

Volume 2 • Módulo 4 • Matemática

Expansão: Análise Combinatória Parte II

Érika Silos de Castro (coordenação), André Luiz Martins Pereira, Luciana Felix da Costa Santos e Renata Cardoso Pires de Abreu.

Introdução

A unidade Análise Combinatória 2, da expansão do material do aluno, traz várias situações concretas em que são utilizados métodos de contagem e a Análise Combinatória. Nesta unidade, o aluno terá a oportunidade de ampliar as discussões realizadas em unidades anteriores, compreendendo princípios e conceitos envolvidos neste tópico da Matemática, como o princípio fundamental da contagem e os conceitos de arranjo, combinação e permutações com repetição.

Pesquisamos alguns recursos e atividades para auxiliar você, professor, a explorar este tema em suas aulas. Esperamos que estas sugestões venham complementar as estratégias que você já emprega normalmente, potencializando, assim, a utilização do material didático do aluno.

Sugerimos que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora, que deve ser realizada em grupo, promovendo uma dinâmica entre os alunos. Nesse momento, é esperado que eles desenvolvam e relembrem algumas noções e elementos relacionados à Análise Combinatória.

Para dar sequência ao estudo dessa unidade, disponibilizamos alguns recursos complementares, vinculados ao conteúdo do material didático do aluno. Sugerimos que sejam utilizados nas aulas subsequentes à aula inicial, de acordo com a realidade da sua turma. Ressaltamos a importância de fazer alterações e adaptações sempre que julgar necessário.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro momento consiste numa revisão geral dos conteúdos, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o estudo. Já o segundo momento consiste numa avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

A descrição e o detalhamento das sugestões estão nas tabelas e textos a seguir.

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	4	Análise Combinatória Parte II	4 aulas de 2 tempos

Título da unidade	Tema
Análise Combinatória - Parte II	Análise Combinatória
Objetivos da unidade	
Identificar e resolver problemas que envolvam arranjo, combinação e permutação com repetição.	
Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	145 a 146
Seção 1 – Combinação e Arranjo	147 a 159
Seção 2 – Permutação com repetição	160 a 163
Seção 3 – Triângulo de Pascal (leitura opcional)	163 a 167
Resumo	167
Veja ainda...	167
O que perguntam por aí?	171 a 172

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

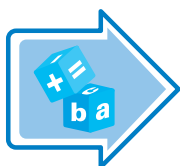
Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:



Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.



Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.



Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.



Avaliação

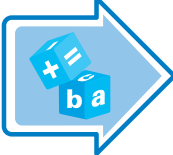
Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.



Exercícios

Proposições de exercícios complementares

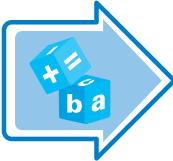
Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	De malas prontas	Computador com Datashow, vídeo, software Geogebra instalado, folha de atividades, calculadora.	A atividade explora temas ligados à matemática combinatória, tais como o princípio fundamental da contagem e o conceito de fatorial.	Grupos de quatro alunos.	45 minutos
	Matemática na dieta	Computador com Datashow, folha de atividades e calculadora.	A atividade propõe, a partir da discussão da imagem de uma pirâmide alimentar e de um pequeno texto, uma aplicação de conhecimentos matemáticos para combinar diferentes tipos de alimentos. Após a leitura e discussão a respeito de bons hábitos alimentares, os alunos serão convidados a resolver as questões propostas na folha de atividades.	Grupos de 3 ou 4 alunos	40 minutos

Seção 1 – Combinação e Arranjo

Páginas no material do aluno


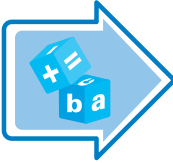
147 a 159

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Combinação ou permutação, o que utilizar?	Cópias da folha de atividades.	A atividade propõe a resolução de problemas que envolvem conceitos de combinação e apresenta uma forma de raciocinar que dispensa a utilização da fórmula. A ideia é incentivar os alunos a compreender o raciocínio que justifica a fórmula de combinação simples. Esperamos também que eles observem que um mesmo problema pode ser resolvido a partir de estratégias distintas.	Duplas	45 minutos
	De quantas maneiras posso amarrar meu cadarço?	Cópias da folha de lápis, modelo sugerido	Nesta atividade, será enunciado um problema de combinatória para determinar o número de maneiras de passar o cadarço em um tênis, obedecendo a certas regras.	Grupos de quatro alunos.	40 minutos

