

Análise Combinatória 1

André Luiz Cordeiro dos Santos, Gabriela dos Santos Barbosa, Josemeri Araujo Silva Rocha (coordenadora) e Luciane de Paiva Moura Coutinho

Introdução

A parte inicial da unidade 1 do material do aluno traz situações cotidianas que envolvem o conceito de Análise Combinatória. São usados como exemplos as possibilidades de criação de senhas, de escolha de roupas, os possíveis resultados de um lançamento de dados, etc.

Com o intuito de ampliar as opções de exploração do tema em suas aulas, preparamos para você um material complementar. A ideia é que os recursos e atividades apresentados sejam utilizados para enriquecer a abordagem dos objetivos do módulo do aluno, que rerepresentamos a seguir:

- Calcular o fatorial de números naturais;
- Utilizar o princípio fundamental da contagem;
- Calcular permutação simples;

A nossa sugestão é que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora e, para isso, trazemos quatro propostas. Na atividade “Mudando o celular”, os alunos lerão dois textos relacionados ao acréscimo de um dígito no número de celular e, em seguida, farão uma correlação entre esse assunto e o tema Análise Combinatória. Já na atividade “Caixeiro viajante”, os alunos ouvirão um áudio relacionado ao problema do caixeiro viajante e deverão ordenar percursos possíveis para três cidades fictícias. A atividade “A cartomante”, começa com os alunos assistindo a um vídeo em que uma cartomante usa a análise combinatória para explicar seu ofício à sobrinha. Em seguida, eles deverão fazer uma síntese, destacando as principais características e diferenças entre arranjo, permutação e fatorial. Além disso, há também a atividade “Jogo combinatório”, em que os alunos farão, de maneira intuitiva, atividades online relacionadas aos conceitos de arranjo, permutação e combinação. Escrevemos, ainda, a atividade “Apresentando a história da Análise Combinatória”, que convida os alunos a fazerem uma apresentação no Power Point a partir de uma pesquisa sobre a história da Análise Combinatória.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, também vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. É muito importante que você faça alterações e adaptações nestes recursos sempre que julgá-las necessárias.

A seção 1 é contemplada pela atividade “De malas prontas”, elaborada a partir de um vídeo que mostra um funcionário de uma empresa aérea utilizando conceitos combinatórios para ajudar Raquel a colocar suas roupas na mala. Temos, também, a atividade “Memória dos Fatoriais”, cuja ideia central é a mesma do jogo da memória tradicional. Porém, as cartas que formam pares não são as idênticas, mas as que correspondem a diferentes representações para expressões numéricas envolvendo fatoriais.

Para a seção 2, propomos a atividade O princípio multiplicativo e os modos de se vestir, que permite a resolução de problemas relacionados ao princípio multiplicativo e a atividade Uma encenação para o princípio multiplicativo, em que os alunos são convidados a escrever e a encenar uma peça de teatro que envolva a tomada de decisões sucessivas e a contagem das maneiras como isso pode se dar.

Na seção 3, temos a atividade “Fotografando permutações”, que convida os alunos a refletir sobre as diversas maneiras que um grupo de 5 pessoas tem de se organizar para tirar uma fotografia lado a lado. Temos também a atividade “As permutações num passeio de automóvel pelo Rio”, onde os alunos poderão vivenciar as várias maneiras de que um grupo de 5 pessoas dispõe para se acomodar num automóvel de 5 lugares.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro dedicado a uma revisão geral do estudo realizado durante esta unidade, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o processo. Já o segundo momento consiste numa avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

Uma descrição destas sugestões está colocada nas tabelas a seguir, e seu detalhamento no texto que segue.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	1	4	1	4 aulas de 2 tempos

Título da unidade	Tema
Análise Combinatória 1	Análise Combinatória
Objetivos da unidade	
Calcular o fatorial de números naturais	
Utilizar o princípio fundamental da contagem	
Calcular permutação simples	
Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	5 e 7
Seção 1 – Fatorial de um número	7 a 9
Seção 2 – Princípio Fundamental da Contagem	9 a 18
Seção 3 – Permutação simples	18 a 21
Resumindo	21
Veja ainda...	22
O que perguntam por aí?	25 a 26

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

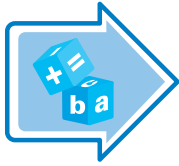
Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes

à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.



Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.



Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



Avaliação


Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.



Exercícios

Proposições de exercícios complementares

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Mudando o celular	Computador com Datashow e acesso à internet	Os alunos lerão dois textos relacionados ao tema Acréscimo de um dígito no número de celular e, em seguida, farão uma correlação entre esse assunto e o tema Análise Combinatória	Grupos de 4 alunos	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, projete para a turma os textos que estão nos endereços a seguir. Peça para que seus alunos o leiam. Sugerimos uma leitura coletiva, onde cada aluno pode ler uma parte do texto. Os endereços são <http://www.anatel.gov.br/Portal/exibirPortalNoticias.do?acao=carregaNoticia&codigo=27685e> e <http://www.brasil.gov.br/infraestrutura/2012/07/acrescimo-de-um-digito-em-numeros-de-celulares-de-sao-paulo-vai-dobrar-capacidade>

Após a leitura, peça a seus alunos para destacarem nos textos apresentados os trechos onde identificaram a presença de temas relacionados à análise combinatória.

Aspectos pedagógicos

Professor, essa atividade tem três objetivos. O primeiro é abordar o assunto Análise Combinatória de maneira introdutória e correlacionada ao cotidiano. O segundo é ressaltar a importância da leitura de jornais, revistas, reportagens em internet, etc., mostrando que o incentivo, o resgate e o estímulo à leitura não devem se restringir às matérias de linguagens e códigos, mas ocupar um espaço de destaque também nas matérias de ciências exatas e da natureza. A leitura de textos diários, de certo, permite ressaltar de maneira natural a relação entre a Matemática e os assuntos do cotidiano.


Outro objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos consigam perceber, nos textos dados, a análise combinatória entrelaçada com um assunto corriqueiro. É importante verificar se a turma, após a leitura, conseguiu perceber que a inclusão de um novo dígito vai ajudar a resolver o problema, uma vez que gerará uma gama de novos números. Caso os alunos não consigam perceber essa situação, tente dar exemplos, como o que apresentamos a seguir:

Imagine o número fictício 8456 – 7867. Com a nova determinação ele viraria 98456 – 7867, o que, aparentemente, não geraria novas alternativas. Mas alerte aos alunos que, ao adicionar o número 9 como primeiro dígito,

poderemos gerar o número 93546 - 7810, que seria a versão nova do número 3546 - 7810, característico de uma linha fixa. A mesma coisa valeria para os números que começassem por 2, 4 e 5. Você pode pedir aos alunos que pensem, a partir do texto 2, em outros exemplos de números que estariam impossibilitados de serem usados e que, com essa mudança, ficariam disponíveis para a utilização.

