

Geometria Espacial: prismas e cilindros

Cleber Dias da Costa Neto, Heitor Barbosa Lima de Oliveira, Patrícia Nunes da Silva e Telma Alves

Introdução

Na unidade 23 do módulo 3 do material do aluno são apresentadas diversas situações e atividades sobre prismas e cilindros.

Para auxiliá-lo, pesquisamos e elaboramos algumas atividades e recursos que podem complementar a exposição deste tema em suas aulas. Uma descrição destas sugestões está colocada na tabela adiante, e seu detalhamento no texto que segue.

Sugerimos que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora. É uma atividade cujo intuito, além de iniciar a exposição do tema, é promover uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, espera-se que os alunos consigam identificar prismas e cilindros, bem como seus elementos, em situações cotidianas ou em formas presentes na paisagem.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade, abordando o cálculo de área e volume de prismas e cilindros, além do Princípio de Cavalieri, disponibilizamos alguns recursos complementares vinculados ao conteúdo do material didático. Tais recursos apresentam-se associados às atividades descritas detalhadamente neste material. Sugerimos a sua realização nas aulas subsequentes à aula inicial de acordo com a realidade da sua turma. Recomendamos que sejam feitas as alterações e adaptações sempre que achar necessário.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro, dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo. E o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos em detrimento da mera reprodução de exercícios feitos anteriormente. Também disponibilizaremos algumas questões de avaliações de larga escala, como ENEM, Vestibulares, Concursos Público, entre outros.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	3	Expansão	6 aulas de 2 tempos

Título da unidade	Tema
Geometria Espacial: prismas e cilindros	Geometria Espacial – Formas Geométricas
Objetivos da unidade	
Identificar prismas e cilindros, bem como seus elementos;	
Conhecer o princípio de Cavalieri;	
Calcular a área lateral, total e o volume de prismas e cilindros;	
Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	87 a 89
Seção 1 – Os elementos	90 a 96
Seção 2 – Área e Volume do paralelepípedo	96 a 100
Seção 3 – Princípio de Cavalieri e o volume dos sólidos em geral	101 a 104
Seção 4 – Área e volume do cilindro	104 a 108
Resumo e Conclusão	108 a 109
Veja ainda	110
O que perguntam por aí?	111 a 112

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.



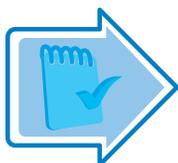
Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.



Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.



Exercícios

Proposições de exercícios complementares

Atividade(s) inicial(is)

Descrevemos a seguir situações motivadoras nas quais queremos que os alunos iniciem uma discussão coletiva e se familiarizem com o conteúdo matemático a ser trabalhado de forma empírica e com atividades de fácil compreensão antes da formalização. Sugerimos que você escolha a que seja mais adequada à sua realidade ou, se preferir, utilize uma atividade própria.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Volume	Tesouras, cola, régua, cópias do texto “O que é volume?” e da folha de atividades — Volume (disponíveis na Seção Aspectos operacionais).	Nessa atividade, os alunos irão trabalhar de forma intuitiva com o conceito de volume e vão deduzir informalmente a fórmula de volume de um paralelepípedo.	Turma disposta em grupos de 4 alunos.	25 minutos

Observação: Essa atividade foi proposta em Fontes: http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/index.aspx?ID_OBJETO=43125&tipo=ob&cp=994779&cb=&n1=&n2=Roteiros+de+Atividades&n3=Ensino+M%u00e9dio&n4=Matem%u00e9tica&b=s; <http://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20122/mat1514/cap5.pdf>

Aspectos operacionais

1. Divida a turma em quartetos e distribua o texto **O que é volume?**:

O que é volume?

- Ana, aumenta o volume da TV! Não estou ouvindo nada!
- Comprei esse creme para controlar o volume do meu cabelo.
- Cheguei de viagem e, na hora de pagar o táxi, o taxista olhou para minhas malas e disse que ia me cobrar R\$ 1,70 por cada volume!

Nos trechos acima, a palavra volume tem diferentes significados. Estamos interessados aqui no uso da palavra volume para indicar a QUANTIDADE DE ESPAÇO OCUPADA POR UM CORPO OU OBJETO.

Como comparar o volume de dois objetos?

Para responder a essa pergunta, precisamos decidir qual deles ocupa mais espaço. Vamos considerar uma garrafa e uma panela, por exemplo. Enchendo cada uma delas com água, vemos que a de maior volume será aquela que precisar de mais água para ficar completamente cheia. No entanto, nem sempre podemos usar estratégias como essas para comparar volumes.

Como medir o volume de um corpo ou objeto?

Quando falamos em medir, lembramo-nos de régua, trena, etc. Todos esses instrumentos são graduados, tem uma unidade de medida: o centímetro, a polegada, etc. Para medir o volume, também vamos precisar de uma unidade de medida. No caso do volume, a unidade adotada é um cubo cuja aresta mede 1 cm, por exemplo. O volume desse cubo será nossa unidade de medida e é chamada de centímetro cúbico (cm^3). Para medir o volume de um corpo ou objeto, teremos que decidir quantos desses cubinhos cabem dentro dele!

2. Após a leitura do texto, discuta-o com os alunos e esclareça possíveis dúvidas de compreensão do texto.
3. Entregue, para cada quarteto, tesouras, cola e uma cópia da folha de atividades — Volume.
4. Oriente os quartetos a recortarem os moldes e a montarem os cubos e a caixa.
5. Finalmente, oriente-os a usarem os cubos para determinar o volume da caixa.

Aspectos pedagógicos

- Depois que os alunos determinarem o volume da caixa a partir da contagem da quantidade de cubos de que cabem dentro da caixa, compartilhe os procedimentos que eles adotaram para contar a quantidade de cubos.
- Estimule-os a verbalizarem para os demais colegas como procederam; os alunos tendem a ter dificuldades de explicitar suas estratégias; esse é um exercício que favorece a fixação do aprendizado e desenvolve o raciocínio cognitivo.

- Explore os mecanismos utilizados para contagem; oriente-os a seguir um padrão de contagem (por camadas, por fileiras verticais).
- Aproveite a atividade para relembrar medidas de comprimento: peça aos alunos para verificar quantas vezes o lado da cada face do cubo cabe no comprimento da caixa que está sendo preenchida; proceda da mesma forma para a altura e a profundidade da caixa. Reforce que, agindo assim, eles estão medindo as dimensões (muitas vezes, essa palavra é complicada para eles) da caixa.
- Instigue-os a estabelecer uma relação entre os valores encontrados para a medição das dimensões da caixa e o valor encontrado para o volume da caixa.
- Oriente os alunos a construírem uma caixa de dimensões utilizando somente os cubos. Sugira que investiguem o que acontece ao volume quando alteramos as dimensões da caixa. Sugira que adicionem ou retirem camadas (ou fileiras) de cubos. Determinem as dimensões e o volume das “novas” caixas obtidas.

Atividades – Volume

Nome da Escola: _____

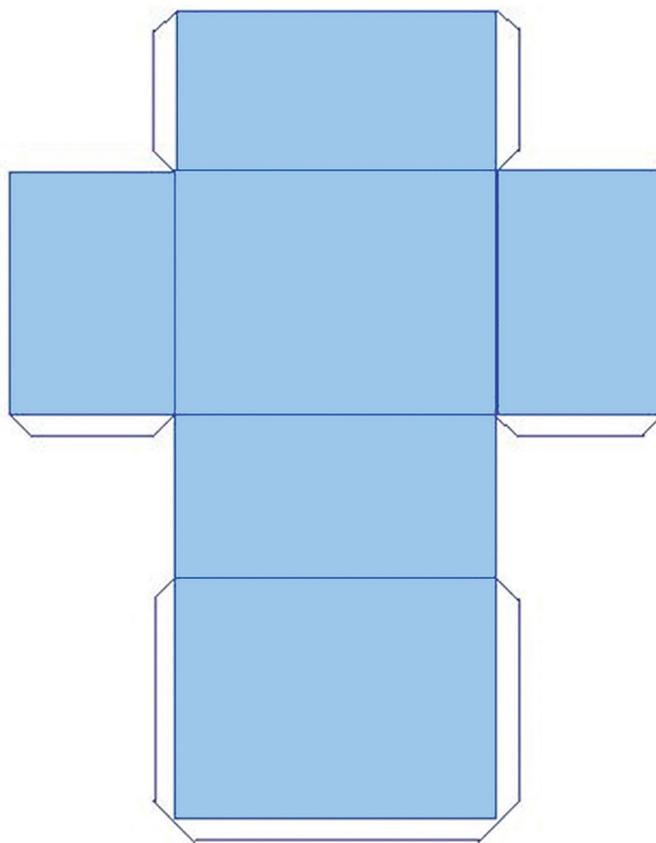
Nome: _____

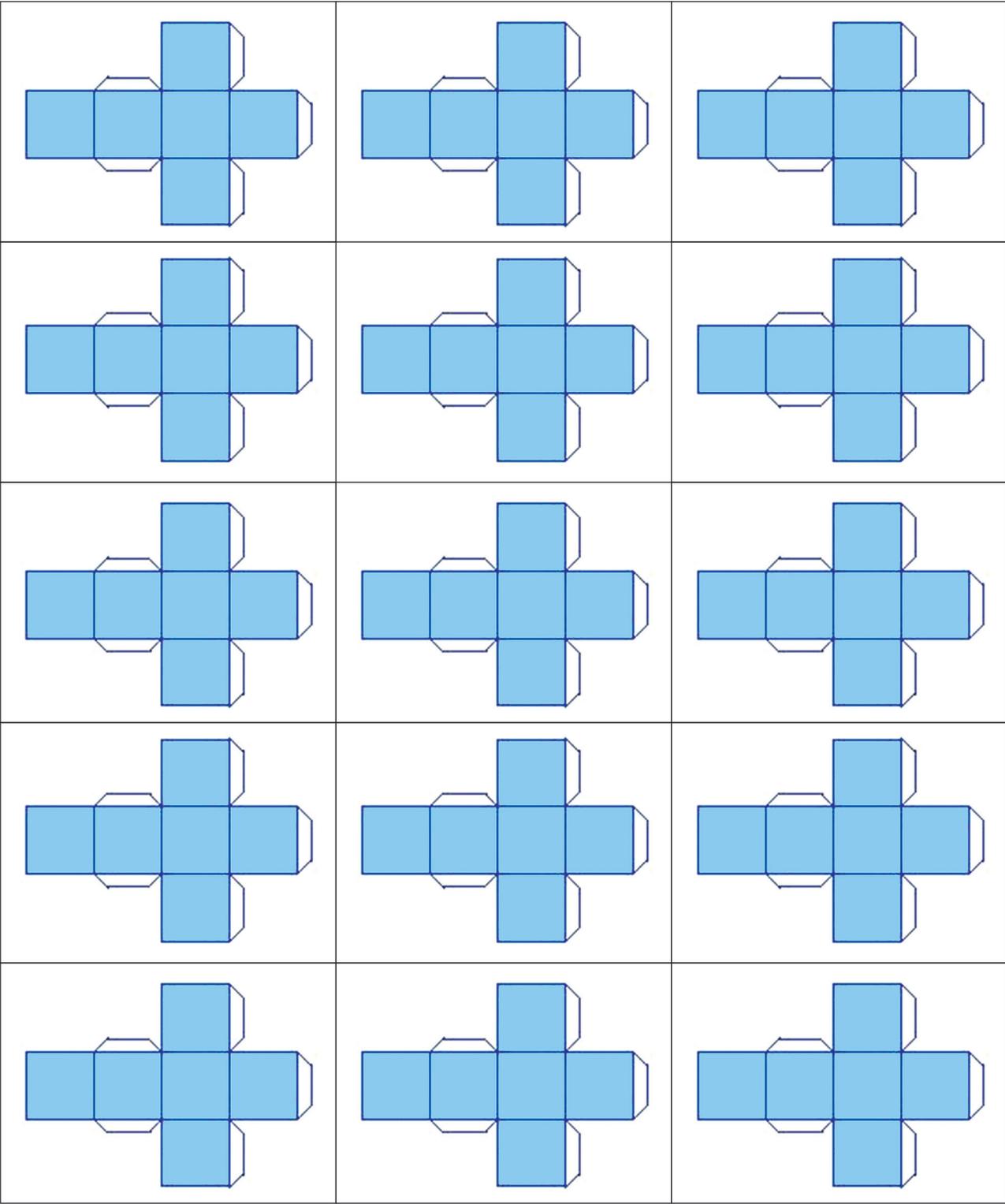
Problema:

