Volume 2 • Módulo 3 • Matemática • Expansão

Geometria Espacial: esferas

André Luiz Martins Pereira, Érika Silos de Castro, Juliana Bezerra, Leo Akio Yokoyama, Luciana Felix da Costa Santos e Renata Cardoso Pires de Abreu

Introdução

Na Unidade 5 do material do aluno, são apresentadas várias situações cotidianas em que é possível observar elementos que podem representar uma esfera, tais como uma laranja, uma bola de futebol etc. Nesta Unidade, o aluno terá a oportunidade de ampliar as discussões realizadas nos módulos anteriores, compreendendo os elementos de uma esfera, a área da superfície esférica, volume de uma esfera, além dos conceitos de fuso esférico e cunha esférica.

Para potencializar o material didático do aluno, pesquisamos alguns recursos e atividades para auxiliar a você, professor, a ampliar possibilidades para exploração deste tema em suas aulas.

Sugerimos que a primeira aula dessa Unidade se inicie com uma atividade disparadora. Esta é uma atividade proposta para ser realizada em grupo, promovendo uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, é esperado que eles desenvolvam algumas noções básicas relacionadas ao conceito de esfera e seus elementos.

Para dar sequência ao estudo dessa Unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de fazer as alterações e adaptações que julgar necessárias.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta Unidade seja dividida em dois momentos: o primeiro, dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta Unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o seu estudo; o segundo, um momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

Uma descrição destas sugestões está colocada nas tabelas a seguir, e seus detalhamentos no texto que segue.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	3	Expansão	4 aulas de 2 tempos

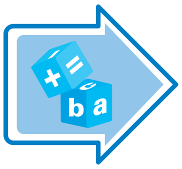
Titulo da unidade	Tema
Geometria Espacial: esferas	Geometria Espacial
Objetivos da unidade	
Reconhecer os elementos de uma esfera.	
Calcular a área da superfície e o volume da esfera.	
Calcular a área de um fuso esférico e o volume de uma cunha esférica.	

Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	161 e 162
Seção 1 – O que é uma esfera?	163 a 171
Seção 2 – Como calcular área e volume de esferas?	171 a 177
Seção 3 – Fuso e Cunha	177 a 184
O que perguntam por aí?	189 e 190

Recursos e ideias para o Professor

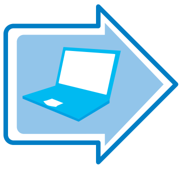
Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

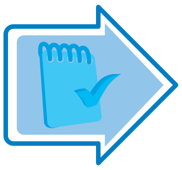


Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



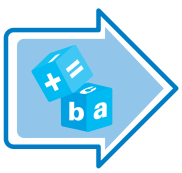
Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Espelhos esféricos.	Concha polida de cozinha, simulador em flash disponível no material multimídia do professor, computadores para os alunos, cadernos ou folhas para anotações e folha de atividades.	Esta atividade é composta de dois momentos. No primeiro momento, os alunos poderão experimentar, de uma forma mais concreta, a formação de imagens em espelhos esféricos usando para isso uma concha de cozinha polida. No segundo, os alunos poderão utilizar um simulador virtual para esquematizar a representação das imagens formadas por espelhos esféricos.	A turma pode ser dividida em duplas ou trios.	40 minutos
	Monitoramento por satélite	Folha de atividade, uma bola de isopor, barbante, datashow com computador e vídeo.	Nessa atividade, os alunos terão a oportunidade de refletir sobre alguns dos conceitos básicos da geometria da esfera a partir de um vídeo.	Turma dividida em duplas.	40 minutos

Seção 1 – O que é uma esfera?

Páginas no material do aluno

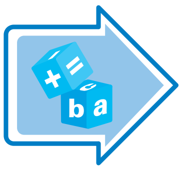
163 a 171

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Esfera X superfície esférica.	Lápis (ou palito tipo de churrasco), tesoura, papel, compasso, fita adesiva, um pedaço de arame fino e maleável e folha de atividades.	A atividade a seguir propõe a observação da esfera e da superfície esférica através da rotação de semicírculos e semicircunferências ao redor de um eixo. Posteriormente, sugerimos que o professor apresente diferentes objetos do cotidiano, para a identificação e fixação das definições de esfera e casca esférica.	Turma dividida em duplas ou trios.	40 minutos
	Aventuras do Geodetetive.	Datashow, laptop ou sala multimídia, lápis caneta e folha de atividade .	Através desta atividade será possível explicar como são estabelecidas as coordenadas geográficas, latitude e longitude, usadas na localização de qualquer ponto da superfície da Terra.	Turma dividida em duplas.	40 minutos

Seção 2 – Como calcular área e volume de esferas?

Páginas no material do aluno
171 a 177

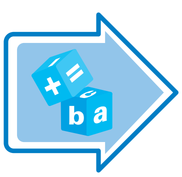
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando o Volume da Esfera.	Folha de atividades, lápis/caneta, bolas de gude e uma proveta (ou um copo medidor) com água.	O objetivo dessa atividade é aplicar o cálculo de volume de uma esfera a partir de experiências que permitam construir estimativas.	Turma dividida em grupos de quatro alunos.	40 minutos
	Método empírico de determinação do volume da esfera.	Papel-cartão, molde de apoio para construção de sólidos, tesoura, cola, massa de modelar, estilete (é opcional, servindo apenas para ajudar a modelar), recipiente cilíndrico transparente (pode ser um pote de detergente, um copo, etc.), caneta hidrocor, régua e água.	Nessa atividade, os alunos terão a oportunidade de construir, usando massa de modelar, um cone e um cilindro de alturas iguais ao raio de suas bases e uma semiesfera de mesmo raio. Em seguida, após mergulhar os sólidos construídos um a um em um recipiente com água, poderão perceber que a altura que a água sobe para o cone, semiesfera e cilindro são proporcionais a 1, 2 e 3, respectivamente. Dessa forma é possível verificar de maneira experimental as fórmulas de determinação do volume do cone e da esfera a partir do volume do cilindro.	Turma dividida em trios.	40 minutos

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando a área da superfície esférica.	Folha de atividades, lápis/caneta, calculadora.	Esta atividade tenta contextualizar o estudo da área da superfície esférica através da resolução de uma situação-problema que aborda as bolas dos esportes olímpicos como tema motivador.	Turma dividida em grupos de três ou quatro alunos.	40 minutos

Seção 3 – Fuso e Cunha

Páginas no material do aluno

177 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Visualizando Cunhas e Fusos Esféricos.	Uma ou duas laranjas grandes e uma faca (sempre com o professor).	Esta atividade visa a apresentar aos alunos o que vem a ser uma cunha esférica e um fuso esférico por meio de cortes realizados em uma laranja grande.	Participação coletiva e registros individuais.	20 minutos

Seção: O que perguntam por aí?

Páginas no material do aluno

189 e 190

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de Vestibulares.	Imagem disponível para projeção neste material; material do aluno.		Turma dividida em duplas.	

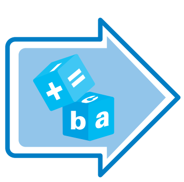
Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Momento de Reflexão.	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a Unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões tanto objetiva como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Participação individual dos alunos.	40 minutos

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de Fixação Complementares.	Folha de Atividades disponível para reprodução no Grid de aula do "DVD do professor", lápis/caneta.		Turma dividida em duplas ou em trios.	

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Espelhos esféricos.	Concha polida de cozinha, simulador em flash disponível no material multimídia do professor, computadores para os alunos, cadernos ou folhas para anotações e folha de atividades.	Esta atividade é composta de dois momentos. No primeiro momento, os alunos poderão experimentar, de uma forma mais concreta, a formação de imagens em espelhos esféricos usando para isso uma concha de cozinha polida. No segundo, os alunos poderão utilizar um simulador virtual para esquematizar a representação das imagens formadas por espelhos esféricos.	A turma pode ser dividida em duplas ou trios.	40 minutos

Aspectos operacionais

Essa atividade foi planejada de forma que os alunos pudessem, num primeiro momento, experimentar, de uma forma mais concreta, a formação de imagens em espelhos esféricos usando para isso uma concha de cozinha polida e, em seguida, utilizar um simulador virtual para esquematizar a representação das imagens formadas por esse tipo de espelho. Para que cada aluno possa interagir diretamente com o simulador virtual, recomendamos que a segunda parte dessa exploração seja aplicada no laboratório de informática da sua unidade escolar, de modo que o simulador seja instalado em cada um dos computadores do laboratório e acessado a partir do browser ou navegador neles já disponível. Dessa maneira, a atividade proposta tem como objetivo apresentar, de uma forma interativa, uma das aplicações físicas da forma de uma superfície esférica: os espelhos esféricos.

Os espelhos esféricos são normalmente usados na entrada de elevadores e de estacionamentos, em saídas de ônibus, em estojos de maquiagem e em retrovisores. Eles são constituídos de uma superfície lisa e polida com formato esférico. Quando a parte refletora for interna à superfície, o espelho recebe o nome de espelho côncavo; quando for externa, é denominado convexo.

- Com antecedência, proponha que os alunos se distribuam em duplas ou trios e recomende que cada grupo traga uma concha de cozinha para o dia da aplicação da atividade. Essa concha deverá ser de material polido: aço inox polido, por exemplo. A concha poderá ser utilizada para experimentar tanto na formação de imagens no espelho côncavo quanto no espelho convexo.

- No dia da aplicação da atividade, certifique-se de que o simulador está devidamente instalado nos computadores do laboratório de informática. Uma vez que tudo esteja preparado, leve os alunos até o laboratório de informática e peça para que se reúnam de acordo com as duplas ou trios formados anteriormente, dispondo-os diante dos computadores.

- Peça que os alunos olhem para a parte côncava (interna) da concha que trouxeram a uma certa distância, e verifiquem como é a imagem. Depois peça para que vão aproximando da concha até muito próximo dos olhos, sempre verificando a imagem. Depois peça para que repitam o mesmo procedimento com a parte convexa da concha. Esse momento da atividade não deve levar mais que 10 minutos.

- Depois de terminada a experimentação com a concha, peça para que os alunos abram o simulador virtual "Simulador_Espelhos_Esfericos.swf" e o apresente rapidamente. Se preferir, o mesmo simulador também pode ser acessado pela internet no site: http://www.edy.pro.br/espelhos/simulador.swf.

- Em seguida, distribua a cópia impressa da folha de atividades que se encontra disponível para reprodução em seu material multimídia.