Nesse momento, não é conveniente que se faça o cálculo para saber o número de telefones a mais que poderão ser gerados com esse acréscimo. Você pode pedir apenas para que os alunos imaginem ou tentem criar alternativas para chegar ao resultado, deixando o cálculo em aberto e retornando a esse assunto nas seções posteriores.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Caixeiro viajante	Computador com Datashow e acesso à internet	Os alunos ouvirão um áudio relacionado ao problema do caixeiro viajante. Em seguida, eles deverão ordenar percursos possíveis para 3 cidades fictícias	Grupos de 4 alunos	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, primeiramente reproduza o áudio disponível em <http://www.uff.br/sintoniamatematica/grandestemaseproblemas/grandestemaseproblemas-html/audio-caixeiro-br.html>. Peça, então, para que os alunos se dividam em grupos. Em seguida, peça para que cada grupo crie 3 cidades fictícias, liste e ordene as maneiras possíveis de percorrê-las.

Aspectos pedagógicos

Professor, os alunos sempre se sentem muito motivados quando relacionamos o estudo da Matemática a grandes temas e problemas, mesmo aqueles que ainda não foram resolvidos. Quem sabe, com essa nossa atividade, estaremos estimulando grandes talentos, como o matemático Andrew Wiles? Wiles, que resolveu o último Teorema de Fermat, foi apresentado ao problema quando ainda estava na escola e, apesar de muito jovem, fez da resolução desse problema um objetivo de vida. Caso a turma se interesse, que tal propor um seminário abordando esses temas interessantes? Você pode encontrar mais alguns temas em <http://www.uff.br/sintoniamatematica/grandestemaseproblemas/grandestemaseproblemas-html/grandestemaseproblemas-br.html> ou recomendar ainda a leitura de O Último Teorema de Fermat, escrito por Simon Singh e publicado pela Editora Record.


Em relação à Análise Combinatória, neste problema introdutório, podemos fazer uma permutação simples ainda de maneira intuitiva, sem a necessidade de definir permutação ou a apresentação de fórmulas. Essa forma de resolução prévia de um problema sem a apresentação da metodologia tradicional permite ao aluno criar suas próprias estratégias. Isso ajuda - e muito! - a desmistificar o assunto.

É importante verificar se os alunos, ao criarem as cidades fictícias A, B e C, conseguiram montar os 6 seguintes percursos:

A - B - C, A - C - B, B - A - C, B - C - A, C - A - B e C - B - A.

Como estratégia, você pode montar uma árvore de possibilidades para facilitar a visualização do resultado pela turma.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	A cartomante	Computador com Datashow e acesso à internet.	Os alunos assistirão a um vídeo em que uma cartomante usa a análise combinatória para explicar sua atividade à sobrinha. Em seguida, os alunos deverão fazer uma síntese destacando as principais características e diferenças entre os conceitos de permutação, arranjo e combinação	Grupos de 4 alunos	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, essa atividade será composta por 3 etapas:

1a etapa: Primeiramente, exiba o vídeo disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1065>.

2a etapa: Após a exibição, peça para que os grupos façam uma breve síntese sobre os conceitos de:

- Permutação;
- Arranjo;
- Combinação

As sínteses devem destacar as principais diferenças entre as três situações e os casos em que podemos utilizá-las.

3a etapa: Por fim, peça para que cada grupo apresente para a turma as definições elaboradas.

Aspectos pedagógicos


O objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos pesquisem previamente o conteúdo que será aprofundado nas seções seguintes. Dessa maneira, nas futuras aulas, o aprendizado poderá ser realizado em parceria, em vez de consistir numa via única do professor para o aluno. Além disso, pretende facilitar o entendimento da Análise Combinatória de maneira teórica.

Por isso, na pesquisa é importante que os alunos destaquem:

- . Arranjo: Arranjo de p elementos, n a n , é o número de conjuntos de n elementos que se pode fazer com os p elementos. Nesses conjuntos, a ordem dos elementos é importante. Por exemplo, nas situações em que 10 corredores disputam o 1o, 2o e 3o lugares.
- . Permutação: Permutação de p elementos é o número de arranjos que se pode fazer com esses p elementos, trocando a ordem deles. Por exemplo, nas situações em que 3 corredores disputam o 1o, 2o e 3o lugares.
- . Combinação: Combinação de p elementos, n a n , é o número de conjuntos de n elementos que se pode fazer com os p elementos. Nessa situação, a ordem desses elementos nos conjuntos formados não é importante. Por exemplo, formar grupos de 8 estudantes em uma turma de 40 alunos.

Nesse momento, é importante que os alunos compreendam as definições de arranjo, permutação e combinação não só para perceberem as semelhanças e diferenças entre elas, mas também para entenderem em quais situações cada uma delas deverá ser utilizada. Não é fundamental, pelo menos por enquanto, a apropriação de fórmulas.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Jogo combinatório	Computador com Datashow e acesso à internet / Laboratório de informática	Os alunos farão, de maneira intuitiva, atividades online relacionadas a arranjo, permutação e combinação	Duplas ou conforme a disponibilidade de computadores na escola	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, divida a turma em duplas ou conforme a disponibilidade de computadores do laboratório de informática de sua escola. Caso não seja possível utilizar o laboratório de sua escola, projete as imagens do computador com o Datashow e vá discutindo com a turma as possíveis respostas para cada desafio. Permita que eles façam suas colocações, indague-os quanto ao que está sendo proposto.

Peça para os alunos acessarem o endereço <http://sites.unifra.br/rived/ObjetosPedagógicos/Matemática/tabid/428/language/pt-BR/Default.aspx>

A atividade está dividida em 3 etapas:

1ª etapa: Primeiramente, peça para que os alunos cliquem na atividade relacionada a arranjo. Em seguida, peça para clicarem em Atividades e depois levarem o cursor até o Banco Dindin, clicando sobre a porta. Agora, basta que eles respondam a questão proposta.



Quantas senhas de 3 algarismos distintos você poderá formar com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4?

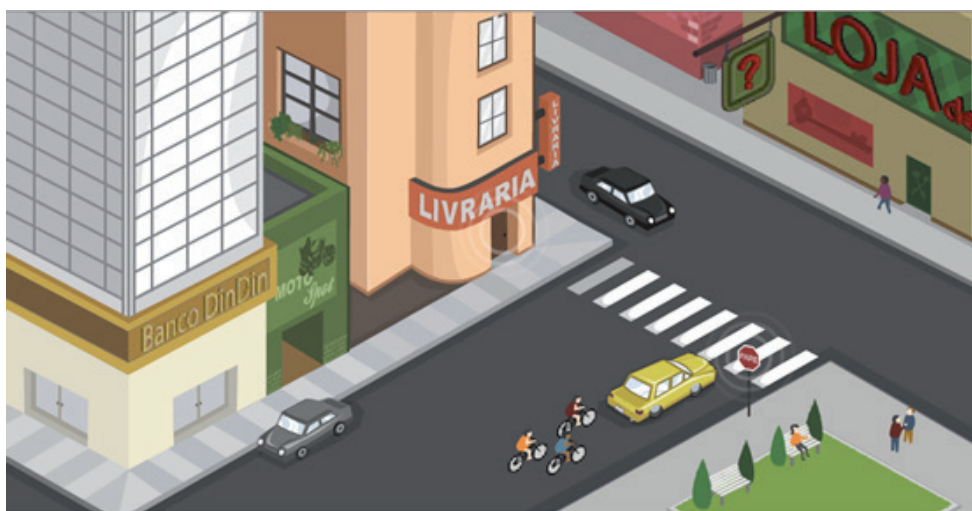
A dupla ou grupo pode continuar explorando os problemas que surgem pela cidade, clicando em cima dos pontos sinalizados, como no carro amarelo, por exemplo.

