

Função Logarítmica

André Luiz Cordeiro dos Santos, Gabriela dos Santos Barbosa, Josemeri Araujo Silva Rocha (coordenadora) e Luciane de Paiva Moura Coutinho

Introdução

Professor, preparamos para você um material que trata do conceito estudado na Unidade 1 do material do aluno: os logaritmos. Faz-se necessário que você não apenas domine o assunto, mas também tenha amplo conhecimento sobre a proposta apresentada.

Neste material, propomos algumas atividades para enriquecer a abordagem dos objetivos do módulo do aluno, que são os seguintes:

- Calcular o logaritmo de um número real positivo.
- Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples.
- Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas.
- Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial.

A ideia que norteou a equipe durante o processo de produção deste material foi levar até você uma proposta que pudesse contribuir de forma significativa para a ampliação do seu trabalho pedagógico nas aulas de Matemática.

A nossa sugestão é que a primeira aula desta unidade inicie-se com uma atividade disparadora, e por isso, trazemos duas atividades. Em *Os Logaritmos em nossas vidas*, os alunos irão trabalhar em grupos e deverão, a partir de uma pesquisa, apresentar uma reportagem, vídeos, textos, jogos ou qualquer outra forma de atividade relacionada a logaritmos. Na atividade *Logaritmo e Música*, a partir da exibição de um vídeo, relacionando música e Matemática, serão propostas algumas reflexões sobre os logaritmos.

Na Seção 1, você pode optar pela atividade Dominó Logarítmico, que propõe um jogo de dominó, onde as peças são formadas por logaritmos. Poderá, ainda, convidar os alunos a realizar um trabalho com o conceito de logaritmo e os procedimentos algébricos, e aritméticos, envolvidos em Procedimentos algébricos e aritméticos.

Para trabalharmos a Seção 2, sugerimos duas atividades: um jogo e uma atividade com ficha que promove a integração da Matemática com a Química. Nos dois casos, procuramos trabalhar o tema propriedades dos logaritmos, que foi priorizado nesta seção. Entretanto, além deste tema, foi-nos inevitável abordar também o próprio conceito de logaritmo. O estudo das propriedades pode levar o aluno a aprofundar seus conhecimentos conceituais, dando-lhe um tratamento mais rigoroso do ponto de vista matemático.

Por fim, aconselhamos que a última aula seja dividida em dois momentos. O primeiro, dedicado a uma revisão geral do que foi trabalhado na unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o estudo. E o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos.

As sugestões que elaboramos estão descritas nas tabelas seguintes e detalhadas nos textos subsequentes.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

| Disciplina | Volume | Módulo | Unidade | Estimativa de aulas para essa unidade |
|------------|--------|--------|----------|---------------------------------------|
| Matemática | 2 | 3 | Expansão | 4 aulas de 2 tempos |

| Título da unidade | Tema |
|--|------------------------------|
| Função Logarítmica | Logaritmos |
| Objetivos da unidade | |
| Calcular o logaritmo de um número real positivo. | |
| Utilizar a definição de logaritmo na resolução de equações simples. | |
| Utilizar as propriedades operatórias do logaritmo na resolução de problemas. | |
| Identificar a função logarítmica como a inversa da função exponencial. | |
| Seções | Páginas no material do aluno |
| Para início de conversa... | 5 a 7 |
| Seção 1 – Os logaritmos, a escala Richter e os terremotos. | 8 a 25 |
| Seção 2 – O logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais | 25 a 27 |
| Veja ainda | 28 |
| O que perguntam por aí? | 35 e 36 |

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

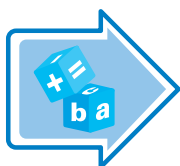
Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.



Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.



Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



Avaliação

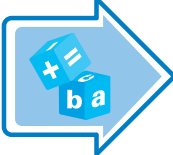

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.



Exercícios

Proposições de exercícios complementares

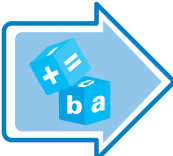
Atividade Inicial

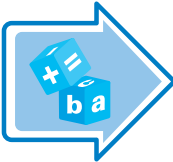
| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|-------------------------------|---|---|---|----------------|
|  | Os Logaritmos em nossas vidas | Lousa e caneta para quadro | Em grupos, os alunos deverão apresentar uma reportagem, vídeos, textos, jogo ou qualquer outra forma de atividade relacionada a logaritmos. | A atividade deve ser realizada em grupos de 4 a 5 alunos. | 50 minutos |
|  | Logaritmo e Música | Lousa, caneta para quadro, computador conectado a Internet ou Data show | A partir da exibição de um vídeo, relacionando música e Matemática, serão propostas algumas reflexões sobre os logaritmos. | Duplas | 40 minutos |

Seção 1 – Os logaritmos, a escala Richter e os terremotos

Páginas no material do aluno

8 a 25

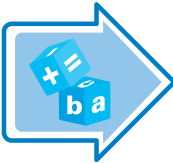
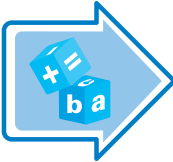
| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------|--|--|--|----------------|
|  | Dominó Logarítmico | Papel cartão para fazer as peças do dominó e caneta ou folha de atividades peças dominó logarítmico. | A atividade propõe um jogo de dominó, onde as peças são formadas por logaritmos. | A turma pode ser dividida em grupos de 2 a 4 alunos. | 40 minutos |

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|--|--|--|---|----------------|
|  | Procedimentos algébricos e aritméticos | Lousa, caneta para quadro e folhas de papel A4 em branco | A atividade propõe um trabalho com o conceito de logaritmo e os procedimentos algébricos e aritméticos usualmente empregados no estudo deste conceito. | A turma pode ser dividida em grupos de quatro alunos. | 30 minutos |




Seção 2 – Os logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais.