- Uma vez aberto o simulador, peça que seus alunos leiam com atenção as "instruções" e a "introdução ao conteúdo" clicando sobre os respectivos links.

- Convide-os, então, a explorar os recursos do simulador propriamente dito, pedindo que os alunos cliquem sobre o link "Simulador (Atividade)". Ao abrir o link, peça para que os alunos selecionem a aba correspondente ao "espelho plano" (que provavelmente já estará selecionada).

- Deixe que explorem a tela livremente e daí peça que respondam o conjunto de questões da primeira parte da folha de atividades: "Espelhos Planos".
- Uma vez terminada a etapa anterior, peça para que os alunos selecionem a aba correspondente ao "espelho côncavo".
- Deixe que, novamente, explorem a tela livremente e daí peça que respondam ao conjunto de questões da segunda parte da folha de atividades: "Espelhos Côncavos".
- Uma vez terminada a etapa anterior, peça para que os alunos selecionem a aba correspondente ao "espelho convexo".
- Deixe que, novamente, explorem a tela livremente e daí peça que respondam ao conjunto de questões da terceira parte da folha de atividades: "Espelhos Convexos".
- Depois da exploração do simulador, peça para que os alunos respondam, finalmente, ao conjunto de questões da quarta parte da folha de atividades: "Aplicações".

Caso a sua unidade escolar não disponha de um laboratório de informática, a mesma atividade poderá ser aplicada em sala de aula com auxílio de um computador ligado a um projetor multimídia ou a uma TV. Nesse caso, os alunos poderão interagir com o software de maneira indireta e coletiva.

Aspectos pedagógicos

- Antes de conduzir seus alunos até o laboratório de informática, certifique-se de que o simulador tenha sido devidamente instalado e testado, para que não seja necessário realizar tais procedimentos durante a aula.
- Esclareça que a parte côncava da concha funciona como um espelho esférico côncavo, enquanto a parte convexa da concha funciona como um espelho esférico convexo. Também esclareça que a concha não se trata de uma esfera completa, mas de uma calota esférica. Peça que imaginem a esfera da qual a concha seria a calota e seu centro.
- Durante a leitura das "instruções" e da "introdução ao conteúdo", você poderá lê-las junto com seus alunos ajudando-os a sanar as possíveis dúvidas de vocabulário que possam ocorrer.
- Explore com maior cuidado e ênfase a tela da "introdução ao conteúdo" que se refere aos espelhos esféricos. Ela contém uma animação bastante interessante que pode ajudar a ilustrar um dos tipos de secção da esfera: a calota esférica.
- Chame a atenção para o fato de que em cada esquema de representação do objeto e sua respectiva imagem no espelho estamos observando de uma perspectiva transversal. A imagem que vemos "atrás" do espelho é a que é vista através do espelho do ponto de vista do objeto.

Folha de atividades – Espelhos Esféricos

Nome da Escola:____

Nome: ____

Primeira Parte: Espelhos Planos

Movimente o objeto (vela) e observe o comportamento da representação da sua imagem formada no espelho.

a. O tamanho da imagem se altera em relação ao do objeto de acordo com a posição dele?

b. A orientação da imagem (direita ou invertida) se altera em relação ao do objeto de acordo com a posição dele?

c. Ao se olhar em um espelho plano (normal), o campo visual aumenta ou diminui?

Segunda Parte: Espelhos Côncavos

Movimente o objeto (vela) e observe o comportamento da representação da sua imagem formada no espelho.

a. O tamanho da imagem se altera em relação ao do objeto de acordo com a posição dele?

b. Afastando o objeto deste espelho, o que acontece com a imagem no que diz respeito ao seu tamanho e à sua orientação?

c. Pensando no experimento com a concha, nesse tipo de espelho o campo visual aumenta ou diminui?

Terceira Parte: Espelhos Convexos

Movimente o objeto (vela) e observe o comportamento da representação da sua imagem formada no espelho.

a. O tamanho da imagem se altera em relação ao do objeto de acordo com a posição dele?

b. Afastando o objeto deste espelho, o que acontece com a imagem no que diz respeito ao seu tamanho e à sua orientação?

c. Pensando no experimento com a concha, nesse tipo de espelho o campo visual aumenta ou diminui?

Quarta Parte: Aplicações

1. Você pode imaginar por que em alguns retrovisores de motocicletas e de automóveis são usados espelhos esféricos e não espelhos planos? De que tipo seriam: côncavo ou convexo? Justifique.

2. Você pode imaginar por que em espelhos de dentistas, são usados espelhos esféricos e não espelhos planos? De que tipo seriam: côncavo ou convexo? Justifique.

3. Você pode imaginar por que em espelhos de porta de elevador ou estacionamentos, são usados espelhos esféricos e não espelhos planos? De que tipo seriam: côncavo ou convexo? Justifique.

4. Você pode imaginar por que em alguns espelhos de estojo de maquiagem, são usados espelhos esféricos e não espelhos planos? De que tipo seriam: côncavo ou convexo? Justifique.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Monitoramento por satélite	Folha de atividade, uma bola de isopor, barbante, datashow com computador e vídeo.	Nessa atividade, os alunos terão a oportunidade de refletir sobre alguns dos conceitos básicos da geometria da esfera a partir de um vídeo.	Turma dividida em duplas.	40 minutos

Aspectos operacionais

Essa atividade foi retirada (e adaptada) de "recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio" da UNICAMP.

Nessa Unidade, os alunos terão a oportunidade de refletir sobre os conceitos básicos da geometria da esfera. Para facilitar a compreensão dos conceitos envolvidos na atividade, sugerimos a utilização de uma bola de isopor para representar nosso grande planeta: Terra.

Nosso objetivo é desenvolver conceitos básicos de geometria esférica, e também de comparar a geometria euclidiana com a geometria não-euclidiana, procurando através das semelhanças e diferenças existentes entre elas, mostrar a importância de cada uma delas.

Sugerimos algumas atividades para realizar com os alunos em sala de aula, após a apresentação do vídeo, disponível no sitio: http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1054.

- É interessante que os alunos se organizem em duplas para uma melhor discussão das atividades.
- Professor, procure se certificar de que cada dupla está com uma folha de atividades, uma bola de isopor e um pedaço de barbante.

Atividade 1

"Um jovem caçador saiu de sua fazenda e andou 10 Km ao sul. Depois virou a oeste e andou mais 10 Km. Então virou ao norte e andou novamente por mais 10 Km. Ele ficou espantado, pois descobriu que tinha retornado à sua fazenda."

a. Em uma folha de papel, desenhe o caminho percorrido pelo jovem caçador. Adote para cada centímetro do papel o equivalente a um quilômetro.

b. De acordo com a história descrita acima é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Discuta com sua dupla e escreva as conclusões.

c. Em uma bola de isopor, marque com auxílio do barbante, o caminho percorrido pelo jovem caçador.

d. Analisando o caminho desenhado na bola, é possível que o jovem caçador volte ao mesmo ponto de partida (sua fazenda)? Justifique sua resposta.

Atividade 2

"Retornando a história do jovem caçador, imagine agora a seguinte situação: suponha que o jovem tenha saído de sua fazenda e inicie uma longa caminhada em linha reta para muito, muito distante (imaginando nunca parar...!)".

a. Em uma folha de papel, desenhe o caminho percorrido pelo jovem caçador.

b. De acordo com o caminho percorrido desenhado na folha de papel é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Discuta com sua dupla e escreva as conclusões.

c. Novamente utilize uma bola de isopor e o barbante e marque o caminho percorrido pelo jovem caçador.

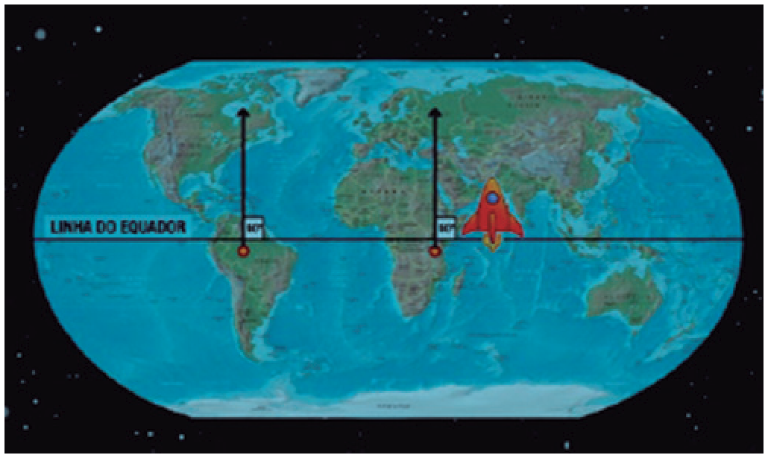
d. De acordo com o caminho percorrido desenhado na bola de isopor, é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Escreva suas conclusões.

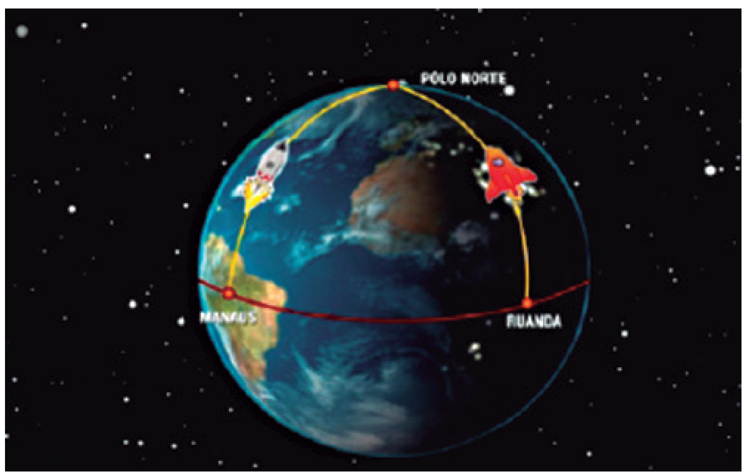
Aspectos pedagógicos

- Professor, no momento em que o vídeo estiver em torno dos 7 minutos, caso julgue conveniente, sugerimos pausar o vídeo e propor as seguintes questões aos alunos:

1. Em qual geometria estão as naves do super-herói Radix e do vilão Capitão Bum?
2. O que poderia acontecer com as naves do super-herói Radix e do vilão Capitão Bum ao serem lançadas no mesmo momento e na mesma velocidade ao espaço?