2ª etapa: Em seguida, peça para que os alunos cliquem na atividade relacionada à combinação. Oriente os alunos a clicarem em Atividades e depois, na seta para começar o jogo. Peça para que os alunos cliquem nos ciclistas e respondam a questão proposta.



Quantas duplas diferentes você poderá formar com um grupo de 6 ciclistas?

3ª etapa: Por fim, peça para que os alunos cliquem na atividade relacionada à permutação. Oriente os alunos a clicarem em Atividades e depois na seta para começar o jogo. Peça para que os alunos cliquem na placa "Pare e respondam a questão proposta".

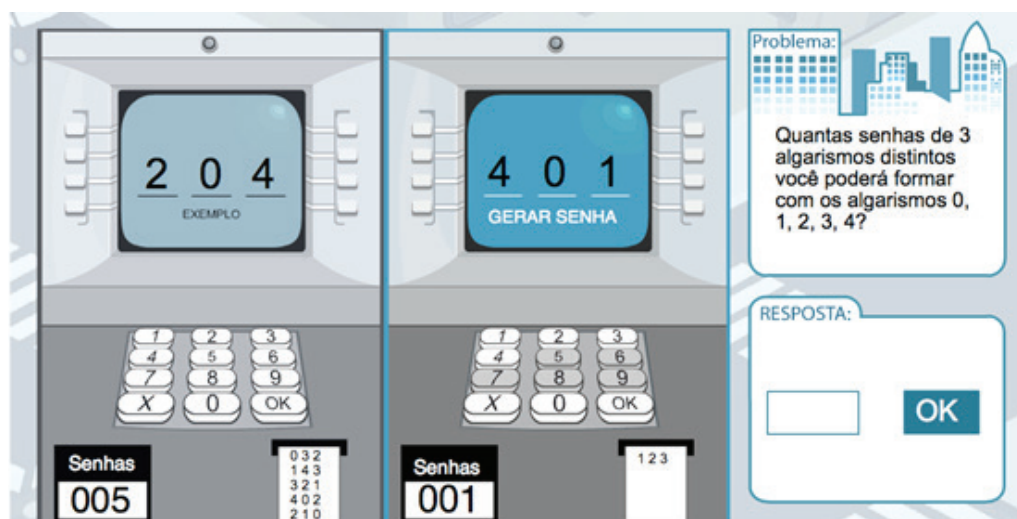


Quantos anagramas são formados com a palavra "Pare"?

Aspectos pedagógicos

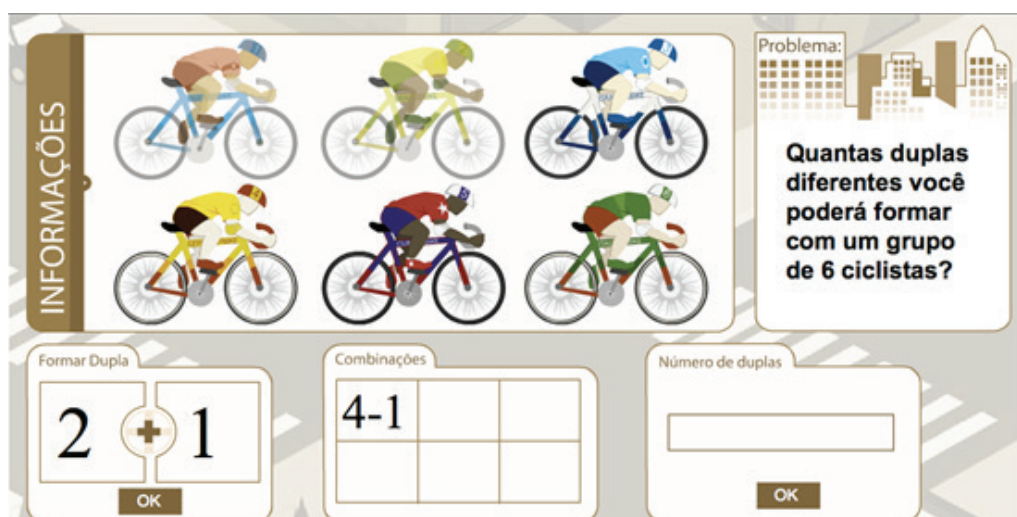
As atividades disponíveis no endereço que sugerimos permitem a resolução de problemas relacionados a arranjo, permutação e combinação sem a utilização de fórmulas. Isso funciona, novamente, como uma prévia do conteúdo e permite que os alunos se familiarizem com os assuntos das próximas seções, facilitando o entendimento da Análise Combinatória de maneira prática.

Esses exercícios funcionam de maneira bem lúdica, uma vez que é possível que os alunos gerem, na 1ª atividade, exemplos de senhas de banco.



Alguns exemplos vêm explicitados no canto esquerdo e o aluno usar o teclado do jogo para gerar outras senhas, como foi feito no exemplo acima foram geradas 123 e 401. Quando o aluno encontrar a resposta e quiser saber se acertou, é só colocar no espaço reservado e dar ok.

Já na atividade 2, é possível formar as várias duplas de ciclistas.




Cada ciclista tem um número que vai de 1 a 6. Ao clicar nos ciclistas, os números aparecem no quadro formar dupla, como no exemplo acima (foram geradas duplas com os ciclistas 1 e 4 e com os ciclistas 1 e 2). Quando o aluno souber o resultado, basta colocar o valor no quadro destinado ao número de duplas e dar ok. Você pode aproveitar e pedir para que os alunos pensem e concluam que a dupla 2-1 corresponde à mesma dupla 1-2.

Por fim, é e criar possíveis placas ao permutar as letras na 3a atividade.



Nessa atividade, basta arrastar as letras e ordená-las na nova placa. Na imagem usada como exemplo, foi gerada a placa AERP e está sendo gerada a placa ARPE. Quando o aluno souber o resultado, basta colocar o valor no quadro destinado a respostas e dar ok.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Apresentando a história da Análise Combinatória	Os alunos farão uma apresentação sobre a história da Análise Combinatória	A atividade propõe um jogo de bingo, onde serão estudadas algumas propriedades e operações com logaritmos.	Grupos de 4 alunos	40 minutos

Aspectos operacionais

Divida a turma em grupos de 4 alunos e peça para que cada grupo escolha um dos temas a seguir. Se achar mais conveniente, faça um sorteio. Os temas podem se repetir, dependendo do número de alunos que você tem na turma.

1. Arquimedes
2. Niccolo Tartaglia
3. Girolamo Cardano
4. Pierre Fermat e Blaise Pascal
5. Gian Carlo Rota

Em seguida, vá para o laboratório de informática da escola e peça para que os grupos pesquisem de forma sucinta a vida e as contribuições desses Matemáticos para análise combinatória.

