

Polinômios e Equações Algébricas

André Luiz Cordeiro dos Santos, Gabriela dos Santos Barbosa, Josemeri Araujo Silva Rocha (coordenadora) e Luciane de Paiva Moura Coutinho

Introdução

A unidade 4 do material do aluno inicia o tema polinômios com um questionamento sobre o volume de três diferentes caixas e sugere que você, professor, construa algumas caixas de tamanhos diferentes e calcule o volume delas.

Preparamos para você um material complementar, com o objetivo de ampliar as possibilidades de exploração do tema em suas aulas e enriquecer a abordagem dos objetivos do módulo do aluno, que são os seguintes:

- Definir polinômios.
- Compreender o significado e as aplicações de uma função polinomial,
- Calcular o valor numérico de um polinômio,
- Reconhecer as condições necessárias para que dois polinômios sejam iguais,
- Compreender o significado de raiz de um polinômio e saber calculá-la,
- Efetuar as 4 operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com polinômios.

A nossa proposta é que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora, para a qual trazemos duas sugestões. A primeira é a atividade Arte e Matemática, em que os alunos assistirão ao vídeo de mesmo nome e realizarão uma pesquisa para identificar situações artísticas em que os polinômios podem ser utilizados. Na segunda atividade, chamada Quiz 1, os alunos deverão responder a um Quiz sobre polinômios, ainda sem estudar o material do aluno.

Para a Seção 1, temos uma sugestão de atividade, que é o Quiz 2. Dessa vez, os alunos irão responder perguntas que envolvem conceitos bem específicos sobre polinômios, como identificar um polinômio e o seu grau, por exemplo.

Optamos por dividir a Seção 2 em duas partes. A primeira aborda o tema Função Polinomial, enquanto a segunda aprofunda certos aspectos referentes aos polinômios. Para tratar de funções polinomiais, apresentamos a atividade Área do retângulo, em que os alunos deverão descobrir a função polinomial que permite calcular a área dos diversos retângulos em função da base ou da altura. Já na atividade Pesquisando funções polinomiais, os alunos deverão pesquisar individualmente três exemplos de funções polinomiais e, trabalhando em equipes, identificar o grau do polinômio associado a cada função pesquisada.

Para conhecer um pouco mais sobre polinômios, temos a atividade Polinômios no comércio, cujo objetivo é criar condições para que os alunos vivenciem uma situação problema que pode ser modelada por um polinômio. A atividade Polinômios nas profissões cria condições para que os alunos usem um polinômio do 2º grau para modelar uma situação adaptada da engenharia e efetuem cálculos relativos aos valores numéricos assumidos por este polinômio. Na atividade Jogo das raízes, propomos um jogo para a fixação do conceito de raiz de um polinômio, enquanto na atividade Polinômios e Geometria, queremos mostrar aos alunos uma aplicação das operações com polinômios. Para fechar esta seção, temos a atividade Operando com polinômios, que propõe um jogo para a fixação dos principais conceitos associados à adição, à subtração e à multiplicação de polinômios.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro deve ser dedicado a uma revisão geral do estudo realizado, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o processo. Já o segundo momento deve ser dedicado a uma avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos em detrimento da mera reprodução de exercícios feitos anteriormente.

Uma descrição das sugestões a que nos referimos nos parágrafos anteriores está colocada nas tabelas a seguir, e seus detalhes no texto que segue.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

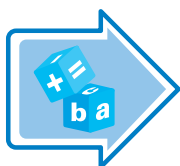
| Disciplina | Volume | Módulo | Unidade | Estimativa de aulas para essa unidade |
|------------|--------|--------|---------|---------------------------------------|
| Matemática | 1 | 4 | 4 | 4 aulas de 2 tempos |

| Título da unidade | Tema |
|--|------------------------------|
| Polinômios e Equações Algébricas | Polinômios |
| Objetivos da unidade | |
| Definir polinômios | |
| Compreender o significado e as aplicações de uma função polinomial | |
| Calcular o valor numérico de um polinômio | |
| Reconhecer as condições necessárias para que dois polinômios sejam iguais | |
| Compreender o significado de raiz de um polinômio e saber calculá-la | |
| Efetuar as 4 operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com polinômios | |
| Seções | Páginas no material do aluno |
| Para início de conversa... | 87 a 88 |
| Seção 1 – O que é um polinômio | 89 a 90 |
| Seção 2 – Funções polinomiais | 90 a 102 |
| Resumo | 103 |
| Veja ainda | 103 |
| O que perguntam por aí? | 107 a 108 |
| Atividade Extra | 109 a 113 |

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.



Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.



Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.




Exercícios

Proposições de exercícios complementares

Atividades Iniciais

Atividade Inicial 1

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------|--|---|------------------|----------------|
|  | Arte e Matemática | Computadores com acesso à internet, livros texto de Matemática | Os alunos assistirão ao vídeo Arte e Matemática, disponível em http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1051 . Em seguida, realizarão uma pesquisa para identificar situações em que os polinômios podem ser utilizados | Duplas | 45 minutos |

Aspectos operacionais

Professor, leve os alunos para o laboratório de informática da escola, divida-os em duplas e peça para que cada dupla se posicione em frente a um computador, acesse o link <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1051> e assista o vídeo Arte e Matemática. Esse vídeo relata a conversa entre dois amigos sobre a relação entre uma exposição artística de fractais e funções polinomiais. Ao final do vídeo, um dos amigos relata algumas situações em que os polinômios podem ser utilizados. Caso o laboratório não esteja disponível, use, em sala, um computador com Datashow – e mantenha a divisão da turma em duplas

A partir daí, sugira a seus alunos (em duplas) que façam uma pesquisa, identificando pelo menos duas situações onde os polinômios podem ser aplicados. No caso de haver computadores disponíveis, a pesquisa pode ser feita por meio de algum buscador de internet. Se for usar o Datashow com computador em sala, distribua os livros pelas duplas, para que possam fazer a pesquisa. Neste caso, é importante providenciar os livros com antecedência. Uma sugestão é utilizar os da biblioteca da escola. Por fim, peça para que cada dupla relate em voz alta as situações encontradas para toda a turma.

