

Geometria Espacial: pirâmides e cones

André Luiz Cordeiro dos Santos, Gabriela dos Santos Barbosa, Josemeri Araujo Silva Rocha e Luciane de Paiva Moura Coutinho

Introdução

Professor, vimos que foi trabalhado na Unidade 4 do material do aluno o assunto Pirâmides e Cones. Com base nesse material, preparamos para você um material complementar para enriquecer a abordagem dos objetivos do módulo do aluno, que são os seguintes:

- Identificar os principais elementos de uma pirâmide;
- Calcular área e volume de uma pirâmide;
- Identificar os principais elementos de um cone;
- Calcular área e volume de um cone.

Faz-se necessário que você não apenas domine o assunto, mas também tenha amplo conhecimento sobre a proposta aqui apresentada antes de levá-la para a sala de aula.

A ideia que norteou a equipe durante o processo de produção deste material foi levar até você uma proposta que pudesse contribuir de forma significativa para a ampliação do seu trabalho pedagógico nas aulas de matemática.

É através de objetos presentes no cotidiano humano que começa a discussão sobre Pirâmides e Cones na unidade do aluno, onde as famosas Pirâmides do Egito são destacadas. E não poderíamos trabalhar de outra forma aqui no material do professor, trazendo para a sala de aula as vivências dos alunos, suas observações, seu cotidiano.

A nossa sugestão é que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora e, por isso, trazemos duas atividades. Em *Fotografando Pirâmides*, inspirados nas pirâmides do Egito, os alunos deverão fotografar pirâmides presentes na arquitetura do seu bairro e em objetos do seu cotidiano para uma bela exposição em sala de aula. Na atividade *Construindo Pirâmides e Cones*, os alunos deverão montar pirâmides e cones a partir de planificações desses sólidos, e os mesmos serão utilizados em outras tarefas ao longo do estudo.

Na Seção 1, você pode optar pela atividade *Avançando na Geometria Espacial*, que propõe um divertido jogo de tabuleiro, onde serão trabalhados elementos que compõem pirâmides e cones. *Poderá, ainda, convidar os alunos a jogar no Superquadrado Mágico* e desvendar propriedades dos sólidos em estudo.

Para trabalharmos a Seção 2, sugerimos duas atividades. Na primeira delas, os alunos construirão pirâmides de mesma altura, mas com bases poligonais diferentes e, daí, comparar de maneira experimental os volumes das pirâmides construídas. Já na segunda, a partir de algumas observações, os alunos irão discutir sobre alguns aspectos de uma pirâmide, como número de faces, tipo de base, e até mesmo como calcular o volume de seu tronco.

Na Seção 3, é possível construir um cone a partir de sua planificação, usando instrumentos de construções geométricas, e ainda manipular esse sólido e fazer um estudo mais aprofundamento dele.

Fechando as atividades relacionadas às seções do material do aluno, vem a Seção 4 com a atividade *“A origem do chorinho”*, onde, a partir de uma situação cotidiana, os alunos poderão descobrir como calcular o volume de um copo em formato cilíndrico. Além disso, eles poderão construir um cone e um cilindro a partir de suas planificações, calculando assim o volume do cone por comparação ao volume do cilindro.

Por fim, aconselhamos que a última aula seja dividida em dois momentos. O primeiro dedicado a uma revisão geral do que foi trabalhado na unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o estudo. E o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos.

As sugestões que elaboramos estão descritas nas tabelas seguintes e detalhadas nos textos subsequentes.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	3	Expansão	4 aulas de 2 tempos

Título da unidade	Tema
Geometria Espacial: pirâmides e cones	Geometria Espacial
Objetivos da unidade	
Identificar os principais elementos de uma pirâmide;	
Calcular área e volume de uma pirâmide;	
Identificar os principais elementos de um cone;	
Calcular área e volume de um cone.	
Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	121 e 122
Seção 1 – O que são pirâmides?	123 a 130
Seção 2 – Como calcular área e volume de pirâmides?	131 a 138
Seção 3 – O que é um cone?	138 a 140
Seção 4 – Como calcular a área e o volume de um cone?	140 a 144
Resumo	145
Veja ainda	145
O que perguntam por aí?	153 e 154

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

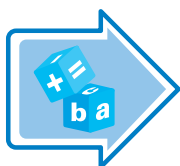
Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.



Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.



Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



Avaliação


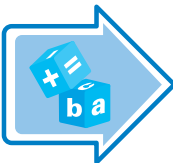
Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.



Exercícios

Proposições de exercícios complementares

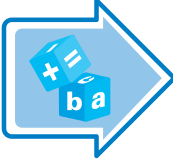
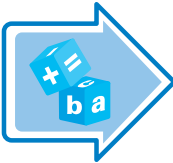
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Fotografando pirâmides	Câmera fotográfica, Computador e Datashow para exibição das fotos.	Inspirados nas pirâmides do Egito, os alunos deverão fotografar pirâmides presentes na arquitetura do seu bairro e em objetos do seu cotidiano para uma exposição em sala de aula.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 2 a 3 alunos.	40 minutos
	Construindo pirâmides e cones	Moldes para construção das figuras geométricas disponibilizadas no pendrive, tesoura e cola.	Os alunos deverão montar pirâmides e cones a partir de planificações desses sólidos.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 4 a 5 alunos.	40 minutos

Seção 1 – O que são pirâmides?

Páginas no material do aluno

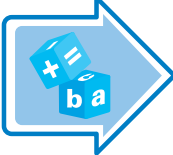

123 a 130

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avançando na Geometria Espacial	Papel cartão, cartolina, caneta, etiquetas, objetos que servirão de peças no jogo.	Os alunos participarão de um jogo de tabuleiro. Ao longo do jogo, serão trabalhados elementos de pirâmides e cones.	A turma pode ser dividida em grupos de 4 alunos.	40 minutos.
	Superquadrado Mágico	Papel colorido, tesoura, caneta.	Os alunos jogarão no superquadrado mágico com pirâmides e cones.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 2 ou 3 alunos.	40 minutos.

Seção 2 – Como calcular área e volume de pirâmides?

Páginas no material do aluno

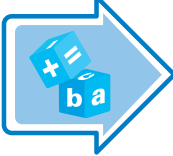
131 a 138

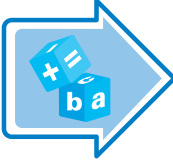
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Volume de Pirâmides	Uma folha de sulfite, papelão, tesoura, régua, canudo, copo descartável e areia.	Os alunos construirão pirâmides de mesma altura, mas com bases poligonais diferentes. Em seguida, os alunos irão comparar, de maneira experimental, os volumes das pirâmides construídas.	Essa atividade pode ser realizada com grupos de 2 a 4 alunos.	40 minutos
	Movimentos da pirâmide e a obtenção do tronco	Computador com acesso à internet, Datashow, folhas de papel A4, lápis e borracha para cada trio.	A partir de algumas observações, os alunos irão discutir sobre alguns aspectos de uma pirâmide, como número de faces, tipo de base, e até mesmo como calcular o volume de seu tronco.	A turma pode ser dividida em grupos de 2 ou 3 alunos.	40 minutos.

Seção 3 – O que é um cone?

Páginas no material do aluno

138 a 140

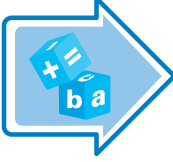
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Construindo a planificação de um cone	Três folhas de papel A4, tesoura, cola, régua, compasso, par de esquadros e transferidor para cada dupla.	Construir um cone a partir de sua planificação, usando instrumentos de construções geométricas.	Duplas	40 minutos

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Jogo de maquetes	Cola, tesoura, lápis de cor, papel A4, sucatas e um conjunto de planificações como o que segue em anexo para cada grupo.	O objetivo da atividade é favorecer a manipulação de sólidos geométricos com ênfase nos cones.	A atividade deve ser em grupos com 4 ou 5 componentes.	40 minutos.




Seção 4 – Como calcular a área e o volume do cone?

Páginas no material do aluno


140 a 144

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Comparação do cone com o cilindro	Cola, tesoura, 200 g de arroz ou qualquer outro grão, um conjunto de planificações como o que segue em anexo para cada trio.	Os alunos irão construir um cone e um cilindro a partir de suas planificações, calculando assim o volume do cone por comparação ao volume do cilindro.	A turma pode ser dividida em grupos de 3 ou 4 alunos.	40 minutos
	As origens do "chorinho".	Uma ficha como as que seguem em anexo, para cada dupla.	A partir de uma situação cotidiana, os alunos poderão descobrir como calcular o volume de um copo em formato cilíndrico.	Duplas.	40 minutos.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Consolidação e registros de aprendizagem	Folha de atividades	Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática.	Individual	10 minutos
	Questão dissertativa	Folha de atividades, lápis, borracha, calculadora.	Questão dissertativa que complementa a seção "O que perguntam por aí?".	Individual	10 minutos
	Questão objetiva (UERJ)	Folha de atividades, lápis, borracha.	Questão objetiva que complementa a seção "O que perguntam por aí?".	Individual.	10 minutos

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Fotografando pirâmides	Câmera fotográfica, Computador e Datashow para exibição das fotos.	Inspirados nas pirâmides do Egito, os alunos deverão fotografar pirâmides presentes na arquitetura do seu bairro e em objetos do seu cotidiano para uma exposição em sala de aula.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 2 a 3 alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, após uma leitura da seção *Pra início de conversa*, do material do aluno, que tem como motivação as pirâmides do Egito, proponha aos alunos a seguinte atividade:

Peça que façam fotografias da arquitetura do bairro ou de objetos do cotidiano que tenham o formato de pirâmide. Estipule uma quantidade específica de fotos para cada grupo apresentar (como sugestão, você pode pedir de 2 a 3 fotos por grupo). Assim que eles retornarem com as fotos, faça uma exibição para a turma. Por fim, elabore um álbum da turma com as fotografias.

Aspectos pedagógicos

Caro professor, você pode organizar um pequeno seminário para que um professor de artes e/ou de história, da escola, fale um pouco sobre as pirâmides do Egito, buscando assim, a interdisciplinaridade.

Para a realização das fotografias, caso você sinta resistência da turma em sair da escola para realizar tal atividade, que tal organizar uma aula-passeio para facilitar esse procedimento? Você pode escolher previamente o lugar ou pedir que a turma faça sugestões. Não deixe de acompanhá-los e dar dicas de onde eles podem encontrar construções ou objetos com formato de pirâmide.

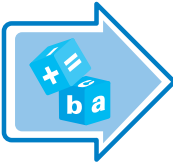
Antes de exibir as fotos para a toda a turma, é aconselhável que você faça uma pré-visualização das mesmas, até para ver a qualidade do material pesquisado. Ao longo da exibição em sala, discuta com os alunos o que os levou a fotografar aqueles objetos e como eles os identificavam como pirâmide.