- Igualmente, quando o vídeo estiver em 8 minutos e 48 segundos, sugerimos que uma nova pausa seja feita para reforçar a ideia com os alunos de que as naves do herói Radix e do vilão Capitão Bum estão em uma geometria Esférica (superfície da Terra), e, portanto o Nelson não poderia considerar a definição da geometria Euclidiana de que retas paralelas não se cortam!
- Tão logo termine o vídeo, a atividade deve ser iniciada.





Folha de Atividade – Monitoramento por satélite

Nome da Escola: ____

Nome dos Alunos: ____

Atividade 1

"Um jovem caçador saiu de sua fazenda e andou 10 Km ao sul. Depois virou a oeste e andou mais 10 Km. Então virou ao norte e andou novamente por mais 10 Km. Ele ficou espantado, pois descobriu que tinha retornado à sua fazenda."

a. Em uma folha de papel, desenhe o caminho percorrido pelo jovem caçador. Adote para cada centímetro do papel o equivalente a um quilômetro.

b. De acordo com a história descrita acima é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Discuta com sua dupla e escreva as conclusões.

c. Em uma bola de isopor, marque com auxílio do barbante, o caminho percorrido pelo jovem caçador.

d. Analisando o caminho desenhado na bola, é possível que o jovem caçador volte ao mesmo ponto de partida (sua fazenda)? Justifique sua resposta.

Atividade 2

"Retornando a história do jovem caçador, imagine agora a seguinte situação: suponha que o jovem tenha saído de sua fazenda e inicie uma longa caminhada em linha reta para muito, muito distante (imaginando nunca parar...!)".

a. Em uma folha de papel, desenhe o caminho percorrido pelo jovem caçador.

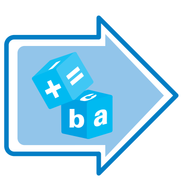
b. De acordo com o caminho percorrido desenhado na folha de papel é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Discuta com sua dupla e escreva as conclusões.

c. Novamente utilize uma bola de isopor e o barbante e marque o caminho percorrido pelo jovem caçador.

d. De acordo com o caminho percorrido desenhado na bola de isopor, é possível que o jovem caçador volte ao ponto de partida? Escreva suas conclusões.

Seção 1 – O que é uma esfera?

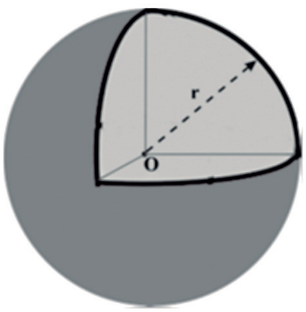
Páginas no material do aluno
163 a 171

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Esfera X superfície esférica.	Lápis (ou palito tipo de churrasco), tesoura, papel, compasso, fita adesiva, um pedaço de arame fino e maleável e folha de atividades.	A atividade a seguir propõe a observação da esfera e da superfície esférica através da rotação de semicírculos e semicircunferências ao redor de um eixo. Posteriormente, sugerimos que o professor apresente diferentes objetos do cotidiano, para a identificação e fixação das definições de esfera e casca esférica.	Turma dividida em duplas ou trios.	40 minutos

Aspectos operacionais

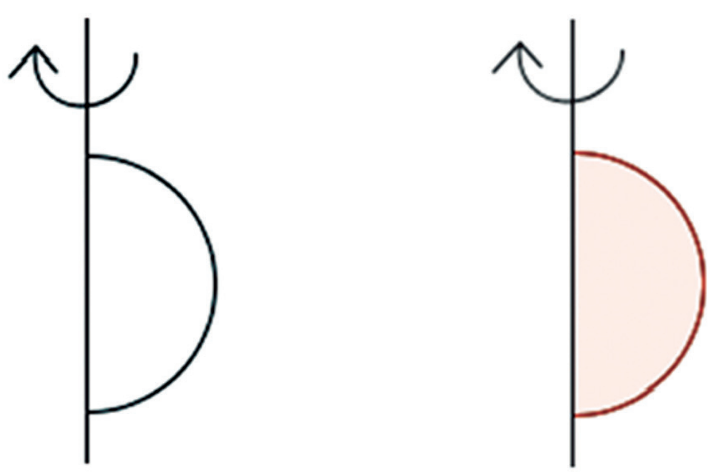
Essa atividade foi elaborada para auxiliar os alunos a identificarem a diferença entre esfera e superfície esférica a partir das noções de superfície e sólido de revolução e depois a fazerem correspondências entre diferentes objetos do cotidiano utilizando os conceitos trabalhados.

Como destacado no material do aluno, página 43:



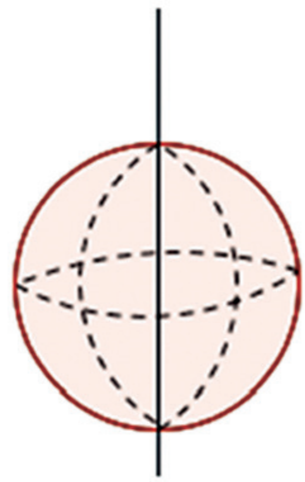
"Dado um ponto O e uma distância r, chamamos de esfera ao conjunto de pontos cuja distância até o ponto O é menor ou igual ao raio r. Se essa distância for exatamente igual a r, chamamos o conjunto de pontos de superfície da esfera, pois, neste caso, estaremos tomando somente a "casca" da esfera (em cinza escuro). Se a distância for menor do que r, teremos apenas o "miolo" da esfera (em cinza claro)."

- Peça para que seus alunos organizem-se em duplas ou em trios.
- Procure se certificar de que cada dupla está com uma folha de atividades, uma bola de isopor e um pedaço de barbante.
- Com o compasso, oriente os alunos a traçarem um arco de circunferência, de modo que possa ser marcada uma semicircunferência e o diâmetro na folha de papel e a recortarem como molde de um semicírculo e depois obter a semicircunferência a partir do contorno feito com o pedaço de arame;
- Após a confecção dos moldes, oriente-os a utilizarem um lápis ou um palito como eixo, colando-o sobre o diâmetro da semicircunferência e fixando o arame no caso do semicírculo, conforme a figura a seguir:



- A seguir, leve os alunos a girarem completamente a semicircunferência e o semicírculo, ou seja, 360° em torno do eixo, e estimule-os a tirarem conclusões.

superfície esférica



Esfera

- Por fim, sugerimos que você use a lousa para apresentar diferentes objetos do cotidiano, para que os alunos identifiquem e fixem a ideia de esfera e casca esférica, conforme o exemplo a seguir:

1. Classifique os seguintes objetos esféricos a seguir como "esfera" ou "casca esférica". Discuta com seus colegas a sua escolha.

a. Laranja:	m. Rolimã:
b. Bolinha de tênis de mesa:	n. Lustre em formato esférico
c. Planeta Terra:	o. Bala de canhão antiga
d. Bolinha de gude:	p. Bexiga em formato esférico
e. Bola de futebol:	q. Bola de tênis de campo
f. Bola de boliche:	r. Bola de pilates
g. Lua:	s. Bola do lançamento de pelota (atletismo)
h. Bola de enfeite de Natal:	t. Bola de beisebol
i. Limão:	u. Bola do lançamento de martelo (atletismo)
j. Bola de basquete:	v. Bola de golfe
k. Bola de sinuca:	
l. Bolha de sabão:	

Aspectos pedagógicos

- Após a rotação dos objetos ao redor do eixo, estimule os alunos a identificarem a distinção entre esfera e superfície esférica. Para isso, abra uma discussão inicial sobre as impressões dos alunos a respeito dos conceitos de esfera e de superfície (casca) esférica e posteriormente, formalize esses conceitos e apresente os elementos que compõem estes objetos matemáticos.

- Ao apresentar os exemplos do cotidiano, você pode discutir com a turma sobre os objetos esféricos apresentados, ajudando-os a decidirem se tal objeto se assemelha mais com uma esfera ou com uma casca esférica, e por quê.

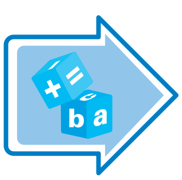
- Incentive os estudantes a darem outros exemplos de esfera e casca esférica.

- Alguns objetos se referem a bolas de alguns esportes com os quais muitos podem não estar familiarizados. Você poderá propor que seus alunos pesquisem sobre o formato e confecção dessas bolas, ou utilizar um projetor multimídia (datashow) e um laptop para exibir os resultados de uma busca na internet para esclarecer na hora possíveis dúvidas que possam ser levantadas em relação ao formato delas.

Seção 1 – O que é uma esfera?

Páginas no material do aluno

163 a 171

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Esfera X superfície esférica.	Lápis (ou palito tipo de churrasco), tesoura, papel, compasso, fita adesiva, um pedaço de arame fino e maleável e folha de atividades.	A atividade a seguir propõe a observação da esfera e da superfície esférica através da rotação de semicírculos e semicircunferências ao redor de um eixo. Posteriormente, sugerimos que o professor apresente diferentes objetos do cotidiano, para a identificação e fixação das definições de esfera e casca esférica.	Turma dividida em duplas ou trios.	40 minutos

Aspectos operacionais

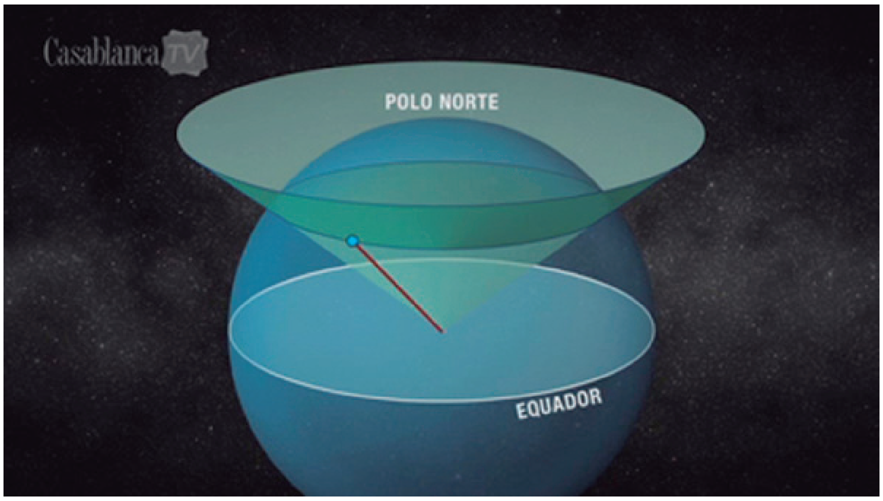
O vídeo dessa atividade consta nos "recursos educacionais multimídia para a matemática do ensino médio" da UNICAMP, disponível on-line em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1103 ou off-line no material multimídia do professor.