Páginas no material do aluno

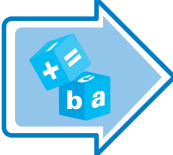
25 a 27

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------------------|--|--|--|----------------|
|  | Bingo dos Logaritmos | Uma cartela em branco para cada dupla de alunos e um conjunto de números com as frases de apresentação para o professor, que irá comandar o bingo. | A atividade propõe um jogo de bingo, onde serão estudadas algumas propriedades e operações com logaritmos. | Duplas | 40 minutos |
|  | Integrando Matemática e Química | Uma ficha como a que segue no Pendrive para cada grupo, acesso à Internet, a uma biblioteca ou outras fontes de pesquisa. | A partir de uma pesquisa, a atividade propõe o estudo dos logaritmos, associando Matemática a Química. | A turma pode ser dividida em grupos de 2 a 3 alunos. | 40 minutos |

Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|--|---|--|------------------|----------------|
|  | Consolidação e registros de aprendizagem | Folha de atividades | Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática. | Individual | 10 minutos |
|  | Questão dissertativa | Folha de atividades, lápis, borracha, calculadora | Questão dissertativa que complementam a seção “O que perguntam por aí?”. | Individual | 10 minutos |
|  | Questão objetiva (ENEM 2011) | Folha de atividades, lápis, borracha | Questão objetiva que complementa a seção “O que perguntam por aí?”. | Individual | 10 minutos |

Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|-------------------------------|----------------------------|---|---|----------------|
|  | Os Logaritmos em nossas vidas | Lousa e caneta para quadro | Em grupos, os alunos deverão apresentar uma reportagem, vídeos, textos, jogo ou qualquer outra forma de atividade relacionada a logaritmos. | A atividade deve ser realizada em grupos de 4 a 5 alunos. | 50 minutos |
| | | | | | |

Aspectos operacionais

Professor, antes de começar esta atividade, é necessário que você peça na aula anterior que a turma traga reportagens, vídeos, textos, jogos ou qualquer outra forma de atividade relacionada a logaritmos. Inicie a aula, dividindo os alunos em grupos de pelo menos quatro integrantes e peça para que eles nomeiem esses grupos (de preferência, que usem um nome relacionado à Matemática).

Cada grupo deverá apresentar para a turma o material que eles encontraram. Esse material pesquisado pode estar relacionado a outras áreas do conhecimento, como: Física, Química, Biologia ou Economia. Isso sugere a interdisciplinaridade e você pode pedir a ajuda de outros professores neste trabalho. Estipule um tempo para a apresentação de cada grupo, lembrando que no final das apresentações você deverá fazer o fechamento da aula, que poderá acontecer com a discussão de alguns exemplos que você apresentar. Veja que os logaritmos aparecem na Física com a fórmula da NIS (Nível de Intensidade Sonora), na Biologia, temos a fórmula do crescimento de bactérias, na Química, temos a fórmula da alcalinidade (escala de PH).


Aspectos pedagógicos

Professor, nesta atividade, temos como objetivo principal fazer o aluno descobrir que o logaritmo é uma ferramenta importante, presente não só da Matemática, mas em outras áreas do conhecimento, assim como revelar sua aplicação em situações e problemas do cotidiano.

Com a atividade proposta, temos também a intenção de proporcionar a socialização dos alunos, focando o trabalho em grupo, a criatividade, a organização e a pesquisa. A maior dificuldade dos alunos certamente será apresentação da atividade, já que este é o primeiro contato que eles estarão tendo com o assunto. Por isso, auxilie-os com os termos mais técnicos e encoraje-os.

Você pode, dependendo da autonomia de cada turma, fazer um roteiro de trabalho para que eles sigam.

Atividade Inicial

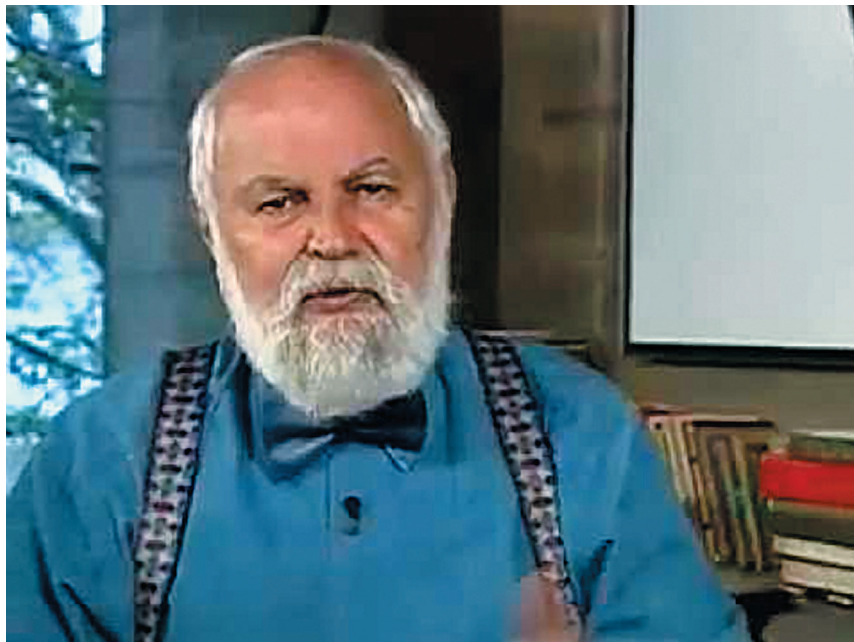
| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------|---|--|------------------|----------------|
|  | Logaritmo e Música | Lousa, caneta para quadro, computador conectado a Internet ou Data show | A partir da exibição de um vídeo, relacionando música e Matemática, serão propostas algumas reflexões sobre os logaritmos. | Duplas | 40 minutos |

Aspectos operacionais

Esta atividade é composta de três etapas.

1ª etapa: Leve seus alunos para o laboratório de informática ou ligue o Data show na própria sala de aula. Exiba o vídeo “Arte e Matemática – Música das Esferas”, disponível em

- http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=4907



Fonte: http://tvescola.mec.gov.br/index.php?option=com_zoo&view=item&item_id=4907

2ª etapa: Após a exibição do vídeo, peça para que seus alunos reflitam sobre as seguintes questões:

- Você já havia pensado na relação entre a Matemática e a música, antes de assistir ao vídeo?
- O que mudou na sua percepção da música e da Matemática após assistir ao vídeo?
- Você já ouviu falar em Logaritmos? E da relação do Logaritmo com a música?