Você pode ampliar o trabalho fazendo uma eleição das 5 melhores fotos para uma exibição para toda a escola.

Nessa atividade, além de levar os alunos a observarem a presença de pirâmides em objetos, na arquitetura, na história, os alunos serão estimulados intuitivamente a definir pirâmide e reconhecer seus diferentes tipos.

Essa proposta diferenciada tem como objetivo motivar os alunos para o estudo da geometria que, se for feita por meios prazerosos, poderá ter como consequência estimular também o estudo dos outros assuntos que virão. Além disso, essa atividade pode permitir que os alunos passem a enxergar o mundo à sua volta de maneira diferenciada, fazendo comparações, análises, e reconhecendo a matemática de maneira mais efetiva.

Atividade Inicial

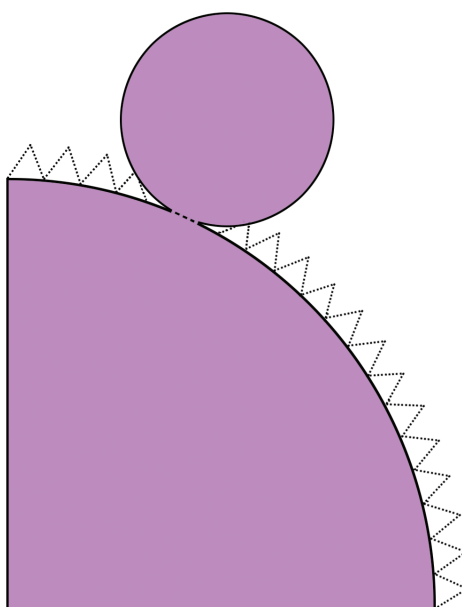
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Construindo pirâmides e cones	Moldes para construção das figuras geométricas disponibilizadas no pendrive, tesoura e cola.	Os alunos deverão montar pirâmides e cones a partir de planificações desses sólidos.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 4 a 5 alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

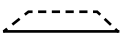
Reproduza para cada grupo de alunos os moldes para a montagem dos seguintes sólidos: Cone, pirâmide de base triangular, pirâmide de base quadrada, pirâmide de base pentagonal, pirâmide de base hexagonal. A seguir, seguem os moldes que você pode utilizar para reprodução.

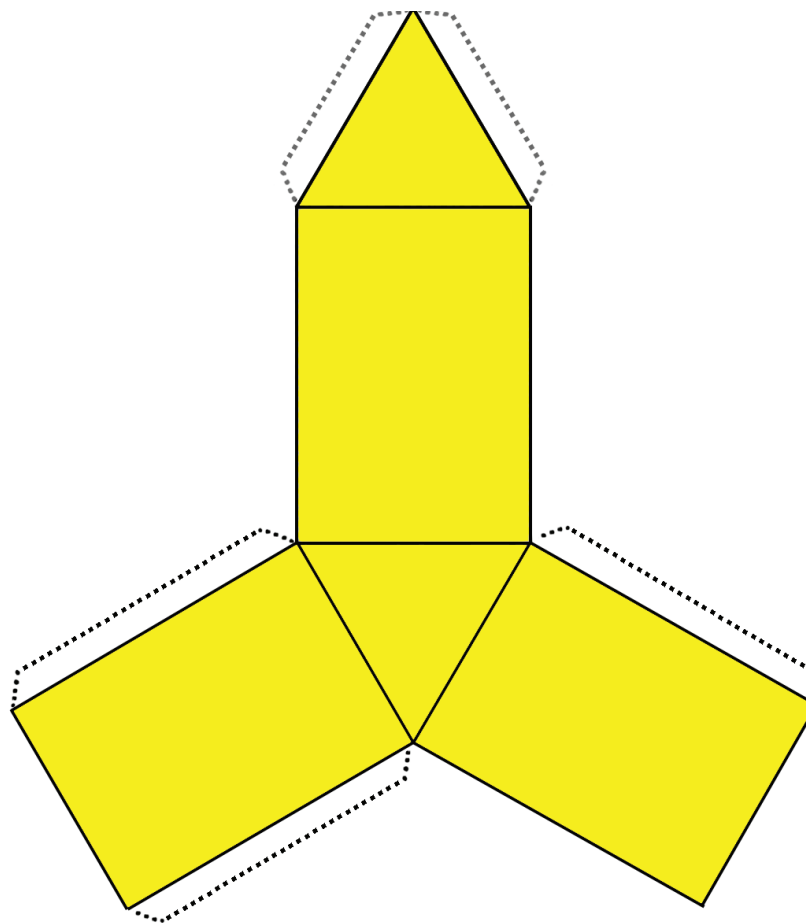
Cone

Dobrar ———
 Cortar - - - - -
 Colar - - - - -

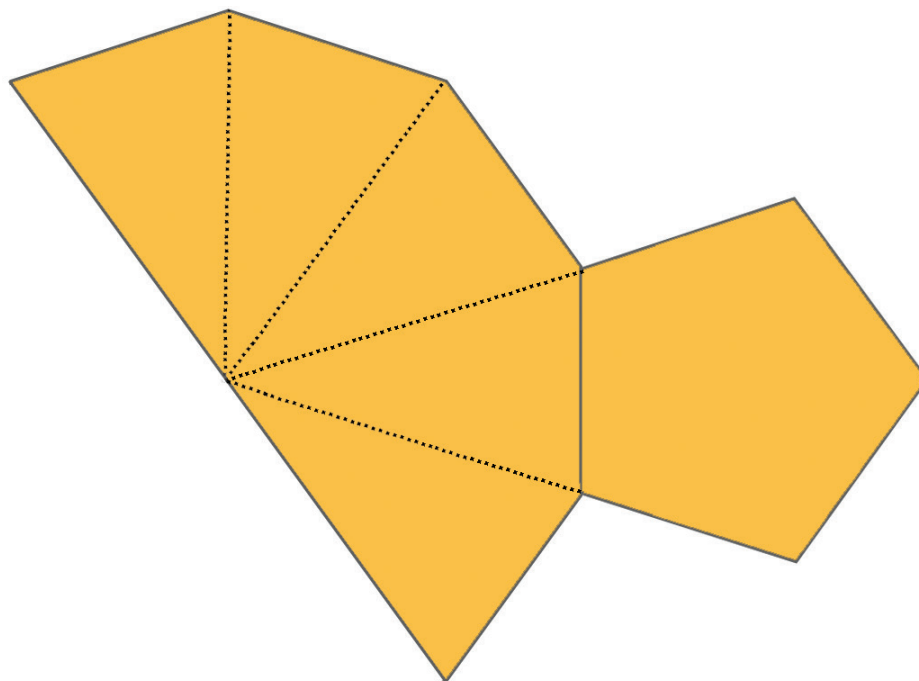


Prisma de base triangular

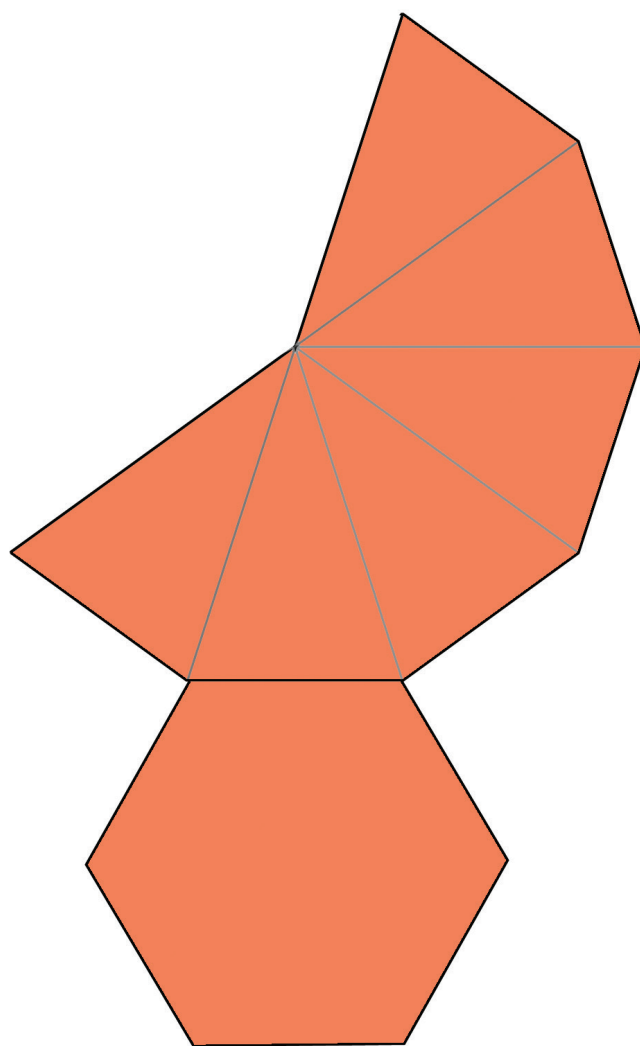
Dobrar ———
Cortar - - - - -
Colar 



Fonte: <http://www.ensinar-aprender.com.br/2011/05/solidos-geometricos-recortar-e-montar.html>



Fonte: www.brasilecola.com



Fonte: www.educ.fc.ul.pt

Peça para que os alunos recortem as figuras e as montem, utilizando cola.

Aspectos pedagógicos

Professor, caso ache mais conveniente, você poderá dividir a turma em grupos de 5 alunos, para que cada aluno monte apenas uma figura.

Antes da montagem dos sólidos, o professor poderá realizar as montagens e planificações virtuais utilizando o software Poly Pro, que é gratuito e de fácil manipulação. Esse programa pode ser baixado em http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/softwares/soft_geometria.php. Veja que também o disponibilizamos no pendrive.

Apesar do foco dessa atividade ser as pirâmides e os cones, será uma boa oportunidade para o professor trabalhar paralelamente os conceitos já vistos em geometria plana, uma vez que os sólidos serão construídos a partir de suas planificações.

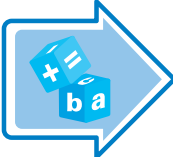
Além disso, reforçe com seus alunos a importância da manipulação dos sólidos para o desenvolvimento da visão espacial, visto as inúmeras dificuldades que os alunos trazem ao trabalhar com temas tridimensionais. Em seguida, esse primeiro momento de contato com os sólidos poderá ser substituído pela abstração, fundamental para a resolução dos mais diversos problemas.

Por fim, na Seção 1, os sólidos construídos neste momento serão utilizados em outra atividade.

Seção 1 – O que são pirâmides?