Aspectos pedagógicos


Essa atividade inicial foi especialmente pensada para servir como motivação para o estudo de polinômios durante toda unidade, uma vez que propõe aos alunos entenderem que o assunto estudado tem uma grande aplicabilidade em diversos campos, como a Construção Civil, a Medicina, a Astronomia, a Ciência da Computação, a Criptografia, a Física, entre muitas outras.

O aluno, geralmente, se sente muito motivado ao perceber que o assunto abordado tem ressonância no nosso cotidiano e foi justamente esse o nosso objetivo ao sugerir essa atividade.

Contudo, sabemos que além desse viés prático é muito importante que o aluno perceba o viés artístico que a Matemática possui. Sendo assim, o estudo de fractais e sua autossimilaridade é uma boa maneira de mostrar para o aluno essa base em que a Matemática se apoia. Caso a turma se interesse, você pode leva-los para "um turismo" por um fractal no site <http://sourceforge.net/projects/xaos/>. E até fazer uma exposição para toda a escola sobre fractais.

Por fim, espera-se que eles percebam que este vídeo também se propõe a fazer uma breve explicação sobre os polinômios.

Atividade Inicial

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------|---|--|------------------|----------------|
|  | Quiz 1 | Computadores com acesso à internet ou reprodução impressa das questões online | Os alunos, ainda sem estudar o material do aluno, deverão responder a um Quiz sobre polinômios. Ao término da unidade, os alunos deverão retornar ao Quiz para identificar seus progressos. Quiz disponível em http://www.proprofs.com/quiz-school/quizshow.php?title=polinmios&quesnum=1 | Individualmente | 40 minutos |

Aspectos operacionais

Professor, leve os alunos até o laboratório de informática, peça para que cada um ocupe um computador, acesse o link <http://www.proprofs.com/quiz-school/quizshow.php?title=polinmios&quesnum=1> e inicie o Quiz.

Os alunos deverão responder ao Quiz, mesmo sem o conhecimento teórico da unidade. Após ler cada pergunta, o aluno deverá escolher a resposta que julgar correta e clicar em enviar. Em seguida, o aluno receberá um aviso se ele errou ou acertou cada questão. Peça para que ele anote em seu caderno os resultados correspondentes a cada questão (se acertou ou errou). Caso ele tenha errado, oriente que ele não anote a resposta correta.

Ao final da unidade, sugira que os alunos retornem ao Quiz. Oriente-os a refazer as questões e novamente anotar cada resultado (erros ou acertos em cada questão). Com base nesses resultados, peça para que eles façam uma análise dos seus progressos, das questões em que ainda encontram dificuldades e o porquê de as dificuldades ainda persistirem.

Caso você tenha dificuldades em levar a turma ao laboratório de informática e realizar a atividade individualmente, você pode reproduzir as questões e entregá-las aos alunos em dois momentos: antes e depois do estudo da unidade e orientá-los a realizá-lo como um teste.

Aspectos pedagógicos


Professor, o objetivo dessa atividade é que o próprio aluno seja capaz de realizar uma auto avaliação sobre sua aprendizagem durante a unidade, uma vez que ele fará uma análise comparativa entre os resultados obtidos por ele antes e depois do estudo formal da unidade. Outro aspecto importante é que, com base nessa análise individual, você poderá realizar uma revisão dos tópicos em que a turma ainda encontra dificuldades.

Atividades relacionadas às seções do material do aluno

Seção 1 – O que é um polinômio?

Páginas no material do aluno

89 a 90

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------|---|--|-------------------------|------------------------|
|  | Quiz 2 | Computadores com acesso à internet ou reprodução impressa das questões online | Os alunos deverão responder a um Quiz sobre polinômios | Grupos de 2 a 5 pessoas | 2 tempos de 40 minutos |

Aspectos operacionais

Professor, leve os alunos para o laboratório de informática e peça que se dividam em grupos, de acordo com a disponibilidade dos computadores. Peça então que acessem o link http://quiz.uprm.edu/tutorial_es/ea/ea_home.html e oriente-os para clicar em "Oprima aqui para practicar " na seção de "Polinomios", como indicado pelas setas na figura abaixo:

Polinomios ←

Definición: Un polinomio en x es una suma de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde n es un entero no negativo y cada coeficiente de x es un número real. Si a_n es un número diferente de cero, se dice que el polinomio es de grado n .

El coeficiente a de la mayor potencia de x es el **coeficiente principal** del polinomio.

Ejemplos de polinomios:

| Ejemplo | Coficiente principal | Grado |
|---------------------------|----------------------|-------|
| $3x^4 + 5x^3 + (-7)x + 4$ | 3 | 4 |
| $x^3 + 9x^2 + (-2)x$ | 1 | 3 |
| $-5x^2 + 1$ | -5 | 2 |
| 8 | 8 | 0 |
| $7x + 2$ | 7 | 1 |

Ejemplos de expresiones que no son polinomios:

a) $\frac{1}{x} + 3x$ b) $\frac{x-5}{x^2+2}$ c) $3x^2 + \sqrt{x} - 2$

En el primer ejemplo el exponente de x es negativo, contradiciendo la definición de polinomio, de igual forma en el ejemplo c donde el exponente de x no es entero.

En el ejemplo b tenemos una expresión racional o fraccionaria con un polinomio en el numerador y otro en el denominador. El criterio que utilizaremos es el siguiente: si el polinomio del denominador no es el constante o de grado cero, la expresión no es un polinomio. Recuerde que los exponentes deben ser enteros positivos.