Professor, veja se seus alunos conseguiram perceber como a música pode ter um caráter mais estruturado, mais formal e a Matemática aparece de maneira mais lúdica, quando relacionada ao cotidiano.

3ª etapa: Veja os interesses e as habilidades da turma. Que tal propor a seus alunos uma apresentação musical?

Caso a turma demonstre um grande interesse, convide o professor de Artes para participar e ajudar nesta apresentação.

Aspectos pedagógicos

Professor, nada como o aprendizado interdisciplinar para preparar nossos alunos para um mundo com os conhecimentos cada vez mais interligados. Melhor ainda se conseguirmos despertar nos estudantes a relação entre um conhecimento de aspecto tão formal como a Matemática com um conhecimento aparentemente tão intuitivo como a música.

Esta atividade pode ser interessante por começar um assunto tão árduo para a grande maioria dos alunos, como o estudo de logaritmo, com uma apresentação musical na turma.

A 3ª etapa será um bom momento para que a turma entrose-se e você conheça um pouco mais dos interesses e das habilidades de cada um dos seus alunos, fortalecendo as relações professor-aluno, fundamentais não só para o aprendizado de logaritmo, mas para os outros assuntos que virão.

Este vídeo também traz a possibilidade de uma ampliação cultural ao analisar as combinações de cálculos matemáticos que estão por trás dos sons que se desenvolveram em diversas culturas, além de trazer um interessante aprofundamento sobre a história da Matemática.

É interessante mostrar a turma um outro aspecto que pode ser desenvolvido em sala, que é o cálculo das notas de Bach pela teoria de Napier. Por exemplo, a nota mi tem valor na escala de Bach de $2^{4/12}$. Você pode usar uma tabela de logaritmos de base 2 ou uma calculadora científica. Você irá obter o valor da altura do som da nota mi, 1.25999105. Que tal você propor aos alunos que pesquisem o valor das outras notas? Essa será uma boa oportunidade para familiarizar seus alunos com a calculadora científica.

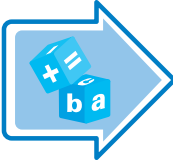
Refleta com seus alunos que no tempo de Napier esses cálculos eram feitos apenas utilizando lápis e papel, mas que hoje em dia, há muitos recursos que podem ser utilizados. Um deles é utilizar uma planilha como Excel. Vá para o laboratório de informática e utilize esse recurso, descobrindo assim, o valor das outras notas da escala de Bach. As referências são dó(1), dó#($2^{1/12}$), ré($2^{2/12}$), ré#($2^{3/12}$), mi($2^{4/12}$), fá($2^{5/12}$), fá#($2^{6/12}$), sol($2^{7/12}$), sol#($2^{8/12}$), lá($2^{9/12}$), lá#($2^{10/12}$), si($2^{11/12}$), dó em escala acima (2). O símbolo # é lido como sustenido.

Por fim, você pode pesquisar se na comunidade há músicos e convidá-los para um bate papo com a turma. Essa proposta, além de ampliar a relação escola-comunidade certamente enriquecerá sua turma com conhecimentos que extrapolam a sala de aula.

Seção 1 – Os logaritmos, a escala Richter e os terremotos

Páginas no material do aluno

8 a 25

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------|--|--|--|----------------|
|  | Dominó Logarítmico | Papel cartão para fazer as peças do dominó e caneta ou folha de atividades peças dominó logarítmico. | A atividade propõe um jogo de dominó, onde as peças são formadas por logaritmos. | A turma pode ser dividida em grupos de 2 a 4 alunos. | 40 minutos |

Aspectos operacionais

Professor, elabore as peças do jogo, conforme a especificidade, competências e habilidades da sua turma. Você pode elaborar peças com a definição e propriedades do logaritmo, com seus respectivos resultados, para possibilitar o encaixe. Veja o exemplo abaixo:

| | |
|-----------------------|----------------|
| $\log_a b - \log_a c$ | $\log_a (b^c)$ |
|-----------------------|----------------|

Repare que para encaixar com a peça $\log_a b - \log_a c$ deve haver um resultado $\log_a b/c$ e para encaixar com $\log_a b^c$ deve haver uma peça do tipo $c \cdot \log_a b$

Peça para que os alunos embaralhem as 28 peças que você deverá disponibilizar na mesa. Cada jogador pega sete peças para jogar. Defina com o grupo como o jogo irá começar: se será por sorteio ou se será quem tirar uma peça pré-determinada. O jogador que começa a partida coloca uma peça no centro da mesa. A partir daí, joga-se no sentido horário. Cada jogador deve tentar encaixar alguma peça sua nas peças que estão na extremidade do jogo, uma por vez. Se o jogador consegue encaixar uma peça, o jogo segue para o próximo jogador. Caso o jogador não tenha nenhuma peça que encaixe em qualquer lado, ele deve passar a vez, sem jogar nenhuma peça ou comprar no resto (para grupo com menos de 4 componentes). A partida termina quando um jogador consegue bater o jogo (fica sem nenhuma peça), ou quando o jogo fica trancado (ninguém tem peça para continuar o jogo).

Aspectos pedagógicos

Professor, esta atividade apresenta alternativas de estratégias e de recursos didáticos como tentativa de tornar a relação em sala de aula mais prazerosa e eficaz, visando à melhoria do processo de ensino-aprendizagem e desmistificando principalmente o logaritmo como uma área de difícil aprendizagem dentro da Matemática.

Esta atividade, com base na construção de materiais didáticos simples, permite a codificação, sistematização, construção e até mesmo reconstrução de conceitos. Além, é claro, de contribuir para a organização de informações e o desenvolvimento de procedimentos para resolução de problemas matemáticos.

Como já dissemos anteriormente, a elaboração das peças será livre para que você, professor, possa elaborá-las, conforme as habilidades, potencialidades e dificuldades de sua turma para que o jogo seja acessível e que o trabalho alcance de fato seus objetivos.

Caso julgue necessário, você pode propor para a turma antes do jogo, exercícios de fixação. Se não for preciso, você pode deixá-los para depois do jogo, como trabalho de casa, por exemplo. Uma alternativa interessante é passar alguns exercícios antes e outros de mesmo nível depois da atividade e analisar com a turma se o jogo foi eficaz e um diferencial para a facilitação da resolução dos exercícios.