Páginas no material do aluno

123 a 130

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avançando na Geometria Espacial	Papel cartão, cartolina, caneta, etiquetas, objetos que servirão de peças no jogo.	Os alunos participarão de um jogo de tabuleiro. Ao longo do jogo, serão trabalhados elementos de pirâmides e cones.	A turma pode ser dividida em grupos de 4 alunos.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Professor, você deverá elaborar em parceria com a turma:

- Um tabuleiro retangular com a folha de papel-cartão contendo 50 casas, todas numeradas em ordem crescente a partir do número 1. Na última casa, deverá ser escrita a palavra FIM.
- Cada grupo deverá ter uma peça/objeto para representá-lo no tabuleiro. Podem ser feitas bolinhas de papel de cores variadas, para diferenciar os jogadores.
- Um cubo pequeno de papel que servirá de dado. Em cada face, deverá ser desenhada uma figura geométrica plana: triângulo, retângulo, pentágono, hexágono, heptágono e octógono. Estas figuras indicarão a quantidade de casas que cada jogador irá andar no tabuleiro.
- Cones e pirâmides elaborados na Atividade 2 da seção *Pra início de conversa*.

Coloque etiquetas em cada um dos sólidos conforme a sequência a seguir:

- Cone
- Pirâmide base triangular

- c. Pirâmide base quadrada
- d. Pirâmide base pentagonal
- e. Pirâmide base hexagonal
- Fichas de cartolina contendo cada uma as seguintes perguntas:
 - Como é o nome da figura A?
 - Como é o nome da figura B?
 - Como é o nome da figura C?
 - Como é o nome da figura D?
 - Como é o nome da figura E?
 - Quantos vértices tem a figura B?
 - Quantos vértices tem a figura C?
 - Quantos vértices tem a figura D?
 - Quantos vértices tem a figura E?
 - Quantas arestas tem a figura B?
 - Quantas arestas tem a figura C?
 - Quantas arestas tem a figura D?
 - Quantas arestas tem a figura E?
 - Quantas faces tem a figura B?
 - Quantas faces tem a figura C?
 - Quantas faces tem a figura D?
 - Quantas faces tem a figura E?
 - A figura A é um poliedro?
 - A figura B é um poliedro?
 - A figura C é um poliedro?
 - A figura D é um poliedro?
 - A figura E é um poliedro?
 - Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura B?

- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura C?
- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura D?
- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura E?
- Explique a diferença entre as figuras geométricas planas e espaciais.
- Uma ficha-bônus que dobra o valor de casas que o aluno tirou nos dados. Elabore essa ficha com uma cor diferenciada.

Para jogar:

Cada grupo deverá responder às fichas empilhadas, previamente embaralhadas. O jogador deverá responder à 1ª carta da pilha e, para responder, pode manusear as figuras espaciais.

Após ser utilizada, a ficha deve ser colocada novamente na mesma pilha, mas por baixo.

Se a resposta não estiver correta, o jogador permanece no mesmo lugar do tabuleiro. Caso contrário, ou seja, se o aluno responder corretamente, ele deverá avançar o número de casas correspondentes à figura que cair no dado. Exemplo:

- Triângulo - três casas
- Retângulo - quatro casas
- Pentágono - cinco casas
- Hexágono - seis casas
- Heptágono - sete casas
- Octógono - oito casas

Vence o jogador que alcançar primeiro a casa "FIM".

Aspectos pedagógicos

Professor, uma boa estratégia no ensino e aprendizagem da Matemática é a utilização de jogos. Nesse, em particular, pretendemos desenvolver o raciocínio geométrico para amadurecer os conceitos da geometria espacial e solidificar os conceitos de pirâmides e cones trabalhados por você em sala.

Caso você resolva construir os elementos do jogo com sua turma, essa será uma boa oportunidade de desenvolver a afetividade entre o professor e os alunos e entre os alunos, certamente gerando uma aproximação das relações.

Com essa atividade, em que o aluno, para responder, pode manusear as figuras previamente construídas por ele, esperamos colaborar também para uma aprendizagem significativa dos conceitos trabalhados. Caso sinta necessidade, você poderá alterar as perguntas que serão feitas ao longo do jogo ou acrescentar novos questionamentos. Sinta-se à vontade para fazer as alterações que julgar necessárias.

A prática desse tipo de jogo, além de tudo, torna possível desenvolver nos alunos a organização, concentração, atenção, raciocínio lógico-dedutivo, a autoconfiança e o senso cooperativo.

Respostas das fichas:

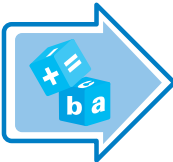
- Como é o nome da figura A? Cilindro
- Como é o nome da figura B? Pirâmide base triangular
- Como é o nome da figura C? Pirâmide base quadrada
- Como é o nome da figura D? Pirâmide base pentagonal
- Como é o nome da figura E? Pirâmide base hexagonal
- Quantos vértices tem a figura B? 4
- Quantos vértices tem a figura C? 5
- Quantos vértices tem a figura D? 6
- Quantos vértices tem a figura E? 7
- Quantas arestas tem a figura B? 6
- Quantas arestas tem a figura C? 8
- Quantas arestas tem a figura D? 10
- Quantas arestas tem a figura E? 12
- Quantas faces tem a figura B? 4
- Quantas faces tem a figura C? 5
- Quantas faces tem a figura D? 6
- Quantas faces tem a figura E? 7
- A figura A é um poliedro? Não
- A figura B é um poliedro? Sim
- A figura C é um poliedro? Sim
- A figura D é um poliedro? Sim
- A figura E é um poliedro? Sim
- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura B? Triângulos
- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura C? Quadrado e triângulos
- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura D? Pentágono e triângulos

- Quais são as figuras geométricas que compõem a planificação da figura E? Hexágono e triângulos
- Explique a diferença entre as figuras geométricas planas e espaciais. R.: As figuras geométricas planas são bidimensionais e as figuras espaciais são tridimensionais.

Seção 1 – O que são pirâmides?

Páginas no material do aluno

123 a 130

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Superquadra- do Mágico	Papel colorido, tesoura, caneta.	Os alunos jogarão no superquadrado mágico com pirâmides e cones.	Essa atividade pode ser realizada em grupos de 2 ou 3 alunos.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Professor, para o jogo, você deverá construir para cada grupo da turma:

- Uma tabela 4 x 4 com 16 espaços;
- Sólidos geométricos de acordo com a tabela abaixo:

	Cone	Pirâmide base triangular	Pirâmide base quadrada	Pirâmide base pentagonal
Amarelo	4	4	4	4
Verde	1	1	1	1
Branco	1	1	1	1
Roxo	1	1	1	1
Laranja	1	1	1	1

Essas figuras podem ser elaboradas em três dimensões ou simplesmente podem estar apenas desenhadas em papel colorido.

Os tamanhos da tabela e das figuras ficarão a seu critério.

Nesta atividade, diferentes sólidos geométricos serão colocadas no painel com 16 espaços.

O jogo funciona em duas etapas:

1ª Etapa: os alunos não podem repetir figuras na mesma linha e coluna;

2ª Etapa: os alunos não podem repetir figuras e cores na mesma linha e coluna.

Aspectos pedagógicos

Professor, esse jogo é uma adaptação do antigo quebra-cabeças numérico. Segundo uma lenda chinesa, uma tartaruga mostrava em sua carcaça pontos que representavam números de 1 a 9, distribuídos em suas costas. Ao somar estes pontos na horizontal, vertical e diagonais, o seu resultado dava sempre 15. Esta regularidade matemática causou tanto espanto como admiração, e esse jogo ficou conhecido como Quadrado Mágico. Além de ele ter sido usado como jogo matemático educativo, era também utilizado como um talismã, propagando-se pela Índia, países árabes e Europa.

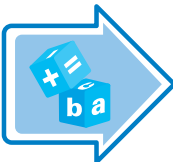
Do quadrado mágico de 3 por 3, de 1 a 9, surgiu o Superquadrado Mágico, com um grau de complexidade maior, de 4 por 4, com números de 1 a 16. Essa é a versão que estamos utilizando nessa atividade.

Nesse jogo, não temos somente uma interessante fonte recreativa, uma vez que, além de familiarizar os alunos com os sólidos geométricos que estão sendo trabalhados nessa unidade - cones e pirâmides - suas definições, conceitos e elementos, podemos também ajudar os alunos a elaborarem estratégias de resolução de problemas. Espera-se que com os desafios que são propostos no jogo, o aluno sinta-se mais seguro e torne-se apto à resolução de problemas de forma mais eficiente.

Seção 2 – Como calcular área e volume de pirâmides?

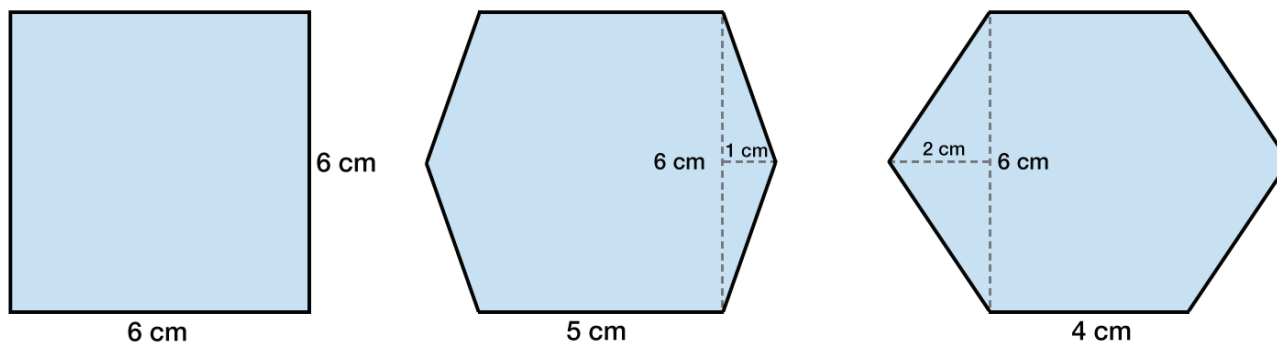
Páginas no material do aluno

131 a 138

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Volume de Pirâmides	Uma folha de sulfite, papelão, tesoura, régua, canudo, copo descartável e areia.	Os alunos construirão pirâmides de mesma altura, mas com bases poligonais diferentes. Em seguida, os alunos irão comparar, de maneira experimental, os volumes das pirâmides construídas.	Essa atividade pode ser realizada com grupos de 2 a 4 alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, peça para que cada grupo escolha a base que desejar para construir sua pirâmide. Seguem alguns modelos de base:



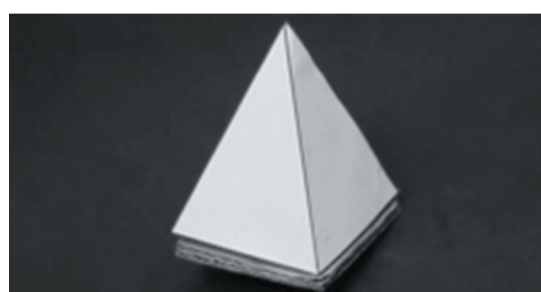
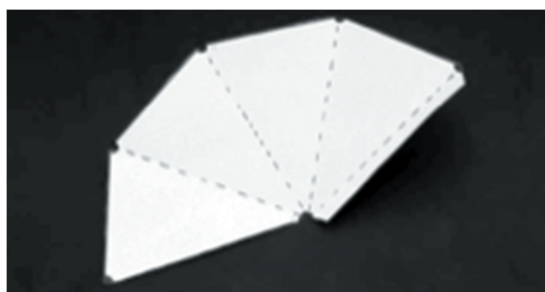
Em seguida, os alunos deverão reproduzir no papelão o molde da base da sua pirâmide. Peça para eles perfurarem o papelão num local qualquer da base e nele fixarem o canudo ortogonal à base com a fita adesiva.