Nessa Unidade, os alunos terão a oportunidade de refletir sobre como são estabelecidas as coordenadas geográficas, latitude e longitude, usadas na localização de qualquer ponto da superfície da Terra.

- É interessante que os alunos se organizem em duplas para uma melhor discussão das atividades.
- Professor, após a apresentação do vídeo, distribua para cada grupo uma folha de atividades, disponível para reprodução no seu material multimídia. Se necessário apresente o vídeo mais de uma vez.
- Procure se certificar de que cada dupla está com uma folha de atividades.

Aspectos pedagógicos

- Oriente os alunos nas questões propostas na folha de atividades.
- No item 3, caso seja necessário, mostre a imagem a seguir para os alunos, para que eles percebam que uma mesma latitude corresponde a vários pontos da circunferência corresponde a esse ângulo.



Além disso, se achar conveniente você pode falar para seus alunos que, geralmente, a altitude (em relação ao nível do mar) também é informada para que a localização seja precisa.

- No item 5, é interessante destacar para os alunos que, diferentemente da linha do Equador, que corresponde a uma circunferência máxima no plano perpendicular ao eixo de rotação da Terra, o meridiano correspondente ao grau 0 poderia ser qualquer um.

Você pode usar as duas imagens a seguir para comparar latitude e longitude com a turma.

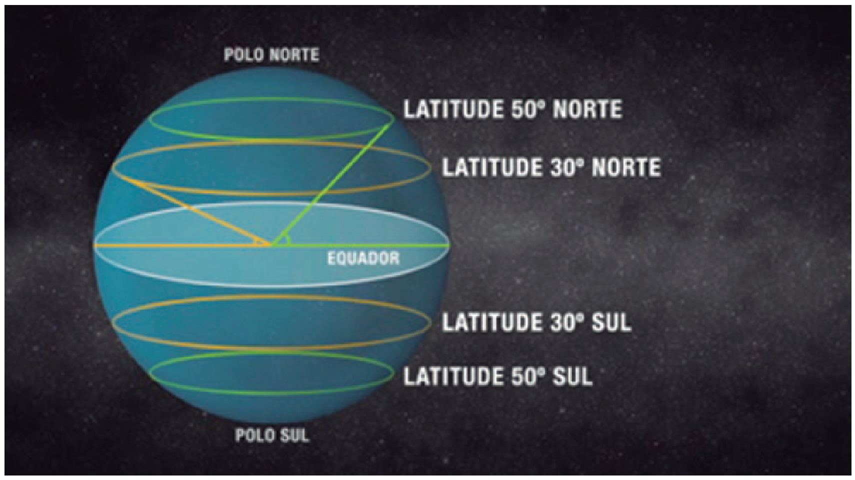
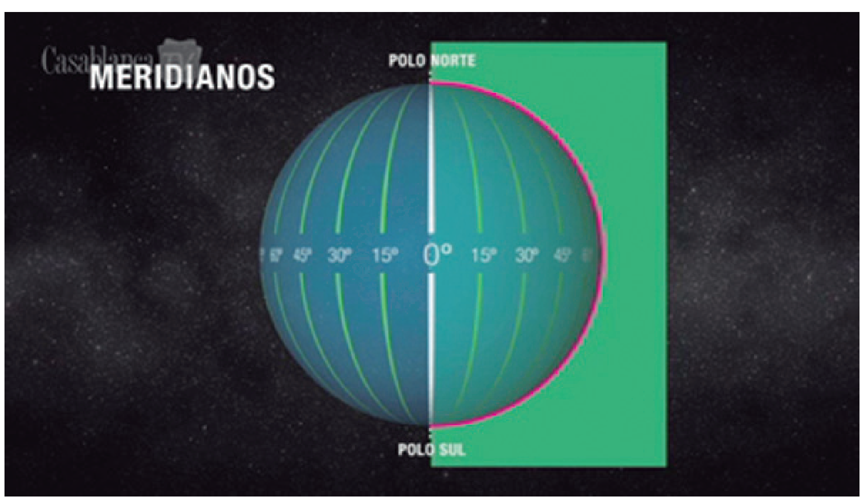
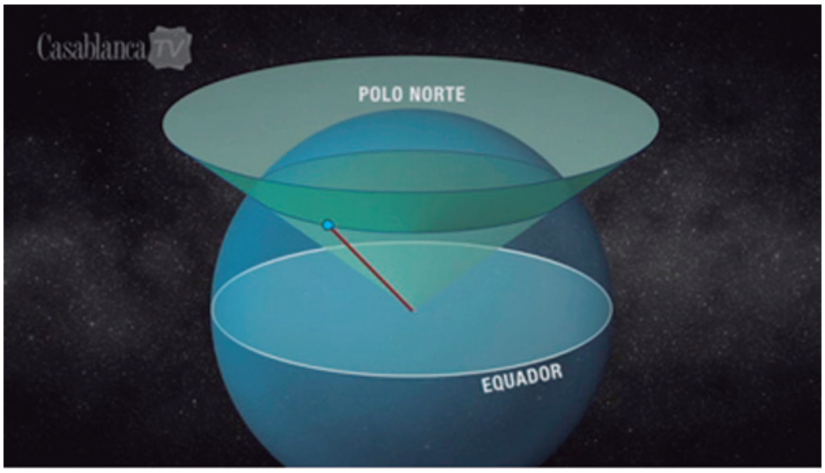


Imagem capturada no vídeo.



É interessante reforçar com os alunos que a determinação na latitude 0 é única, enquanto a escolha da longitude 0 foi uma questão de convenção.

- No item 7, se necessário volte à imagem abaixo e destaque com os alunos o fato de os paralelos darem uma volta completa.



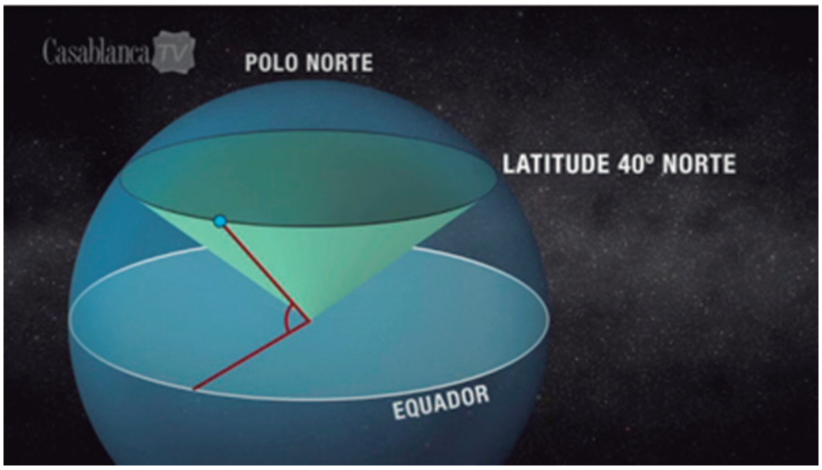
Nesse caso, você também pode mostrar aos alunos que os polos correspondem a 90o.

Caso os alunos tenham dificuldade em perceber essas relações a partir das imagens, você pode lançar mão de um globo terrestre escolar, geralmente utilizado por professores de Geografia. É, portanto, um interessante momento para fazer um trabalho interdisciplinar.

Já para o caso dos meridianos, como eles correspondem a semicircunferências a variação vai de 0o a 180o. O globo terrestre escolar pode ser muito útil para explicar essa diferença em relação aos paralelos. Caso na sua escola não tenha um disponível, você pode usar uma bola de isopor (ou qualquer outra) na qual você possa riscar as linhas.

Não deixe de destacar para os alunos que, se completarmos a volta correspondente ao meridiano de Greenwich, formamos uma circunferência completa que divide a Terra em Oriente e Ocidente.

- Já no item 8, a imagem a seguir pode ajudar os alunos a entenderem por que é necessário indicar o ângulo, bem como o hemisfério correspondente à latitude.



- Finalmente no item 9, os alunos devem perceber que, como Porto Alegre se encontra mais ao sul das quatro cidades citadas nos itens, então a sua latitude é a maior. Por isso, a opção que está em desacordo é o item C, na qual a cidade de Salvador, BA, está na latitude 32o.

Um globo terrestre ou até mesmo um mapa do Brasil pode ajudar os alunos a fazerem essa questão.

Não deixe de conversar com o professor de Geografia da sua escola na busca de um trabalho interdisciplinar. Existem mapas-múndi com a identificação das latitudes e longitudes que podem também ajudar na explicação desses conceitos. Contudo, recomendamos que o globo terrestre seja utilizado, inclusive para comparar com o mapa-múndi, pois, como sabemos, não há planificação para a esfera, bem como para a Terra. Se você tiver a oportunidade de levar para a sala de aula esses dois objetos, poderá ainda falar um pouco sobre o que acontece ao se planificar a Terra – distorção dos polos e dos países mais próximos deles.

Folha de Atividade – Aventuras do Geodetetive

Nome da Escola: ____

Nome dos Alunos: ____

Responda às perguntas, de acordo com o que você assistiu no vídeo.

1. Qual é o nome da linha imaginária que divide o planeta em hemisfério norte e hemisfério sul?

2. A partir dessa linha, quais outras linhas imaginárias são formadas?

3. Para localizar um ponto na superfície terrestre, essas linhas são suficientes? Por quê?

4. Qual é o nome dado às outras linhas utilizadas para a localização na superfície terrestre? (resposta: meridianos ou longitudes)

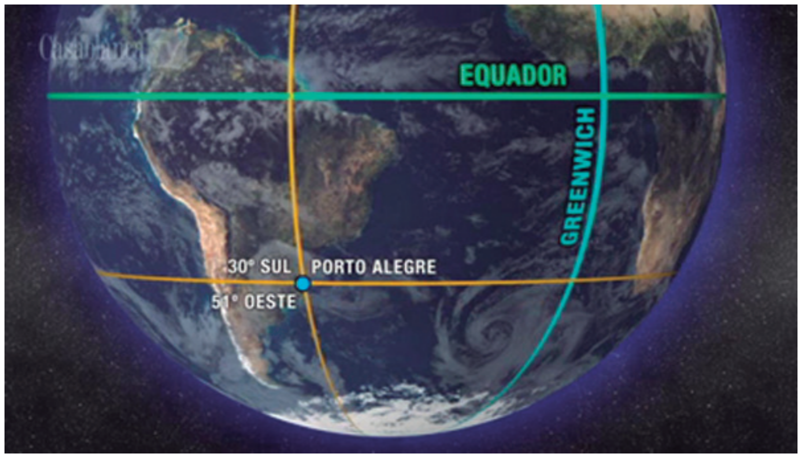
5. Qual o nome dado à linha imaginária do item 4 correspondente ao grau 0?