Se sua turma não se interessar pelo jogo de dominó, para motivá-los, tente fazer uma gincana entre os grupos com uma premiação ao final.

A seguir, temos as peças sugeridas para o dominó de logaritmos.

| | |
|----------------|-----------------------|
| $a^x = b$ | $\log_a b = x$ |
| $\log_a (b.c)$ | $\log_a b + \log_a c$ |
| $\log_a (b/c)$ | $\log_a b - \log_a c$ |
| $\log_a b^y$ | $y.\log_a b$ |

| | |
|---|---|
| $\log_a b$ | $\log_x b / \log_x a$ |
| $\log_a 1$ | 0 |
| $a^{\log_a b}$ | b |
| $\log_a a^m$ | m |
| $\log_a a$ | 1 |
| $\log_a b = \log_a c$ | $b = c$ |
| Logaritmo do Quociente | $\log (10/2)$ |
| Logaritmo do Produto | $\log (10.2)$ |

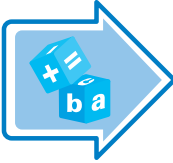
| Logaritmo da Potência | $\log 10^2$ |
|----------------------------|-------------|
| $\log_3 27$ | 3 |
| $\log_{\frac{1}{5}} 125$ | -3 |
| $\log_2 \sqrt{64}$ | 3 |
| $\log_x 8 = 3$ | 2 |
| $\log_x \frac{1}{16} = 2$ | 1/4 |
| $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$ | 1/4 |
| $\log_9 81 = x$ | 2 |

| | |
|--|-------------------------------------|
| $\log_{\frac{1}{2}} 8 = x$ | -3 |
| $\log_5 1$ | 0 |
| $\log 10$ | 1 |
| $\log 6$ | $\log 2 + \log 3$ |
| $\log_2 5$ | $\log_2 10 - 1$ |
| $\log 100$ | $2 \cdot \log 10$ |
| $\log_5 \sqrt{5}$ | $1/2$ |
| $\log_{36} 6$ | $1/2$ |

Seção 1 – Os logaritmos, a escala Richter e os terremotos

Páginas no material do aluno

8 a 25

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|--|--|--|---|----------------|
|  | Procedimentos algébricos e aritméticos | Lousa, caneta para quadro e folhas de papel A4 em branco | A atividade propõe um trabalho com o conceito de logaritmo e os procedimentos algébricos e aritméticos usualmente empregados no estudo deste conceito. | A turma pode ser dividida em grupos de quatro alunos. | 30 minutos |
| | | | | | |

Aspectos operacionais

Professor, o objetivo desta atividade é trabalhar o conceito de logaritmo e os procedimentos algébricos e aritméticos usualmente empregados, quando estudamos este assunto. Ela pode lhe servir como um instrumento para diagnosticar possíveis lacunas nos conhecimentos dos alunos e apontar caminhos para uma revisão de conteúdos. Embora não sejam situações inovadoras e enfoquem apenas expressões numéricas e equações exponenciais, e logarítmicas, é aconselhável que os alunos sejam organizados em grupo e que, durante a resolução de cada uma, você promova reflexões que os levem a compreender as razões matemáticas de cada procedimento que empregam. Para começar, você pode propor a situação 1 a seguir:

Situação 1: Achar o valor da expressão $\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} - \log_2 \frac{1}{4} - \log_5 5$.

Depois que os alunos terminarem, peça que um representante de cada grupo descreva não só como fez, mas também as dúvidas que ocorreram. São questões que podem contribuir para o aprofundamento das reflexões: Como é possível transformar um radical em potência? E uma fração? Podemos generalizar a ideia de que $\log_a a$ é igual a 1 para todo valor de a ? Por quê?

E, dando continuidade, proponhas as situações 2 e 3:

Situação 2: Qual é o valor do termo desconhecido em cada caso?

- $\log_7 x = 2$
- $\log_x \frac{1}{25} = 2$
- $2^x = 64$
- $2^x = 9$

Situação 3: O logaritmo de um número em certa base é 3. O logaritmo desse mesmo número numa base igual à metade da anterior é 6. Que número é esse?

Na reflexão sobre estas situações, é fundamental questionarmos: Observando a posição da incógnita, podemos dizer que as equações propostas nos itens *a* e *b* da situação 2 são do mesmo tipo? O que difere uma da outra? Comparando as equações *c* e *d*, o que torna a resolução do item *d* mais complexa? Podemos generalizar a ideia presente na situação 3 de que, mantendo o logaritmando constante, se diminuirmos a base, o valor do logaritmo aumenta?

Aspectos pedagógicos

Professor, boa parte dos estudantes de Ensino Médio apresenta sérias dificuldades para operar com radicais, frações e potências com expoentes negativos e/ou fracionários. Portanto, não se surpreenda se seus alunos não chegarem à resposta correta da expressão proposta na situação 1, que é $-\frac{1}{2}$. Se isso acontecer, sugerimos que você, junto com a turma, analise separadamente cada parcela da expressão. Assim, você poderá identificar se as dificuldades distribuem-se igualmente entre os conteúdos envolvidos em cada uma ou se há algum aspecto que se destaque, apontando a necessidade de uma revisão mais aprofundada. Nesses momentos, ter em mão livros do 9º ano pode lhe ajudar. Deles, você poderá extrair bons exercícios de revisão. E, não se esqueça: podemos, sim, generalizar a ideia de que $\log_a a$ é igual a 1 para todo valor de *a*! Afinal, todo número elevado a 1 é igual a si mesmo. Entretanto, vale também reforçar que, pela definição de logaritmo, *a* deve ser um número positivo e diferente de 1.

Voltando nossas atenções para as situações 2 e 3, observando a posição da incógnita, podemos afirmar que as equações propostas nos itens *a* e *b* da situação 2 não são do mesmo tipo: na primeira, a incógnita está no logaritmando e, na segunda, a incógnita está na base. Os alunos podem resolvê-las por um método de tentativas, entretanto, se empregarem um procedimento mais geral, na resolução da primeira, terão de lidar com a equação do 1º grau e $x = 49$, na resolução da segunda, terão de lidar com a equação do 2º grau $x^2 = \frac{1}{25}$, o que os levará a obter dois valores para a incógnita e requererá a habilidade de desprezar o que for negativo, dado que a base de um logaritmo não pode ser um número negativo.