Os alunos deverão fazer a planificação da pirâmide, marcando em uma folha de papel A4 os pontos que correspondem aos seus vértices.



Fonte: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1039>

Por fim, eles deverão ligar todos os pontos marcados na folha e desenhar uma aba para facilitar a montagem, como na figura a seguir.



Para dar firmeza ao modelo, os alunos poderão colar pedaços de papelão nas faces.

Depois dessa etapa concluída, cada grupo deve preencher a sua pirâmide com areia e despejá-la no copo descartável.

Peça para que os níveis dos copos de todos os grupos sejam comparados. Indague seus alunos sobre qual conclusão chegaram sobre o volume das pirâmides construídas. Certifique-se de que todos perceberam que o volume é o mesmo.

Aspectos pedagógicos

Esperamos que, com esse experimento, seja estimulada a percepção geométrica do aluno. Primeiramente, desconstroem-se os modelos de pirâmides mais utilizados e amplia-se o leque de representação de pirâmides de diferentes formatos (todas com altura e área da base iguais).

Você, professor, poderá propor como desafio para a aula seguinte outros dois modelos de pirâmide: um com a área da base diferente da que foi utilizada no experimento e com a mesma altura e outro com a mesma área da base, mas com a medida da altura diferente das demais. Tanto a conclusão tirada do experimento que as pirâmides de mesma altura e mesma área da base possuem o mesmo volume como esses dois outros modelos ajudarão a constatar que o cálculo do volume tem como elementos fundamentais a área da base e da altura da pirâmide.


Você pode aproveitar essa discussão e comparar o volume da pirâmide com o volume do prisma correspondente.

Mostre aos alunos que o volume da pirâmide é um terço do produto da altura pela área da base. Depois de chegar a essa conclusão de maneira intuitiva, você poderá demonstrar este fato a partir do Princípio de Cavalieri.

Seção 2 – Como calcular área e volume de pirâmides?

Páginas no material do aluno

131 a 138

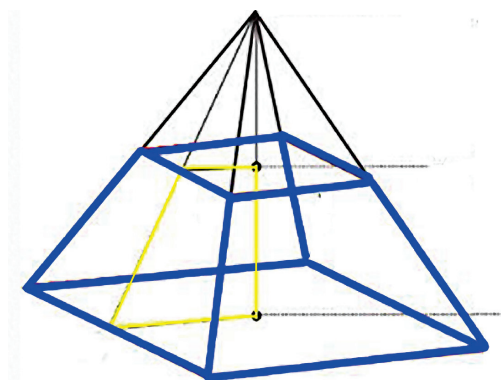
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Movimentos da pirâmide e a obtenção do tronco	Computador com acesso à internet, Datashow, folhas de papel A4, lápis e borracha para cada trio.	A partir de algumas observações, os alunos irão discutir sobre alguns aspectos de uma pirâmide, como número de faces, tipo de base, e até mesmo como calcular o volume de seu tronco.	A turma pode ser dividida em grupos de 2 ou 3 alunos.	40 minutos.

Aspectos operacionais

A atividade tem três etapas. Na primeira, recomendamos que os alunos assistam à animação da planificação da pirâmide, disponível na página <http://www.calques3d.org/examples.html>. Essa animação também está disponível no pendrive, basta instalar o Calques 3D no computador.

Depois disso, ainda nesta etapa, sugerimos que você reflita e procure responder junto com a turma às seguintes questões: Se, em vez de base quadrangular, tivéssemos uma pirâmide de base triangular, como ficaria a planificação? Quantas faces triangulares teríamos? O que mudaria na base? Sugerimos ainda que você repita os mesmos questionamentos para pirâmides pentagonais e hexagonais e solicite aos alunos que façam um esboço das planificações nestes casos, supondo que sejam pirâmides regulares.

A segunda etapa tem início a partir da observação do tronco de pirâmide da figura a seguir.



Você pode ampliá-la e colocá-la fixada na lousa ou entregar uma ficha como a que segue em anexo com seu desenho para cada trio. Enquanto os trios fazem suas observações, você já pode iniciar os questionamentos: Quantas pirâmides podem ser observadas na figura? Como ficaria a planificação desta figura? Você pode finalizar esta etapa, pedindo aos alunos que façam a planificação apenas do tronco. Mostre-lhes a animação de uma figura como esta também disponível em <http://www.calques3d.org/examples.html>. Isto poderá ajudá-los.

A última etapa consiste na obtenção do volume do tronco da pirâmide. Peça aos alunos que, lembrando todas as fórmulas que estudaram até agora em geometria espacial, verifiquem se conheceram alguma fórmula específica para o cálculo do volume do tronco de pirâmide. Certamente, eles dirão que não. Então, você pode levá-los a reconhecer que o volume do tronco é a diferença entre o volume da pirâmide maior e o volume da pirâmide menor. Neste momento, sugerimos que você dê um tempo para que seus alunos efetuem os cálculos e cheguem ao volume do tronco. Compare os resultados que cada trio obtiver. Peça-lhes que exponham seus raciocínios. Conclua a atividade deduzindo com eles a fórmula para o volume do tronco de pirâmide:

$$V = \frac{h}{3} \cdot (S_b + \sqrt{S_B \cdot S_b} + S_b)$$

Onde,

$V \rightarrow$ é o volume do tronco

$h \rightarrow$ é a altura do tronco

$S_B \rightarrow$ é a área da base maior

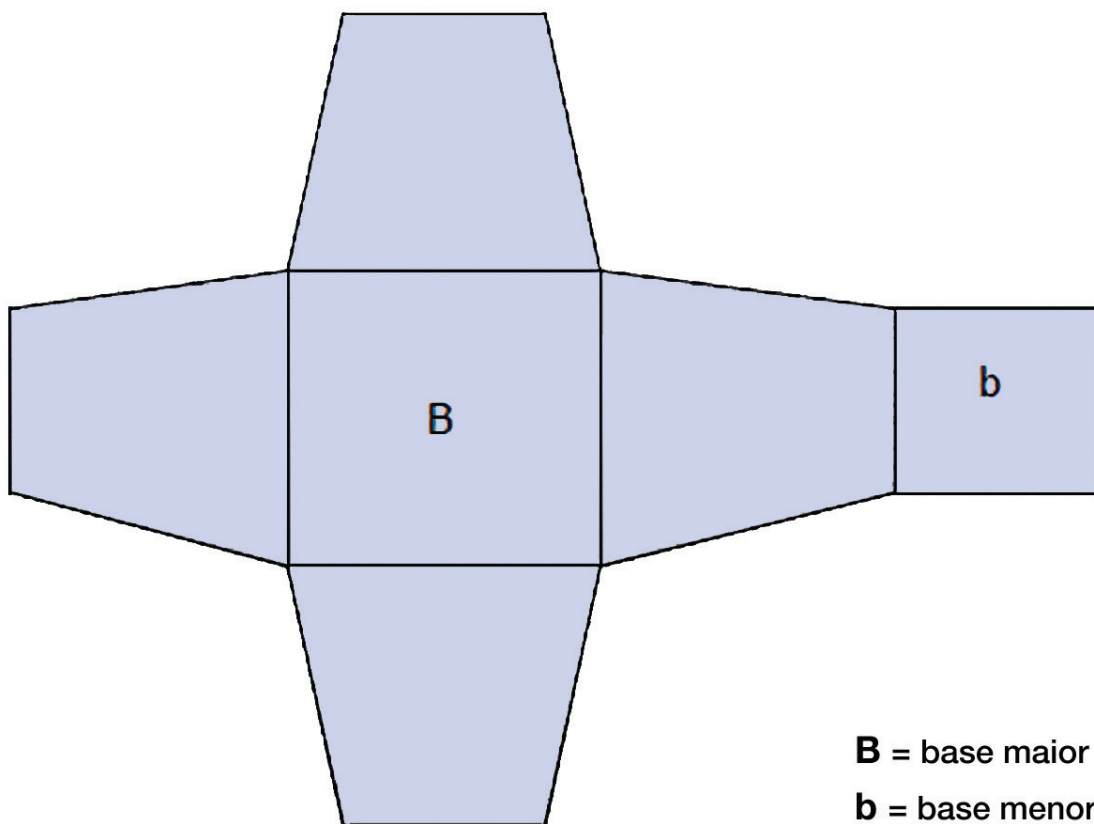
$S_b \rightarrow$ é a área da base menor

Aspectos pedagógicos

Há várias possibilidades para que seus alunos visualizem a planificação da pirâmide sugerida na primeira etapa desta atividade. Você pode acoplar seu computador com acesso à internet a um Datashow e mostrá-la de uma só vez para toda a turma, mas, se sua escola dispuser de um laboratório de informática, você pode também conduzir sua turma até lá e pedir que cada dupla ou trio acesse a página onde a animação está disponível. Perceba que, na pior das hipóteses, se sua escola estiver sem acesso à internet, você pode levar uma planificação da pirâmide num papel para que seus alunos recortem e simulem o movimento disponível na internet.

Como você deve ter observado, na página em que as planificações estão disponíveis, há ainda outras animações de sólidos geométricos feitas no Calques 3D. O Calques 3D é um software livre que permite a construção com animação de várias figuras geométricas espaciais. Além das orientações para baixá-lo, há ainda na mesma página um tutorial que explica passo a passo o funcionamento do programa. Recomendamos que você, aos poucos, vá se apropriando desta importante ferramenta de ensino.