Peça para que os alunos montem 3 apresentações no Power Point com:

- Vida
- Contribuições para a análise combinatória
- Fontes

Peça para que os alunos enviem para o seu email as apresentações. Faça uma correção do português e das informações e monte um único arquivo com as pesquisas. Faça um slide de introdução e um de finalização, com as fontes pesquisadas. Insira também um slide os nomes dos alunos (divididos por grupos) e o tema que cada grupo pesquisou.

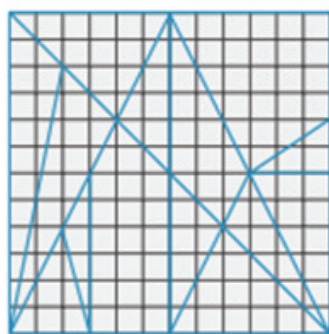
Exiba o resultado final para a turma. Se a escola tiver site ou blog, você também pode disponibilizar o resultado por lá.

Alguns alunos podem encontrar dificuldades em montar as apresentações no Power point por falta de habilidade com o software. Neste caso, para que o resultado final da turma seja homogêneo, peça a todos que façam o trabalho em cartolina. Organize uma exposição com esse material.

Aspectos pedagógicos

É importante que as pesquisas realizadas pelos alunos façam referência aos seguintes aspectos.

- A análise combinatória surge da necessidade de cálculos seguros para jogos de azar.
- Arquimedes (Grego, 287 a.C. - 212 a.C.). Elaborou o Stomachion, aparentemente um jogo constituído de quatorze peças que devem ser encaixadas para formar um quadrado.



Stomachion


Em dezembro de 2003, o historiador de Matemática Reviel Netz publicou um trabalho afirmando que o Stomachion não era um mero passatempo, mas um objeto desenvolvido por Arquimedes para fins de Análise Combinatória.

- Niccolo Tartaglia (Italiano, 1500-1557) foi um dos primeiros a desenvolver estudos sobre o número de combinações possíveis para um determinado fenômeno. Elaborou uma tabela contendo o número de combinações possíveis no lançamento de dois dados.
- Girolamo Cardano (Italiano, 1501-1576) fez estudos importantes sobre jogos de azar. Além de contribuir com elementos básicos ao cálculo de probabilidades, Cardano desenvolveu mais profundamente as técnicas de contagem de combinações.
- Blaise Pascal (Francês, 1623-1662) e Pierre de Fermat (Francês, 1601-1665) desenvolveram em seus trabalhos teorias de contagem que vieram representar as primeiras grandes sistematizações da Análise Combinatória e constituíram bases do estudo probabilidades.
- Gian Carlo Rota (Italiano naturalizado nos Estados Unidos, 1932 - 1999) ajudou a formalizar o estudo da Análise Combinatória.

Seção 1 – Fatorial de um número

Páginas no material do aluno

7 a 9

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	De malas prontas	Cópias da folha de atividades, computador com Datashow e acesso à internet, cartolina, calculadora, caneta pilot	Os alunos assistirão a um vídeo, que mostra um funcionário de uma empresa aérea utilizando conceitos de análise combinatória para ajudar uma passageira a fazer a mala. Depois de assistir o vídeo, a turma irá elaborar um cartaz com cálculos fatoriais	Grupos de 4	25 minutos

Aspectos operacionais

Exiba o vídeo disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1083> . Sugira aos grupos que realizem os seguintes cálculos fatoriais. Se achar conveniente, peça que os alunos utilizem calculadora, que pode ser a do celular.

1! 2! 3! 4! 5! 6! 7! 8! 9! 10!

Em seguida, peça para que a turma organize um cartaz com os cálculos realizados e exponha esse cartaz na sala de aula. Isso facilitará a realização dos próximos exercícios.

Aspectos pedagógicos

Professor, o cálculo fatorial é importante para o estudo da Análise Combinatória. Por isso, antes da atividade, você pode começar definindo fatorial de um número n , representado por $n!$, como o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a n e fazer um exemplo para a turma.

Exemplo: Calcular $12!$

$$12! = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 479\,001\,600$$

Se for necessário, faça outros exemplos. Em seguida, peça para os grupos fazerem os cálculos. Se encontrarem dificuldades neste processo, poderão usar a calculadora.

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$$

$$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$$

$$9! = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362\,880$$

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,628\,800$$


Mostre a eles que, se respeitarem a ordem dada, o cálculo de um dado fatorial ficará facilitado pelo cálculo do exemplo anterior.

Na elaboração do cartaz (que poderá ser um único por turma) peça bastante capricho, uma vez que sua exposição em sala facilitará os cálculos necessários para a resolução dos problemas das próximas seções. A organização do cartaz pode ser feita de acordo com a sugestão dos alunos, mas é possível sugerir os números de cores diferentes (todos os 1 com a mesma cor, os 2 com outra cor, etc) e os resultados em preto. Serão necessárias 11 cores distintas.

Seção 1 – Fatorial de um número

Páginas no material do aluno

7 a 9

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Memória dos fatoriais	Um conjunto de cartas para cada dupla, feitas a partir do modelo disponibilizado no pendrive / DVD	Nesta atividade, a ideia é a mesma do jogo da memória tradicional, porém as cartas que formam pares não são as idênticas, mas as que correspondem a diferentes representações para expressões numéricas que envolvem.	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

Semelhantemente ao que foi proposto em outras unidades, recomendamos aqui um jogo da memória. Como mencionamos nas ocasiões anteriores, no jogo da memória tradicional, os participantes arrumam as cartas viradas sobre a mesa, de modo que não seja possível ver o que está desenhado ou escrito em cada uma. Cada jogador desvira duas cartas e observa seus conteúdos. Se estes forem diferentes, as cartas são viradas novamente e é a vez do outro jogador fazer o mesmo. Porém, se os conteúdos das cartas forem idênticos, o jogador recolhe para si as duas cartas e desvira outras duas. Ganha o jogo o jogador que tiver o maior número de pares de cartas idênticas.

Nesta atividade, a ideia é a mesma do jogo da memória tradicional, mas o critério para a formação de pares é diferente: as cartas que formam pares não são as idênticas e sim as que correspondem a diferentes representações para expressões numéricas envolvendo fatoriais.

Para começar, professor, você pode distribuir um conjunto de cartas, como as disponibilizadas no pen drive, para cada dupla. É necessário recortá-las. Na dupla, um será adversário do outro. Peça-lhes que observem atentamente as cartas e, antes de iniciarem o jogo, identifiquem os pares correspondentes. Se necessário, faça uma pequena revisão sobre os fatoriais de um número e as possibilidades de simplificação de frações que possuem fatoriais no numerador e no denominador. Você pode ainda propor aos alunos que criem novas cartas, incrementando o jogo. Ao final, peça que os alunos exponham os raciocínios e estratégias que usaram para jogar.

Aspectos pedagógicos

Repetindo o que ressaltamos nas outras situações em que sugerimos um jogo como recurso didático, é importante que, além de jogar, os alunos tenham oportunidade de refletir sobre as propriedades dos conceitos trabalhados no jogo. Por isso pedimos que você solicitasse aos alunos a exposição dos raciocínios e estratégias que empregaram enquanto jogaram.