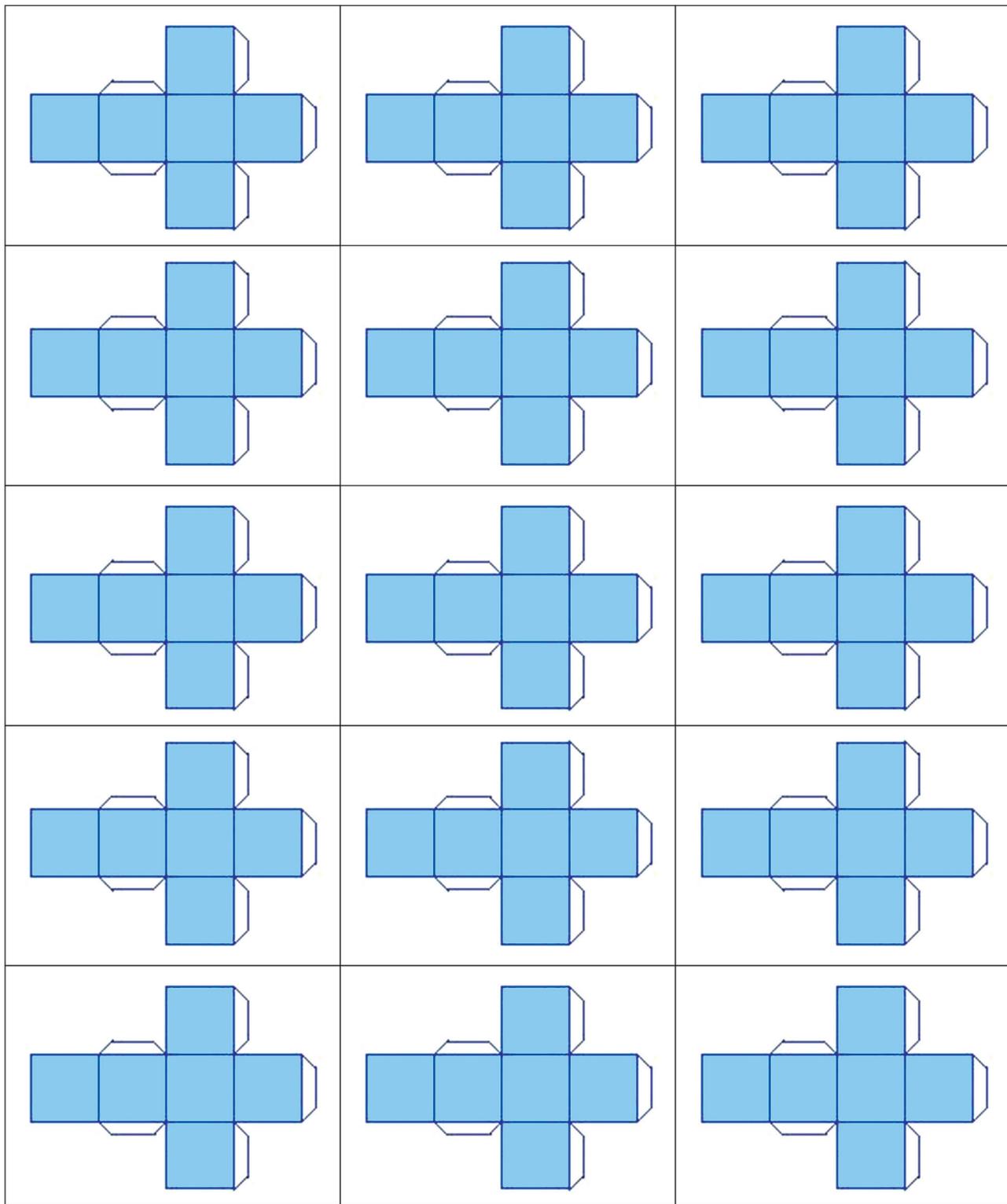
Sua tarefa é determinar o volume de uma caixa em . Isto é, você deve determinar quantos cubos de cabem dentro dela.

Inicialmente, você deve montar a caixa e os cubinhos de :

- Recorte os moldes abaixo e monte a caixa e os pequenos cubos (deixe a caixa com a tampa “aberta” — como uma caixa de sapato. Cole somente suas laterais).
- Determine quantos cubos de cabem dentro da caixa que você montou.







Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Princípio de Cavalieri	Cópias do texto Princípio de Cavalieri (disponível na Seção Aspectos operacionais).	Nessa atividade, os alunos irão trabalhar de forma intuitiva com o Princípio de Cavalieri.	Turma disposta em duplas	20 minutos

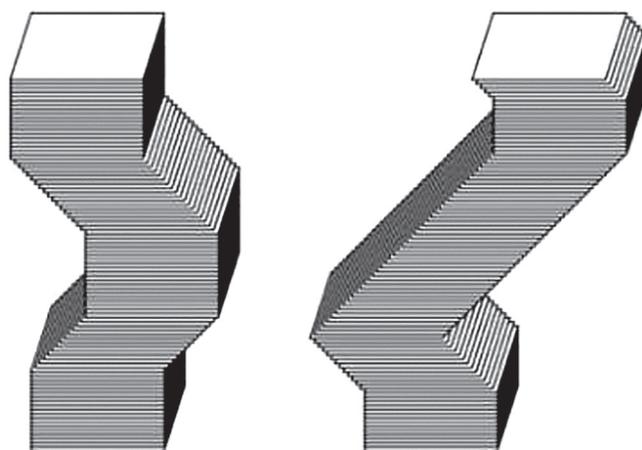
Observação: Essa atividade foi proposta em <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000012762.pdf>; http://ambiente.educacao.ba.gov.br/guias_pedagogicos/653.pdf

Aspectos operacionais

- Divida a turma em duplas e distribua o texto **Princípio de Cavalieri**.
- Oriente os alunos a lerem o texto e discutirem entre si as questões. Sugira que registrem suas considerações e tentem justificar suas respostas.

Princípio de Cavalieri

Dois amigos estavam brincando de empilhar quadrados de cartolina. Cada pilha foi feita com a mesma quantidade de quadrados. Veja as pilhas que eles fizeram:



As duas pilhas têm a mesma altura.

Se revestíssemos (na lateral e no fundo) as duas pilhas com plástico e retirássemos os quadrados de cartolina, teríamos dois recipientes de mesma altura e formas diferentes. Pela maneira que esses recipientes foram construídos, sabemos que cabem neles a mesma quantidade dos quadrados de cartolina que foram empilhados.

1. E se colocássemos areia dentro deles? Precisaríamos da mesma quantidade de areia para enchê-los completamente?
2. Podemos dizer que esses dois recipientes têm o mesmo volume? (Lembre-se que quando falamos em volume de um corpo ou objeto, estamos falando da QUANTIDADE DE ESPAÇO OCUPADA PELO CORPO OU OBJETO.).

Depois de montarem as pilhas, um dos amigos decidiu cortar cada um de seus quadrados de cartolina ao meio, formando dois triângulos iguais. Ele juntou cada um desses triângulos para formar um triângulo maior como indicado na figura abaixo.



Ele usou os triângulos maiores para formar uma pilha, ao lado da pilha de quadrados de seu amigo:

3. Podemos dizer que uma das pilhas tem volume maior do que a outra?
4. O que elas têm em comum? (compare suas alturas, quantidade de peças usadas para construí-las, etc.).

Vamos analisar mais uma situação.

As pilhas da figura abaixo foram construídas usando sempre as mesmas peças de madeira.



5. O que você pode dizer sobre o volume dessas pilhas?

Aspectos pedagógicos

- Após a leitura do texto, discuta-o com os alunos e esclareça possíveis dúvidas de compreensão do texto.
- Mostre aos alunos que a altura da pilha de peças de madeira, no caso de duas fotos, passa por fora da pilha; essa é uma ideia fora do senso comum deles.
- Caso os alunos apresentem muita dificuldade, é possível usar alguns livros iguais que existam em sala para recorrer a uma estratégia concreta.
- Relembre com os alunos a noção de polígonos equivalentes: o quadrado e o triângulo têm a mesma área.
- Depois da leitura, promova uma discussão com os alunos e estimule-os a compartilhar suas justificativas. É possível que eles se restrinjam somente a explorar o fato de que foram usadas a mesma quantidade ou as mesmas peças para construir as pilhas. Tente avançar a discussão, explorando outros elementos em comum: altura; áreas das seções horizontais.

Seção 1 – Os Elementos

Páginas no material do aluno

90 a 96

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Plethora de Poliedros	Software “Uma Plethora de Poliedros”, encontrado em http://www.uff.br/cdme/pdp/pdp-offline.zip	Nesta atividade, os alunos terão acesso a um software interativo que permite visualizar e manipular vários tipos de poliedros (dentre eles, os prismas)	Turma dividida em duplas ou trios.	30 minutos

Aspectos operacionais:

Esta é uma atividade exploradora. Nesta parte inicial do assunto Geometria Espacial, utilize este software para que os alunos possam ter os primeiros contatos com alguns prismas de diversas bases, suas planificações (com possibilidade de impressão dessas planificações) e alguns cortes que ajudarão a melhorar a visualização do Princípio de Cavalieri.

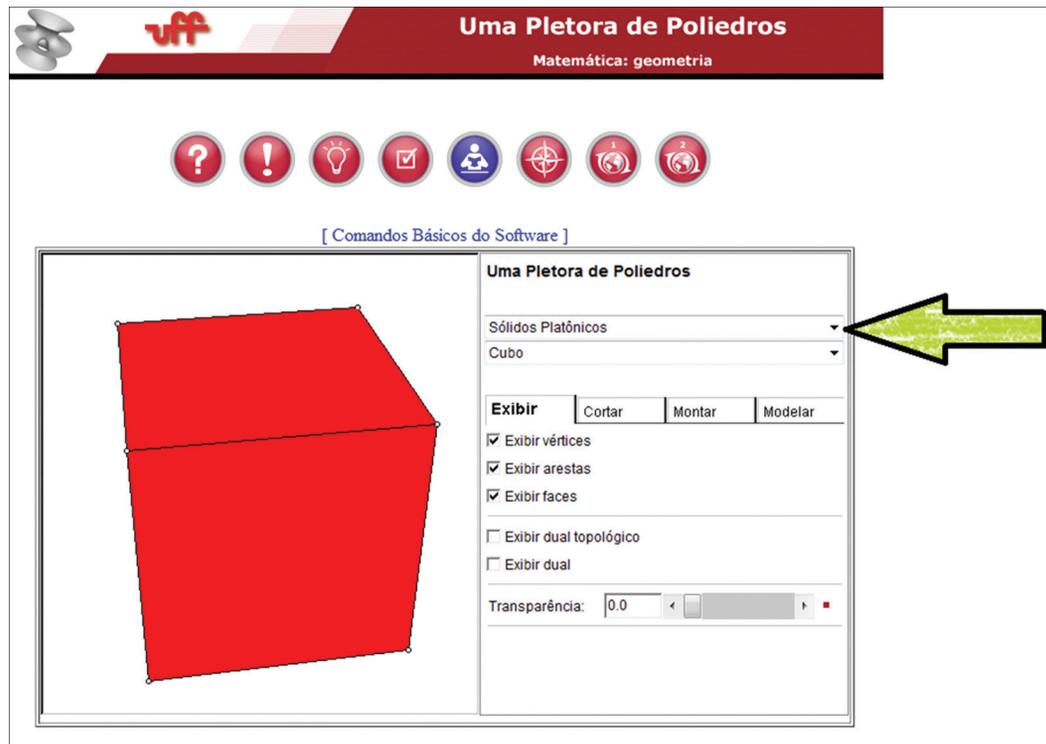
Oriente os alunos, acompanhando as folha de atividades a seguir.