Enquanto os alunos desenham suas planificações, é importante que percebam que o número de faces triangulares irá variar de acordo com o número de lados do polígono que está na base da pirâmide. Além disso, devem reconhecer que a planificação do tronco pode ser obtida a partir da planificação da pirâmide maior, bastando que sejam apagados os triângulos que correspondem às faces laterais da pirâmide menor, como mostra a figura abaixo:

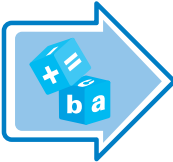


Por fim, aconselhamos que você evite ao máximo oferecer a fórmula do volume do tronco da pirâmide como algo “pronto” que não pode ser deduzido. Lembre-se de que o primeiro passo para a dedução da fórmula é escrever com linguagem matemática que o volume do tronco é a diferença entre o volume da pirâmide maior e o da menor. Em seguida, basta substituir o volume de cada pirâmide pela expressão matemática que o fornece que, com mais alguns passos algébricos simples, chega-se à fórmula. Nossos alunos frequentemente nos questionam não só sobre as aplicações daquilo que estudam como também sobre a origem das fórmulas que empregam. Temos aí uma excelente oportunidade para começarmos a responder a eles!

Seção 3 – O que é um cone?

Páginas no material do aluno

138 a 140

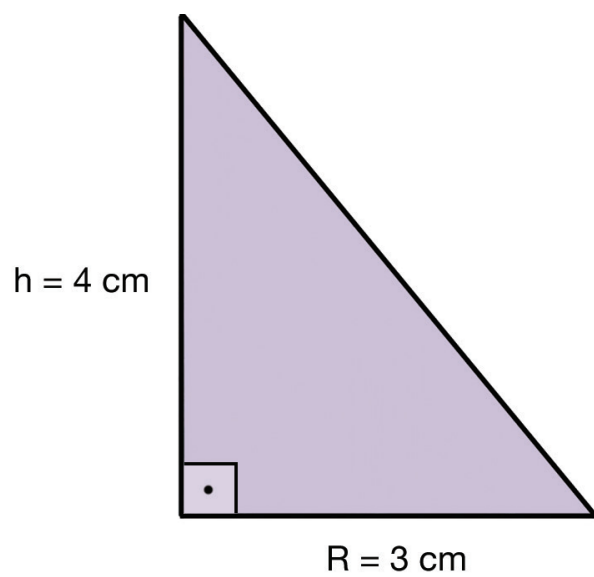
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Construindo a planificação de um cone	Três folhas de papel A4, tesoura, cola, régua, compasso, par de esquadros e transferidor para cada dupla.	Construir um cone a partir de sua planificação, usando instrumentos de construções geométricas.	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

O objetivo desta atividade é a construção da planificação de um cone cujo raio da base é 3 cm e cuja altura é 4 cm. Recomendamos que você peça previamente aos alunos que tragam de casa os materiais para construção geométrica: régua, compasso, par de esquadros e transferidor e, também, para a montagem de sólidos a partir de sua planificação, ou seja, cola e tesoura.

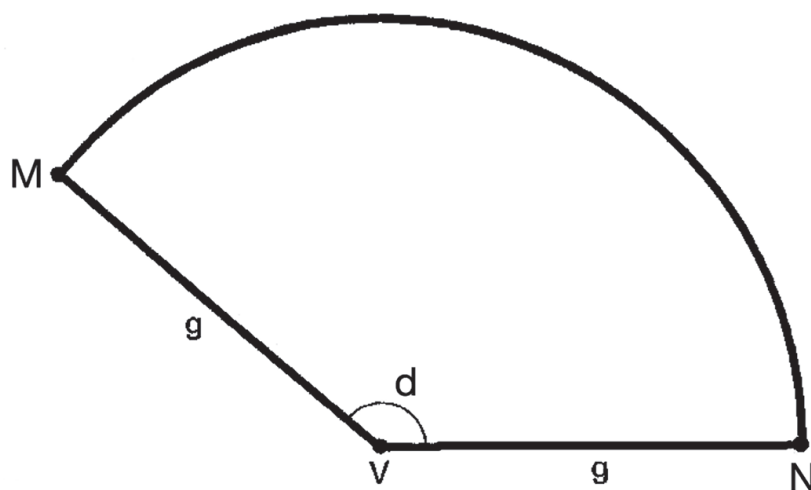
Para começar, você pode pedir aos alunos que tentem imaginar e descrever como fica a planificação de um cone. Em seguida, peça-lhes que tentem desenhar, a mão livre, como acham que ficaria esta planificação. Permita-lhes que montem suas construções para verificarem se elas contemplam as condições propostas (raio da base igual a 3 cm e altura igual a 4 cm. Dificilmente isso acontecerá; o método de tentativas pode conduzir facilmente à base, mas não o faz com a altura. Quando, então, ficar claro para os alunos que é preciso planejar a construção, podemos dizer que chegou o momento de propor a sequência de etapas a seguir:

1ª etapa: Identificar o valor da geratriz do cone. Para isso, é necessário construir, com o par de esquadros, um triângulo retângulo cujos catetos são o raio e a altura do cone, pois a geratriz do cone é a hipotenusa deste triângulo.



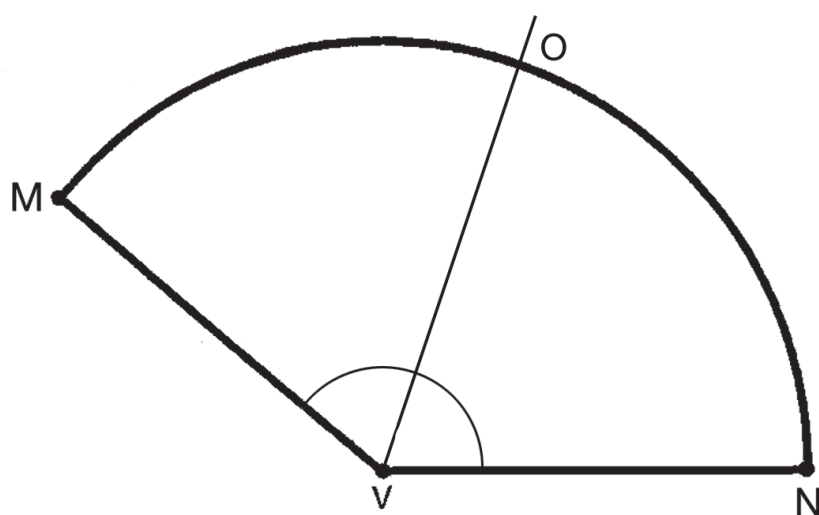
Observando a figura anterior e empregando o Teorema de Pitágoras, podemos concluir que a geratriz do cone cuja planificação foi solicitada é 5 cm.

2ª etapa: Traçar, utilizando o transferidor, o setor circular, que será a superfície lateral do cone. Neste momento, é importante observar que o comprimento do setor é o mesmo da base: $2\pi R$. O raio do setor é a geratriz, e a medida do ângulo do setor pode ser obtida por uma regra de três simples:

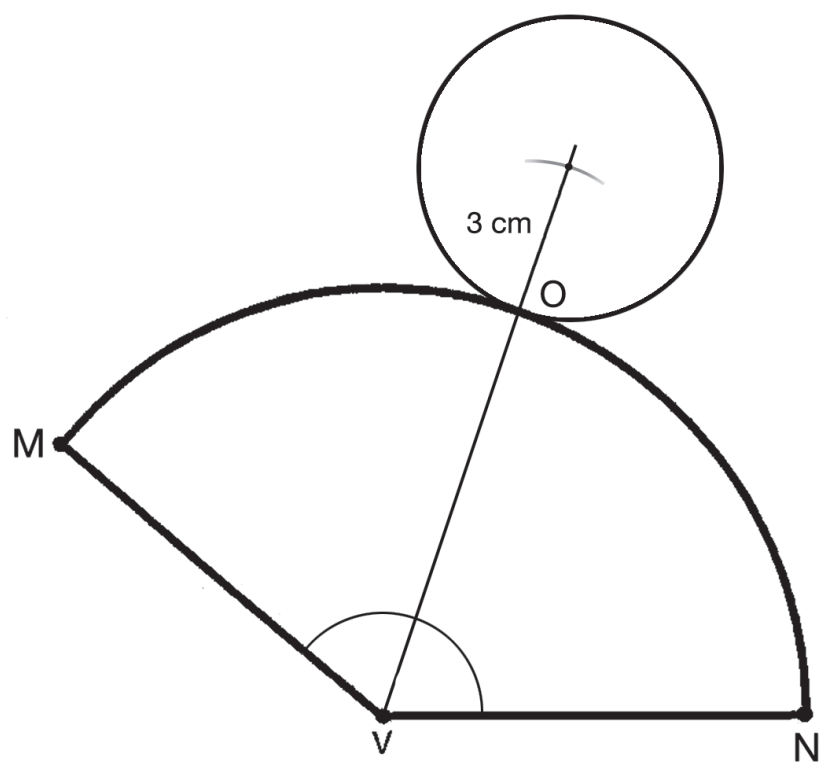


Substituindo os valores de g e R , e resolvendo a regra de três simples, facilmente se conclui que $\alpha = 216^\circ$.

3ª etapa: Construir uma semirreta de origem V , de modo que ela intercepte o arco MN . Chame de O o ponto dessa intersecção.



4ª etapa: Construir a base do cone; tangente ao setor circular em O e de raio 3 cm. Para tanto, sobre a semirreta VO, a partir de O, marque o segmento de medida $OT = 3$ cm.

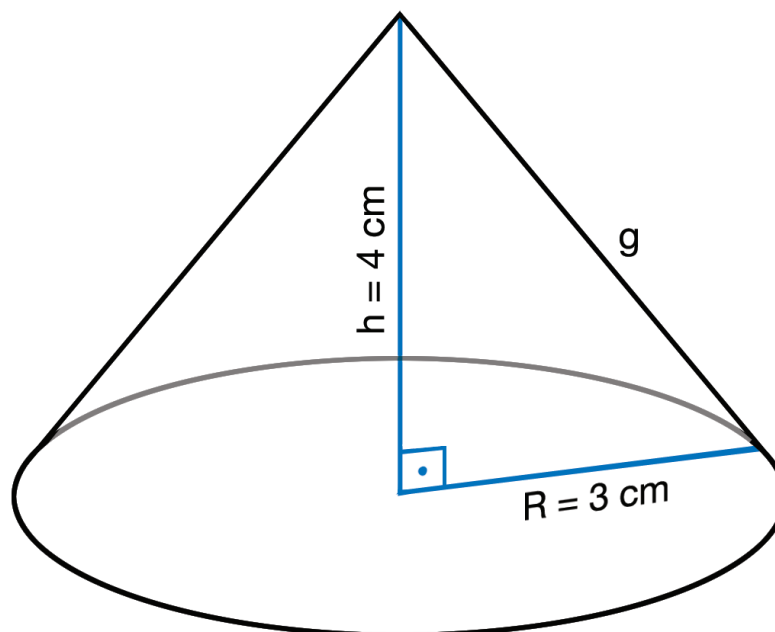


Para finalizar, procure refletir sobre cada etapa da construção: Que dificuldades eles enfrentaram em cada uma? Por que cada uma é indispensável?