Oprima aquí para practicar ←

Em seguida, terá início um Quiz em que os alunos deverão responder basicamente a três tipos de perguntas:

- Analisar como verdadeiro ou falso se uma determinada expressão algébrica é um polinômio

La expresión algebraica

$$5w^5 + 2w^{\frac{1}{10}} - 5$$

es un polinomio:

☐ Verdadero ☐ Falso

- Definir o grau do polinômio dado como exemplo.

El grado del polinomio

$$4 + 9m^7$$

es:

Contestación:

Calculadora

Enviar

- Dizer qual é o coeficiente principal do polinômio

El coeficiente principal del polinomio

$$8h^7$$

es:

Contestación:

Calculadora

Enviar

Após responder a pergunta, o aluno deve clicar em enviar. Em seguida, ele receberá um aviso se errou ou acertou a questão e terá duas opções: passar para a outra questão ou ver a solução detalhada. Ele deverá fazer a opção que julgar mais adequada, de acordo com o momento e com o item respondido.

Su respuesta 1 es correcta.

Ver Solución Detallada

Presione Aquí para Generar Otra Pregunta

Caso não haja computador disponível na escola ou você encontre alguma dificuldade em utilizá-los, você pode realizar uma gincana. Para isso, anote algumas questões, pelo menos dez (você pode utilizar as questões do próprio Quiz). Divida a turma em grupos de 3 a 5 pessoas. Em seguida, proponha as questões e reserve um tempo para que os grupos as respondam. Peça para que cada grupo dê sua resposta. Cada resposta certa vale um ponto para o grupo. Ao final, conte os pontos para identificar o(s) grupo(s) vencedor(es). Para estimulá-los ainda mais, você pode pensar em alguma premiação.

Aspectos pedagógicos

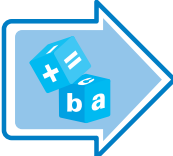
Apesar de o site ser em espanhol, a língua não representa um impedimento para que o Quiz seja realizado. Pelo contrário, caso a escola tenha professor de espanhol, vocês podem realizar uma atividade conjunta pedindo a ele que auxilie os alunos nos vocabulários que aparecem no Quiz, ou até mesmo sugerir que os alunos façam uso de um dicionário Espanhol-Português.

Esse Quiz tem uma proposta diferente do apresentado na seção anterior. Por isso, é importante que você primeiramente introduza os assuntos que serão abordados nas questões, tais como identificar um polinômio, coeficiente e grau de um polinômio para que o aluno tenha as ferramentas teóricas necessárias para realizar as questões.