Já, comparando as equações *c* e *d*, o que torna a resolução do item *d* mais complexa é o fato de 9 não ser uma potência de 2. Aqui é importante discutir com os alunos que, quando, numa equação exponencial, os dois membros não podem ser transformados em potências de mesma base, um procedimento adequado é “aplicar” o logaritmo aos dois membros da igualdade. Isto se fundamenta na ideia de que, se dois números positivos são iguais, os logaritmos deles numa determinada base também são iguais. Em resumo, resolvendo a equação *d*, obteremos $x = \frac{\log 9}{\log 2}$, e tanto o numerador quanto o denominador desta fração podem ser facilmente calculados por uma calculadora científica ou facilmente encontrados em tábuas de logaritmos.

Na situação 3, apresentamos um problema em língua materna e, para resolvê-lo, é bastante adequado escrevê-lo com a simbologia matemática. Esta etapa é mais um ponto em que os alunos podem apresentar dificuldades, entretanto, quando os significados de cada símbolo forem bem compreendidos, esta simbologia poderá facilitar a resolução do problema. Assim, sugerimos que você invista na discussão dos significados de cada símbolo envolvido

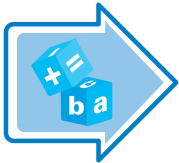
no estudo dos logaritmos. Se isso acontecer, facilmente seus alunos poderão concluir que o número procurado na situação 3 é 64 e que é possível generalizar a ideia de que, mantendo o logaritmando constante e diferente de 1, se diminuirmos a base, o valor do logaritmo aumenta.

Por fim, professor, esta é uma atividade de risco e gostaríamos de deixá-lo sob alerta. Embora as “manipulações” algébricas e aritméticas abordadas aqui sejam de suma importância, a falta de um contexto para os cálculos que efetuamos pode levar seus alunos a questionar a utilidade do que estão estudando. Nesse sentido, você pode, ao longo da aula, resgatar exemplos de aplicação dos logaritmos a outras áreas do conhecimento humano, como: a Economia, a Geografia, a Química e a Biologia. Retome as aplicações citadas no material do aluno! Promova atividades complementares de pesquisa sobre os logaritmos, suas aplicações e sua história, mas não abra mão de desenvolver as habilidades requeridas nesta atividade.

Seção 2 – Os logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais.

Páginas no material do aluno

25 a 27

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|----------------------|--|--|------------------|----------------|
|  | Bingo dos Logaritmos | Uma cartela em branco para cada dupla de alunos e um conjunto de números com as frases de apresentação para o professor, que irá comandar o bingo. | A atividade propõe um jogo de bingo, onde serão estudadas algumas propriedades e operações com logaritmos. | Duplas | 40 minutos |

Aspectos operacionais

Nesta atividade, propomos um jogo de bingo. A diferença deste para o bingo tradicional está no conteúdo das cartelas e no modo como as pedras serão “cantadas”. No tradicional, os participantes recebem uma cartela com números. Já neste, a cartela é entregue em branco a cada dupla que, antes do início do jogo, irá preenchê-la com 6 números naturais, escolhidos aleatoriamente no universo de 2 a 15. Quanto à maneira de cantar os números sorteados, o professor oferecerá informações matemáticas sobre os números em vez de simplesmente falá-los. Para cada número, serão priorizadas informações, envolvendo logaritmos e suas propriedades. Por exemplo, se o número sorteado for 2, em vez de simplesmente falar “dois”, o professor deverá falar “trata-se do logaritmo de 9 na base 3”.

Para realizar esta atividade, professor, você pode pedir, previamente, aos alunos que tragam de casa folhas de rascunho. Afinal, para identificar os números, quase sempre terão de efetuar cálculos. Como estamos interessados na fixação de aspectos conceituais, não encorajamos o uso de calculadoras financeiras ou científicas que trazem a função “logaritmo”. Entretanto, a calculadora comum, que oferece basicamente as quatro operações, pode ser usada para agilizar as contas.

Num segundo momento da atividade, é importante que você reflita com os alunos sobre os conhecimentos que empregavam, enquanto jogavam. São questões que podem orientar esta reflexão: Que procedimentos foram empregados na identificação dos números cantados? Que cálculos realizaram para descobrir o logaritmo de um número numa determinada base? Em que circunstâncias preferiram empregar alguma propriedade dos logaritmos? Que conhecimentos matemáticos, além daqueles diretamente associados aos logaritmos, foram mobilizados?

Para finalizar, você pode pedir aos alunos que criem outras formas de apresentar os números envolvidos no jogo. Peça também que, se possível, criem um novo jogo com mais pedras e novas formas de apresentá-las.

Aspectos pedagógicos

Professor, como já discutimos em outras ocasiões, você pode ter no jogo um grande aliado para promover o processo de ensino e aprendizagem. Para que isso realmente aconteça, você e seus alunos precisam aproveitar bem as oportunidades que surgem, enquanto jogam. Por isso, nossa sugestão é que você não abra mão das reflexões após o jogo e, ainda, se, durante a sua realização, for necessário fazer interrupções para discutir os conceitos em questão, faça-o na certeza de que está no caminho certo.