Aspectos pedagógicos

Caro professor, esteja atento às possíveis dificuldades dos alunos para manipular os instrumentos de construção geométrica e, antes de iniciar a construção da planificação com eles, procure fazer um esboço com base nas sugestões e intuições deles sobre como imaginam que seja tal planificação. Para auxiliá-los, leve alguns objetos que se assemelhem a cones, como, por exemplo, aqueles antigos chapeuzinhos de festa de aniversário, para que possam planificá-los, mas ressalte que alguns objetos não possuem base, como é o caso do próprio chapeuzinho ou da casquinha de sorvete. Depois que a planificação estiver construída, lembre-se de acrescentar “abas”, para que seja possível colar as extremidades do setor circular e manter o cone montado.

Observe que, durante a realização desta atividade, os alunos estarão identificando elementos importantes do cone, como a base, o vértice, a superfície lateral, a altura, a geratriz e o raio da base. Para que eles se certifiquem de que a hipotenusa do triângulo retângulo que constroem na primeira etapa é, de fato, a geratriz do cone, você pode mostrar-lhes figuras como a que segue:



Além disso, na segunda etapa, se for preciso, complete o setor circular para fechar um círculo inteiro e os alunos conseguirem compreender a regra de três que foi montada.

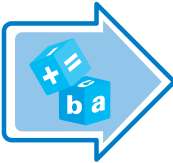
Aproveite a oportunidade para refletir com os alunos sobre a utilidade de planificarmos figuras geométricas espaciais. As planificações permitem, entre outras coisas, calcular rapidamente a área lateral, a área da base e a área total de cada sólido, ou seja, a quantidade de papel gasta para a construção de objetos que se assemelham a estas formas. Não deixe de solicitar dos alunos exemplos de objetos que se assemelhem aos cones. Isto irá levá-los a reconhecer que aquilo que estão estudando tem aplicações no mundo real.

Por fim, repare que a construção proposta nesta atividade poderia ser feita também com o auxílio de softwares como o Geogebra. Veja que temos aí uma oportunidade de utilizar a tecnologia como recurso didático.

Seção 3 – O que é um cone?

Páginas no material do aluno

138 a 140

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Jogo de maquetes	Cola, tesoura, lápis de cor, papel A4, sucatas e um conjunto de planificações como o que segue em anexo para cada grupo.	O objetivo da atividade é favorecer a manipulação de sólidos geométricos com ênfase nos cones.	A atividade deve ser em grupos com 4 ou 5 componentes.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Nesta atividade, é recomendável que você peça, com antecedência, aos alunos que tragam de casa cola, tesoura, lápis de cor e sucatas (caixas de remédio, embalagens de produtos alimentícios ou de higiene pessoal, entre outras coisas). O objetivo é favorecer a manipulação de sólidos geométricos com ênfase nos cones. Acreditamos que, por meio da manipulação, os alunos terão oportunidade de verificar algumas propriedades dos sólidos. No jogo, os grupos deverão confeccionar maquetes que atendam a um tema sorteado e, num segundo momento, tentar adivinhar o que está sendo representado nas maquetes dos outros grupos. Ganhará o jogo aquele grupo que conseguir adivinhar mais.

Para começar, distribua as planificações que seguem em anexo entre os grupos. Antes que eles comecem a recortar e montar os sólidos, procure sortear secretamente o tema de cada um. Assim, eles poderão planejar o que construirão e, se julgarem necessário colorir as superfícies laterais e as bases dos sólidos, conseguirão fazer isso enquanto eles ainda estiverem planificados. Entre os temas para as maquetes, sugerimos aldeia indígena, estacionamento, autoestrada, jogo de futebol e uma praça, mas você pode pensar e propor muitos outros.

Uma maneira de conduzir a uma observação mais detalhada do cone (foco desta seção) é estabelecer critérios para a confecção das maquetes como, por exemplo, além das sucatas, entre os sólidos disponíveis, todos os cones deverão ser utilizados.

Depois que as maquetes estiverem prontas, dando continuidade ao jogo, você pode colocá-las em exposição na sala de aula, entregar uma folha de papel A4 para cada grupo e pedir que as observem e escrevam sem que os outros grupos tomem conhecimento do que está representado em cada uma. Assim que todos os grupos concluírem, inicie a apuração, identificando aquele que mais adivinhou.

Ao final, recomendamos que você converse com a turma, procure identificar o que eles acharam da atividade e se conseguiram reconhecer alguma propriedade dos sólidos que, até então, não tinham se dado conta.

Aspectos operacionais

Confeccionar maquetes é uma tarefa de que os alunos gostam muito e, dificilmente, uma turma não se motiva diante de um jogo. Nesta atividade, tentamos integrar as duas coisas. Porém, se depois do jogo, você não refletir com a turma sobre as propriedades dos sólidos geométricos envolvidos nas maquetes, ela não terá o alcance que pretendemos ao desenvolvê-la. Entre as propriedades, destacamos algumas a seguir. Durante a conversa com seus alunos, poderão surgir muitas outras.

Há sólidos que possuem faces triangulares em maior quantidade ou faces retangulares em maior quantidade. Há ainda aqueles que possuem faces opostas idênticas e aqueles que não possuem faces poligonais.

- Podemos classificar os sólidos entre aqueles que rolam e os que não rolam.
- Podemos identificar ainda os que possuem vértices e os que não possuem. Dos sólidos que disponibilizamos planejados, apenas os cilindros não possuem vértices.

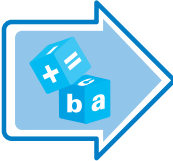
Voltando-nos para esta última propriedade, pode acontecer de os alunos generalizarem a equivocada ideia de que corpos redondos não possuem vértices, uma vez que, além dos cilindros, as esferas também não os possuem. Entretanto, vale lembrar que exatamente o cone, nosso principal objeto de estudo aqui, é um corpo redondo que possui um vértice.

Por fim, você pode propor aos alunos que observem também as sucatas que levaram: A que formas geométricas se assemelham? Que propriedades se observam? E, se possível, faça uma exposição das maquetes para toda a escola.

Seção 4 – Como calcular a área e o volume do cone?

Páginas no material do aluno

140 a 144

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Comparação do cone com o cilindro	Cola, tesoura, 200 g de arroz ou qualquer outro grão, um conjunto de planificações como o que segue em anexo para cada trio.	Os alunos irão construir um cone e um cilindro a partir de suas planificações, calculando assim o volume do cone por comparação ao volume do cilindro.	A turma pode ser dividida em grupos de 3 ou 4 alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

No pendrive, você encontra a planificação de três cilindros e três cones. Você pode começar entregando um material deste para cada trio e solicitar que recortem e montem os sólidos. Observe que uma das bases do cilindro e a base do cone não devem ser coladas, para que os alunos possam encher e esvaziar estes sólidos com os grãos. Depois que os sólidos estiverem montados, você pode questionar a turma sobre os volumes de cada um: Qual deles tem o maior volume? Sólidos diferentes podem ter volumes iguais? Quantas vezes um sólido “cabe” no outro? Sugira-lhes que façam todas as combinações possíveis entre os pares de sólidos, preenchendo um com arroz e despejando este conteúdo no outro, para tentarem estabelecer alguma relação entre seus volumes.

Depois disso, dê oportunidade para que exponham suas conclusões, discuta sobre os erros das medições e deduza, com base nas observações dos alunos, a fórmula para o volume do cone. Ao longo de toda a atividade, é razoável que você reflita também sobre os seguintes itens:

- Os nomes e a identificação de linhas importantes dos cones, como o raio da base, a geratriz e a altura;
- Formas presentes no dia a dia que se assemelham a cones;
- A utilidade de se calcular o volume dos sólidos, entre eles, dos cones.

No final da aula, você pode ainda propor as situações a seguir, para que os alunos apliquem a fórmula que deduziram:

Situação 1: Uma casquinha de sorvete se assemelha a um cone cujo diâmetro da base é 6 cm e cuja altura é 12 cm. Quantos mililitros de sorvete são necessários para preenchê-la completamente?

Situação 2: O volume de um cone é 200 cm^3 . Considerando $\pi = 3$, que medida encontraremos para o raio da base deste cone?

Aspectos pedagógicos

A ideia central desta atividade é que os alunos possam comparar o volume de um cone com o volume de um cilindro, porém, como sabemos, não estamos nos referindo a um cilindro qualquer. Para estabelecerem tal comparação, devem ser tomados um cone e um cilindro que possuem a mesma altura e o mesmo raio da base. Esperamos que, ao encherem o cone três vezes com arroz e despejarem este conteúdo no cilindro, os alunos percebam que o volume do cilindro é o triplo do volume do cone. Disponibilizamos a planificação de três cones distintos e três cilindros distintos. Cabe aos alunos, depois de montá-los, fazer experimentos procurando estabelecer relações entre os volumes destes sólidos. Nossa sugestão é que você permita que eles experimentem livremente e concluam por conta própria a relação de igualdade que deve haver entre o raio da base e a altura, para que se verifique a razão 3 para 1 entre o volume do cilindro e o volume do cone.

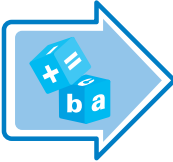
Não é de se estranhar que, durante as comparações dos volumes, alguns alunos confundam volume com área total. Se for preciso, dê alguns exemplos de sólidos que possuem a mesma área total e volumes diferentes e vice-versa. É importante deixar claro que há uma margem de erro na comparação dos volumes, uma vez que, além do erro humano comum a qualquer processo de medição, há sempre um pequeno espaço ocupado pelo ar entre os grãos de arroz. Vale a pena esclarecer também que o grão de arroz, neste caso, está sendo usado como unidade de medida. Se substituíssemos estes grãos por grãos de areia, que são bem menores, o erro na medição seria menor.