A primeira propriedade dos fatoriais que o jogo permite perceber é a igualdade entre $0!$ e $1!$. A igualdade entre estes fatoriais pode causar certo estranhamento uma vez que 0 é diferente de 1 . Outra propriedade se refere à multiplicação de um número natural pelo fatorial de outro número - por exemplo, alguns alunos podem pensar que $2 \times 5!$ é igual a $10!$. Para desfazer esta ideia equivocada, recomendamos que você desenvolva as duas expressões e efetue os cálculos, preferencialmente numa calculadora, comprovando que os resultados são diferentes. Entretanto, vale lembrar que, mesmo fazendo isso, na simplificação de frações, equívocos deste tipo podem se repetir. Não se espante se, inicialmente, algum aluno associar as cartas e à carta $1!$. Sendo assim, mais uma vez, você deve insistir no desenvolvimento das expressões e efetuar os cálculos.

Professor, aconselhamos que as simplificações destacadas sejam bastante analisadas e que todas as dúvidas a respeito delas sejam sanadas. Afinal, os alunos terão que lidar com elas no estudo dos arranjos e das combinações. Se as situações das cartas não forem suficientes, você pode propor outras. A criação de novas cartas pelos alunos também pode ser útil nesse sentido. Estimule-os!

Seção 2 – Princípio fundamental da contagem

Páginas no material do aluno

9 a 18

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	O princípio multiplicativo e os modos de se vestir	Cópias da folha de atividades	Atividade de resolução de problemas relacionados ao princípio multiplicativo	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

Esta é uma atividade de resolução de problemas relacionados ao princípio multiplicativo. Antes de iniciá-la, é interessante que você dialogue com seus alunos sobre as diversas circunstâncias do dia a dia em que temos mais de uma maneira de tomar decisões e precisamos contá-las. Em seguida, professor, você pode entregar uma ficha como a que está em anexo para cada dupla ler, interpretar e tentar resolver as situações problema propostas. Ao final, sugerimos que você e seus alunos façam uma grande roda para que os problemas sejam debatidos. Durante todo este processo, esteja atento aos procedimentos empregados por eles, às suas formas de interpretação e lembre-se: não basta oferecer respostas prontas, é fundamental estimular a troca de ideias e a exposição dos modos de pensar.

Aspectos pedagógicos

Analisando os problemas propostos na ficha, você perceberá que se trata de uma situação corriqueira, muito recorrente nos livros didáticos e muito usada pela maioria dos professores quando introduz o princípio multiplicativo. Nossa intenção ao colocá-la é privilegiar os conhecimentos adquiridos pelos alunos, uma vez que, certamente, a maioria deles não terá dificuldades na resolução de cada item. Acreditamos que refletindo sobre situações que já dominam e sobre os procedimentos que empregaram para resolvê-las, os alunos conseguirão aprimorar suas capacidades de comparar situações problema em geral e identificar aquelas que, apesar de aparentemente distintas, podem ser resolvidas com o emprego de um mesmo tipo de raciocínio ou princípio. Sendo assim, aconselhamos que você, ao longo da atividade, procure fazer este tipo de comparação. Você pode, por exemplo, comparar a situação da ficha em que é necessário contar todas as possibilidades que uma pessoa tem de se arrumar, dispondo de certo número de peças de roupa, com aquela em que a pessoa está num restaurante e pretende saber de quantas maneiras distintas ela pode compor uma bandeja colocando um prato quente, uma salada e uma sobremesa. É importante que os alunos percebam que apesar de os enredos das situações serem distintos - um fala sobre modos de se vestir e o outro fala sobre modos de se alimentar - o princípio multiplicativo pode ser empregado na solução das duas. As duas situações requerem a obtenção do número de maneiras de se tomar três decisões sucessivamente, tendo como ponto de partida o número de maneiras de se tomar cada decisão separadamente. Nesse sentido, é aconselhável que você insista na identificação das decisões a serem tomadas em cada situação. No caso da situação da ficha, podemos dizer que a escolha do sapato é a primeira decisão, a escolha da calça é a segunda e a escolha da camisa é a terceira. Se existem, respectivamente, 3, 2 e 6 maneiras de tomá-las, então existem 36 modos distintos da pessoa se arrumar, como mostra o esquema a seguir:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{6} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{3} = 36 \text{ possibilidades} \\ \text{Opções de} & & \text{Opções de} & & \text{Opção de} \\ \text{Camisas} & & \text{Calças} & & \text{Pares de} \\ & & & & \text{Sapatos} \end{array}$$

Já se ficar estabelecido que a pessoa vestirá a camisa rosa, ela só terá então que escolher o sapato e a calça. Terá, portanto, 6 maneiras de se arrumar:

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{3} = 6 \text{ possibilidades} \\ \text{Somente a} & & \text{Opções de} & & \text{Opção de} \\ \text{Camisa} & & \text{Calças} & & \text{Pares de} \\ \text{Rosa} & & & & \text{Sapatos} \end{array}$$


Professor, como já dissemos anteriormente, apesar de a situação ser simples e bastante conhecida, alguns alunos podem ter dificuldades para concluir que a operação a ser efetuada é a multiplicação. Se isso acontecer, é adequado recorrer a outras representações para a mesma situação. O desenho de uma árvore de possibilidades ou de uma tabela de dupla entrada (nos casos em que a situação só exigir a tomada de duas decisões) pode ajudar muito.

Por fim, no último item da ficha, invertamos o número de camisas e de calças para promover uma reflexão mais ampla sobre as aplicações dos conhecimentos matemáticos no cotidiano. Note que, apesar de o número de maneiras que a pessoa tem de se arrumar ser o mesmo da situação anterior, na vida prática, a maioria das pessoas prefere ter 2 calças e 6 camisas do que ter 6 calças e 2 camisas. Questione seus alunos sobre o que eles preferem e as causas de suas preferências. Não deixe passar a oportunidade de, mais uma vez, trazer o dia a dia para a sala de aula.

Seção 2 – Princípio fundamental da contagem

Páginas no material do aluno

9 a 18

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Uma encenação para o princípio multiplicativo	Cópias da folha de atividades, folhas de rascunho e sucatas	A proposta desta atividade é que os alunos, divididos em grupos, escrevam e atuem em cenas curtas que envolvam a tomada de decisões sucessivas e a contagem dos modos como isso pode se dar	Grupos com 5 a 6 alunos	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

A proposta desta atividade é que seus alunos, divididos em grupos, escrevam e façam pequenas encenações. Não se trata de uma encenação qualquer, mas de cenas que envolvam a tomada de decisões sucessivas e a contagem dos modos como isso pode se dar. Em outras palavras, as cenas devem abordar uma situação problema que envolva o princípio multiplicativo na sua solução.

Para começar, professor, você pode pedir aos alunos que se organizem em grupo e, neste caso, sugerimos que esta organização ocorra com base nas afinidades pessoais. Afinal, numa situação em que eles precisarão se expor mais do que estão acostumados, é preciso que estejam à vontade e, entre amigos, tudo se torna mais fácil.