Seção 2 – Funções polinomiais

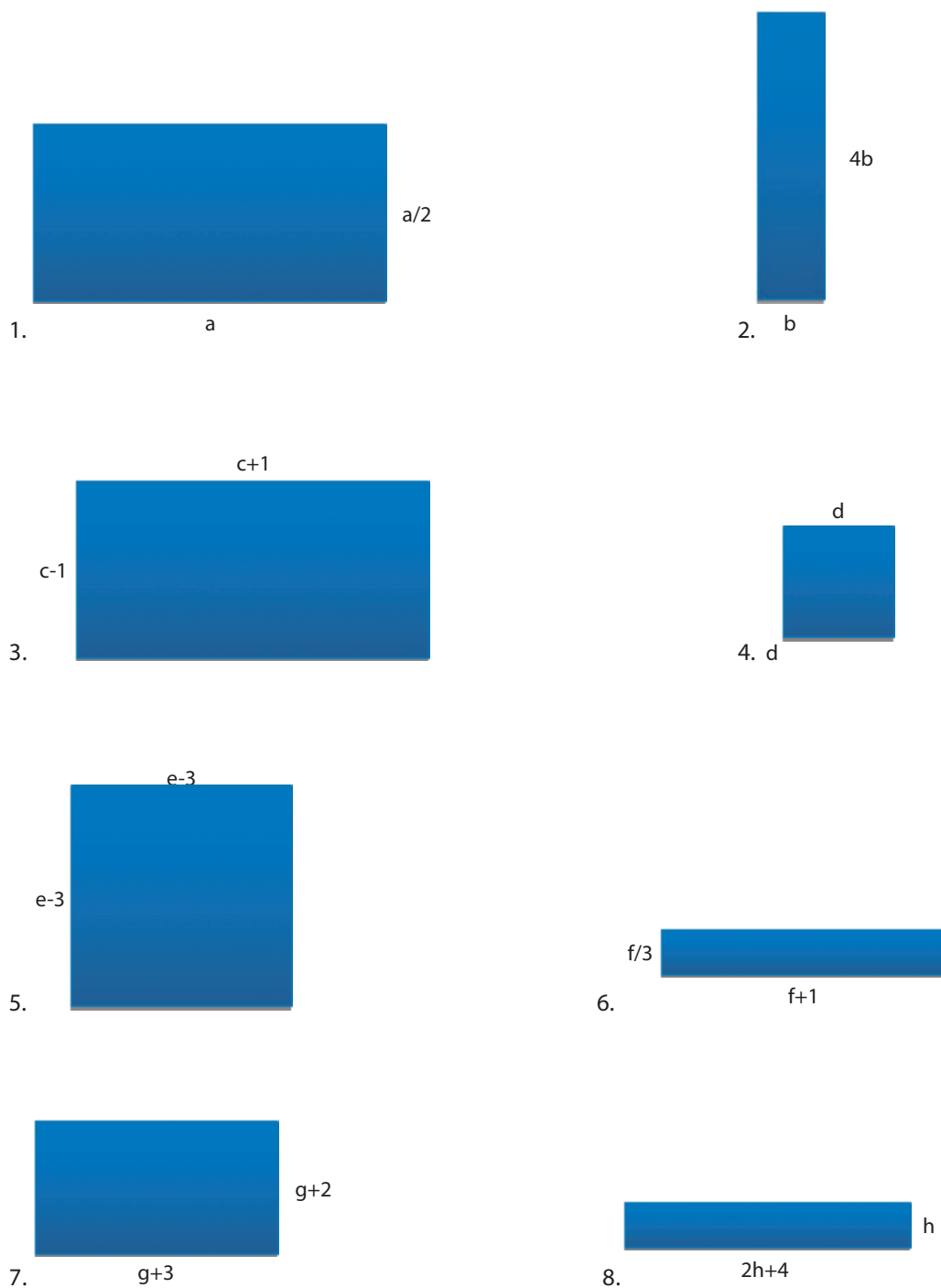
Páginas no material do aluno

90 a 102

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------|---|---|-------------------------|------------------------|
|  | Área do retângulo | Cartolina, caneta pilot, tesoura, caderno, lápis e borracha | Os alunos deverão descobrir a função polinomial que permite calcular a área dos diversos retângulos dados em função de sua base ou altura | Grupos de até 4 pessoas | 2 tempos de 40 minutos |

Aspectos operacionais

Professor, divida a turma em grupos de até quatro pessoas e verifique quantos grupos serão formados. Em seguida, elabore retângulos para serem distribuídos nos grupos (um para cada grupo). Seguem oito exemplos que podem ser utilizados, considerando uma turma de 32 alunos.




Distribua um retângulo por grupo e peça para que definam a fórmula do cálculo da área em função da base ou da altura.


Aspectos pedagógicos


Professor, você pode sugerir que os próprios grupos elaborem os retângulos. Antes da atividade é importante que você relembre a turma que a área do retângulo é definida pela multiplicação da base pela altura.


Você pode elaborar outros exemplos de retângulos ou até mesmo utilizar outras figuras geométricas. Outra possibilidade é elaborar figuras tridimensionais para definir o cálculo do volume.


Nos exemplos dados os alunos devem chegar aos seguintes resultados:


1. 
 $A(a) = a^2/2$


2. 
 $A(b) = 4b^2$


3. 
 $A(c) = c^2 - 1$

4. 
 $A(d) = d^2$

5. 
 $A(e) = e^2 - 6e + 9$

6. 
 $A(f) = (f^2 + f)/3$

7. 
 $A(g) = g^2 + 5g + 6$


8. 
 $A(h) = 2h^2 + 4h$

Observe atentamente o trabalho de seus alunos, percorrendo as mesas e auxiliando-os em dúvidas. Procure destacar dúvidas ou erros que possam ser recorrentes, como aqueles originados de propriedades operatórias, por exemplo.

Seção 2 – Funções polinomiais

Páginas no material do aluno

90 a 102

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|--|---------------------------------|---------------------|---|--|------------------------|
|  | Pesquisando funções polinomiais | Fichas de papel | Os alunos deverão pesquisar individualmente três exemplos de funções polinomiais. Em seguida, em grupo, deverão identificar o grau do polinômio associado a cada função pesquisada. | A atividade, em um primeiro momento, será feita individualmente e uma segunda etapa em grupos de 4 pessoas (ou com o número que for conveniente em relação ao número de alunos da turma) | 2 tempos de 40 minutos |

Aspectos operacionais

Professor, na aula que anteceder a esta aula, solicite, como trabalho de casa, que cada aluno pesquise três exemplos de funções polinomiais. A pesquisa pode ser feita usando buscadores na internet, entrevistando outros professores ou consultando em livros de Matemática. Os resultados devem ser anotados e trazidos para a sala em fichas individuais, feitas a mão ou em computador. Defina com seus alunos as dimensões e o material das fichas para haver um padrão. Por exemplo, as fichas poderão ser feitas de papel branco com dimensões 10 cm x 5 cm, como no exemplo abaixo:

$$f(x) = -3x^3 + 8$$

Na aula seguinte, os alunos deverão trazer as fichas com as funções e se dividirem em grupos. As fichas de cada aluno deverão ser distribuídas em um grupo no qual ele não seja componente.

Por fim, os grupos deverão analisar as fichas recebidas e identificar o grau do polinômio associado a cada função pesquisada. No exemplo acima, os alunos analisariam o polinômio $-3x^3 + 8$ e descobririam que este tem grau 3.

Aspectos pedagógicos

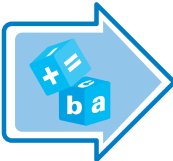
Professor, é muito importante que você explique o assunto abordado anteriormente, uma vez que a atividade demanda uma etapa de pesquisa, seguida de uma outra, em grupo. Por isso, é muito importante que os alunos realizem essa atividade com uma boa base teórica. Caso sintam que a turma está com dificuldades, você pode pedir para que os alunos realizem essa pesquisa em sala e em grupo caso queira supervisioná-la.

Nas seções seguintes, essas fichas com as funções podem ser reutilizadas. Você pode pedir para que os alunos encontrem o valor numérico, raiz, etc das funções.

Seção 2 – Funções polinomiais

Páginas no material do aluno

90 a 102

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|------------------------|-------------------------------|--|------------------|------------------------|
|  | Polinômios no comércio | Cópias da folha de atividades | O objetivo desta atividade é criar condições para que os alunos vivenciem uma situação problema que pode ser modelada por um polinômio | Duplas | 2 tempos de 40 minutos |

Aspectos operacionais

O objetivo desta atividade é criar condições para que os alunos vivenciem uma situação problema que pode ser modelada por um polinômio. Para dar conta das questões que são propostas com base na situação, eles terão que calcular o valor numérico de um polinômio bem como terão que relembrar alguns conceitos associados às funções quadráticas. Entre eles, podemos destacar as coordenadas do vértice da parábola que corresponde ao gráfico da função e o estudo do sinal da função.

Inicialmente você pode estabelecer com a turma um diálogo, levantando os seguintes questionamentos: em que circunstâncias podemos aplicar nossos conhecimentos sobre polinômios? É útil para um comerciante ter um modelo matemático que descreve o seu lucro em função da quantidade daquilo que vende? Podemos afirmar que o

lucro de um vendedor é diretamente proporcional à quantidade vendida?