Atividades – Pletora de Poliedros

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Você está acessando um software chamado “Uma Pletora de Poliedros”. Neste momento inicial, você enxerga a seguinte interface:

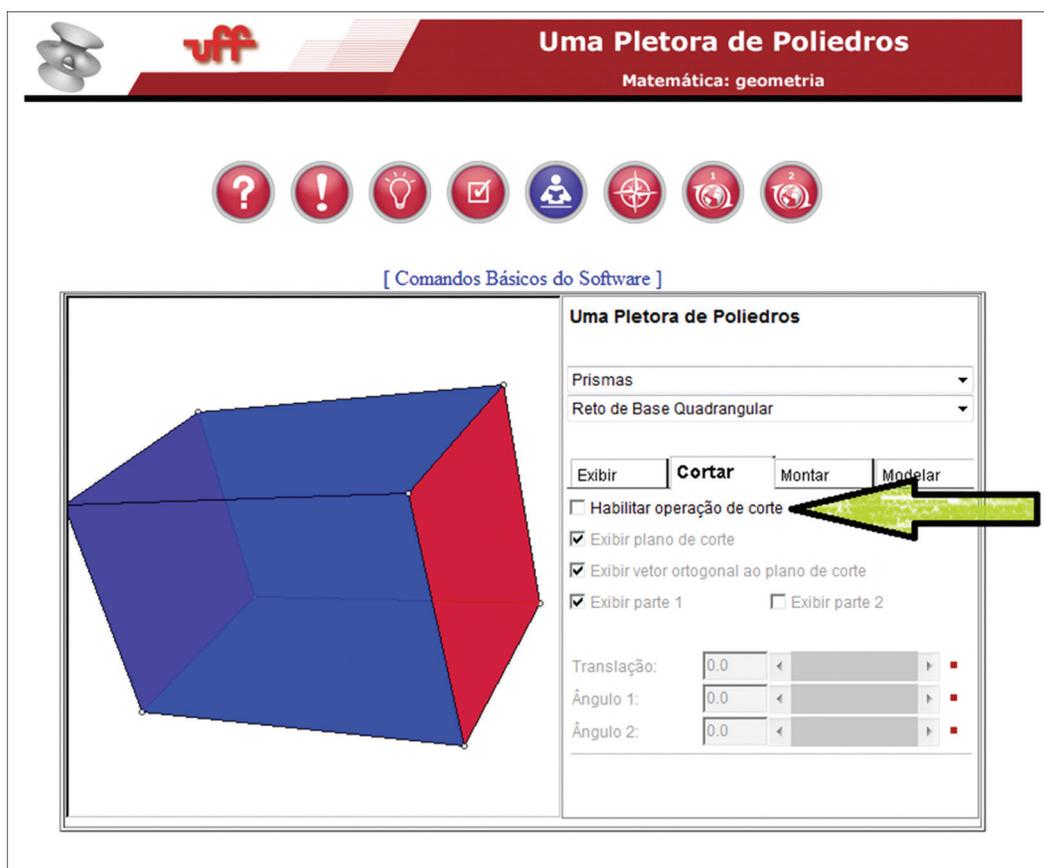


Selecione a opção Prismas no local indicado pela seta. Logo abaixo, aparecerá o prisma regular de base triangular. Com o mouse, clique e arraste a figura para manipular e visualizar todas as suas características e responda às perguntas:

- Quantas faces este prisma possui?
- As faces desse prisma são formadas por quais figuras geométricas?
- Quantas arestas este prisma possui? E quantos vértices?

Agora, no menu onde aparece escrito “Regular de Base Triangular”, selecione a opção “Reto de Base Triangular”. Escreva nas linhas abaixo as principais diferenças entre o prisma regular e o prisma reto de base triangular.

No mesmo menu, selecione agora a opção “Reto de Base Quadrangular”. Gire e explore a figura em todas as direções. Em seguida, selecione mais abaixo a aba chamada “cortar” e marque a opção “Habilitar operação de corte” (ver figura abaixo).



Em seguida, gire a figura com o auxílio do mouse. Altere os valores de “Translação”, “Ângulo 1” e “Ângulo 2” para ver o plano de corte se movimentar. Após as explorações da imagem, responda às perguntas:

- No valor de Translação = 0.0, de Ângulo 1 = 0.0 e Ângulo 2 = 0.0, o plano de corte determina sobre o prisma uma figura geométrica. Qual é essa figura?
- No valor de Translação = 0.0, de Ângulo 1 = -45.0 e Ângulo 2 = 30.0, o plano de corte limita sobre as faces vermelhas do prisma duas figuras geométricas diferentes. Quais são essas figuras?
- No valor de Translação = 4.0, de Ângulo 1 = 30.0 e Ângulo 2 = -45.0, uma figura geométrica fica apoiada no plano de corte do prisma. Qual é essa figura?

Aspectos pedagógicos

- Professor, os alunos podem apresentar dificuldades na manipulação dos instrumentos de informática como o mouse. Alguns alunos precisarão de auxílio mais enfático para as manipulações.
- Explore com os alunos as características de cada prisma estudado. Saliente para a diferença de tamanhos em relação à base, a altura do prisma, a existência de variadas figuras geométricas que compõem os prismas. Saliente as diferenças básicas entre quadrados e retângulos.
- Caso ache necessário, o software disponibiliza a planificação de todos os prismas trabalhados que pode ser impressa para que os alunos possam identificar melhor os elementos do prisma através de uma melhor manipulação.

Seção 2 – Área e Volume do paralelepípedo

Páginas no material do aluno

90 a 96

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Visualizações	Computador com internet. Desafios disponíveis em http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/visualizacoes.htm	Nesta atividade, os alunos farão atividades que desafiam a visualização de figuras tridimensionais, auxiliando na aquisição dos conceitos de área lateral e volume de prismas.	turma dividida em duplas ou trios.	20 minutos

Aspectos operacionais

Projete com o Datashow a atividade contida no endereço http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/visualizacoes.htm. Neste jogo constituído de quatro desafios, são exibidas duas figuras A e B no topo da imagem. A figura A consiste no sólido original formado por diversos cubinhos. Parte dos seus cubinhos é retirada, formando, então, a figura B. Cabe aos alunos tentar adivinhar qual a peça que foi retirada de A para se obter a figura B dentre as opções exibidas.

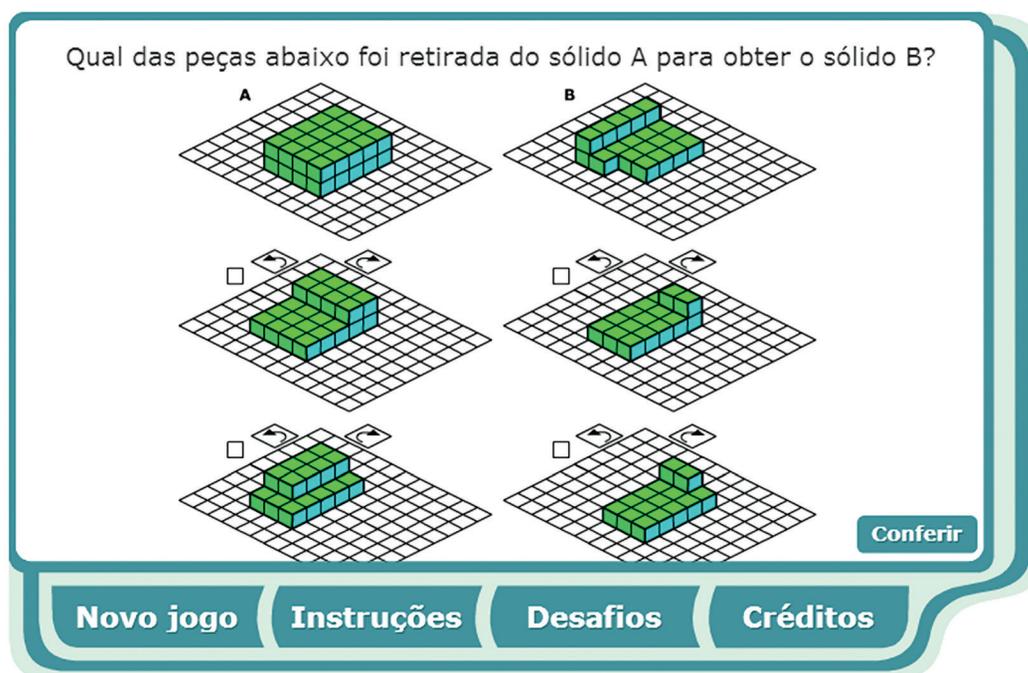


Figura da interface do jogo on-line. Aqui são exibidas as figuras A e B, além das opções de peças que podem ser rotacionadas para facilitar a visão dos alunos.

Aspectos pedagógicos

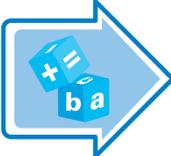
- Professor, a atividade tem por objetivos iniciar a prática de visualização de uma figura tridimensional, bem como diagnosticar os alunos que apresentem dificuldades visuais na identificação da terceira dimensão no desenho em perspectiva.
- Alerta-os que os blocos que estão nas opções de escolha estão na posição invertida da retirada, ou seja, “de cabeça para baixo” em relação à retirada do bloco original.
- Para tirar melhor proveito da atividade comece por aquelas que apresentam formas com menor volume: blocos formados por seis ou dez cubos.
- De início, eles podem sentir muita dificuldade, por ser uma atividade apenas visual, sem manipulação. Por isso, talvez seja interessante você ter dez cubos (podem ser dados ou formas de papel) para lançar mão de uma estratégia concreta: oferecer a cada grupo, de forma alternada, o conjunto de cubos para que ele materialize o que vê e tente determinar a alternativa correta.
- Para aproveitar melhor a atividade, inicie pedindo a eles que contem os cubinhos de uma determinada formação. Dessa forma, poderá identificar algumas dificuldades.
- Estimule-os a girar as figuras várias vezes; oriente-os a serem pacientes.

- Oriente-os a criarem alguma estratégia, por exemplo: olhar a altura e a profundidade do bloco original e identificar o que foi subtraído.
- Explore a noção de volume: suponha que cada cubo tem a medida padrão de 1m^3 . Solicite o registro, em papel, do volume inicial e do volume final, após a retirada de certo volume da atividade em foco; esse procedimento também se torna uma estratégia para alcançar a alternativa correta.
- Explore a noção de área lateral: suponha que cada face do cubo tem a medida padrão de 1m^2 .
- Solicite o registro, em papel, da superfície inicial de uma determinada face e da superfície final, após a retirada da quantidade de cubinhos da atividade; esse procedimento também se torna uma estratégia para alcançar a alternativa correta.

Seção 2 – Área e Volume do paralelepípedo e Seção 4 – Área e volume do cilindro

Páginas no material do aluno

90 a 96

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Planificações	tesouras, fitas adesivas, cópias da Folha de Atividades — Planificações (disponível na Seção Aspectos operacionais).	Nesta atividade, os alunos irão desenvolver suas habilidades de visualização espacial, trabalhando com o cilindro, o cubo e as suas planificações.	Turma disposta em duplas	25 minutos

Observação: Essa atividade foi proposta em http://gam.pavconhecimento.pt/projectos/pencil/pt/materiais_produzidos/pdf_rui_gracio/Planificacao_Cilindro_RG.pdf ; <http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5/Monografia%20FinalVanessaAngelotti.pdf>

Aspectos operacionais

- A atividade será realizada em três etapas. Na primeira, os alunos visualizam algumas figuras e tentam deduzir quais delas correspondem a planificações do cilindro. Na segunda, eles recortam as figuras e tentam montá-las para verificar quais delas correspondem às planificações do cilindro. Na terceira, eles trabalham em uma tarefa que envolve planificações do cubo.