Depois que estiverem divididos, sorteie o tema que caberá a cada grupo. Nossas sugestões de tema são: a) decisão do modo de se arrumar, escolhendo um sapato, uma calça e uma camisa entre vários; b) decisão do modo como montar uma bandeja para uma refeição, sabendo que é necessário escolher um prato quente, uma salada e uma sobremesa e c) decisão do modo como podem pintar uma bandeira formada por certo número de faixas, dispondo de um número de cores distintas e que não podem se repetir. Não tem importância se o tema se repetir em mais de um grupo, mas você pode, ainda, pedir outras sugestões aos próprios alunos ou deixá-los livres para escolherem a situação que quiserem. Apenas reforce a ideia de que, qualquer que seja a situação, é necessário que sua solução envolva o princípio multiplicativo.

Dando prosseguimento, você pode distribuir as folhas de rascunho e pedir aos alunos que escrevam a história e a fala dos personagens. Peça também que realizem um pequeno ensaio antes de fazerem suas apresentações. Se for preciso, avise-os previamente da atividade e sugira que tragam para a aula vestimentas, sucatas e outros adereços que poderão servir para compor o cenário ou o figurino das cenas.

Procure dar oportunidade para que todos se apresentem e, ao final das apresentações, analise coletivamente as situações, procurando identificar os conceitos matemáticos que as assemelham.

Aspectos pedagógicos


Embora encenar numa aula de Matemática pareça estranho, esta tarefa pode dar grandes contribuições aos processos de construção dos conceitos estudados. Acreditamos que o esforço de criar uma situação problema, mediada pelo uso da língua materna e com determinadas características conceituais (neste caso, o princípio multiplicativo), leva o aluno a organizar mentalmente seus conhecimentos sobre o assunto, fazendo-o reconhecer aquilo que já compreende e o que está em vias de ser compreendido. Além disso, é inevitável que, na encenação, os indivíduos envolvidos recorram a outras linguagens como os gestos, as expressões faciais, desenhos no cenário e outros símbolos sociais. Esta diversidade de linguagens é outro aspecto favorável à construção de conceitos. Como já mencionamos em aulas anteriores, o uso de várias linguagens e a conversão, quando possível, de uma representação para outras, leva o aluno a aprofundar seus conhecimentos sobre os objetos (matemáticos ou não) que estão sendo representados. Por isso, uma recomendação é que você, em suas avaliações, retome as situações problema encenadas.

Vale lembrar que esta atividade permite que os alunos busquem as aplicações daquilo que estudam no dia a dia e contribui para a integração da Matemática com a Educação Artística. Se for possível, envolva o professor desta disciplina no seu trabalho e não se assuste se tudo for tomando uma proporção maior do que aquela que você esperava inicialmente. Caso os alunos se interessem, faça reapresentações das cenas fora da sala de aula, para que os alunos de outras turmas possam assistir. Coragem!

Seção 3 – Permutação simples

Páginas no material do aluno

18 a 21

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Fotografando permutações	Cópias da folha de atividades	A atividade traz uma proposta de reflexão com seus alunos sobre as diversas maneiras que um grupo de 5 pessoas tem de se organizar lado a lado para tirar uma fotografia.	Duplas	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, nesta atividade, apresentamos uma situação problema baseada no roteiro de ação 6, que compõe o curso de formação continuada para professores do 3º ano do Ensino Médio – 1º bimestre, da rede estadual do Rio de Janeiro, em parceria com a Fundação CECIERJ. Esta atividade permitirá que seus alunos reflitam sobre as diversas maneiras que um grupo de 5 pessoas tem de se organizar lado a lado para tirar uma fotografia.

Para começar, antes mesmo de distribuir as fichas, é interessante que você estabeleça uma conversa com a turma sobre as circunstâncias do nosso cotidiano em que precisamos ordenar objetos ou pessoas. Convide um grupo de alunos para vir à frente da turma e se organizar em fila. Peça aos demais alunos que registrem cada organização e que sugiram novas organizações, diferentes da que foi apresentada inicialmente. Faça os alunos trocarem de lugar na organização, dando vida a estas sugestões. Tudo isso pode ajudá-los a atribuir significado às situações propostas na ficha.

Ao distribuir as fichas, é aconselhável que você peça aos alunos que procurem identificar semelhanças entre as situações ali propostas e as que acabaram de vivenciar com os colegas, à frente da turma. Enquanto eles resolvem, esteja atento aos raciocínios empregados. Quando todas as duplas concluírem a tarefa, peça-lhes que exponham suas soluções.

Aspectos pedagógicos

Para responder às questões propostas na ficha, os alunos devem perceber que, em cada foto, são necessárias 5 posições diferentes, uma ao lado da outra. A partir daí, eles precisam identificar que cada posição deverá ser ocupada por apenas uma pessoa do grupo e que esta pessoa não poderá ocupar outra posição na mesma foto. Estes, inclusive, são aspectos que tornam semelhantes as situações da ficha e aquelas vivenciadas em aula, imediatamente antes da distribuição das fichas.

Para resolver o item 1, eles podem usar o Princípio Fundamental da Contagem. Assim temos:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1^{\text{a}} \text{ Posição} & 2^{\text{a}} \text{ Posição} & 3^{\text{a}} \text{ Posição} & 4^{\text{a}} \text{ Posição} & 5^{\text{a}} \text{ Posição} & & & & \\ \boxed{5} & \times & \boxed{4} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{1} & = 120 \text{ possibilidades} \\ \text{Opções de} & & \text{Opções de} & & \text{Opções de} & & \text{Opções de} & & \text{Opções de} & \\ \text{pessoas} & & \text{pessoas} & & \text{pessoas} & & \text{pessoas} & & \text{pessoas} & \end{array}$$

Outra forma de resolver esse problema é verificar que são 5 pessoas ocupando 5 posições e que se trata de uma permutação simples $P_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$.

Para resolver o item 3, esperamos que seus alunos concluam que Ana, Bernardo e Carla, os alunos da história, devem estar dispostos alternadamente na foto. Assim temos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1^{\text{a}} \text{ Posição} & 2^{\text{a}} \text{ Posição} & 3^{\text{a}} \text{ Posição} & 4^{\text{a}} \text{ Posição} & 5^{\text{a}} \text{ Posição} & & & & \\
 \boxed{3} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{1} & \times & \boxed{1} = 12 \text{ possibilidades} \\
 \text{Opções de} & & \text{Opções de} & & \text{Opções de} & & \text{Opções de} & & \text{Opções de} \\
 \text{aluno} & & \text{professor} & & \text{aluno} & & \text{professor} & & \text{aluno}
 \end{array}$$

Já, para resolver o item 4, seus alunos devem concluir que a 1ª e a 5ª posição são destinadas aos professores, Jonas e Gabriela, e que as restantes destinam-se aos três alunos. Assim teremos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 1^{\text{a}} \text{ Posição} & 2^{\text{a}} \text{ Posição} & 3^{\text{a}} \text{ Posição} & 4^{\text{a}} \text{ Posição} & 5^{\text{a}} \text{ Posição} & & & & \\
 \boxed{2} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{1} & \times & \boxed{1} = 12 \text{ possibilidades} \\
 \text{Opções de} & & \text{Opções de} & & \text{Opções de} & & \text{Opções de} & & \text{Opções de} \\
 \text{professor} & & \text{aluno} & & \text{aluno} & & \text{aluno} & & \text{professor}
 \end{array}$$

Um encaminhamento comum para questões deste tipo, e que pode ser apresentado por alguns alunos, é dividir a situação em dois casos e permutar apenas os alunos. Assim, um caso é o que o professor está na primeira posição e a professora está na última e outro é o que a professora está na primeira posição e o professor está na última. Para cada caso, temos 6 possibilidades (número de maneiras que os três alunos podem trocar de lugar entre si) e a resposta esperada é a soma dos resultados obtidos nos dois casos.