Em seguida, distribua uma ficha (como a que segue em anexo no pen drive) para cada dupla e peça aos alunos que tentem responder os problemas ali propostos. Quando eles concluírem, peça-lhes que exponham seus raciocínios.

Aspectos pedagógicos

Professor, nossa sugestão aqui é que, quando os alunos expuserem suas soluções, você faça uma leitura coletiva dos problemas, procurando compará-los. Inicialmente leia e compare os problemas a e b. Embora o contexto seja o mesmo – a discussão do lucro em função da quantidade de caixas vendidas – o que difere um do outro? Os alunos precisam entender que, no primeiro problema, pede-se o valor numérico assumido pelo polinômio quando x é substituído por 5 – que é 300 reais. Já no segundo, trabalhamos a ideia reversa, ou seja, é preciso descobrir para que valores de x o valor numérico assumido pelo polinômio é zero. Substituindo $L(x)$ por zero e resolvendo a equação do 2º grau assim obtida, os alunos descobrirão que estes valores são 2 e 6. Em outras palavras, perceberão que as raízes deste polinômio são 2 e 6.

Nos problemas c e d, caso nenhuma dupla se recorde, é aconselhável que você sinalize para a turma que o polinômio do 2º grau é uma função quadrática. Portanto, alguns conhecimentos construídos em anos anteriores sobre este tipo de função podem ser empregados nesta situação. Para o item c, por exemplo, vale a pena recordar que o gráfico correspondente à função quadrática em questão é uma parábola com concavidade para baixo, o que, por sua vez, nos leva a admitir que existe um valor de x para o qual o lucro será máximo. Este valor é o que denominamos x_v

do vértice x_v e pode ser obtido de duas formas. Uma forma é empregar a fórmula $x_v = \frac{-b}{2a}$, onde a e b são, res-

pectivamente os coeficientes de x^2 e x . Outra forma é baseada na simetria da parábola. Como o eixo de simetria da parábola é uma reta que passa pelo vértice e é paralela ao eixo y , podemos concluir que o x_v é a média aritmética

entre as raízes, ou seja, $x_v = \left(\frac{2+6}{2} \right) = 4$. No item d, a observação de um esboço do gráfico e a constatação de que

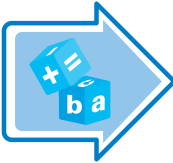
para valores situados entre as raízes a função assumirá valores positivos poderá conduzir seus alunos à resposta certa que é $2 < x < 6$.

Para finalizar, sugerimos que você retome o diálogo proposto inicialmente sobre as aplicações dos conhecimentos sobre polinômios. Você pode concluir com seus alunos que a possibilidade de modelar uma situação permite àqueles que a vivenciam fazer previsões e planejar suas atuações. No caso da situação apresentada nesta atividade, o fabricante poderia controlar suas vendas. Como vimos, o lucro não é diretamente proporcional às vendas. Isto pode parecer estranho a princípio, mas, se pensarmos nas leis de mercado, como a lei da oferta e da procura, por exemplo, podemos admitir que é possível.

Seção 2 – Funções polinomiais

Páginas no material do aluno

90 a 102

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------------|-------------------------------|--|------------------|------------------------|
|  | Polinômios nas Profissões | Cópias da folha de atividades | Criar condições para que os alunos usem um polinômio do 2º grau para modelar uma situação adaptada da engenharia e efetuem cálculos relativos aos valores numéricos assumidos por este polinômio | Duplas | 2 tempos de 40 minutos |

Aspectos operacionais

Nesta atividade temos por objetivo criar condições para que os alunos modelem uma situação adaptada da engenharia com um polinômio do 2º grau e, em seguida, efetuem cálculos relativos aos valores numéricos assumidos por este polinômio. Inicialmente você pode estabelecer com a turma um diálogo, procurando mostrar aos seus alunos que, assim como na Física, os estudos realizados nas diversas engenharias (engenharia civil, naval, elétrica, de produção etc.) muitas vezes lidam com modelos matemáticos que descrevem as relações entre as grandezas que costumam medir e, nesse sentido, os polinômios podem ser bastante úteis.

Dando prosseguimento, você pode distribuir uma ficha como a que segue em anexo para cada dupla e pedir aos alunos que tentem responder as perguntas ali propostas. Quando eles concluírem, peça-lhes que exponham seus raciocínios.

Aspectos pedagógicos

Professor, enquanto os alunos respondem as perguntas propostas na ficha, algumas dúvidas relativas a conteúdos estudados anteriormente poderão surgir. Entre elas, destacamos aquelas ligadas à resolução de sistemas. Se isso ocorrer, sugerimos você ampare as duplas, dando-lhes os esclarecimentos necessários. Não espere que eles concluam tudo para lhes esclarecer. Eles poderão se desinteressar neste processo.

É importante, de imediato, levar os alunos a perceber que se o peso zero fornece a deformação zero, podemos escrever $D(0)=0$ e concluir que $c=0$. Isto se fundamenta na ideia de que o termo independente corresponde ao valor numérico assumido pelo polinômio quando a variável é substituída por zero. Trata-se de uma ideia de fácil entendimento e bastante útil no estudo dos polinômios. Para que seus alunos a internalizem, se for preciso, você pode fazer uma lista de polinômios e pedir-lhes que calculem o valor numérico de cada um quando a variável é substituída por zero. Eles poderão observar vários casos e tirar suas conclusões.

Depois de concluir que $c=0$, com os valores constantes na terceira e na quarta linha da tabela, os alunos poderão montar um sistema com as equações $16a + 4b = 24$ e $36a + 6b = 48$ e, resolvendo-o, obterão $a=1$ e $b=2$.