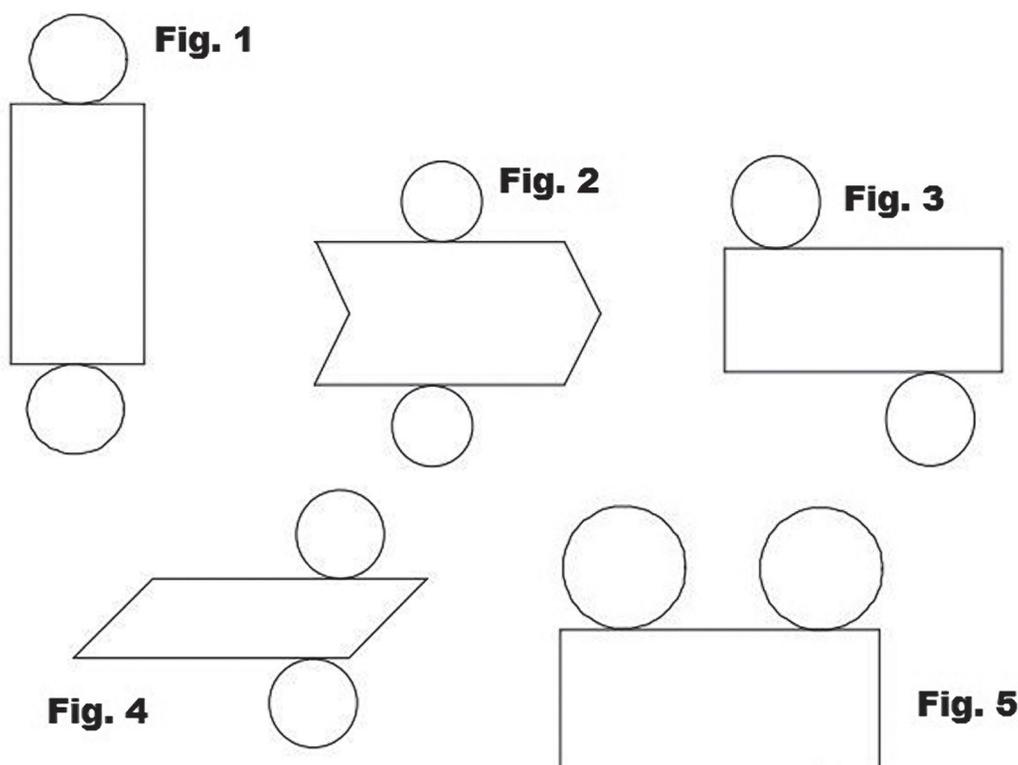
- Divida a turma em duplas e distribua a primeira página da Folha de Atividades — Planificações:

Atividades – Planificações

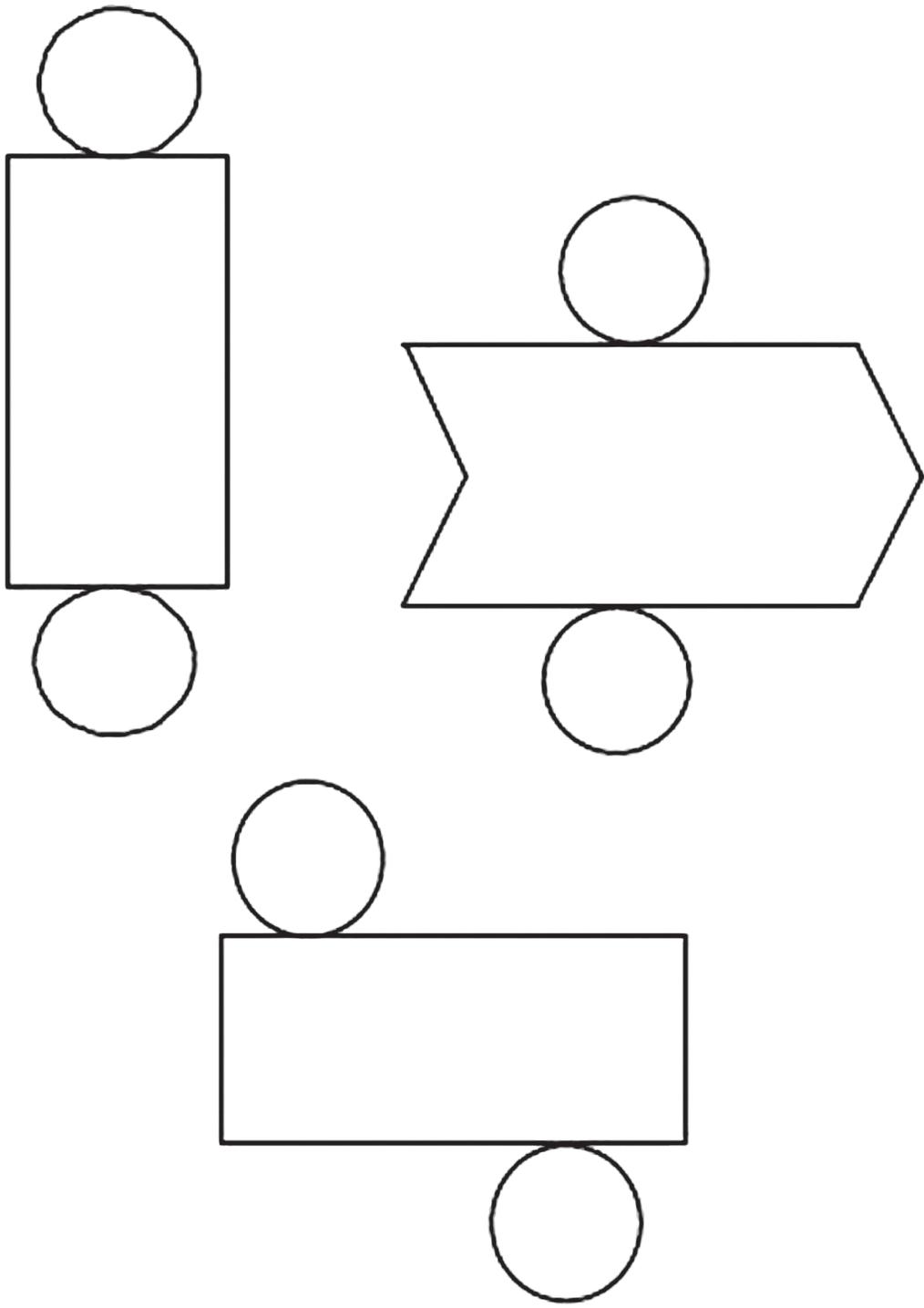
Nome da Escola: _____

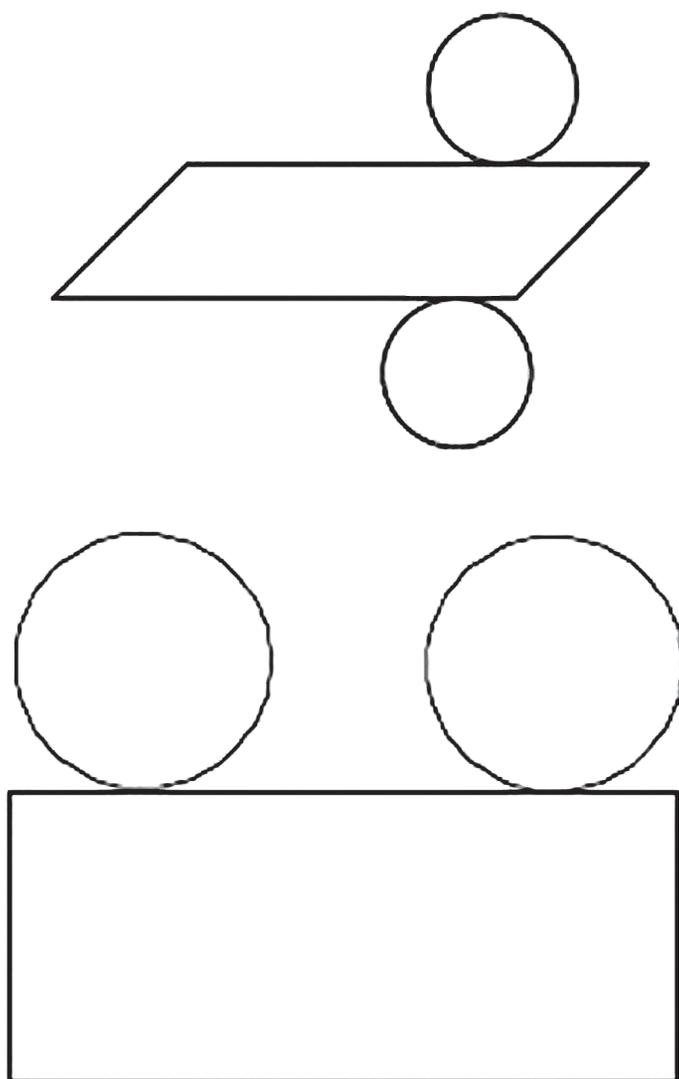
Nome: _____

1. Observe as figuras abaixo e indique quais representam ou não a planificação de um cilindro.



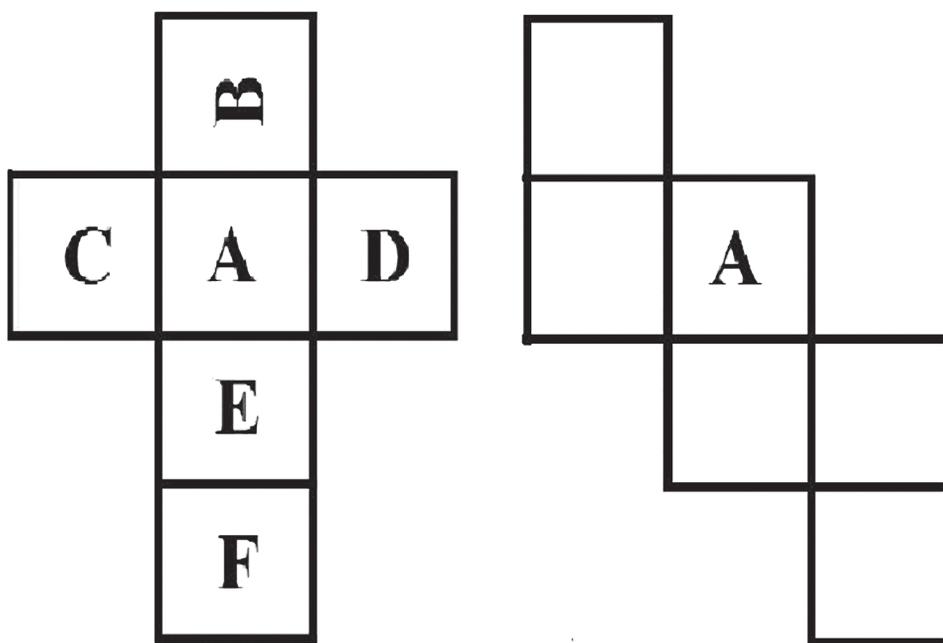
- Depois que as duplas já tiverem feito sua análise, promova uma discussão com os alunos. Solicite que elas compartilhem e justifiquem oralmente quais das figuras representam ou não planificações do cilindro.
 - Registre no quadro quais figuras foram consideradas ou não planificações do cilindro. Caso não haja consenso para alguma figura, registre-a como dúvida. Deixe a avaliação definitiva para ser feita após a segunda parte da atividade.
 - Distribua tesouras, fitas adesivas e as segunda e terceira páginas da Folha de Atividades — Planificações:
2. Use a tesoura e a fita adesiva para recorte e montar as figuras abaixo e verificar quais delas correspondem a planificações do cilindro (recorte apenas o contorno; não separe os círculos dos moldes). Isto é, quais delas permitem montar um cilindro.



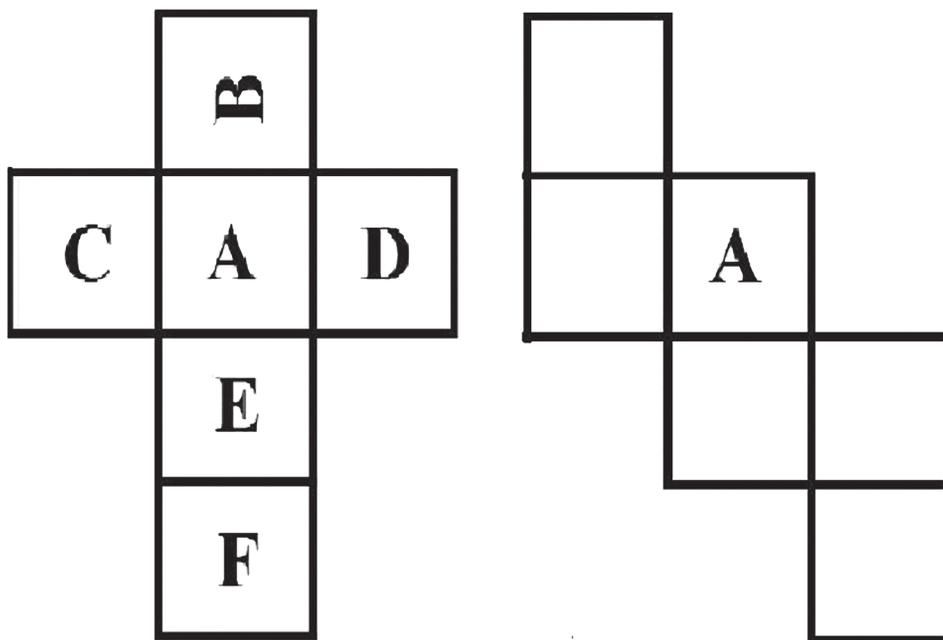


Você sabia que um cubo pode ser planificado de onze maneiras diferentes?