É importante que os alunos reconheçam que o domínio das quatro operações e de certas técnicas de fatoração ou decomposição em fatores primos pode ajudá-los a calcular logaritmos e aplicar algumas de suas propriedades. Saber as propriedades, por sua vez, pode ser útil na hora de resolver logaritmos mais complexos ou simplificar operações com eles. As três propriedades que privilegiamos foram:

a. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

b. $\log_a b / c = \log_a b - \log_a c$

c. $\log_a b^n = n \log_a b$

Durante esta atividade, é aconselhável que você não só leve os alunos a aplicar as propriedades, como também reflita com eles sobre os valores que a , b , c e n podem assumir para que elas façam sentido. Assim, lembre-os de que n pode ser substituído por qualquer número real, porém a , b e c devem ser números positivos e que o a ainda precisa ser diferente de um. Esteja atento à localização das letras nas fórmulas que representam as propriedades. Em muitos assuntos da Matemática, da Física e da Química, os alunos costumam memorizar fórmulas, tendo em vista determinadas letras e, quando as substituímos por outras, apresentam dificuldades no reconhecimento e aplicação destas fórmulas. Uma boa maneira para evitar isso é, antes mesmo de utilizar a simbologia matemática, pedir aos alunos que enunciem fórmulas e propriedades com palavras da língua materna. Aliás, como já comentamos em outras oportunidades, a diversificação da linguagem contribui bastante na construção de conceitos e, nesse sentido, você

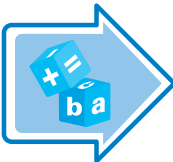
pode apresentar os números sorteados, alternando a “fala” com o registro na lousa da expressão que levará os alunos a reconhecê-los. Na descrição dos números que segue em anexo, sempre que possível, usamos duas maneiras. Você poderá escolher a que julgar mais adequada para os seus alunos e nada lhe impede de até usar as duas.

O fato de privilegiarmos as três propriedades listadas anteriormente não significa que você deva trabalhar apenas com elas. Você pode aproveitar a oportunidade para discutir outras como, por exemplo, $a^{\log_a n} = n$. Tudo vai depender do andamento das reflexões que você estabelecer com a turma. A solicitação de novas maneiras de cantar as pedras e a criação pelos alunos de bingos com mais números a serem cantados e diversas maneiras de cantá-los, poderá contribuir para o aprofundamento das discussões. Invista nisso e boa sorte!

Seção 2 – Os logaritmos ajudam a resolver equações exponenciais.

Páginas no material do aluno

25 a 27

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------------------|---|--|--|----------------|
|  | Integrando Matemática e Química | Uma ficha como a que segue no Pendrive para cada grupo, acesso à Internet, a uma biblioteca ou outras fontes de pesquisa. | A partir de uma pesquisa, a atividade propõe o estudo dos logaritmos, associando Matemática a Química. | A turma pode ser dividida em grupos de 2 a 3 alunos. | 40 minutos |
| | | | | | |

Aspectos operacionais

Para realizar esta atividade, professor, você pode pedir aos alunos que pesquisem na Internet ou na biblioteca da escola o que significa calcular o pH e o pOH das substâncias. Por que é preciso fazer isso? Que fórmula matemática é empregada nesse cálculo? Além disso, para realizar esta pequena investigação, eles também poderão entrevistar o professor de Química ou você poderá convidá-lo a participar da sua aula, prestando os esclarecimentos necessários, num bate-papo descontraído com a turma.

Em seguida, voltando as atenções para os cálculos do pH e do pOH das substâncias, distribua uma ficha como a que segue em anexo para que os alunos resolvam em grupo. Depois que resolverem, peça-lhes que exponham seus raciocínios, suas dúvidas e estratégias de resolução. Procure OUVIR os alunos! Assim você poderá ajudá-los a superar dificuldades e a identificar as causas de possíveis erros.

Aspectos pedagógicos

Nesta atividade, temos uma boa oportunidade de promover o encontro da Matemática com a Química, dando um passo importante no caminho da interdisciplinaridade. Mesmo que você e o professor de Química trabalhem em dias diferentes e, por motivos práticos, não possam se encontrar, peça-lhe que aborde minimamente o assunto em suas aulas. Embora o tema pH e pOH não esteja no currículo do 1º Ano do Ensino Médio, a sua compreensão em linhas gerais não requer muitos pré-requisitos nem tomará muito tempo da aula.


Certas substâncias químicas podem ser classificadas como ácidas, alcalinas ou neutras. Quando predominam íons H^+ , temos soluções ácidas e quando o excesso é de OH^- , temos soluções alcalinas. Em meio neutro, não há predominância de nenhuma das duas.

O pH e o pOH de uma substância estão associados às concentrações de H^+ e OH^- respectivamente. Em vez de escrevermos “concentração de H^+ ” ou “concentração de OH^- ”, usamos os símbolos $[H^+]$ e $[OH^-]$. Eles podem ser calculados pelas fórmulas $pH = \log \frac{1}{[H^+]}$ e $pOH = \log \frac{1}{[OH^-]}$, onde $[H^+]$ e $[OH^-]$ são as concentrações de H^+ e OH^- em mol/l. É importante saber que a soma do pH com o pOH de uma substância é sempre 14. Quando $pH = pOH = 7$, a substância é neutra. Quando a substância é ácida, seu pH é menor que 7 e seu pOH é maior que 7. Quando a substância é alcalina, seu pH é maior que 7 e seu pOH é menor que 7. Entre muitas aplicações, saber se as substâncias são ácidas ou alcalinas pode nos ajudar a selecionar melhor os alimentos que ingerimos e os produtos de higiene pessoal que usamos. Substâncias extremamente ácidas podem ser nocivas à nossa saúde.

Voltando às atenções para as propriedades dos logaritmos, observe, professor, que, ao empregarem as fórmulas e efetuarem os cálculos para a obtenção do pH e do pOH nas situações propostas na ficha em anexo, mais uma vez os alunos poderão aplicar as propriedades $\log_a b / c = \log_a b - \log_a c$ e $\log_a b^n = n \log_a b$. Além disso, realce para eles que, quando a base do logaritmo não estiver escrita, trata-se da base decimal e que, o logaritmo de 1 em qualquer base é zero.

Para finalizar, observe que as concentrações estão escritas como números decimais e que, para empregar as propriedades, é necessário escrevê-las como potências de 10. Se você perceber que seus alunos estão apresentando dificuldades neste processo, não hesite em fazer uma pequena revisão das potências de 10.

Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|--|---------------------|--|------------------|----------------|
|  | Consolidação e registros de aprendizagem | Folha de atividades | Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática. | Individual | 10 minutos |
| | | | | | |

Aspectos operacionais

Nossa sugestão é que você utilize o último tempo de aula desta unidade para a consolidação e avaliação do conteúdo estudado junto à turma. Esta etapa pode estar articulada à seção “Veja ainda” do material do aluno. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade.

Para complementar as questões que você poderá propor aos alunos, apresentamos, na folha de atividades, algumas questões que têm por objetivo a avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas.