6. A cidade do Rio de Janeiro está localizada em qual hemisfério: Norte ou Sul? Qual a linha imaginária que orienta essa determinação?

7. Você saberia justificar por que as latitudes variam de 0° a 90° e as longitudes de 0° a 180°? Se necessário, volte a assistir o vídeo.

8. Ao identificar uma latitude, por que é preciso dizer a medida do grau e se foi para Norte ou para Sul?

9. De acordo com o vídeo, a cidade de Porto Alegre fica aproximadamente na latitude 30° ao sul do Equador e na longitude 51° a oeste de Greenwich.



Considerando que Porto Alegre está localizado latitude 30o ao sul do Equador, é incorreto afirmar que:

a. A cidade de Petrópolis, RJ está aproximadamente na latitude 22o ao sul do Equador.

b. A cidade de Rio Branco, AC está aproximadamente na latitude 10o ao sul do Equador.

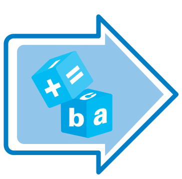
c. A cidade de Salvador, BA está aproximadamente na latitude 32o ao sul do Equador.

d. A cidade de Olinda. PE está aproximadamente na latitude 8o ao sul do Equador.

Seção 2 – Como calcular área e volume de esferas?

Páginas no material do aluno

171 a 177

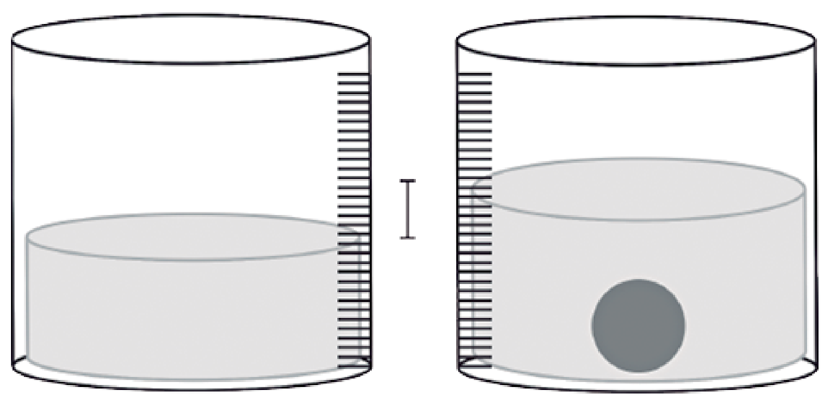
Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando o Volume da Esfera.	Folha de atividades, lápis/caneta, bolas de gude e uma proveta (ou um copo medidor) com água.	O objetivo dessa atividade é aplicar o cálculo de volume de uma esfera a partir de experiências que permitam construir estimativas.	Turma dividida em grupos de quatro alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Essa é uma atividade inspirada no trabalho do professor Antônio Rodrigues Neto que se encontra disponível no site: http://educacao.uol.com.br/planos-de-aula/medio/matematica-como-explorar-o-volume-da-esfera.htm

A atividade consiste em levar para a sala de aula vários objetos esféricos e desafiar os alunos a calcularem o volume desses objetos, e seus respectivos raios. Para isso utilizemos uma proveta com água ou um vasilhame (tipo copo medidor) com marcações de volume na qual as bolinhas serão imersas e a sequência de passos a seguir:

- Coloque um objeto esférico dentro do vasilhame com água de forma que este objeto fique totalmente imerso e verifique o deslocamento do nível da água.



Feito isso, será possível estabelecer um procedimento para o cálculo do volume dessas esferas?

- Peça que cada grupo escreva na folha de atividade o raciocínio que eles usaram para calcular o volume de cada objeto esférico considerado.
- É importante que a proveta tenha um marcador de volume e que sejam colocadas as bolinhas até uma variação de volume que possa ser medida simplesmente olhando as marcas da proveta.
- Após isso, apresente aos alunos a fórmula de cálculo de volume da esfera:

$$v = \frac{4\pi}{3} r3$$

- Peça a todos os grupos que comparem o volume obtido pelo deslocamento do nível da água com a fórmula dada e calculem o raio de cada objeto esférico, aproximando o valor de π para 3,14.

Por exemplo, a diferença do nível foi de 20 ml = 0,02 L = 0,02 dm^3 = 20 cm^3. Então **20 =** $\boldsymbol{v = \frac{4\pi}{3} r3}$

E o raio é igual a 1,68 cm.

- Agora peça para medirem, aproximadamente, o raio da esfera com uma régua e compararem com o resultado obtido através da fórmula.

- Solicite que os alunos organizem-se em grupos de quatro;
- Desafie o aluno a estabelecer uma maneira de calcular o volume de cada objeto esférico, sem precisar recorrer à fórmula do volume da esfera;
- Vale ressaltar que no caso do uso de um copo medidor, a medida é obtida em ml não em centímetros e a comparação é feita a partir do volume de água deslocado e não pela altura do deslocamento.
- Ao final da atividade, promova um debate sobre a atividade baseado nos resultados obtidos, questionando:
    - Como se pode obter o volume do sólido imerso totalmente abaixo do nível da água?
    - O valor aproximado utilizado para π foi satisfatório para o cálculo do raio?

Esperamos que os alunos obtenham valores muito próximos àqueles obtidos pela fórmula, e identifiquem que a diferença obtida se deve aos possíveis erros de medição do raio e de aproximação usada para o valor de π.

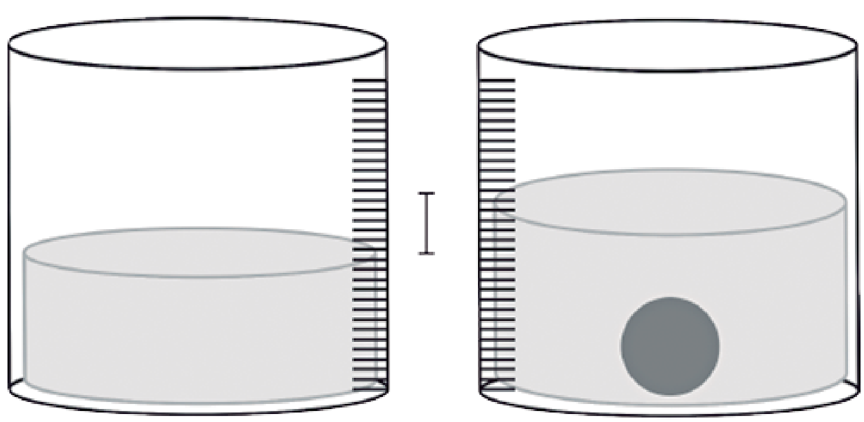
Folha de Atividades – "Explorando o Volume da Esfera"

Nome da Escola:____

Nome: ____

Experimento:

- Coloque um objeto esférico dentro do vasilhame com água e verifique o deslocamento do nível da água em relação ao momento anterior. No caso do copo medidor, verifique a variação do volume.



Feito isso, será possível estabelecer um procedimento para o cálculo do volume de uma esfera sem recorrer à fórmula? Você tem alguma ideia?

Questão 1: Discuta com os seus colegas e tente descrever uma maneira de calcular, o volume de um dos objetos esféricos usados no experimento, por exemplo, o de uma bolinha de gude.

Questão 2: Agora, utilizando a fórmula do volume da esfera, calcule o raio de um objeto esférico utilizado no experimento.

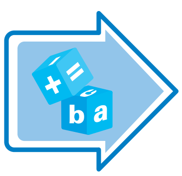
Questão 3: Utilizando a fórmula do volume da esfera e considerando $\pi \cong 3{,}14$, calcule o volume do mesmo objeto esférico analisado na questão 1.

Questão 4: Compare os resultados obtidos nas questões 1 e 3. O que você observa? A partir desses resultados, é possível afirmar que o método proveniente do experimento é eficaz no cálculo do volume?

Seção 2 – Como calcular área e volume de esferas?

Páginas no material do aluno

171 a 177

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Método empírico de determinação do volume da esfera.	Papel-cartão, molde de apoio para construção de sólidos, tesoura, cola, massa de modelar, estilete (é opcional, servindo apenas para ajudar a modelar), recipiente cilíndrico transparente (pode ser um pote de detergente, um copo, etc.), caneta hidrocor, régua e água.	Nessa atividade, os alunos terão a oportunidade de construir, usando massa de modelar, um cone e um cilindro de alturas iguais ao raio de suas bases e uma semiesfera de mesmo raio. Em seguida, após mergulhar os sólidos construídos um a um em um recipiente com água, poderão perceber que a altura que a água sobe para o cone, semiesfera e cilindro são proporcionais a 1, 2 e 3, respectivamente. Dessa forma é possível verificar de maneira experimental as fórmulas de determinação do volume do cone e da esfera a partir do volume do cilindro.	Turma dividida em trios.	40 minutos

Aspectos operacionais

Esta atividade é uma adaptação da atividade “Cilindro = cone + esfera/2?” desenvolvida pelo IME – UNICAMP de autoria das professoras Maria Lúcia Bontorim de Queiroz, Claudina Izepe Rodrigues e Eliane Quelho Frota Rezende, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/experimentos/ExperimentosM3Matematica/cilindro=cone+esfera2/arquivos/cilindro=cone+esfera2---oexperimento.pdf.

Essa adaptação permitiu a elaboração de uma atividade complementar que tem o objetivo de ilustrar a demonstração da fórmula do cálculo do volume da esfera $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, proposta na seção *“Como calcular área e volume de esferas?”* da Unidade 25 do material do aluno (página 50), tornando-a um pouco mais palpável.

Nosso objetivo é levar os alunos a obter as relações que fornecem o volume do cone e o da esfera a partir do volume do cilindro de maneira experimental.

No trabalho "O Método", o matemático grego Arquimedes explora um modo mecânico para investigar problemas da matemática, dentre eles a relação entre os volumes da esfera, do cilindro e do cone. Destaca também a importância de uma demonstração posterior aos resultados obtidos. Sendo assim, no trabalho "Sobre a Esfera e o Cilindro", escrito em dois livros e constituído de cinquenta e três proposições, ele apresenta uma demonstração rigorosa da relação entre os volumes.