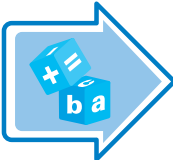
Dispondo dos valores de a e b , facilmente, os alunos resolverão o item b, calculando $D(10) = (10)^2 + 2 \cdot 10 = 120$ mm. E, no item c, precisarão resolver a equação do 2º grau $x^2 + 2x = 80$, cujas raízes são -10 e 8 . Neste ponto, vale lembrar que, a equação do 2º grau possui duas raízes, mas somente uma delas, 8 , soluciona o problema proposto, afinal não faz sentido um peso negativo. Além disso, é recomendável que você, numa reflexão coletiva com a turma, procure comparar os itens b e c. Procure mostrar a eles que, enquanto uma oferece o valor de x e solicita o valor numérico assumido pelo polinômio para aquele valor, a outra requer que se descubra para que valores de x o polinômio assume um valor numérico conhecido. A distinção entre estes dois tipos de situação é fundamental para o avanço nos estudos dos polinômios.

Finalizando, não podemos deixar de mencionar que trazer um problema contextualizado numa profissão, como a engenharia, pode contribuir para uma discussão mais ampla sobre escolhas profissionais, aspecto que tem provocado muita angústia entre os jovens brasileiros. Assim, é razoável que você aproveite bem essa oportunidade e amplie o debate sobre as profissões: Como está o mercado de trabalho para certas profissões? Que conhecimentos são mobilizados em cada uma? Em quais profissões os conhecimentos matemáticos são prioritários? Se possível, envolva os professores das outras disciplinas neste debate e convide alguns profissionais para um bate papo com seus alunos.

Seção 2 – Funções polinomiais

Páginas no material do aluno

90 a 102

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------|---|--|------------------|------------------------|
|  | Jogo das Raízes | Conjunto de cartas (baralho), a partir de modelo em anexo | EA atividade propõe um jogo para a fixação do conceito de raiz de um polinômio | Duplas | 2 tempos de 40 minutos |

Aspectos operacionais

Nesta atividade, propomos um jogo para a fixação do conceito de raiz de um polinômio. Em linhas gerais, trata-se de verificar se um número é ou não raiz de um polinômio. Assim, a questão que se coloca logo de início é: como podemos saber se um número é ou não raiz de um polinômio?

Depois de refletir sobre esta questão com a turma, você pode organizar as duplas, procurando colocar, em cada dupla, alunos com diferentes níveis de entendimento do assunto. Nossa intenção é que, desta forma, um aluno possa ajudar o outro e que a disputa entre as duplas seja acirrada. Caso contrário, os alunos poderão perder o interesse pelo jogo. As cartas devem ser feitas a partir do modelo que segue em anexo no pen drive.

Recomendamos que, antes de distribuir as cartas, você explique as regras do jogo:

Regra 1: Cada dupla de alunos receberá as cartas do jogo, que deverão ser embaralhadas;

Regra 2: Depois de embaralhadas, as cartas devem ser dispostas sobre a mesa com seus conteúdos à mostra;

Regra 3: As duplas devem formar pares de cartas, de maneira que uma carta seja um polinômio e a outra seja a raiz deste polinômio;

Regra 4: Ganha o jogo a dupla que formar todos os pares no menor tempo.

Perceba que, se você entregar primeiro as fichas e depois explicar as regras, alguns alunos poderão antecipar a identificação das raízes enquanto você fala e, então, você poderá perder o controle sobre o tempo gasto por cada dupla na tarefa. Nossa sugestão é que você realize várias rodadas. Ao final, você ainda pode pedir que os alunos expliquem os procedimentos que usaram durante o jogo e criem novas cartas, enriquecendo o “baralho”.

Aspectos pedagógicos


Professor, esteja atento, pois os alunos poderão apresentar duas estratégias para a verificação se um número é ou não raiz de um polinômio. A primeira é calcular o valor numérico do polinômio quando substituímos a variável pelo número que se deseja verificar. Se o valor numérico obtido for zero, então temos uma raiz do polinômio. Caso contrário, o número não é raiz. Outra estratégia é igualar o polinômio a zero - e assim formar uma equação - para, em seguida, calcular as raízes desta equação por meio de fórmulas.

Diante destas estratégias, é importante refletir com os alunos sobre as limitações de cada uma. A primeira, por exemplo, não nos permite obter todas as raízes do polinômio e a segunda, por sua vez, é limitada, pois não estudamos fórmulas para a solução de equações cujo grau seja maior ou igual a 3.

Seção 2 – Funções polinomiais

Páginas no material do aluno

90 a 102

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|------------------------|-------------------------------|---|------------------|------------------------|
|  | Polinômios e Geometria | Cópias da folha de atividades | Mostrar aos alunos uma aplicação das operações com polinômios: a obtenção de uma expressão algébrica para o volume de uma caixa cuja forma se assemelha a um paralelepípedo | Duplas | 2 tempos de 40 minutos |

Aspectos operacionais

Para que os alunos se apropriem da situação proposta na folha de atividades, é aconselhável que, antes de distribuí-la, você reflita com eles e até tente esboçar no quadro as planificações de algumas caixas como, por exemplo, de uma caixa de bombom. Uma questão interessante a ser colocada é: se dispomos de uma folha retangular, que recortes podemos fazer para obtermos a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo sem tampa?

Mesmo que, neste momento, seus alunos ainda não consigam responder esta questão, você pode distribuir as folhas entre as duplas. Assim que eles iniciarem a leitura da situação descrita na folha, obterão a resposta esperada. Quando concluírem, peça-lhes que exponham seus raciocínios. Procure analisar coletivamente e valorizar tudo que for apresentado.

Aspectos pedagógicos

O objetivo desta atividade é mostrar aos alunos uma aplicação das operações com polinômios: a obtenção de uma expressão algébrica para o volume de uma caixa cuja forma se assemelha a um paralelepípedo. A atividade também permite a integração da Álgebra com a Geometria, aspecto muito importante, que influencia as concepções que os alunos constroem da Matemática e que tem sido negligenciado no ensino tradicional.