Deixamos o item 2 para comentar por último, pois acreditamos que ele seja o de mais difícil compreensão para os seus alunos. Nossa experiência tem mostrado que, para questões deste tipo, os alunos geralmente tratam o grupo que deve permanecer junto como um único indivíduo. Desta forma, os três alunos seriam um indivíduo a ser permutado com os dois professores, o que resulta em 6 possibilidades (3!). Porém, como os três alunos podem trocar de lugar entre si, cada uma destas possibilidades se desdobra em outras seis e a resposta da questão é, então, $6 \times 6 = 36$ possibilidades.

Quando os alunos expuserem seus raciocínios, procure identificar os pontos em comum entre as várias duplas e, se for preciso, liste algumas possibilidades que contemplem as restrições impostas em cada item: os alunos ficarão alternados, os professores estarem nas extremidades, os alunos permanecerem juntos, etc. Lembre-se de refletir com seus alunos que, quando não há restrições, o número de possibilidades aumenta. Desenhe também as árvores de possibilidades. Embora você tenha avançado no assunto e já esteja abordando uma fórmula para permutações simples, muitos alunos ainda poderão precisar de exemplos e de representações gráficas para fazer generalizações.

Seção 3 – Permutação simples

Páginas no material do aluno

18 a 21

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	As permutações num passeio de automóvel pelo Rio	Cópias da folha de atividades	Os alunos poderão vivenciar as várias maneiras de que um grupo de 5 pessoas dispõe para se acomodar num automóvel de 5 lugares	Duplas	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

Nesta atividade, professor, também apresentamos uma situação problema adaptada do roteiro de ação 6, que compõe o curso de formação continuada para professores do 3º ano do Ensino Médio – 1º bimestre, da rede estadual do Rio de Janeiro, em parceria com a Fundação CECIERJ. Nela, você e seus alunos poderão vivenciar as várias maneiras de que um grupo de 5 pessoas dispõe para se acomodar num automóvel de 5 lugares.

Para começar, aconselhamos novamente que você estabeleça uma conversa com a turma sobre as situações do nosso cotidiano em que precisamos ordenar objetos ou pessoas. Sugerimos ainda que você desenhe no quadro o esboço de um automóvel semelhante ao que é citado na ficha e escreva o nome de 5 alunos, o que preencherá todos os lugares disponíveis. Em seguida, convide outros alunos a vir ao quadro para desenhar novos esboços, que atribuam novos lugares aos mesmos ocupantes. É importante que cada esboço fique registrado, para que você possa analisá-los em conjunto com seus alunos. Nesta análise, procure comparar cada organização e estabelecer restrições que permitam à turma agrupá-las. Um exemplo seria o grupo das organizações que têm determinada pessoa como motorista ou, ainda, o grupo das organizações que têm determinada pessoa como motorista e outra pessoa específica no carona – que seria um subgrupo do primeiro exemplo. Se julgar necessário, em vez de desenhar um esboço do automóvel, pegue as cadeiras da sala de aula, organize-as de maneira a simular a disposição dos assentos e peça a 5 alunos para se sentarem e trocarem de lugar entre si. Insistimos nestas ações, pois acreditamos que elas podem ajudar seus alunos a atribuir significado às situações propostas na ficha.

Sugerimos que, somente após esta vivência com a turma, você distribua as fichas e peça aos alunos que identifiquem as semelhanças entre as situações ali propostas e as que acabaram de vivenciar. Enquanto eles resolvem, esteja atento aos raciocínios empregados. Quando todas as duplas concluírem a tarefa, peça-lhes que exponham suas soluções.

Aspectos pedagógicos

Professor, na apresentação desta atividade, apresentamos orientações sobre a maneira de vivenciar, com seus alunos em sala, uma situação semelhante à proposta na ficha. Nossa intenção é tornar a situação o mais familiar pos-

sível, facilitando assim sua interpretação. Novamente, você pode adequar nossas orientações às necessidades da sua turma. Enquanto para alguns alunos, esta vivência pode ser desnecessária, para outros, pode servir como excelente recurso no caminho da abstração das ideias.

Para resolver os itens presentes na ficha, esperamos que os alunos percebam que cada lugar do automóvel refere-se a uma posição diferente. Teremos, portanto, 5 posições diferentes, sendo 2 na frente e 3 atrás. A partir daí, eles precisam identificar que cada pessoa só poderá ocupar um lugar no automóvel. Com base nestas observações, facilmente concluirão que, não havendo restrição para o motorista ou para o carona, há $5!$ - ou seja, 120 maneiras - de o grupo ocupar o automóvel.

No item 2, os alunos precisam perceber que, se somente Jonas puder ocupar o lugar do motorista, então só há uma possibilidade de ocupação deste lugar e cada um dos outros lugares poderá ser ocupado por qualquer um dos outros 4 membros do grupo. Assim teremos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{Motorista} & & \text{Carona} & & \text{Direita} & & \text{Meio} & & \text{Esquerda} \\
 \boxed{1} & \times & \boxed{4} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{1} = 24 \text{ possibilidades} \\
 \text{Somente} & & \text{Opções} & & \text{Opções} & & \text{Opções} & & \text{Opções} \\
 \text{Jonas} & & & & & & & &
 \end{array}$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, no terceiro item, tendo as restrições de que o motorista será Jonas e que Gabriela ocupará o lugar do carona, os alunos devem reconhecer que só há uma possibilidade para ocupação destes lugares e que cada um dos outros poderá ser ocupado por qualquer um dos alunos, ficando:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \text{Motorista} & & \text{Carona} & & \text{Direita} & & \text{Meio} & & \text{Esquerda} \\
 \boxed{1} & \times & \boxed{1} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{1} = 6 \text{ possibilidades} \\
 \text{Somente} & & \text{Somente} & & \text{Opções} & & \text{Opções} & & \text{Opções} \\
 \text{Jonas} & & \text{Gabriela} & & & & & &
 \end{array}$$


Aqui destacamos que você pode aproveitar esta solução para refletir com seus alunos sobre a resolução do item seguinte, o item 4, em vez de iniciar isoladamente o estudo da situação. No item 4, Gabriela e Jonas podem trocar de lugar entre si e isso conduz à duplicação das 6 possibilidades que acabamos de obter, permitindo concluir que há, neste caso, 12 possibilidades.