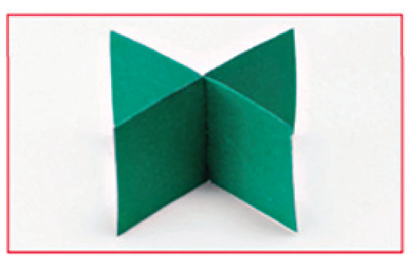
Neste experimento, seus alunos terão contato com uma maneira experimental de verificar que o volume de um cone é igual a um terço do volume de um cilindro de mesmo raio da base e altura, e que o volume de uma esfera é igual a quatro terços do volume de um cilindro cujo raio da base e altura são iguais ao seu raio.

Por ser uma atividade experimental, ela se torna interessante no sentido de que os alunos, por terem um contato manual com os sólidos citados, poderão se lembrar das relações de volume mais facilmente.

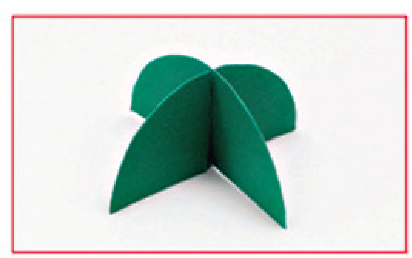
- Divida a classe em grupos e dê um pedaço de papel cartão, uma folha contendo os moldes de apoio para construção dos sólidos (que se encontra disponível para reprodução em arquivo PDF em seu Grid de aula de seu DVD), massa de modelar e um recipiente transparente para cada um.
- Como, inicialmente, serão construídos três sólidos, o ideal é que os grupos sejam compostos por três alunos. Para facilitar a montagem, será usado o molde de apoio que deverá ser transferido para o papel-cartão.
- Oriente seus alunos a realizarem os seguintes procedimentos:

1. Colar os moldes sobre o papel-cartão e, depois, recortá-los;
2. Encaixar as duas partes de cada sólido usando os cortes centrais (conforme ilustração a seguir);

Molde cone



Molde cilindro



Molde semiesfera

3. Com massinha de modelar, construir finalmente os sólidos, usando os moldes anteriores (conforme ilustração a seguir).

Cone

Cilindro

Semiesfera

- Agora, com os sólidos prontos, seus alunos poderão fazer a comparação de seus volumes. Para essa comparação, será necessário o uso de um recipiente cilíndrico transparente (frasco de detergente, por exemplo) com água. Peça aos seus alunos para:

1. Marcar, no recipiente, o nível da água;
2. Mergulhar o cilindro no recipiente e marcar novamente o nível.
3. Retirar o cilindro e voltar a colocar a água no nível inicial.
4. Mergulhar o cone e marcar novamente o nível da água.
5. Retirar o cone e voltar a colocar a água no nível inicial.
6. Mergulhar a semiesfera marcando novamente o nível da água.

- Depois desse experimento, seus alunos terão elementos para observar que os volumes estão em proporções de 1 : 2 : 3 para o cone, semiesfera e cilindro, respectivamente.
- A partir dessa constatação, eles poderão deduzir a expressão do volume da esfera.

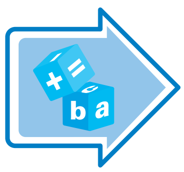
Aspectos pedagógicos

- Professor, depois de lembrar que o volume de água deslocado em cada caso corresponde ao volume de cada sólido mergulhado, chame a atenção para a relação entre os volumes desses sólidos de modo que os alunos possam observar que o volume da semiesfera corresponde a 2/3 e o cone corresponde a 1/3 do volume do cilindro.

- Assim, se a expressão para calcular o volume do cilindro é igual a $\pi r^2 .h$, sendo que para esse cilindro usado no experimento temos h = r, então, a expressão para o cálculo do volume de um cone de mesma altura e mesmo raio da base desse cilindro será $\frac{\pi r^2 .h}{3}$ e a expressão para o cálculo do volume de uma semiesfera de mesmo raio da base do cilindro será $\frac{2\pi r^2 x\, h}{3} = \frac{2\pi r^2 x\, r}{3} = \frac{2\pi r^3}{3}$. Logo a expressão para o cálculo do volume de uma esfera será $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Seção 2 – Como calcular área e volume de esferas?

Páginas no material do aluno
171 a 177

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando a área da superfície esférica.	Folha de atividades, lápis/caneta, calculadora.	Esta atividade tenta contextualizar o estudo da área da superfície esférica através da resolução de uma situação-problema que aborda as bolas dos esportes olímpicos como tema motivador.	Turma dividida em grupos de três ou quatro alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

O objetivo desta atividade é associar as áreas das superfícies esféricas às bolas utilizadas nos esportes olímpicos. Primeiramente apresentamos na forma de problema uma situação que envolve o cálculo da área de superfícies esféricas através do material necessário para a fabricação de diferentes bolas esportivas, em seguida propomos algumas questões baseadas no problema anterior para que possam ser discutidas pelos alunos conforme expostas a seguir:

Situação-problema: Uma fábrica de materiais esportivos prevê um aumento nas vendas dos diferentes tipos de bolas utilizadas nas mais variadas modalidades olímpicas. Para estimar a quantidade e o custo de material que será utilizado no revestimento das mesmas, o setor de produção criou uma planilha de controle.

Esporte	Raio da bola (cm)	Área da superfície esférica (cm^2)	Valor em reais do revestimento (por cm^2)	Custo unitário de produção
Basquetebol	13		R$ 0,02	
Futebol	11		R$ 0,03	
Voleibol	10,5		R$ 0,04	
Handebol	9,5		R$ 0,02	
Polo Aquático	11		R$ 0,05	
Ginástica Rítmica	11		R$ 0,01	
Tênis	3		R$ 0,10	
Tênis de mesa	1		R$ 0,05	

- É interessante que os alunos se organizem em grupos de três a quatro alunos para uma melhor discussão das atividades.
- Distribua uma folha de atividades para cada grupo.

Aspectos pedagógicos

- Professor, oriente os alunos na resolução do problema proposto e no preenchimento da tabela baseando-se nos dados fornecidos.
- É possível que os alunos tenham dificuldades na multiplicação envolvendo números decimais ou os fazem com muita morosidade. Neste caso, oriente-os neste tipo de operação e se preferir, permita o uso de calculadora para agilizar os cálculos.
- É importante que você lembre aos alunos da fórmula da área da superfície esférica, isto é, $A_{\text{superfície esférica}} = 4\pi r^2$.
- Em caso de dúvidas no preenchimento, você pode iniciar completando uma linha da tabela, escolhendo um dos esportes descritos como exemplo.
- Ao final da atividade, promova um debate sobre baseado nos conceitos trabalhados. Esta atividade sugere um trabalho interdisciplinar que pode ser planejado juntamente com o professor de Educação Física. Desta forma, acreditamos que as reflexões sobre os elementos da esfera possam ser enriquecidas.

Folha de Atividades – "Explorando Áreas de Superfícies Esféricas"

Nome da Escola:____

Nome: ____

Situação-problema: Uma fábrica de materiais esportivos prevê um aumento nas vendas dos diferentes tipos de bolas utilizadas nas mais variadas modalidades olímpicas. Para estimar a quantidade e o custo de material que será utilizado no revestimento das mesmas, o setor de produção criou uma planilha de controle.

Baseado nos dados fornecidos, complete corretamente a tabela a seguir:

Esporte	**Raio da bola (cm)**	**Área da superfície esférica (cm²)**	**Valor em reais do revestimento (por cm²)**	**Custo unitário de produção**
Basquetebol	13		R$ 0,02	
Futebol	11		R$ 0,03	
Voleibol	10,5		R$ 0,04	
Handebol	9,5		R$ 0,02	
Polo Aquático	11		R$ 0,05	
Ginástica Rítmica	11		R$ 0,01	
Tênis	3		R$ 0,10	
Tênis de mesa	1		R$ 0,05	

Questões propostas:

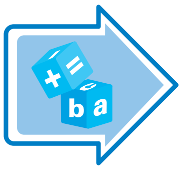
1. Após as comparações das diferentes esferas, é possível concluir que quanto maior o raio, maior a área da superfície esférica. A partir daí, observe e complete a tabela a seguir:

Raio da esfera (cm)	**Área da superfície esférica (cm²)**	**Razão** $\left(\frac{A_{2r}}{A_r}\right)$
1	$A_1 = 4\pi$	$\frac{A_2}{A_1} =$
2	$A_2 = 16\pi$	
4		$\frac{A_4}{A_2} =$
r		$\frac{A_{2r}}{A_r} =$
2r		

2. Baseando-se na terceira coluna da tabela acima, é possível notar que ao dobrar o raio de uma esfera, o que ocorre com a área da superfície esférica?

Seção 3 – Fuso e Cunha

Páginas no material do aluno
177 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Visualizando Cunhas e Fusos Esféricos.	Uma ou duas laranjas grandes e uma faca (sempre com o professor).	Esta atividade visa a apresentar aos alunos o que vem a ser uma cunha esférica e um fuso esférico por meio de cortes realizados em uma laranja grande.	Participação coletiva e registros individuais.	20 minutos

Aspectos operacionais

- Professor, corte uma laranja no sentido meridional, conforme a figura a seguir, no sentido dos gomos, em pelo menos oito partes iguais.
- Você pode instigar os alunos, perguntando se os gomos representam alguma forma geométrica conhecida por eles.

- Aproveite para apresentar as noções de fuso esférico e cunha esférica a partir deste exemplo e explique que as formas desses gomos são chamadas de cunhas esféricas.

- Em seguida, cuidadosamente retire a casca de cada cunha. A superfície externa da casca de cada parte representa um fuso esférico.

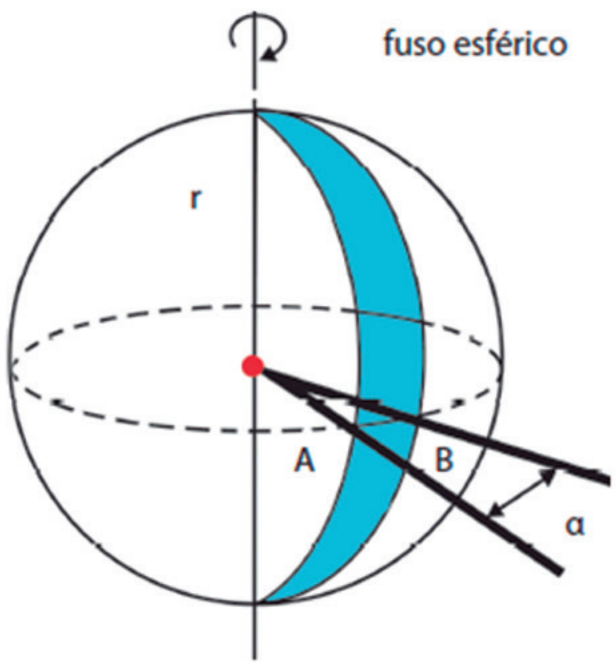
- Você pode destacar que as cunhas esféricas tem volume, pois são sólidos e os fusos esféricos tem área, pois são superfícies.
- Após esta apresentação, você pode conceituar formalmente esses objetos matemáticos de acordo com as explicações sobre volume da cunha esférica e a área do fuso esférico nas pp. 56 a 61 do material do aluno.