Professor, logo na primeira leitura da folha, seus alunos poderão concluir que, se recortarmos quatro quadrados idênticos, um de cada canto de uma folha retangular, obteremos a planificação de uma caixa retangular sem tampa. É importante destacar também que, para dar conta das questões que são propostas ali, eles terão que utilizar a fórmula que fornece o volume do paralelepípedo. Caso não se lembrem, você pode deixar escrito no quadro que o volume do paralelepípedo pode ser encontrado fazendo-se o produto das medidas das três dimensões (ou seja, comprimento x largura x altura).

Observe que, na folha, os itens foram elaborados de modo que os anteriores sirvam de base para a resolução dos seguintes. Assim, o esboço da caixa, solicitado logo no primeiro item, ajuda os alunos a enxergarem que as três dimensões são, respectivamente, $40 - 2x$, $50 - 2x$ e x . A identificação destas expressões, por sua vez, e a substituição das mesmas na fórmula do volume do paralelepípedo conduzem à igualdade $V(x) = (40 - 2x) \cdot (50 - 2x) \cdot x$. É no item c que os alunos terão oportunidade de realizar algumas das operações com polinômios estudadas nesta unidade. Desenvolvendo corretamente os produtos constantes em $V(x) = (40 - 2x) \cdot (50 - 2x) \cdot x$, os alunos encontrarão $V(x) = 4x^3 - 180x^2 + 2000x$ e, na análise de seus procedimentos, é importante que você sinalize para a turma: a) o emprego da propriedade distributiva na multiplicação e b) a redução dos termos semelhantes na adição e na subtração.

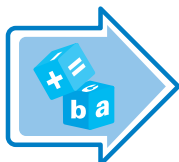
No item d, em que é solicitado o volume quando $x=4$, é aconselhável que você explore com seus alunos a simbologia matemática para esta questão. Esta solicitação em linguagem matemática corresponde ao $V(4)$ e, como o cálculo do valor numérico de um polinômio já foi explorado em seções anteriores, esperamos que facilmente seus alunos concluam que o volume desejado é 1984 cm^3 .

Para finalizar, é fundamental que você utilize o último item da folha para discutir as restrições que o contexto impõe ao cálculo do valor numérico do polinômio. Num contexto algébrico podemos substituir o x por qualquer número real e obter um valor para $V(x)$. Mas, no contexto geométrico, isso não é possível. Afinal, se os quadrados que recortamos nos cantos da folha tiverem lados maiores ou iguais a 20 cm , não conseguiremos montar nenhuma caixa!

Seção 2 – Funções polinomiais

Páginas no material do aluno

90 a 102

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|-------------------------|--|---|------------------|------------------------|
|  | Operando com polinômios | Um conjunto de cartas (baralho), feito a partir de modelo em anexo | A atividade propõe um jogo para a fixação dos principais conceitos associados à adição, à subtração e à multiplicação de polinômios | Duplas | 2 tempos de 40 minutos |

Aspectos operacionais

Nesta atividade, propomos um jogo para a fixação dos principais conceitos associados à adição, à subtração e à multiplicação de polinômios. Assim como no jogo das raízes, os alunos terão um pequeno baralho, construído a partir do modelo que segue em anexo no pen drive. As cartas deste baralho são de dois tipos: no primeiro, as cartas mostram polinômios e uma operação e, no segundo, as cartas apresentam apenas um polinômio. Caberá aos alunos, no menor tempo possível, formar pares de cartas em que uma contenha uma operação e a outra contenha o resultado desta operação. Para facilitar sua explicação sobre o jogo para os alunos, apresentamos a seguir um passo a passo

com as regras:

Regra 1: Cada dupla de alunos receberá as cartas do jogo que deverão ser embaralhadas;

Regra 2: Depois de embaralhadas, as cartas deverão ser dispostas sobre a mesa com seus conteúdos à mostra;

Regra 3: As duplas devem formar pares de cartas em que uma operação com polinômios e a outra é o resultado desta operação;

Regra 4: Ganha o jogo a dupla que formar todos os pares no menor tempo.

Sugerimos que você organize as duplas, procurando colocar, em cada uma, alunos com diferentes níveis de entendimento do assunto. Nossa intenção é que, desta forma, um aluno possa ajudar o outro e que a disputa entre as duplas seja acirrada. Caso contrário, os alunos poderão perder o interesse pelo jogo. Recomendamos também que você explique as regras antes de distribuir os baralhos entre as duplas.

Aspectos pedagógicos

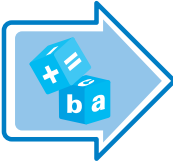
Professor, se julgar necessário, antes de propor o jogo, você pode fazer uma breve revisão sobre as operações com polinômios ali envolvidas. Coloque alguns exemplos e peça aos alunos para irem ao quadro resolvê-los. Crie condições para que eles reconheçam algumas propriedades, como a comutatividade da adição e da multiplicação de polinômios e a associatividade da multiplicação.

Lembre-se de que tão importante quanto jogar é refletir sobre o jogo. Assim, procure questioná-los: que operação acham mais complicada? E mais demorada? Das cartas do jogo, qual apresentou o cálculo mais complexo?

Perceba ainda que, se além de jogar, os alunos tiverem oportunidade de criar novas cartas, poderão avançar ainda mais na compreensão das operações. Se puder, já leve até cartas em branco para distribuir entre as duplas e solicitar a criação de novas cartas.

Atividades de avaliação

Avaliação

| Tipos de Atividades | Título da Atividade | Material Necessário | Descrição Sucinta | Divisão da Turma | Tempo Estimado |
|---|---------------------|--|---|------------------|----------------|
|  | Momento de Reflexão | Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta | Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas. A primeira consiste num registro de aprendizagens e a segunda na realização de questões objetivas e dissertativas selecionadas pelo professor | Individual | 40 minutos |

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último dos tempos de aula destinados à presente unidade. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas. Dividiremos nossas sugestões em duas etapas, conforme explicitado a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Apresentamos a seguir algumas questões para os alunos responderem. A ideia é que elas sejam complementares às que você já usa para avaliar o desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas.