É fundamental que, no desfecho da atividade, você reforce a dedução da fórmula para o volume do cone, encontrada no material do aluno, e proponha exemplos para que eles possam calcular volumes de cones variados sem precisar confeccioná-los. Ao utilizar as situações descritas anteriormente, esteja atento à conversão de centímetro cúbico para mililitro ($1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$). Isso pode não ser fácil para alguns alunos. Aproveite a situação 2 para alertar seus alunos que, dependendo do valor que atribuímos a π , teremos valores diferentes para o volume do cilindro ou para qualquer outra medida sua que estejamos interessados em calcular. Temos, na resolução de problemas, uma oportunidade para a reflexão mais ampla sobre a abstração que as ferramentas matemáticas tornam possível, que lhe aconselhamos não deixar passar.

Seção 4 – Como calcular a área e o volume do cone?

Páginas no material do aluno

140 a 144

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	As origens do "chorinho".	Uma ficha como as que seguem em anexo, para cada dupla.	A partir de uma situação cotidiana, os alunos poderão descobrir como calcular o volume de um copo em formato cilíndrico.	Duplas.	40 minutos.

Aspectos operacionais

Professor, esta atividade foi extraída de um roteiro de ação do Curso de Formação Continuada oferecido para professores da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro. Nela, procuramos criar condições para que os alunos utilizem os conhecimentos sobre cones para resolver uma situação-problema inspirada em uma possível mudança de hábito da população carioca ocorrida com a substituição do copo cônico de papel para o consumo de caldo de cana.

Para iniciá-la, acreditamos ser interessante que você faça comentários e/ou promova um debate sobre os hábitos saudáveis, que são cada vez mais comuns à população carioca, devido à facilidade de disseminação de informação da atualidade, comparando com os hábitos comuns a essa população há algumas décadas. A substituição do copo cônico de papel é, em parte, fruto da aquisição de novos hábitos para manutenção da saúde.

Depois do debate, você pode distribuir uma ficha como a que segue em anexo para cada dupla de alunos. Peça-lhes que a leiam atentamente e tentem responder a todas as perguntas propostas. Quando eles concluírem, dê oportunidade para que exponham suas soluções e as estratégias que empregaram.

Aspectos pedagógicos

Falar nos hábitos da população de uma cidade, professor, inquestionavelmente, demanda alguns conhecimentos de Geografia; falar em manutenção da saúde, por sua vez, requer conhecimentos de Biologia. Sendo assim, temos nesta atividade uma ótima oportunidade para a realização de um trabalho interdisciplinar, e é aconselhável que você convide os professores dessas disciplinas a participarem da sua aula. Se isso não for possível, você pode também sugerir aos seus alunos que entrevistem esses profissionais.

Do ponto de vista matemático, para que seus alunos acompanhem e consigam realizar esta atividade, será necessário que eles utilizem os teoremas de proporcionalidade entre os volumes de figuras geométricas espaciais semelhantes.

Apresente estes teoremas antecipadamente a esta atividade. Releia-os, se julgar pertinente, para que sejam lembrados com todos os detalhes.

Existe certa analogia entre os procedimentos empregados no cálculo do volume do tronco de cone e aqueles empregados no cálculo do volume do tronco de pirâmide. É interessante que, durante as reflexões sobre a situação apresentada na ficha, você procure destacar esta analogia. Se tiver oportunidade, deduza, juntamente com a turma, a fórmula que permite calcular o volume do tronco de cone:

$$V = \frac{\pi h}{3} [R^2 + Rr + r^2]$$

Onde


$h \rightarrow$ é a altura do tronco do cone

$R \rightarrow$ é o raio da base maior

$r \rightarrow$ é o raio da base menor

Lembre-se de que o ponto de partida para deduzi-la é identificar que o volume do tronco é a diferença entre o volume do cone maior e o volume do tronco menor.

Avaliação

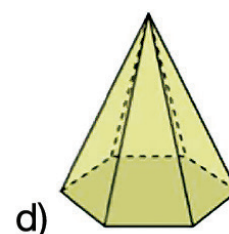
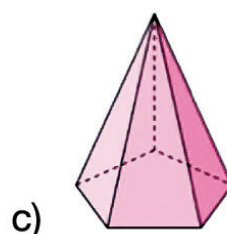
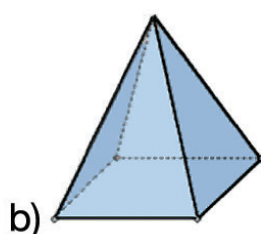
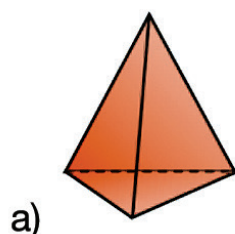
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Consolidação e registros de aprendizagem	Folha de atividades	Consolidar o conteúdo estudado na unidade e incentivar o registro das aprendizagens por meio de algumas perguntas que não privilegiem exclusivamente a linguagem matemática.	Individual	10 minutos

Aspectos operacionais

Nossa sugestão é que você utilize o último tempo de aula desta unidade para a consolidação e avaliação do conteúdo estudado junto à turma. Esta etapa pode estar articulada à seção “Veja ainda”, do material do aluno, que irá enriquecer ainda mais a aula com novidades. Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, numa folha de papel, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade.

Para complementar as questões que você poderá propor aos alunos, apresentamos, na folha de atividades, algumas questões que têm por objetivo a avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas.

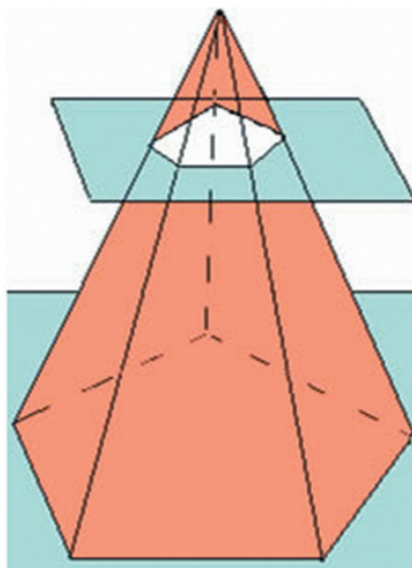
1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?
2. Classifique cada uma das pirâmides regulares a seguir, de acordo com suas bases. Em cada caso, dê o número total de arestas e faces laterais. Você poderia descrever, em palavras, como calcular a área total de cada um destes sólidos?



3. Na figura que segue, é apresentado um tipo de “container” muito utilizado em processos de moagem de certos grãos, bem como para armazenagem destes. Como se denomina o sólido abaixo? Como obter o volume que este sólido é capaz de armazenar?



4. Imagine que o plano da figura abaixo possa ser movido de acordo com sua vontade. Indique, explicando sua razão, onde este plano deve ser posto, de modo que o sólido situado acima do plano tenha volume igual ao sólido abaixo do plano.



5. Ainda com respeito à figura acima, se a área da base for e e a área de uma das faces laterais for f , calcule f , sabendo-se que a área total da pirâmide é 50 e que

Aspectos pedagógicos

1. Certifique-se de fazer com que os resultados deste momento de avaliação indiquem os pontos em que os alunos ainda não conseguiram êxito no aprendizado. Parabenize e elogie o quanto for necessário, para que este momento de avaliação se torne agradável. No item 1, espera-se que o aluno responda pirâmides e cones.
2. a. pirâmide triangular, 4 faces, 6 arestas; b) pirâmide quadrangular, 5 faces, 8 arestas; c) pirâmide pentagonal, 6 faces, 10 arestas; d) pirâmide hexagonal, 7 faces, 12 arestas; em qualquer caso, a área total será a área da base adicionada a n vezes a área de uma das faces laterais, onde n é o número de lados do polígono da base.
3. O sólido é um cone, e seu volume pode ser calculado multiplicando-se a área de sua base por um terço de sua altura.
4. À medida que o plano desce (paralelamente) em direção à base, o volume da pirâmide, limitada pelo vértice e este plano, cresce. Como a base é mais “larga”, é intuitivo e bastante notório que o plano deverá ficar bem mais próximo à base que ao vértice da pirâmide.
5. Como $A_b + 5 A_f = 50$ (área total), e $A_b = 3 A_f$, resulta que $8 A_f = 50$, donde $A_f = 6,25 \text{ m}^2$ e, portanto, $A_b = 18,75 \text{ m}^2$.

Ao final dos registros de avaliação, compartilhe as informações entre os alunos. Indique exercícios e atividades para que as dúvidas e erros possam ser devidamente contornados.

Folha de atividade – Consolidação e registros de aprendizagem

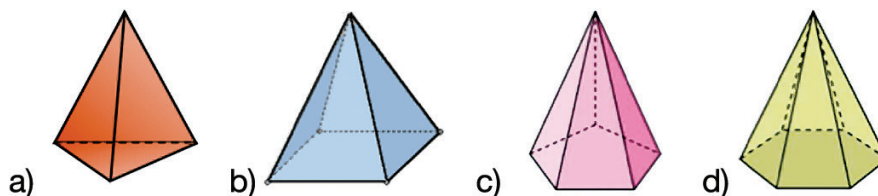
Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na Unidade 4 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta Unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta Unidade?

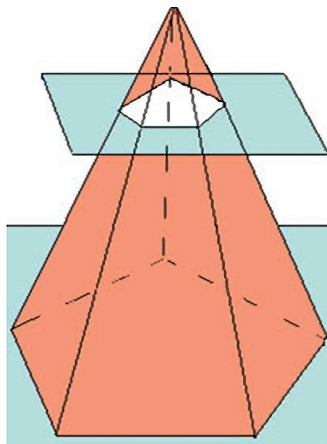
2. Classifique cada uma das pirâmides regulares a seguir, de acordo com suas bases. Em cada caso, dê o número total de arestas e faces laterais. Você poderia descrever, em palavras, como calcular a área total de cada um destes sólidos?



3. Na figura que segue, é apresentado um tipo de “container” muito utilizado em processos de moagem de certos grãos, bem como para armazenagem destes. Como se denomina o sólido abaixo? Como obter o volume o qual este sólido é capaz de armazenar?



4. Imagine que o plano da figura abaixo possa ser movido de acordo com sua vontade. Indique, explicando sua razão, onde este plano deve ser posto, de modo que o sólido situado acima do plano tenha volume igual ao sólido abaixo do plano.



5. Ainda com respeito à figura acima, se a área da base for e e a área de uma das faces laterais for f , calcule x , sabendo-se que a área total da pirâmide é $2e + 3f$ e que

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questão dissertativa	Folha de atividades, lápis, borracha, calculadora.	Questão dissertativa que complementa a seção "O que perguntam por aí?".	Individual	10 minutos

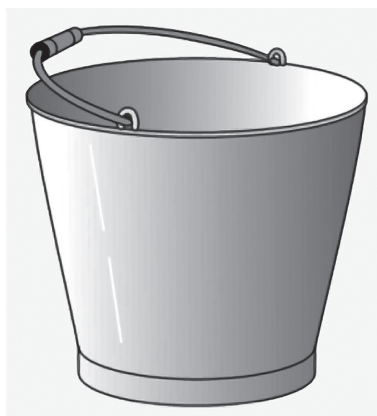
Aspectos operacionais

Disponibilizamos uma questão dissertativa que complementa o que foi proposto na seção "O que perguntam por aí?", do material do aluno. Ela pode ser aplicada individualmente em sala e discutida ao final da aula com todo o grupo.