Aspectos pedagógicos

- Sugerimos que a manipulação da faca seja feita somente pelo professor, assim acreditamos que podemos evitar acidentes.
- Ao final da atividade, certifique-se de que todos os alunos entenderam as definições de cunho e fuso esférico, estimulando-os a citarem outros exemplos.
- Destaque que cunho esférico tem volume, pois é um sólido, para isso mostre o gomo da laranja.
- Destaque que fuso esférico tem área e não volume, pois este é uma superfície, mostrando, neste caso, a casca do gomo da laranja.
- Aproveite para conceituar de maneira formal esses elementos conforme exposto nas p.p. 59 a 61 do material do aluno.

Fuso esférico:

Fuso esférico é uma parte da superfície esférica cujas extremidades estão nos pólos. Uma definição mais precisa, mais rigorosa, é a superfície obtida pela rotação de α graus ($0° < \alpha < 360°$) de uma semicircunferência em torno do eixo que contém seu diâmetro. Veja na figura



Esfera com fuso esférico destacado

Para calcularmos a área do fuso esférico, devemos fazer uma regra de três que relaciona a área da superfície esférica com o ângulo da superfície esférica, ou seja, quando temos uma superfície esférica sua área é de $4\pi R^2$ e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da superfície esférica então teremos um certo ângulo α e portanto uma área A:

Área -------------- Ângulo (em graus)

$4\pi R^2$--------------- 360°

A --------------------- α

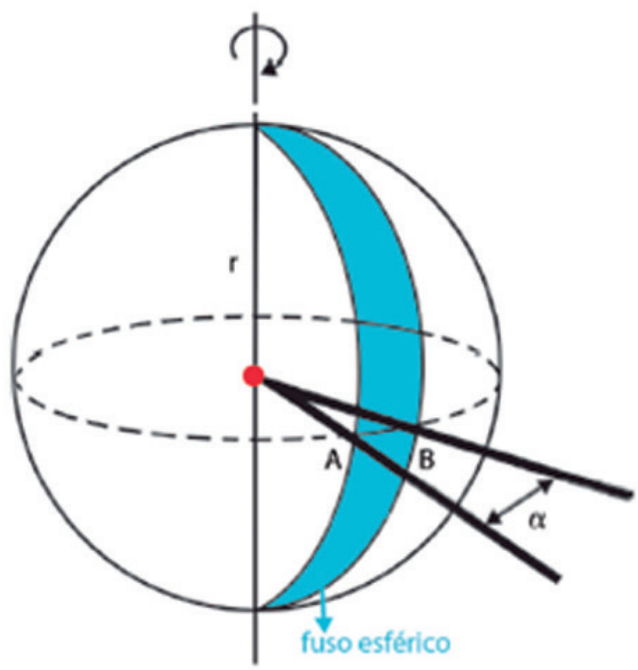
Área---------------Ângulo (em radianos)

$4\pi R^2$--------------- 2π rad

A--------------------- α rad

Cunha esférica:

Cunha esférica é uma parte da esfera cujas extremidades estão nos pólos. Percebam aqui a diferença: o fuso é uma parte da superfície, da casca esférica. Já a cunha é parte da esfera, do sólido. Para definirmos de forma mais rigorosa, podemos dizer que cunha esférica é o nome dado ao sólido obtido pela rotação de α graus (0° < α < 360°) de um semicírculo em torno do eixo que contém o seu diâmetro.



Esfera com cunha esférica destacada

Para calcularmos o volume da cunha esférica devemos fazer uma regra de três que relaciona o volume da esfera com o ângulo da cunha, ou seja, quando temos uma esfera completa seu volume é de e que corresponde a um ângulo de 360°, enquanto se tomarmos apenas uma parte da esfera então teremos um certo ângulo α e portanto um volume V:

Volume ---------- Ângulo (em graus)	Volume-----------Ângulo (em radianos)
$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$ --------------- 360°	$\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3$ --------------- 2π rad
V--------------------- α	V --------------------- α rad

- A partir dessa apresentação, acreditamos que os alunos estejam preparados para realizar as atividades propostas na seção 3 do material do aluno.

Seção – O que perguntam por aí?

Páginas no material do aluno
189 e 190

Tipos de Atividades	**Título da Atividade**	**Material Necessário**	**Descrição Sucinta**	**Divisão da Turma**	**Tempo Estimado**
	Questões de Vestibulares.	Imagem disponível para projeção neste material; material do aluno.		Turma dividida em duplas.	

Aspectos operacionais

Na seção *O que perguntam por aí?*, do material do aluno, as atividades são questões que envolvem a noção de cálculo de volumes. Você poderá trabalhar esta proposta com a imagem disponível neste material e pedir que os alunos discutam e resolvam a seguinte questão proposta:

1) (UFRRJ) Na famosa cidade de Sucupira, foi feito um monumento de concreto com pedestal em forma de uma esfera de raio igual a 5 m, em homenagem ao anti-herói "Zeca Diabo".

O cidadão "Nezinho do Jegue" foi informado de que, apesar de o preço do metro cúbico do concreto ser 260 reais, o custo total do concreto do pedestal, feito com dinheiro público, foi de 500 mil reais. Nezinho do Jegue verificou, então, que houve um superfaturamento:

a) menor que 50 mil reais e) entre 50 e 200 mil reais

b) entre 50 e 200 mil reais

c) entre 200 e 300 mil reais

d) entre 300 e 400 mil reais

e) acima de 400 mil reais

Observação: Considere $\pi \cong 3{,}14$.

Solução:

O volume do pedestal é V = 4/3 x 3,14 x125 , ou seja, V = 523,3 m^3. Como o m^3 custa 260 reais, então 523,3 m^3 custam R$136058,00. Tendo assim um superfaturamento de 500000 – 136058, ou seja, entre 330 e 400 mil reais.

2) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras. O recipiente v1 é um cone, a parte inferior do recipiente v2 é uma semi esfera e a parte superior cilíndrica, e o recipiente v3 é (uma clepsidra?). Representando por V1, V2 e V3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:

a. V1 = V2 = V3

b. V1 < V3 < V2

c. V1 = V3 < V2

d. V3 < V1 < V2

e. V1 < V2 = V3

Solução:

A letra correta é a B, pois, nos três recipientes, a altura é a mesma, mas em V1, a base é menor do que em V2 e em V3. Já comparando V2 e em V3, temos que a altura do cone é igual ao raio da semiesfera, as bases são iguais, mas a área de V2 é calculada por :

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2} \cong \frac{2.3{,}14.R^3}{3} \cong 2{,}09.R^3$$

Já o volume de V3 é calculado por:

$$\frac{1}{3}\pi R^2.R \cong \frac{1}{3}.3,14.R^3 \cong 10,5.R^3$$

(altura é igual a R)

Portanto, V1 < V3 < V2.

Aspectos pedagógicos

- Após a resolução desta questão em aula, você pode promover uma análise coletiva das respostas encontradas pelos alunos, com uma breve discussão a respeito dos possíveis erros (erros mais comuns) por eles cometidos.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Momento de Reflexão.	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a Unidade dividido em duas etapas: registro de aprendizagens e questões tanto objetiva como dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor.	Participação individual dos alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado à Unidade 5. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta Unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades, disponível para reprodução neste material e no material multimídia, as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta Unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões para os alunos, que podem complementar às suas no que tange à avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas:

- Cálculo de Área e Volume de Esferas
- Fuso e Cunha

Sugerimos também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros a serem entregues ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho para, se for o caso, repensá-los de acordo com as características apresentadas.

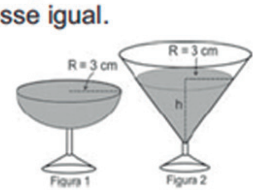
Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Sugerimos nesta etapa, a escolha de, pelo menos, uma questão objetiva que contemple uma habilidade pretendida nesta Unidade para compor o instrumento avaliativo.

Sugestões de questões objetivas para a avaliação:

Questão 1 (ENEM 2010)

Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Considere:

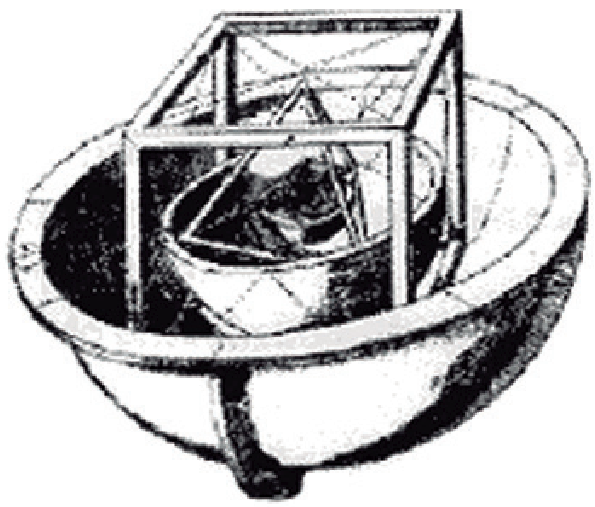
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad e \qquad V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

A) 1,33.
B) 6,00.
C) 12,00.
D) 56,52.
E) 113,04.

Questão 2 (UERJ - 2001)

O modelo astronômico heliocêntrico de Kepler, de natureza geométrica, foi construído a partir dos cinco poliedros de Platão, inscritos em esferas concêntricas, conforme ilustra a figura abaixo:



(LER, J. "*Dissertatio e Narratio*". Turim: Bottega d'Erasmo, 1972.)

A razão entre a medida da aresta do cubo e a medida do diâmetro da esfera a ele circunscrita, é:

a. 3

b. 3/2

c. 1

d. 3/4

Questão 3 (UFSM - 2000)

Bolas de tênis são vendidas, normalmente, em embalagens cilíndricas contendo 3 unidades.