3. Uma das maneiras de planificar o cubo está apresentada na figura da esquerda. Em cada uma das faces desse cubo foram marcadas as letras de A a F. Na figura da direita, temos outra planificação do cubo. Sem recortar e montar o cubo, você pode preencher as cinco faces restantes de modo que, quando dobrarmos, os cubos se tornem idênticos?



4. Para conferir sua resposta, recorte as figuras abaixo e use a fita adesiva para montar os cubos.



Aspectos pedagógicos

Atenção, professor! Tenha moldes sobrando para o caso de acontecer recortes errados.

- Certifique-se de que os alunos recortem apenas o contorno dos moldes. Chame a atenção para que não separem os círculos dos moldes.
- É possível que os alunos enfrentem dificuldades em reconhecer as planificações sem recorrer à montagem dos cilindros ou do cubo. Explique que, na primeira etapa, eles não devem recortar as planificações para tentar montar o sólido. Eles devem imaginar e discutir as ideias com o colega. Recorrer à abstração é uma habilidade importante em Matemática.
- Se a atividade não estiver avançando, antecipe a execução da parte de montagem.
- Depois da montagem, explore com os alunos a relação entre o objeto tridimensional e sua representação planificada.

**Seção 2 – Área e Volume do paralelepípedo e Seção 4 –
Área e volume do cilindro**

Páginas no material do aluno

90 a 96

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Fórmula Mágica	Vídeo <i>Fórmula mágica</i> , disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1099 , calculadoras científicas e cópias da Folha de atividades – Fórmula mágica (disponível na Seção Aspectos operacionais).	O vídeo utilizado nessa atividade apresenta mecanismos práticos de cálculos aproximados de volume. Os volumes são obtidos por aproximações dos objetos por cilindros ou paralelepípedos. No problema proposto, o erro cometido em um dos processos de aproximação é analisado.	Turma disposta em duplas	25 minutos

Observação: Essa atividade foi proposta em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1099>

Aspectos operacionais

- Exiba o vídeo para a turma.
- Divida a turma em duplas e distribua as folhas de atividades.
- Depois que as duplas trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

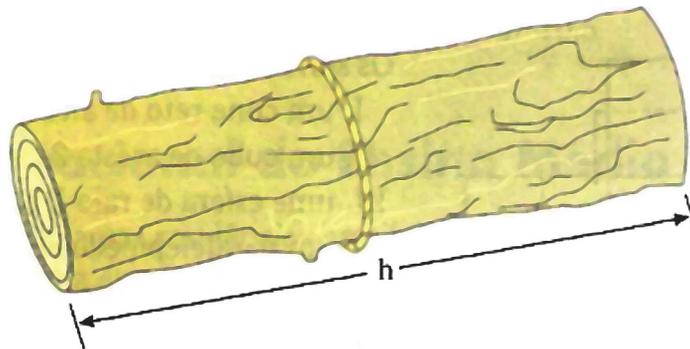
Atividades - Fórmula Mágica

Nome da Escola: _____

Nome: _____

No estado do Amazonas, é comum estimar o volume de uma tora de madeira através do seguinte procedimento:

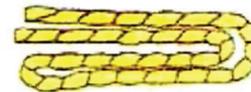
- Com um barbante, dá-se uma volta completa em torno do tronco.



- O barbante é dobrado duas vezes pela ponta. Em seguida, o comprimento da "segunda dobra" é medido com fita métrica.



1ª dobra



2ª dobra

- Essa medida é multiplicada por ele mesma e depois multiplicada pelo comprimento do tronco. O resultado obtido é o volume estimado da tora de madeira.

1. Suponha que você tenha uma tora de madeira no formato de um cilindro cuja altura mede 5 metros e cuja base é círculo com perímetro igual a 3,14 metros. Calcule o volume da tora de dois modos: usando o método descrito acima e usando a fórmula para cálculo do volume de um cilindro.

Aspectos pedagógicos

- Professor, para que a atividade seja melhor aproveitada, concretize-a utilizando, por exemplo, um frasco de remédio e um pedaço de barbante; trabalhe com aproximação para a altura do frasco.
- Para melhor entendimento pelo aluno, faça o passo a passo descrito no texto.
- Aproveite a oportunidade para mostrar ao aluno como se procede numa atividade prática com o uso da calculadora.
- Para calcular o volume do cilindro com a fórmula usual, é necessário conhecer o raio do círculo que é base do cilindro. Os alunos podem encontrar dificuldade em deduzir o valor desse raio a partir do conhecimento do perímetro do círculo. Nesse caso, será útil relembrar a fórmula de cálculo do perímetro de uma circunferência.

Seção 3 – Princípio de Cavalieri e o volume dos sólidos em geral

Páginas no material do aluno

101 a 104

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Prismas	Cola, réguas, calculadoras científicas, folhas de papel A4, transferidores, calculadoras, cópias da folha de atividades — Prismas (disponível na Seção Aspectos operacionais).	Nessa atividade, os alunos irão construir prismas de base triangular diferentes usando papel A4. Eles deverão ordená-los em ordem crescente de volume e tentarão descobrir qual prisma de volume máximo pode ser construído com meia folha de papel A4.	Turma disposta em trios	35 minutos

Observação: Esta atividade foi proposta em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1031>

Aspectos operacionais

- Entregue uma cópia da folha de atividades para cada trio, 3 folhas de papel A4, cola, tesoura, régua, calculadora e transferidor.
- Oriente os alunos a lerem o texto inicial e a executarem as tarefas propostas na folha de atividades. A proposta é que cada aluno construa dois prismas.

Atividades – Prismas

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Prismas

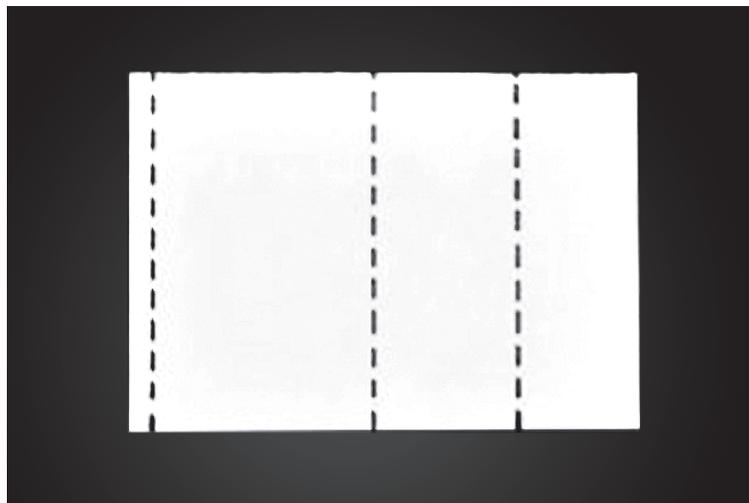
Você deve ter reparado, na prateleira do supermercado, que as embalagens de alguns produtos foram modificadas. Por exemplo, a embalagem do sabão em pó e do leite condensado. São muitas as razões para uma empresa decidir alterar a embalagem de seu produto. Mas, no caso desses dois exemplos, uma das razões foi: ECONOMIA DE MATERIAL!

Hoje vamos investigar como construir canaletas em formato de prismas de base triangular. Vamos fixar a quantidade de material que iremos usar e queremos determinar qual a canaleta que tem volume máximo.

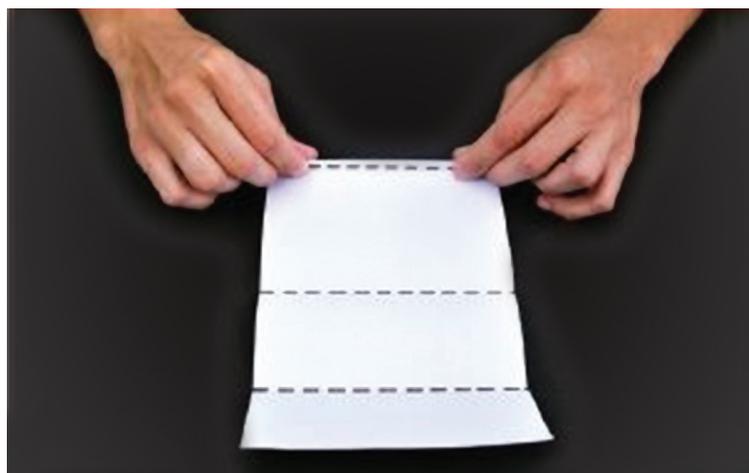
Montagem dos Prismas

Para montar os prismas, siga os seguintes passos:

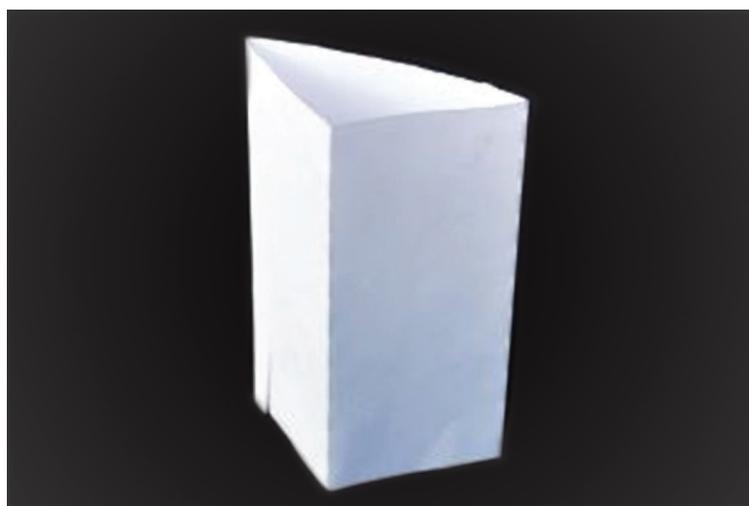
- Dividir cada folha A4 ao meio (de modo a obter duas metades de tamanho A5);
- Com meia folha, faça, com a régua, um traço paralelo ao lado menor distando 1,0 cm da extremidade e dobre. Faça mais dois traços paralelos no restante da folha; lembre-se de que esses dois traços devem ser escolhidos de modo que, ao dobrar, seja possível juntar as extremidades do papel e montar um prisma de base triangular.



- Dobre o papel ao longo dos traços.



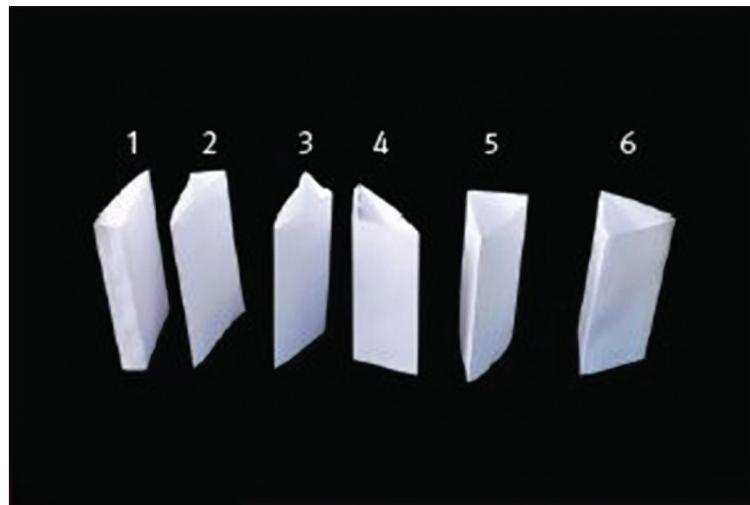
- Cole a aba de 1,0 cm na outra extremidade.



- Repita os passos anteriores com as outras 5 metades de folha A4 de modo que cada prisma tenha bases diferentes.

Comparação dos Volumes dos Prismas

- Observe os prismas que seu grupo montou. Tentem organizá-los em ordem crescente de volume.
- Numere os prismas em ordem crescente de volume: o de menor volume recebe o número 1; o próximo, 2; e assim por diante.



Cálculo dos Volumes dos Prismas

Agora, vamos calcular o volume dos prismas construídos. Sabemos que o volume V de um prisma é igual ao produto da área A de sua base por sua altura h .