Por fim, no item 5, temos:

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Motorista} & & \text{Carona} & & \text{Direita} & & \text{Meio} & & \text{Esquerda} \\
 \boxed{2} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{3} & \times & \boxed{2} & \times & \boxed{1} = 36 \text{ possibilidades} \\
 \text{Jonas} & & \text{André} & & \text{Opções} & & \text{Opções} & & \text{Opções} \\
 \text{ou} & & \text{ou} & & & & & & \\
 \text{Gabriela} & & \text{Beatriz} & & & & & & \\
 & & \text{ou} & & & & & & \\
 & & \text{Carlos} & & & & & &
 \end{array}$$

Nesta situação, é recomendável alertar seus alunos que, apesar de os grupos de professores e de alunos serem abordados separadamente para as posições de motorista e de carona, para a ocupação das posições de trás, o professor que não foi escolhido para motorista se junta aos dois alunos que não sentaram na posição do carona. Isso nos dá 3 possibilidades para a ocupação da direita, 2 para o meio e 1 para a esquerda. Não deixe de refletir também que, em problemas como estes, mesmo que não saibamos quem vai ocupar uma posição, é possível contar as possibilidades de ocupação das demais posições. Muitas vezes, isto não é uma ideia simples para alguns alunos, que insistem em querer listar os casos para contá-los.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Cópias da folha de atividades, material do aluno	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade, dividido em duas etapas: a primeira consiste no registro de aprendizagens e a segunda em questões objetivas dissertativas, a serem escolhidas a critério do professor	Individual	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado à unidade 1 do Módulo 4. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades (disponível para reprodução neste material), as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Esse registro será feito a partir de questões elaboradas por nós, e que reproduzimos a seguir. No entanto, é importante ressaltar que estas questões devem complementar as que você já usa para avaliar o desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas.

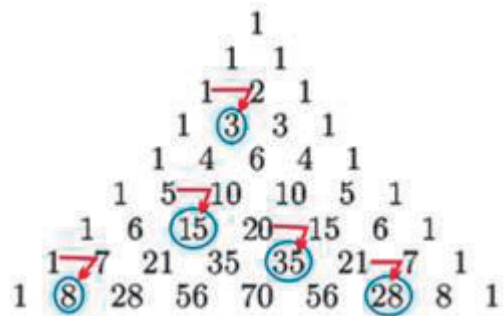
1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?
2. Complete a tabela a seguir:

n	$(n-1)!$	$n!$
7	?	?
6	120	?
?	24	120
?	6	?

3. Uma concessionária oferece cinco cores diferentes para o mesmo modelo de veículo, além de duas opções diferentes de kits de acessórios externos. De quantos modos diferentes pode-se escolher um carro novo?
4. O técnico de futsal do “Habilidosos Esporte Clube” possui cinco jogadores considerados titulares. Todos jogam em qualquer posição. Uma vez escolhidas as posições dos jogadores em quadra, diz-se que uma formação está definida. Nestas condições, quantas formações são possíveis?



5. Escreva a próxima linha do triângulo de Pascal:



Sugerimos, também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros, a serem entregues ao seu formador, durante o curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho e, sempre que for o caso, repensá-los de acordo com as questões e sugestões apresentadas.

Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Para compor o instrumento avaliativo, sugerimos, nesta etapa, a escolha de pelo menos uma questão objetiva e uma discursiva. Elas devem contemplar uma das habilidades que se deseja desenvolver nesta unidade. Nosso objetivo nesta etapa é fazer com que o aluno compreenda uma situação real, aplique o princípio multiplicativo ou o conceito de permutação e faça uma reflexão mais profunda sobre procedimentos para contagem.

Sugestão de questão objetiva para a avaliação:

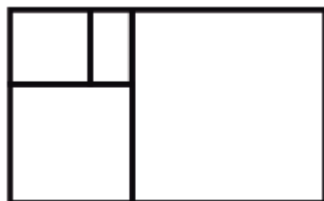
Questão 1: (FUVEST)

Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas dez músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as prováveis sequências dessas músicas serão necessários aproximadamente:

- a. 10 dias
- b. Um século
- c. 10 anos
- d. 100 séculos
- e. 10 séculos

Sugestão de questão discursiva para a avaliação:

Questão 1: Dispondo-se de 5 cores distintas, de quantos modos diferentes é possível pintar a bandeira a seguir, sem repetição de cores?



Gabarito

Registros de Aprendizagem

1. Análise combinatória.
- 2.

n	(n-1)!	n!
7	720	5040
6	120	720
5	24	120
4	6	24

3. Primeiramente, escolhe-se a cor do veículo. Isto pode ser feito de cinco modos diferentes. Em segundo lugar, escolhe-se o acessório externo. Isto pode ser feito de dois modos diferentes. Pelo princípio multiplicativo, há $5 \times 2 = 10$ modos distintos de escolher o veículo.
4. Começa-se escolhendo o jogador que ocupará a posição 1. Isto pode ser feito de cinco modos distintos. Feita a escolha da posição 1, para a posição 2, restam quatro possibilidades para a posição 2. Este raciocínio é repetido até a posição 1. Desta forma, haverá $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$ formações distintas.
5. 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Resposta e comentários da questão discursiva sugerida:

Questão 1:

Você pode sugerir, inicialmente, que os alunos escolham as cores usadas para pintar a bandeira - por exemplo, azul, verde, vermelho, rosa e marrom. Apesar de ser irrelevante para o resultado, essa escolha pode ser muito importante para os alunos, pois ajuda a concretizar as ideias. A seguir, peça que deem números às regiões: 1, 2, 3 e 4 (a distribuição dos números pelas regiões também é irrelevante para problema).

Finalmente, você pode indicar que eles comecem pintando a região 1, perguntando de quantos modos isto pode ser feito e repetindo o procedimento para as regiões seguintes. Lembre-os de que não pode haver repetição!

A região 1 pode ser pintada de cinco modos distintos. Escolhida a cor da região 1, restam quatro possibilidades de cores para a região 2. Escolhida a cor da região 2, restam três possibilidades para a região 3. Escolhida a cor da região 3, restam duas possibilidades de cores para a região 1. Pelo princípio multiplicativo, existem $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ modos distintos de pintar a bandeira.

Resposta da questão objetiva sugerida

Sugere-se que você pergunte inicialmente sobre a relevância da ordem das músicas. Uma vez que eles tenham notado que é importante, induza-os a calcular o número procurado, sem necessariamente, escolher uma fórmula a ser aplicada. Peça-os que escolham a primeira música, a segunda música e assim sucessivamente. A partir daí, é possível que eles cheguem à resposta. Apesar de não ser necessário, o uso direto da fórmula é possível, desde que argumentos minimamente embasados sejam apresentados.

A primeira música pode ser escolhida de 10 modos distintos; feita esta escolha, a segunda música pode ser escolhida de 9 modos distintos e assim por diante. Logo, pelo princípio multiplicativo, há $10 \times 9 \times 8 \times \dots \times 2 \times 1 = 10!$ modos distintos de escolher a lista de músicas. Consequentemente, serão necessários 10! (fatorial de 10) dias, para esgotar todas as possibilidades. Vamos converter esse número em anos e, para isto, vamos dividir por 360 dias (o mais exato seria dividir por 365 dias = 1 ano, mas o problema pede uma solução aproximada). Segue que anos. Logo, serão necessários 100 séculos para esgotar todas as possibilidades.