Ao trabalhar tal questão com os alunos, esperamos que haja compreensão de situações reais onde eles poderão aplicar o estudo de Pirâmides e Cones.

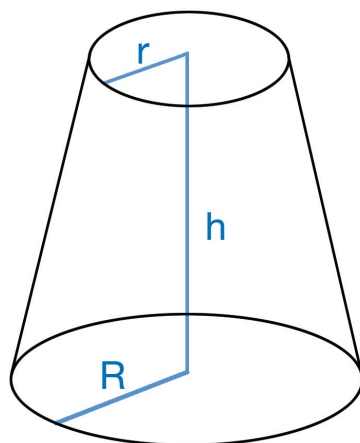
Questão

Classicamente, baldes utilizados em serviços domésticos têm uma forma de “tronco de cone”, a saber,



Qual o volume de um balde?

Usando-se conhecimentos de geometria, pode-se calcular o volume do tronco de cone



por meio da fórmula

$$V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + rR + R^2) \quad (\text{I})$$

Para fins práticos, você considera a aproximação e considera a fórmula mais simples

$$V = h(r^2 + rR + R^2) \quad (\text{II})$$

Finalmente, imagine que você vai a uma loja e quer adquirir um balde com, pelo menos, 15 litros de capacidade. Por uma desatenção do funcionário da loja, não há referências nos baldes, de modo que não é possível identificar a capacidade dos produtos expostos. O gerente da loja, sabendo da sua necessidade, aponta um dos baldes e garante que este balde atende sua necessidade. Por sorte, você percebe que a loja vende fitas métricas e, gentilmente, você solicita uma para fazer medições do balde indicado pelo gerente.

Se as medidas encontradas são , e, você confiará na informação do gerente? Por quê?

Desenhe a figura que corresponde ao caso em que . Você conhece este sólido?

Observação:

$$1 \text{ litro} = 1000 \text{ cm}^3$$

Aspectos pedagógicos

Primeiramente, você deve alertar seus alunos que uma oportunidade de construir conhecimentos é fazê-lo através de problemas que introduzam novos conceitos. E este é o caso! Tranquilize-os em relação às informações sobre química, presentes no contexto. Tranquilize-os em relação às fórmulas que, num primeiro momento, podem trazer desconforto a alguns. Junto com os alunos, identifique cada um dos elementos da figura (tronco de cone), de modo que ele saiba exatamente que medidas indicadas na figura correspondem às do balde. Ressalte a importância do assunto estudado, mostrando a abrangência e a aplicabilidade em situações do cotidiano, pelas quais qualquer um de nós pode passar.

Folha de atividade – Questão dissertativa

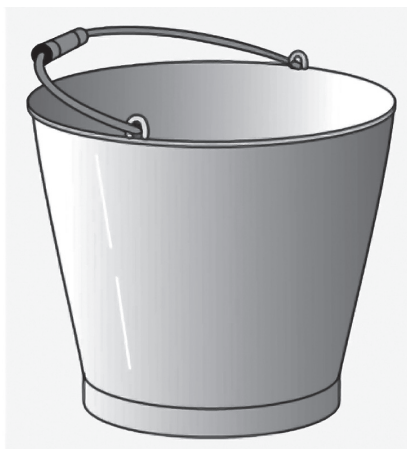
Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Leia com atenção as informações abaixo e tente responder aos questionamentos.

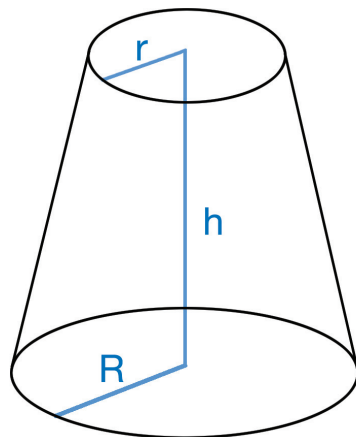
Questão

Classicamente, baldes utilizados em serviços domésticos têm uma forma de “tronco de cone”, a saber,



Qual o volume de um balde?

Usando-se conhecimentos de geometria, pode-se calcular o volume do tronco de cone



por meio da fórmula

$$V = \frac{\pi h}{3} (r^2 + rR + R^2)$$

Para fins práticos, você considera a aproximação e considera a fórmula mais simples

$$V = h(r^2 + rR + R^2)$$

Finalmente, imagine que você vai a uma loja e quer adquirir um balde com, pelo menos, 15 litros de capacidade. Por uma desatenção do funcionário da loja, não há referências nos baldes, de modo que não é possível identificar a capacidade dos produtos expostos. O gerente da loja, sabendo da sua necessidade, aponta um dos baldes e garante que este balde atende sua necessidade. Por sorte, você percebe que a loja vende fitas métricas e, gentilmente, você solicita uma para fazer medições do balde indicado pelo gerente.


- a. Se as medidas encontradas são r , R e h , você confiará na informação do gerente? Por quê?

- b. Desenhe a figura que corresponde ao caso em que $r = R$. Você conhece este sólido?

Observação:

$1 \text{ litro} = 1000$

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questão objetiva (UERJ)	Folha de atividades, lápis, borracha.	Questão objetiva que complementa a seção "O que perguntam por aí?".	Individual.	10 minutos

Aspectos operacionais

Disponibilizamos uma questão objetiva que pode ser usada como complemento ao que foi proposto no material do aluno na seção "O que perguntam por aí?". Ela pode ser aplicada individualmente em sala e discutida ao final da aula com todo o grupo.

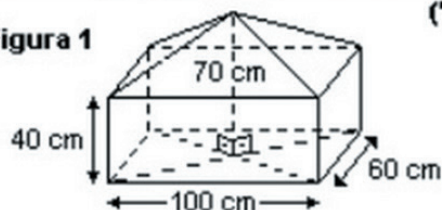
Sugerimos, nesta etapa, a escolha de questões objetivas que contemplem as habilidades pretendidas nesta unidade, para compor o instrumento avaliativo. Se desejar, você pode buscar outras questões de acordo com o perfil da sua turma. A ideia é que além de avaliar o aprendizado, o aluno se familiarize com questões cobradas em avaliações de larga escala, como ENEM, vestibulares, concursos, etc.

Questão

Leia os quadrinhos abaixo.



Figura 1



Suponha que o volume de terra acumulado no carrinho de mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura 1, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo.

Assim, o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada ano de trabalho é, em , igual a:

- a. 12
- b. 13
- c. 14
- d. 15

Observação: $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

Aspectos pedagógicos

Você pode intervir junto aos alunos na resolução do problema, caso observe alguma dificuldade ou insegurança. É provável que a partir disto eles consigam desenvoltura para seguir adiante. Tente estimular as ideias que levem às respostas desejadas. Após a resolução das questões, proponha uma discussão sobre as soluções encontradas. Possivelmente, aparecerão soluções divergentes. Neste momento, é importante que você pondere as equivocadas, ressaltando onde reside o erro.

Alerte os alunos que o que há de fundamental no problema é notar que o sólido geométrico apresentado na figura 1 pode ser decomposto em dois outros sólidos bem conhecidos. Feito isto, o cálculo é rotineiro e direto. Atenção devida deve ser dada aos quadrinhos, pois requerem que se utilize a informação ali contida.

Folha de atividade – Questão objetiva (UERJ)

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Leia com atenção as informações abaixo e tente responder aos questionamentos.

Questão

Leia os quadrinhos abaixo.

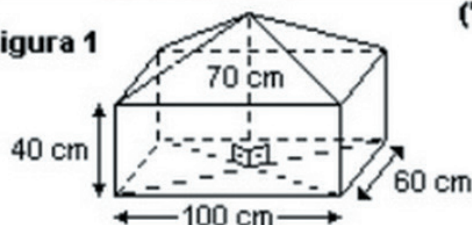
HAGAR, o horrível

Chris Browne



("O Globo", março 2000)

Figura 1



Suponha que o volume de terra acumulado no carrinho de mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura 1, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo.

Assim, o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada ano de trabalho é, em , igual a:

- a. 12
- b. 13
- c. 14
- d. 15

Gabarito

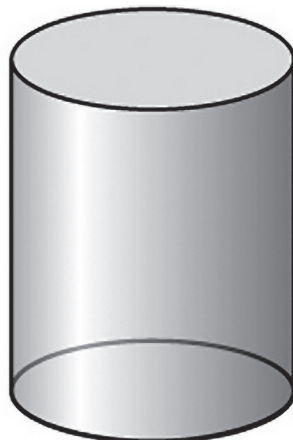
Questão dissertativa

- a. De acordo com a fórmula (II) (simplificada), verifica-se que, com as medidas $r = 10 \text{ cm}$, $R = 18 \text{ cm}$ e $h = 20 \text{ cm}$, o volume do referido balde é

$$V = 20 (10^2 + 10 \cdot 20 + 18^2) = 12.480 \text{ cm}^3 = 12,48 \text{ litros}$$

Portanto, a informação do gerente não é verdadeira.

b. Se , a figura obtida é



conhecido como cilindro.

Questão objetiva

O volume do paralelepípedo é dado por

$$40 \text{ cm} \times 60 \text{ cm} \times 100 \text{ cm} = 24 \times 10^4 \text{ cm}^3 = 240 \text{ dm}^3,$$

enquanto o volume superior, correspondente à pirâmide, cuja área da base é $100 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ e cuja altura é 30 cm , é dado por

$$\frac{1}{3} 100 \text{ cm} \times 60 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} = 6 \times 10^4 \text{ cm}^3 = 60 \text{ dm}^3$$

Portanto, o volume total do carrinho é

$$240 \text{ dm}^3 + 60 \text{ dm}^3 = 300 \text{ dm}^3$$

Consequentemente, o volume acumulado a cada ano, foi de

$$\frac{300}{20} \text{ dm}^3 = 15 \text{ dm}^3$$

Referências Bibliográficas

- <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1500-6.pdf>
- <http://jucienebertoldo.files.wordpress.com/2012/11/atividades-de-laboratc3b3rio-de-matemc3a1tica-2.pdf>
- <http://jucienebertoldo.files.wordpress.com/2012/11/atividades-de-laboratc3b3rio-de-matemc3a1tica-2.pdf>
- <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1039>