Os prismas construídos têm base triangular. Para calcular a área da base, vamos usar a fórmula que nos diz que a área de um triângulo é igual à metade do produto das medidas de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo formado por eles. Se o triângulo tem lados com medidas iguais a a , b e c :

$$\text{Área do triângulo} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen} \alpha}{2}, \text{ onde } \alpha \text{ é o ângulo entre os lados de medida } a \text{ e } b.$$

Para cada prisma:

- Escolha dois lados do triângulo de base e meça o comprimento de cada um deles. Anote na tabela abaixo.
- Com ajuda do transferidor, meça o ângulo formado pelos dois lados escolhidos no item anterior. Anote na tabela abaixo.

Prisma	Lado 1	Lado 2	Ângulo α	Seno α	Altura	Volume
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- Determine qual o prisma de maior volume que vocês construíram.

Aspectos pedagógicos

- É interessante lembrar a fórmula que nos diz que a área de um triângulo é igual à metade do produto das medidas de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo formado por eles. Se o triângulo tem lados com medidas iguais a a , b e c :

$$\text{Área do triângulo} = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen} \alpha}{2}, \text{ onde } \alpha \text{ é o ângulo entre os lados de medidas iguais a } a \text{ e } b.$$

- Os alunos podem ter dificuldade em usar a calculadora científica;
- Para melhor aproveitar a atividade, escolha um dos prismas e proponha a realização da atividade na forma de estudo dirigido;
- Após, verifique se a calculadora está sendo usada corretamente no cálculo dos senos dos ângulos;
- Se alguns alunos não conseguirem formar o triângulo, lembre-lhes de que as dobras não podem ser feitas arbitrariamente na folha. É preciso respeitar a condição de existência de um triângulo: um triângulo só pode ser construído se cada lado for menor que a soma dos outros dois.
- Talvez seja necessário ajudar os alunos a usar o transferidor, pois é um instrumento que possui grau de dificuldade no posicionamento correto e na leitura da medição;
- Peça aos alunos para tomarem cuidado para não deformar os prismas na hora de coletar as medidas dos lados e ângulo.
- Ao final da atividade, discuta com os alunos se era realmente necessário calcularmos os volumes para compararmos os prismas. Observe que já sabíamos que todos os prismas tinham mesma altura (igual à metade do comprimento da folha A4). Deduza que o prisma de maior volume será aquele que tiver a maior área de base.
- A partir dos prismas construídos, discuta e levante hipóteses, com os alunos, de como o sólido deveria ser construído para que ele tivesse o maior volume possível.
- Além disso, monte uma tabela no quadro com o prisma de maior volume de cada grupo. Identifique qual o prisma de maior volume encontrado. Discuta com os alunos: a relação entre as medidas dos lados da base, dos ângulos; qual o tipo de triângulo da base: escaleno, isósceles ou equilátero? Será que há algum outro triângulo de base que gera um prisma que possui um volume maior ainda?
- O prisma com maior volume é aquele que possui como base um triângulo equilátero. Para entender o porquê é preciso observar com os alunos que todos os triângulos que formam a base de cada prisma têm o mesmo perímetro (igual à largura da folha A4 menos 1 cm usado na aba de colagem) e lembrar que dentre todos os triângulos de mesmo perímetro, o equilátero é o que tem maior área.

- Se ninguém tiver feito esse prisma anteriormente, peça a eles que calculem o volume que esse sólido teria se fosse montado. A medida a do lado desse triângulo da base é dada por

$$a = \frac{\text{largura da folha A4} - 1\text{cm}}{3} = \frac{20}{3} \cong 6,67\text{cm}.$$

Portanto, o volume do prisma, cuja base é um triângulo equilátero, é igual a:

$$V = \text{área da base} \cdot \text{altura}$$

= área do triângulo equilátero · metade do comprimento da folha A4

$$= \frac{a^2 \cdot \text{sen}60^\circ}{2} \cdot \frac{29,7}{2} = \frac{6,67^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{29,7}{2} \cong 285,79\text{cm}^3.$$

Seção 3 – Princípio de Cavalieri e o volume dos sólidos em geral

Páginas no material do aluno

101 a 104

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	A geometria das abelhas	Vídeo <i>Abelhas matemáticas</i> , disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1042 , folhas de papel A4, tesouras, fitas adesivas, régua, cópias da folha de atividades – A geometria das abelhas (disponível na Seção Aspectos operacionais).	Nessa atividade, os alunos assistirão a um vídeo sobre a geometria dos alvéolos das colmeias. O vídeo mostra que as abelhas utilizam uma geometria que maximiza a capacidade de armazenamento de mel e minimiza a quantidade de cera gasta na construção dos alvéolos. Nos problemas propostos, vão trabalhar com aspectos dos prismas e suas planificações.	Turma disposta em trios	30 minutos

Observação: Essa atividade foi proposta em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1042>

Aspectos operacionais

- Exiba o vídeo para a turma.
- Divida a turma em trios e distribua as folhas de atividades, folhas de papel A4, régua, fitas adesivas e tesouras.
- Depois dos trios trabalharem com os problemas propostos, promova uma discussão com toda a turma sobre as resoluções propostas.

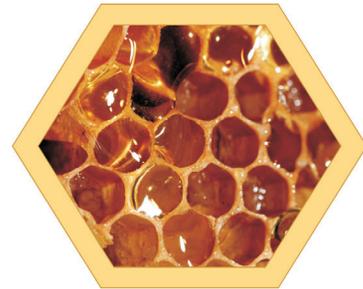
Atividades – A geometria das abelhas

Nome da Escola: _____

Nome: _____

A geometria das abelhas

Para entender a geometria dos favos de mel, é preciso atentar para dois aspectos: a justaposição e o encaixe perfeito dos favos e a quantidade de cera gasta na construção de cada alvéolo. Através da resolução dos problemas abaixo propostos, vamos discutir esses dois aspectos.



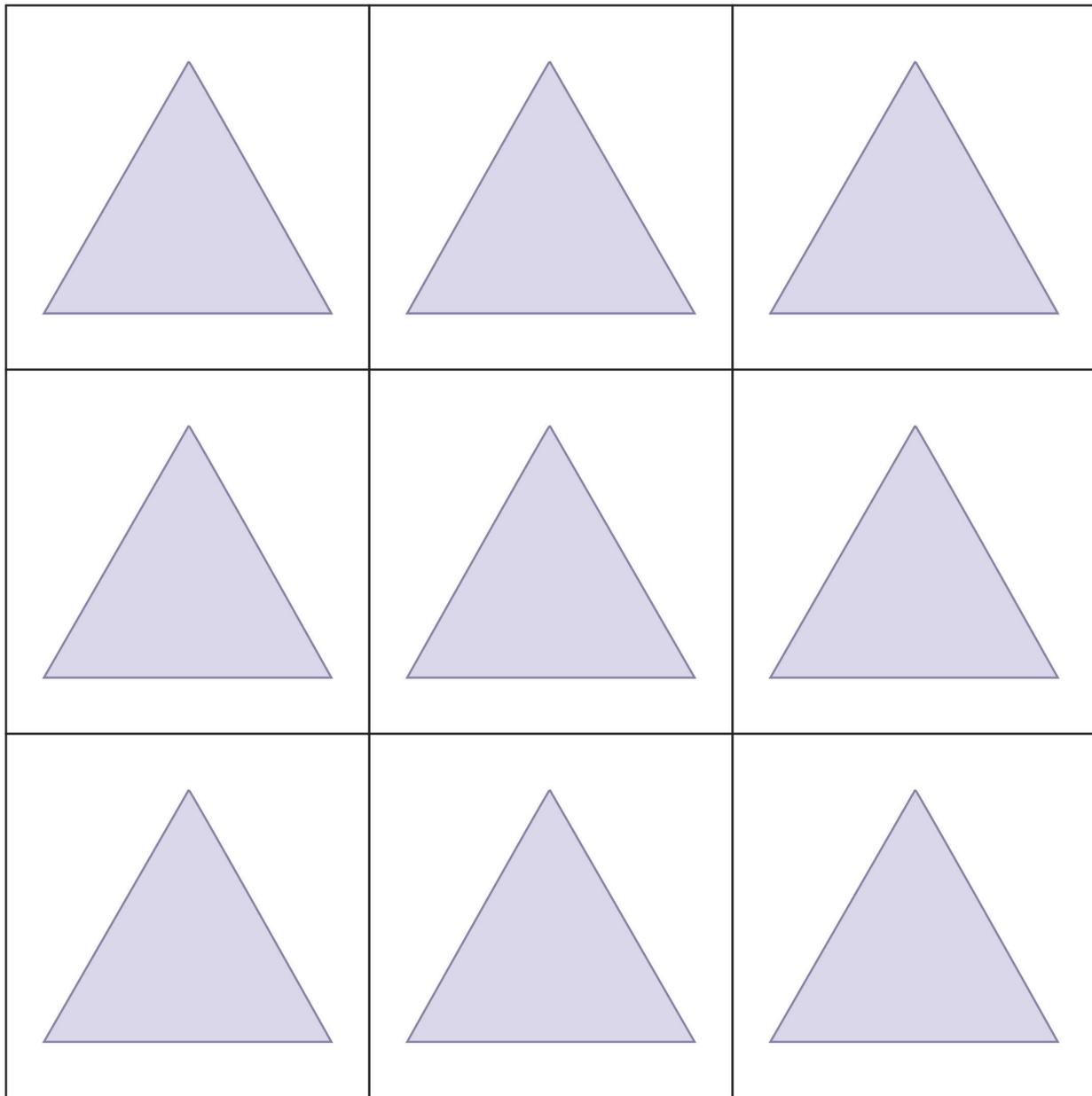
Problemas

Os alvéolos das abelhas são prismas. Para que eles se encaixem perfeitamente, é preciso que suas bases cubram uma região plana sem deixar espaços vazios e sem se sobreporem.

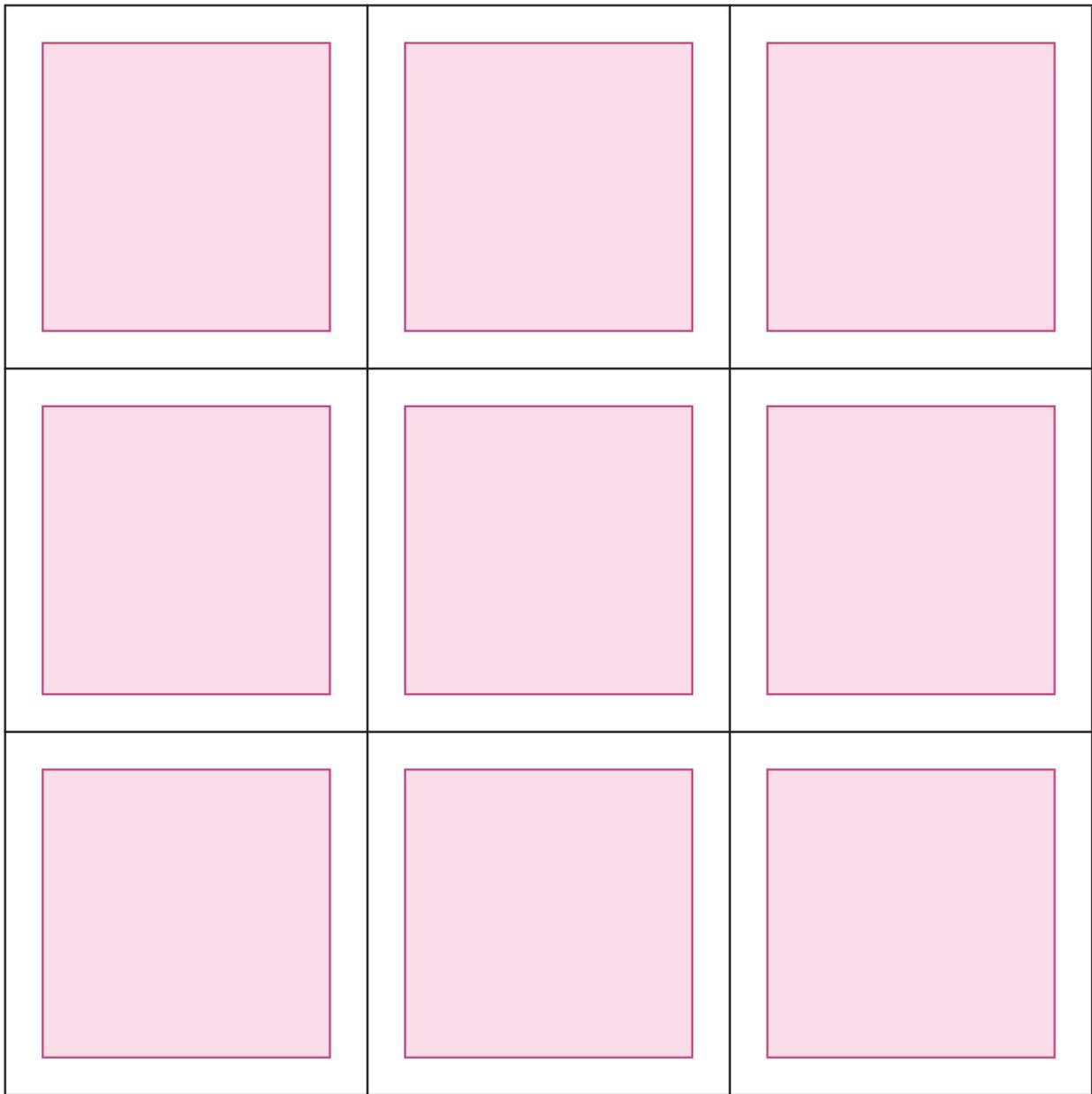
Vamos investigar quais polígonos regulares permitem esses recobrimentos.