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?
2. Qual o valor numérico do polinômio $p(x) = (x - 3)^7 (2x - 3)^5$ quando $x=2$?
3. Classifique a afirmação em verdadeira ou falsa, justificando a sua resposta: “A soma de dois polinômios de grau 3 resulta um polinômio de grau 3”.

4. O comprimento de uma janela retangular mede 5 m a mais que sua altura x . Se a área da janela é 36 m², determine o polinômio $p(x)$ de segundo grau que permita calcular as dimensões da janela.

5. A expressão $\frac{x^{-4} + x^{-2} + 1}{x^{-4}}$ é um polinômio? Explique.

Sugerimos também que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros, a serem entregues ao seu formador no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho e, se for o caso, repensá-los de acordo com as críticas e sugestões apresentadas.

Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Sugerimos para compor esta etapa do instrumento avaliativo, a escolha de pelo menos uma questão objetiva e uma discursiva que contemplem uma habilidade pretendida nesta unidade. Nosso objetivo aqui é fazer com que o aluno compreenda uma situação real, aplique o princípio multiplicativo ou o conceito de permutação e faça uma reflexão mais profunda sobre procedimentos para contagem.

Sugestão de questão objetiva para a avaliação:

Questão 1: (PUC - SP)



Se $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 + ax + bx)$ para todo x real, os valores de a e b são, respectivamente:

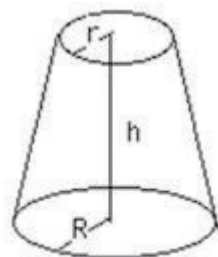
- a. -1 e -1
- b. 0 e 0
- c. 1 e -1
- d. -1 e 1
- e. 1 e 1

Sugestão de questão discursiva para a avaliação:

Questão:



Usando-se conhecimentos de geometria, pode-se calcular o volume V de um balde



através da fórmula $V = h(r^2 + Rr + R^2)$

Supondo-se que as medidas envolvidas são dadas em decímetros e que $h = r = 1$ dm, determine:

- O polinômio $V(R)$ que calcula o valor do volume do balde e sua unidade de volume.
- Explique, argumentando geometricamente, por que o polinômio obtido em (a) não possui raízes positivas. A seguir, verifique algebricamente que não há raízes.
- Qual o valor numérico $V(5)$? Se $V(R)$ tem valor 100, ache um intervalo de inteiros onde encontra-se R .

Gabarito

Registros de Aprendizagem

- Polinômios.
- O polinômio $p(x) = (x - 3)^7 (2x - 3)^5$ avaliado em $x=2$, dá $p(2) = (2-3)^7 (2 \cdot 2 - 3)^5 = (-1)^7 (1)^5 = -1$
- Os polinômios $p(x) = x^3$ e $q(x) = -x^3 + 1$ são de grau 3, entretanto, a soma deles, $p(x) + q(x) = x^3 - x^3 + 1 = 1$, possuindo grau 0. Logo é falsa a afirmação.

4. Se a altura de janela med x , então o comprimento da janela med $x+5$. Como a área da janela é 36m^2 , podemos dizer que $x+5=36$, donde vale, portanto, a equação $x^2+5x-36=0$. O polinômio procurado é $p(x)=x^2+5x-36$.

Manipulando-se a expressão $\frac{x^{-4}+x^{-2}+1}{x^{-4}} = \frac{x^4(x^{-4}+x^{-2}+1)}{x^4x^{-4}} = \frac{1+x^2+x^4}{1} = 1+x^2+x^4$ vemos que trata-se de um polinômio.

Resposta e comentários da questão objetiva sugerida:

Você pode intervir alertando aos alunos que o fundamental do problema é lembrar as condições para que dois polinômios sejam considerados idênticos.

Gabarito

Operando o lado direito da igualdade tem-se:

$$x^3+1 = x^3 + (1+a)x^2 + (a+b)x + b$$

Donde, igualando-se os coeficientes correspondentes a termos de mesmo grau, tem-se $a=-1$, $b=1$. Portanto, a resposta é letra D.

Resposta e comentários da questão discursiva sugerida:

Primeiramente, você deve alertar seus alunos que uma oportunidade de construir conhecimentos é fazê-lo através de problemas que introduzam novos conceitos. E este é o caso! Tranquelize-os em relação à fórmula que, num primeiro momento, pode trazer desconforto a alguns. Junto com os alunos, identifique cada um dos elementos da figura (tronco de cone), de modo que ele saiba exatamente que medidas indicadas na figura, correspondem a do balde. Ressalte a importância do assunto estudado, mostrando a abrangência e conexão entre os conteúdos aparentemente distantes.

- a. Para $h=r=1\text{ dm}$

$$V = h(r^2 + Rr + R^2) = 1(1^2 + 1.R + R^2) = R^2 + R + 1$$

é o polinômio que calcular o volume do balde. Repare que o volume está em dm^3 .

- b. O polinômio não possui raízes positivas, pois fornece o volume de um sólido não degenerado, a saber, um tronco de cone. Algebricamente, podemos pensar assim: como $(R+1)^2 \geq 0$ e $R^2+1 > 0$, a soma das desigualdades resulta que $2(R^2+R+1) > 0$, seja qual for o valor de R . Conclusão idêntica pode ser obtida se tentamos calcular as raízes do polinômio $V(R)$, que não possui raízes reais, pois seu discriminante é negativo.
- c. O valor numérico $V(5) = 5^2 + 5 + 1 = 31$. Observe que $V(9)=91$ e que $V(10)= 111$, de forma que R toma algum valor no intervalo $(9,10)$ já que o volume do balde cresce a medida que R aumenta.

