455 brinquedos. É possível afirmar que, para realizar a doação, a empresa produziu:

(A) 320 bolas (B) 145 carrinhos (C) 235 bonecas (D) 780 brinquedos (E) 1350 brinquedos

Questão 4: Dois casais foram a um barzinho. O primeiro pagou R$ 5,40 por 2 latas de refrigerante e uma porção de batatas fritas. O segundo pagou R$ 9,60 por 3 latas de refrigerante e 2 porções de batatas fritas. Nesse local e nesse dia, a diferença entre o preço de uma porção de batas fritas e o preço de uma lata de refrigerante era de:

(A) R$ 1,40 (B) R$ 1,60 (C) R$ R$ 1,80 (D) R$ 2,00 (E) R$ 2,20

Questão 5: Um pacote tem 48 balas: algumas de hortelã e as demais de laranja. Se a terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do de laranjas em 4 unidades, então nesse pacote há:

(A) igual número de balas dos dois tipos;

(B) duas balas de hortelã a mais que de laranja;

(C) 20 balas de hortelã;

(D) 26 balas de laranja;

(E) duas balas de laranja a mais que de hortelã.

Respostas - Folha de Atividades – "Exercícios de Fixação Complementares "

1. B
2. D
3. B
4. C
5. A