Recortem os polígonos abaixo.

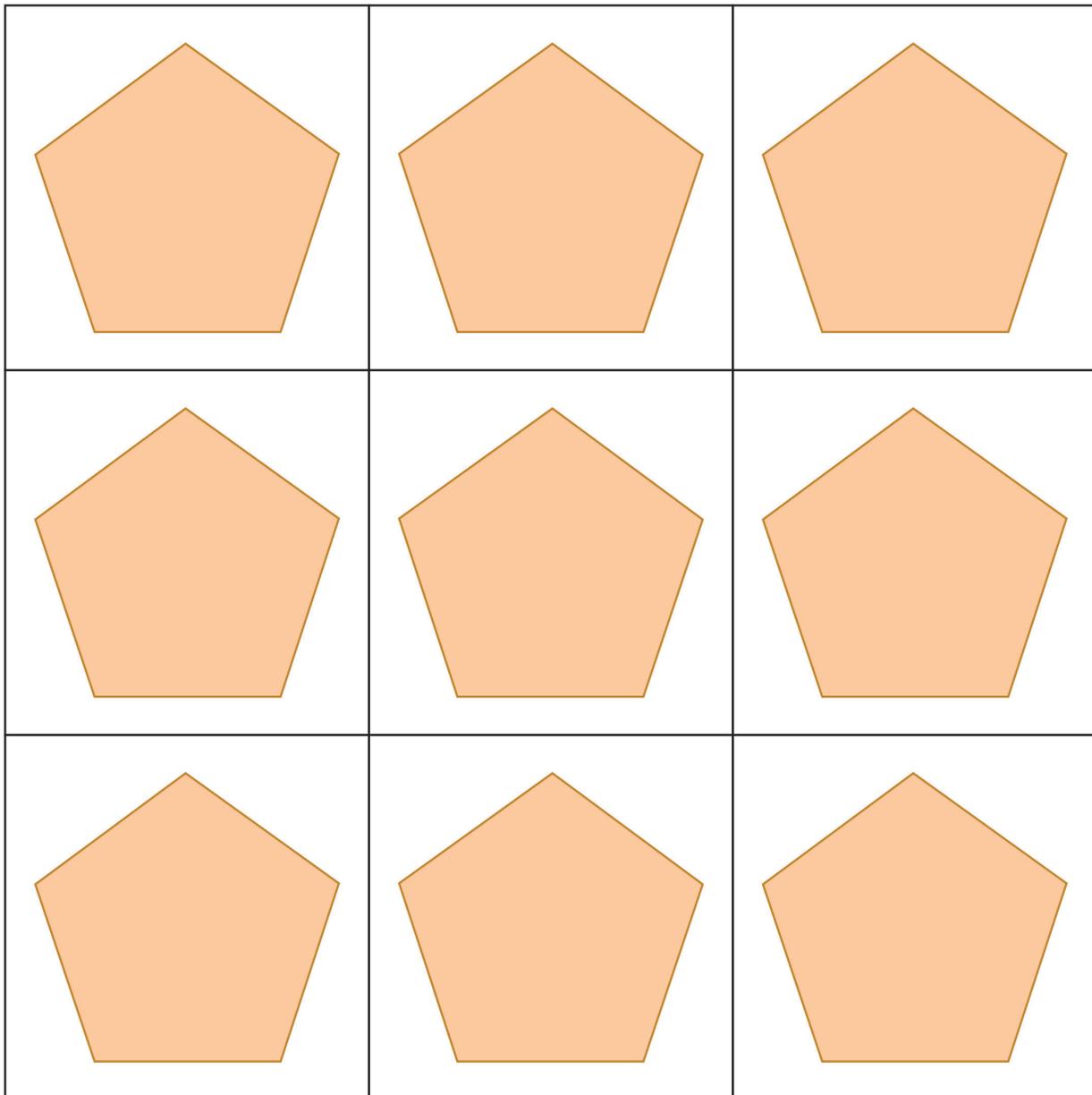
Triângulos equiláteros



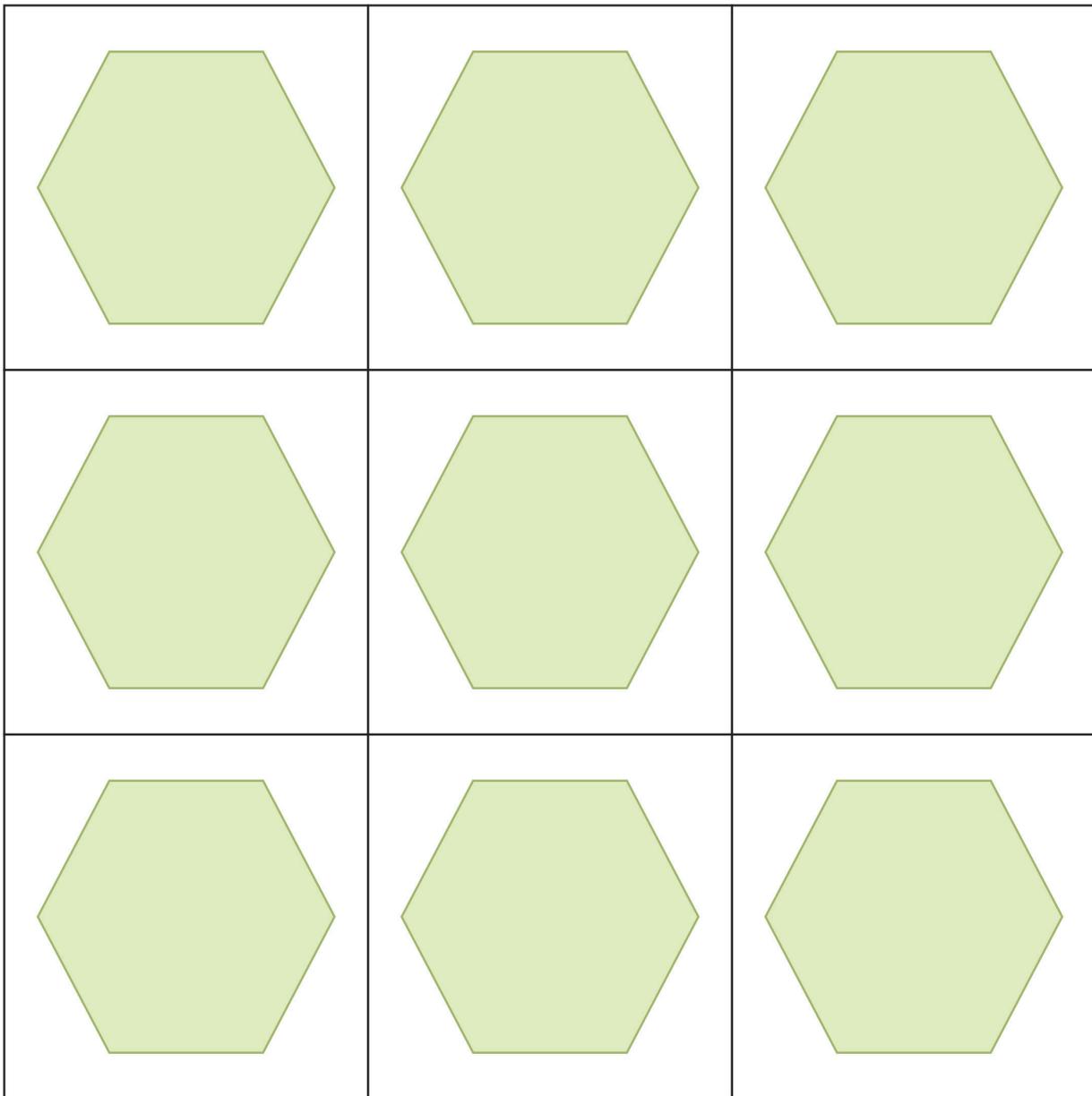
Quadrados



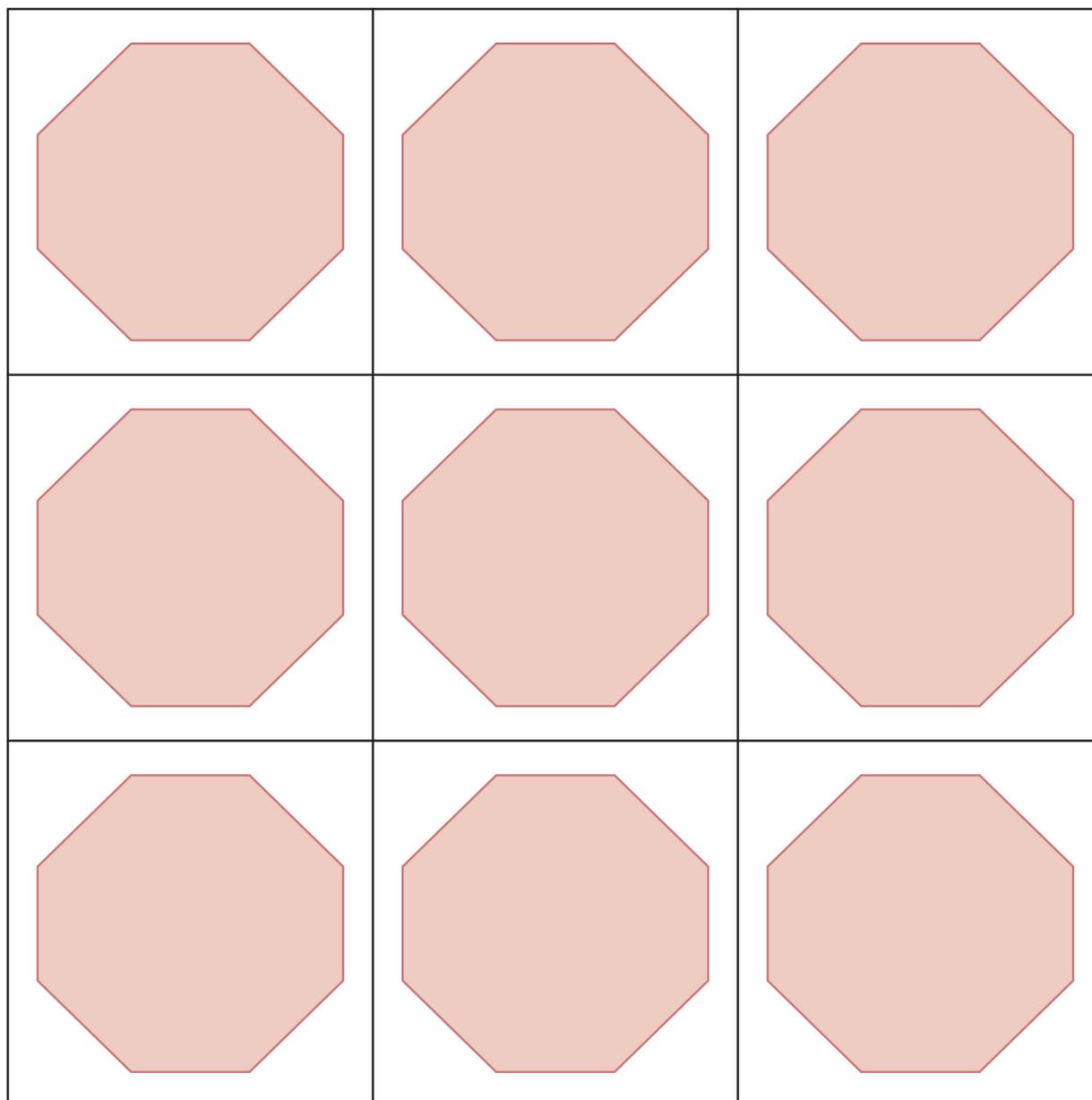
Pentágonos regulares



Hexágonos regulares



Octógonos regulares



Em matemática, o processo de tentar cobrir uma região plana com polígonos sem deixar espaços vazios e sem que eles se sobreponham é chamado de ladrilhamento. É um processo análogo ao que usamos nos pisos e paredes de nossas casas com cerâmicas e azulejos.