Supondo-se que as bolas têm raio a em centímetros e tangenciam as paredes internas da embalagem, o espaço interno dessa embalagem que NÃO é ocupado pelas bolas é, em cm^3

a. $2\pi a^3$

b. $\dfrac{4\pi a^3}{3}$

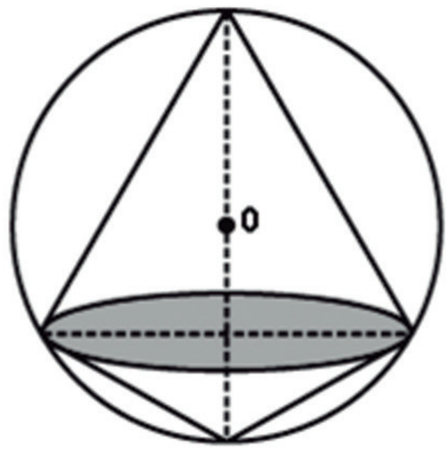
c. $\dfrac{\pi a^3}{3}$

d. a^3

e. $\dfrac{2\pi a^3}{3}$

Questão 4

A intersecção de um plano com uma esfera de raio R é a base comum de dois cones circulares retos, como mostra a região sombreada da figura a seguir.



Se o volume de um dos cones é o dobro do volume do outro, a distância do plano ao centro O é igual a:

a. R/5

b. R/4

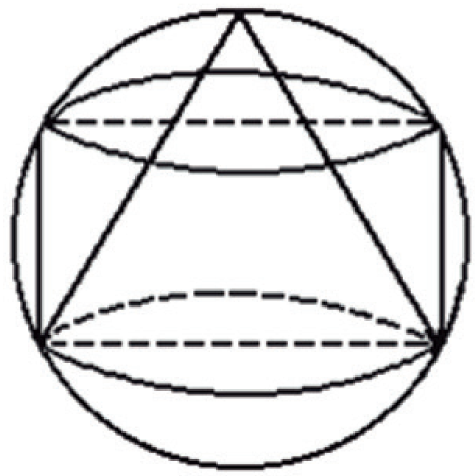
c. R/3

d. 2R/5

e. 2R/3

Questão 5 (UFMG - 1994)

Observe a figura.



Nessa figura, um cone reto e um cilindro de bases comuns estão inscritos em uma esfera. O volume do cilindro é igual ao volume do cone.

A distância do centro da esfera à base comum, em função da altura H do cone, é

a. H/2

b. H/3

c. H/4

d. H/5

e. H/6

Respostas das questões objetivas sugeridas

1 (B)

2 (C)

3 (A)

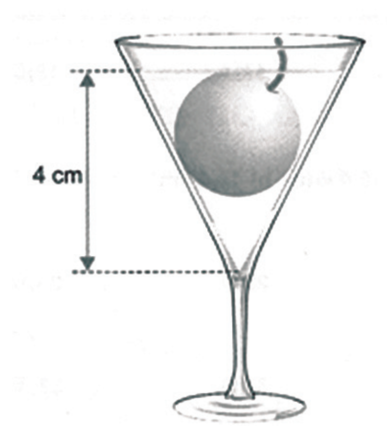
4 (C)

5 (E)

Sugestões de questões discursivas para a avaliação

Questão 1

Um cálice com a forma de um cone mantém V cm^3 de uma bebida. Uma cereja de forma esférica, com diâmetro 2cm, é colocada dentro do cálice, supondo que a cereja repousa apoiada nas laterais do cálice, e o líquido recobre exatamente a cereja a uma altura de 4cm a partir do vértice do cone, determinar o valor de V.



Questão 2

Duas esferas de chumbo, uma de 3 cm e outra de 6 cm de raio, fundem-se e formam outra esfera. Calcule o raio dessa nova esfera.

Questão 3

Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio 0,5 cm podemos fazer a partir de um brigadeiro de raio 1 cm?

Questão 4

Qual a área da superfície da esfera, cuja secção meridiana tem 10 m^2 de área?

Questão 5

Calcular a área de um fuso esférico de uma esfera de raio 3 cm, sendo de 60^o o seu ângulo equatorial:

Respostas e comentários das questões discursivas sugeridas

Questão 1: $4\pi / 3$

Questão 2: $\sqrt[3]{243} \sim 6{,}24$

Questão 3: 8 brigadeiros

Questão 4: 40 m^2

Questão 5: $6\pi cm^2$

Folha de Atividades – Momento de Reflexão

Nome da Escola: ____

Nome: ____

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas na Unidade 5 e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta Unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder às questões a seguir:

Questão 1: Qual foi o assunto estudado nesta Unidade? Cite alguns conceitos matemáticos explorados neste assunto.

____

____

Questão 2: Cite seis exemplos de objetos do cotidiano que representam objetos esféricos e classifique-os em esfera ou superfície esférica.

____

____

____

____

Questão 3: Baseado nas atividades desenvolvidas, tente descrever a diferença entre esfera e superfície esférica.

____

____

____

____

Questão 4: Baseado nas atividades desenvolvidas, descreva o que você entendeu por fuso esférico e cunha esférica. Cite as diferenças entre esses objetos matemáticos.

____

____

____

Atividade Complementar

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios de Fixação Complementares.	Folha de Atividades disponível para reprodução no Grid de aula do "DVD do professor", lápis/caneta.		Turma dividida em duplas ou em trios.	

Aspectos operacionais

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação dos elementos da esfera, bem como as expressões de sua área superficial e volume, trabalhadas ao longo dessa Unidade tanto no material do aluno quanto nas atividades sugeridas neste material. Com esses exercícios você, professor, terá a oportunidade de fixar os conceitos de centro, raio e diâmetro da esfera, casca esférica e sua área, círculo máximo e volume da esfera.

Esses exercícios foram distribuídos em uma "Folha de atividades" – que se encontra disponível para reprodução no material multimídia do professor – que poderá ser aplicada de forma fracionada ao término de cada seção do material do aluno ou de uma só vez no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados.

- Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo no seu material multimídia.
- Peça que os alunos organizem-se em duplas ou em trios. Mas procure distribuir uma folha de atividades para cada aluno para que todos possam ficar com uma cópia do material, tornando-o mais uma fonte de consulta.

Aspectos pedagógicos

- Escolha previamente quais os exercícios se adéquam melhor à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos na Unidade 5.
- Depois dos alunos concluírem o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, procure discutir as soluções apresentadas pelos alunos, valorizando cada estratégia mesmo que esta não tenha o conduzido a uma resposta verdadeira.
- Procure incentivar os alunos a executar tais exercícios sem a sua intervenção, enquanto professor. Esses exercícios podem favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

Folha de Atividades – "Exercícios de Fixação Complementares "

Nome da Escola: ____

Nome: ____

1. Determine o volume de uma esfera de raio 9 cm. (Obs.: considere $\pi = 3{,}14$)

2. Considere que o diâmetro de uma determinada esfera mede 10 cm. Considerando $\pi = 3{,}14$, determine:

   a. a área de sua superfície ou casca esférica.

   b. a área de um de seus círculos máximos.

   c. o seu volume.

3. O volume de uma esfera é 288π cm^3. Calcule:

a) a área de um círculo máximo dessa esfera.

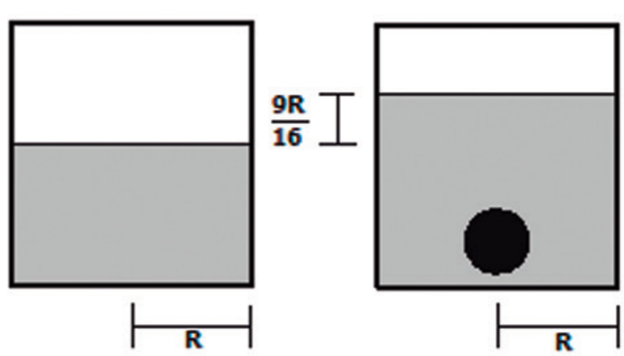
b) a que distância do centro da esfera deve estar uma secção para que sua área seja a metade da área de um círculo máximo.

4. Considere a Terra como uma esfera de raio 6.370km. Qual é sua área superficial? Descubra a área da superfície coberta de água, sabendo que ela corresponde a aproximadamente 3/4 da superfície total.

5. Uma esfera está inscrita num cubo cuja aresta mede 20 cm. Calcule a área da superfície esférica.

6. Um plano secciona uma esfera de raio 5 cm, segundo um círculo de área 9π cm^2. Determine a distância do plano da secção ao centro da esfera.

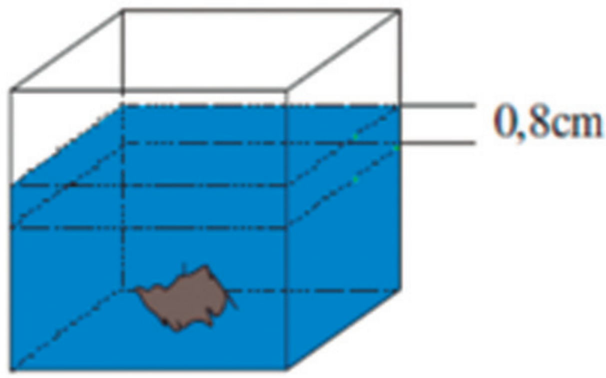
7. Duas esferas de chumbo, uma de 3 cm e outra de 6 cm de raio, fundem-se e formam outra esfera. Calcule o raio dessa nova esfera.



8. (Cesgranrio) Um tanque cilíndrico com água tem raio da base **R**. Mergulha-se nesse tanque uma esfera de aço e o nível de água sobe 9R/16 (vide figura). Qual a medida do raio da esfera?

Quantos brigadeiros (bolinhas de chocolate) de raio 0,5 cm podemos fazer a partir de um brigadeiro de raio 1 cm?

9. Um aquário tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e contém água até uma certa altura. As medidas internas da base do aquário são 40cm por 25cm. Uma pedra é colocada dentro do aquário, ficando totalmente submersa e fazendo com que o nível da água suba 0,8cm. Qual é o volume dessa pedra?



Respostas da Folha de Atividades – Exercícios Complementares

1. 3052,08 cm^3
2. a) 100π cm^2 ou 314 cm^2 b) 25π cm^2 ou 78,5 cm^2 c) $\frac{500\pi}{3}$ cm2 ou, aproximadamente, 523,33 cm2
3. a) $36\ \pi$ cm^2 b) $3\sqrt{2}$ cm^2
4. $162307600\ \pi$ km^2 ; $121730700\ \pi$ cm^2.
5. $400\ \pi$ cm^2
6. 4 cm
7. $3\sqrt[3]{9}$ cm
8. $\frac{3}{4}R$
9. 8 brigadeiros
10. 800 cm^3