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?
2. Relembrando que no símbolo “ $\log_b a = x$ ”, b representa a base, a representa o logaritmando e x o logaritmo, complete a tabela:

| Base | Logaritmando | Logaritmo |
|------|--------------|-----------|
| 2 | 128 | |
| 3 | | 5 |
| | 25 | 2 |
| 4 | 1 | |
| | 16 | 4 |

3. Reflita sobre a afirmação:

“Como 16 é menor que 64, então o logaritmo de 16 na base 2 é menor que o logaritmo de 64 na base 2.” O que você diz a respeito? Concorde? Por quê?

4. Você seria capaz de citar situações reais nas quais utilizamos o logaritmo?

Aspectos pedagógicos

Certifique-se de fazer com que os resultados deste momento de avaliação indiquem os pontos em que os alunos ainda não conseguiram êxito no aprendizado. Parabenize e elogie o quanto for necessário, para que este momento de avaliação torne-se agradável.

No item 1, espera-se que o aluno responda que o conceito estudado foi sobre logaritmo. Já no item 2, por $\log_b a = x$ significar que $b^x = a$, basta resolver a equação exponencial em cada uma das linhas da tabela, onde o que muda são as informações dadas. Por exemplo, na primeira linha, $2^x = 128 = 2^7$ de forma que $x = 7$. Na segunda linha, a equação correspondente é $3^5 = a$, donde $a = 7$. Na última linha, a equação correspondente é $b^4 = 16$, donde $b = 2$. As outras linhas são completadas com procedimentos análogos.

| Base | Logaritmando | Logaritmo |
|------|--------------|-----------|
| 2 | 128 | 7 |
| 3 | 243 | 5 |
| 5 | 25 | 2 |
| 4 | 1 | 0 |
| 2 | 16 | 4 |

No item 3, espera-se que o aluno perceba que um cálculo direto permite verificar que $\log_2 16 = 4 < 6 = \log_2 64$. Portanto, a afirmação é verdadeira. E na última questão, o item 4, eles podem citar, por exemplo, que os logaritmos aparecem em escalas para medir a intensidade dos terremotos.

Ao final dos registros de avaliação, compartilhe as informações entre os alunos. Indique exercícios e atividades para que as dúvidas e erros possam ser devidamente contornados.

Folha de atividade – Consolidação e registros de aprendizagem

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na Unidade 1 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?

2. Relembrando que no símbolo “ $\log_b a = x$ ”, b representa a base, a representa o logaritmando e x o logaritmo, complete a tabela:


| Base | Logaritmando | Logaritmo |
|------|--------------|-----------|
| 2 | 128 | |
| 3 | | 5 |
| | 25 | 2 |
| 4 | 1 | |
| | 16 | 4 |

3. Reflita sobre a afirmação:

“Como 16 é menor que 64, então o logaritmo de 16 na base 2 é menor que o logaritmo de 64 na base 2.” O que você diz a respeito? Concorde? Por quê?

4. Você seria capaz de citar situações reais nas quais utilizamos o logaritmo?

Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|--|----------------------|---|--|------------------|----------------|
|  | Questão dissertativa | Folha de atividades, lápis, borracha, calculadora | Questão dissertativa que complementam a seção “O que perguntam por aí?”. | Individual | 10 minutos |

Aspectos operacionais

Disponibilizamos uma questão dissertativa que complementa o que foi proposto na seção “O que perguntam por aí?”, p. 37 do material do aluno. Ela pode ser aplicada individualmente em sala e discutida ao final da aula com todo o grupo.

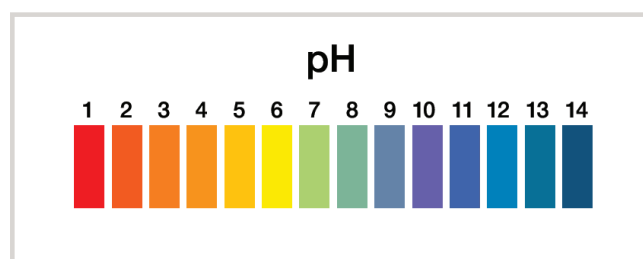
Ao trabalhar tal questão com os alunos, esperamos que haja compreensão de situações reais onde eles poderão aplicar o conceito de logaritmo e suas propriedades.

Questão

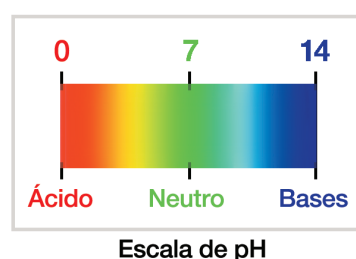
Certamente, ao escolher seu shampoo de preferência, você já leu algo do tipo “pH neutro”. Ora, mas o que significa isto?

O que é pH?

pH é um sigla que significa potencial hidrogeniônico e tem esse nome pois indica a concentração de íons de hidrogênio no meio. De uma forma mais clara, pH é um índice que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de um meio qualquer. O pH possui uma escala que vai de 0 a 14, conforme indica a figura abaixo.



Um meio é classificado como dito ser ácido, neutro ou alcalino de acordo com a faixa de seu pH. A figura a seguir ilustra esta classificação:



Se $[H^+]$ é a concentração de íons em gramas por litro, então o pH é definido por

$$pH = -\log[H^+]$$

A partir dessas informações, responda aos seguintes itens:

- Um certo shampoo tem pH igual a 2,5. Classifique este shampoo de acordo com a informação acima.
- Indique a concentração de íons de hidrogênio neste shampoo. Se preferir efetuar os cálculos, utilize uma calculadora.
- Shampoos para crianças são, geralmente, alcalinos, ou seja, possuem pH próximo de 14, na escala apresentada. Sabendo que o de uma certa marca possui concentração íons de 10^{-13} gramas por litro, ache o pH deste shampoo.

Aspectos pedagógicos

Primeiro, você deve alertar seus alunos que uma oportunidade de construir conhecimentos é fazê-lo através de problemas que introduzam novos conceitos. E este é o caso! Tranquilize-os em relação às informações sobre Química, presentes no contexto. Faça-os reter a atenção na fórmula que define o pH. Esta é expressa através de um logaritmo, que é o assunto presente. Para obter êxito neste problema, basta, portanto, extrair a informação básica em cada item do problema e obter a pedida. Em suma, num item é dado o logaritmo e se pede o logaritmando, e no outro, exatamente o contrário.