Tentem fazer um ladrilhamento usando apenas os triângulos que foram recortados. Isto é, verifiquem se é possível cobrir uma região plana com triângulos sem que haja superposição e sem que ocorram espaços vazios. Em seguida, faça o mesmo com os quadrados e assim sucessivamente com todos os polígonos regulares que foram recortados.

Observe seus resultados e diga quais polígonos regulares podem ser utilizados para fazer um ladrilhamento. Isto é, quais podem ser colocados lado a lado sem que haja superposição e sem que ocorram espaços vazios.

Vamos investigar agora o volume dos alvéolos. Vamos imaginar que a mesma quantidade de cera seja usada na parte lateral dos alvéolos e que todos os alvéolos tenham a mesma altura. Para concretizar essa ideia, pegue meia folha de papel A4 e construa prismas cujas alturas sejam iguais à metade do comprimento da folha A4 e cujos perímetros da base sejam iguais à largura da folha A4 (para unir a lateral do prisma, use fita adesiva sem fazer nenhuma dobra com superposição). Use as folhas para construir a parte lateral de três prismas: um cuja base seja um triângulo equilátero; outro cuja base seja um quadrado e outro cuja base seja um hexágono regular.

Calcule o volume de cada um dos prismas construídos e determine qual deles tem maior volume.

Polígono da base	Altura do prisma	Perímetro da base	Área da base	Volume do prisma
Triângulo equilátero				
Quadrado				
Hexágono				

Aspectos pedagógicos

Antes que os alunos comecem a resolver os problemas, relembre a definição e classificações de polígonos regulares.

Além disso, relembre o cálculo das áreas de: triângulos equiláteros; quadrados e hexágonos regulares.

Os alunos podem encontrar dificuldade em construir os prismas solicitados. Se necessário, pegue meia folha de A4 e construa coletivamente, discutindo o processo, por exemplo: o prisma cuja base é um triângulo equilátero; a altura é igual à metade do comprimento da folha A4 e cujo perímetro da base seja igual à largura da folha A4.

Ressalte a relação entre o perímetro e a medida do lado do polígono da base (no caso do triângulo, devemos dividir a largura da folha em três partes iguais).

Lembre a eles de montar o prisma com o auxílio de fita adesiva sem dobrar nenhuma aba para colagem.

ATIVIDADES DE AVALIAÇÃO

Nessa seção, apresentaremos atividades que retomam as habilidades verificadas nas seções anteriores, com o intuito de consolidar e avaliar o processo de ensino/aprendizagem do conteúdo proposto. Uma parte dessa seção também enfatizará a reflexão do aluno sobre os conteúdos abordados.

Sugerimos a utilização dos dois últimos tempos de aula destinados a esta unidade. A seguir, apresentamos sugestões para a retomada dos conteúdos trabalhados e para avaliação das habilidades pretendidas. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir:

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Registros de aprendizagens	Cópias do texto da seção aspectos operacionais.	Esta etapa pode estar articulada à seção “ Veja ainda ” no material do aluno. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade, bem como a resolução dos exercícios de revisão.	Individual	25 minutos

Aspectos operacionais

Distribua a folha de atividades – Registro de Aprendizagem - e solicite aos alunos que preencham de forma individual. Ao final, faça um breve levantamento sobre as dúvidas e dificuldades apresentadas pelos alunos e promova uma pequena discussão em torno dessas dificuldades, a fim de auxiliar seus alunos com mais essa ferramenta.

Atividades – Registro de Aprendizagem

Nome da Escola: _____

Nome: _____

1. Pense bem em tudo o que exploramos em nossas atividades em sala e responda.

- a. Uma lata de óleo de cozinha fica mais bem apoiada quando colocada em pé (“sobre a base circular”) ou quando deitada? Por quê?

b. "Todas as formas espaciais que existem no nosso planeta são cilíndricas ou poliédricas." Isso é verdade? Explique.

c. "Apesar de atribuirmos a ideia de plano a uma folha de papel, sabemos que esta é tridimensional." Como é possível verificar essa afirmação?

2. Dispondo-se de uma folha de papelão de 50 cm x 40 cm, pode-se construir uma caixa aberta cortando-se um quadrado de 10 cm de lado em cada canto da folha. Calcule o volume da caixa e desenhe-a.

3. As áreas de três faces de um paralelepípedo retangular medem 6 cm^2 , 8 cm^2 e 12 cm^2 . Calcule o volume desse paralelepípedo.

Aspectos pedagógicos

- Durante a execução da tarefa, verifique como os alunos utilizam as informações do enunciado para a resolução dos problemas.
- Auxilie os alunos que apresentam dificuldades, lembrando as definições e resultados.
- O problema 2 não apresenta uma figura para facilitar o entendimento, mas a ideia é justamente propor essa percepção mais abstrata.
- O problema 3 pode ser um pouco mais difícil de visualizar, pois as informações são sobre as áreas, e não sobre as dimensões. Mostre que isso tem uma relação com o volume.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de avaliações de larga escala ou concurso	Cópias das questões	Sugerimos, nesta etapa, a escolha de uma questão que contemple uma habilidade pretendida nesta unidade para compor o instrumento avaliativo. A ideia é que o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como ENEM, vestibulares, concursos, etc.	Individual	20 minutos

Aspectos operacionais

Distribua a folha de exercícios e promova a realização das atividades individualmente. Após um breve período de tempo, percorra as carteiras dos alunos e busque auxiliá-los na resolução de cada um dos exercícios a seguir.

A seguir, oferecemos questões sobre prismas e cilindros.

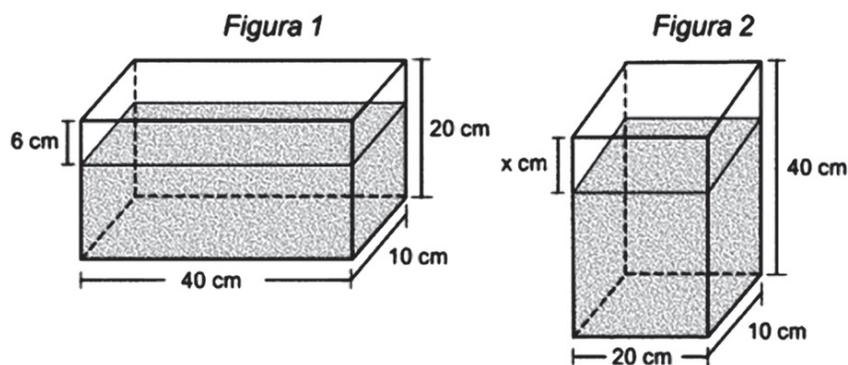
Atividades – Exercícios Adicionais

Nome da Escola: _____

Nome: _____

Questão 1 (UFRRJ- 2006)

Observe o bloco retangular da figura 1, de vidro totalmente fechado com água dentro. Virando-o, como mostra a figura 2, qual o valor de x ?

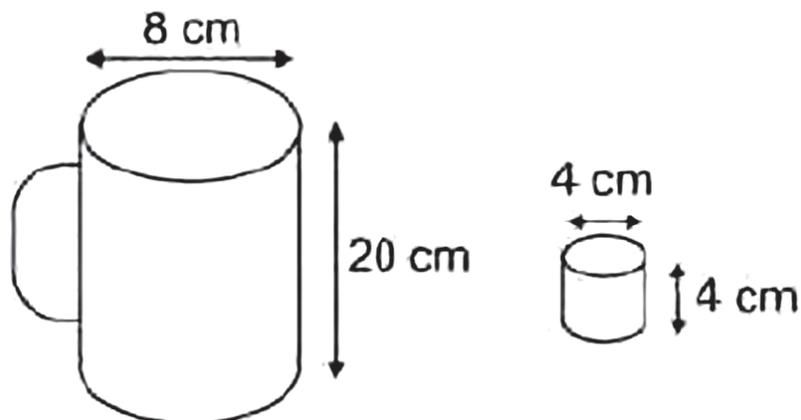


Questão 2 (Uel 2003)

Uma caixa é totalmente preenchida por cinquenta cubos idênticos. Quantos cubos iguais a esses podem ser colocados em uma caixa cujas dimensões internas têm, respectivamente, o dobro das dimensões da caixa anterior?

Questão 3 (ENEM 2010)

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

- encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

- c. encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- d. encher duas leiteiras de água, pois elas têm um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- e. encher cinco leiteiras de água, pois elas têm um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

Aspectos pedagógicos

- Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas.
- Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Pondere as equivocadas, ressaltando onde reside o erro.
- Ressalte a complexidade de algumas questões desse tipo que, em alguns casos, abordam diferentes conteúdos.
- As questões objetivas de vestibulares, em geral, têm em suas alternativas erradas sempre uma justificativa com erro plausível. Obviamente, isso não está evidente na alternativa. Dessa forma, procure identificar o erro que gerou cada uma das alternativas e discuta com os alunos.

Referências

Cilindro

- O cilindro e sua área <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28286>
- Volume — (CEDERJ 2011)
http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/downloads/cm/cm_11_10_25_3.pdf

Paralelepípedo

- Volume — exercício 13 (UNIRIO) <http://www.singularsantoandre.com.br/portal/emd/ar/professores/enzo/APOSTILA%20GEOMETRIA%20ESPACIAL%202013.pdf>
- Volume Mariana dispõe
http://crv.educacao.mg.gov.br/SISTEMA_CRV/index.aspx?id_projeto=27&id_objeto=39777&tipo=ob
- Volume Estágio concreto-abstrato
<http://pt.scribd.com/doc/5045012/Matematica-Suplemento-de-Apoio-do-Professor-Manual>

Planificações

- http://crv.educacao.mg.gov.br/sistema_crv/banco_objetos_crv/%7BFD1A79A4-98ED-47C7-A67C-425E442635DF%7D_planificacoes.pdf
- <http://sosprofessor-atividades.blogspot.com.br/2012/03/solidos-geometricos.html>

Prismas

- Abelhas <http://super.abril.com.br/mundo-animal/geometria-instintiva-abelhas-439742.shtml>
- <http://www.apacame.org.br/mensagemdoce/59/artigo.htm>
- <http://www1.folha.uol.com.br/fsp/fovest/fo2310200312.htm>

Questões

- http://www.eja.educacao.org.br/bibliotecadigital/enem/Simulados1/questoes_geometria.pdf
- <http://books.google.com.br/books?id=GlS76b-2VkcC&pg=PA74&pg=PA74&dq=atividade+ensino+m+edio+planificacao+cubo&source=bl&ots=ftIzrJ2Uqc&sig=tjZupfwMTcDNBtulk86ZrMkyl8Q&hl=en&sa=X&ei=zpquUYeOO6fs0QGv4HwDg&ved=0CGwQ6AEwCQ#v=onepage&q=atividade%20ensino%20medio%20planificacao%20cubo&f=false>

Cavaliéri

- <http://www.inf.ufes.br/~ldsecchin/cavaliéri.pdf>
- <http://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20122/mat1514/cap5.pdf>
- EXEMPLO 8: <http://www.uss.br/arquivos;jsessionid=878FE3484470177F9A43419B1A7EA8C0/posgraduacao/strictosensu/educacaoMatematica/produto/2010/produto-julianelli-vfinal.pdf>
<http://www.youtube.com/watch?v=eTynAqsTNJ4>