Ressalte a importância do assunto estudado, mostrando a abrangência e a aplicabilidade.

Folha de atividade – Questão dissertativa

Nome da escola: _____

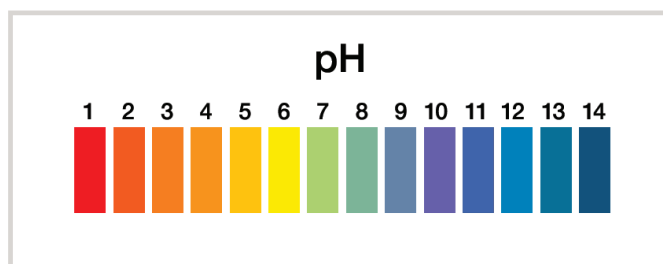
Nome do aluno: _____

Leia com atenção as informações abaixo e tente responder aos questionamentos.

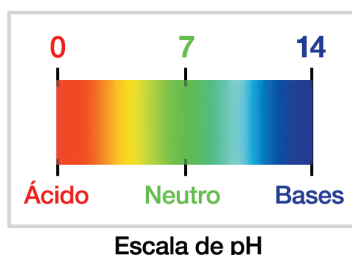
Certamente, ao escolher seu shampoo de preferência você já leu algo do tipo “pH neutro”. Ora, mas o que significa isto?

O que é pH?

pH é um sigla que significa potencial hidrogeniônico e tem esse nome pois indica a concentração de íons de hidrogênio no meio. De uma forma mais clara, pH é um índice que indica a acidez, neutralidade ou alcalinidade de um meio qualquer. O pH possui uma escala que vai de 0 a 14, conforme indica a figura abaixo.



Um meio é classificado como dito ser ácido, neutro ou alcalino de acordo com a faixa de seu pH. A figura a seguir ilustra esta classificação:



Se $[H^+]$ é a concentração de íons em gramas por litro, então o pH é definido por

$$pH = -\log[H^+]$$


A partir dessas informações, responda aos seguintes itens:

- a. Um certo shampoo tem pH igual a 2,5. Classifique este shampoo de acordo com a informação acima.

- b. Indique a concentração de íons de hidrogênio neste shampoo. Se preferir efetuar os cálculos, utilize uma calculadora.

- c. Shampoos para crianças são, geralmente, alcalinos, ou seja, possuem pH próximo de 14 na escala apresentada. Sabendo que o de uma certa marca possui concentração íons de 10^{-13} gramas por litro, ache o pH deste shampoo.

Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|------------------------------|--------------------------------------|---|------------------|----------------|
|  | Questão objetiva (ENEM 2011) | Folha de atividades, lápis, borracha | Questão objetiva que complementa a seção "O que perguntam por aí?". | Individual | 10 minutos |

Aspectos operacionais

Disponibilizamos uma questão objetiva que pode ser usada como complemento ao que foi proposto no material do aluno na seção "*O que perguntam por aí?*", p. 37. Ela pode ser aplicada individualmente em sala e discutida ao final da aula com todo o grupo.

Sugerimos nesta etapa, a escolha de questões objetivas que contemplem as habilidades pretendidas nesta unidade, para compor o instrumento avaliativo. Se desejar, você pode buscar outras questões de acordo com o perfil da sua turma. A ideia é que além de avaliar o aprendizado, o aluno familiarize-se com questões cobradas em avaliações de larga escala, como Enem, vestibulares, concursos etc.

Questão

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade.

Assim como a escala Richer, MMS é uma escala logarítmica, donde M_w e M_0 relacionam-se pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3} \log M_0$$

onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de Janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe em (dina.cm)?

- a. $10^{-5,10}$
- b. $10^{-0,73}$
- c. $10^{12,00}$
- d. $10^{21,65}$
- e. $10^{27,00}$

Aspectos pedagógicos

Você pode intervir junto aos alunos na resolução do problema, caso observe alguma dificuldade ou insegurança. É provável que a partir disto eles consigam desenvoltura para seguir adiante. Tente estimular as ideias que levem às respostas desejadas. Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas. Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Neste momento, é importante que você pondere as equivocadas, ressaltando onde reside o erro.

Você pode intervir, alertando aos alunos que, mais uma vez, trata-se de um problema contextualizado onde, para se obter a solução do mesmo, basta identificar na “fórmula” fornecida, o que é dado e o que é pedido. Enfatize, mais uma vez, o alcance desta ferramenta (logaritmo) no mundo real. As operações realizadas são simples, mas é necessário saber manusear bem com logaritmos.

Folha de atividade – Questão objetiva (Enem – 2011)

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Leia com atenção as informações abaixo e tente responder aos questionamentos.

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade.

Assim como a Escala Richer, MMS é uma escala logarítmica, donde M_w e M_0 relacionam-se pela fórmula:

$$M_w = -10,7 + \frac{2}{3} \log M_0$$

onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina.cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de Janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_w = 7,3$.

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe em (dina.cm)?

- a. $10^{-5,10}$
- b. $10^{-0,73}$
- c. $10^{12,00}$
- d. $10^{21,65}$
- e. $10^{27,00}$

Gabarito

Questão dissertativa

- a. Um shampoo intermediário, entre ácido e neutro, possui $\text{pH} = 3,5$. O shampoo em questão é ácido, pois tem pH menor que 3,5.
- b. Como $\text{pH} = -\log[H^+]$, resulta da definição de logaritmo que $[H^+] = 10^{-2,5}$ gramas de íons por litro. Você pode usar a calculadora, se desejar.
- c. Como $[H^+] = 10^{-13}$, resulta que $\text{pH} = -\log 10^{-13} = 13$.

Questão objetiva

Como $M_w = -10,7 + \frac{2}{3} \log M_0$ e $M_w = 7,3$, resulta que

$$7,3 = -10,7 + \frac{2}{3} \log M_0$$

onde,

$$18 = \frac{2}{3} \log M_0 \Leftrightarrow \log M_0 = 27 \Leftrightarrow M_0 = 10^{27}$$

Isto corresponde a letra (e).