Seção 2 – Permutação com repetição

Páginas no material do aluno


160 a 163

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Geometria do Taxista e Combinatória	Computador com Datashow, cópias da folha de atividades, mapa.	A atividade propõe uma discussão acerca dos conceitos de combinação e permutação, a partir da apresentação de um vídeo e de um problema sobre a menor distância entre dois pontos no plano.	Individual.	45 minutos
	A Matemática no método Braille	Cópias da folha de atividade	A atividade propõe a resolução de um problema relacionado a conceitos combinatórios, utilizando como contexto a escrita em relevo do sistema Braille.	Trios	45 minutos


Seção – O que perguntam por aí?

Páginas no material do aluno


171 a 172

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de vestibular	Computador com Datashow, imagem para projeção (disponível neste material e no DVD do professor)	-	Duplas	-

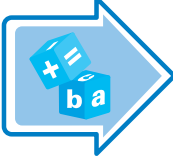
Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios adicionais	Cópias da folha de atividades	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade, dividido em duas etapas. A primeira consiste no registro de aprendizagens e a segunda na resolução de questões objetivas e dissertativas. A escolha das questões a serem aplicadas fica a critério do professor, levando em consideração as especificidades de cada turma.	Individual	40 minutos

Exercícios complementares

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios adicionais	Cópias da folha de atividades	Essa atividade propõe alguns exercícios que podem auxiliar na fixação das principais noções ligadas a Análise Combinatória	Duplas ou Trios	-

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	De malas prontas	Computador com Datashow, vídeo, software Geogebra instalado, folha de atividades, calculadora.	A atividade explora temas ligados à matemática combinatória, tais como o princípio fundamental da contagem e o conceito de fatorial.	Grupos de quatro alunos.	45 minutos

Aspectos operacionais

A primeira etapa da atividade consiste na exibição do vídeo De malas prontas, que está disponível em seu DVD e também no site <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1083>.

Professor, antes de dar início à atividade, verifique se o software Geogebra está corretamente instalado no computador. Também é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

No dia da aplicação da atividade, inicie a aula com a apresentação do vídeo, e somente após a execução do vídeo, solicite que a turma se divida em grupos de quatro alunos. Em seguida distribua uma folha de atividades para cada aluno, mas sugira que os integrantes do grupo tentem resolver às questões propostas juntos, de maneira que possam trocar ideias durante a execução da atividade.

Depois que os alunos tiverem respondido às primeiras quatro questões da folha de atividades, utilize o computador e o Datashow para projetar o gráfico contido no arquivo “Recurso – GRÁFICO FATORIAL – DE MALAS PRONTAS. ggb”, disponível em seu DVD. A partir desse gráfico os alunos poderão, com a sua ajuda, responder à última questão proposta na folha de atividades.

Assim que todos os grupos tiverem terminado a tarefa, promova uma discussão sobre as conclusões que eles alcançaram com essa exploração.

Aspectos pedagógicos

No vídeo utilizado, são desenvolvidos os conceitos de Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e de fatorial. Para ilustrar cada uma dessas noções, são desenvolvidos problemas relativos à arrumação da mala de viagem da personagem Raquel. O problema proposto no vídeo com o objetivo de que ilustre o uso do PFC é o seguinte: de quantas maneiras uma pessoa pode se vestir, dado que possui dois pares de sapatos, três pares de meia, quatro calças e oito blusas?

É importante destacar para os alunos que o PFC pode ser utilizado para resolver muitos outros problemas de contagem, mas que não pode ser aplicado diretamente a todas as situações: o princípio parte da premissa de que as escolhas são feitas de forma independente, ou seja, a escolha de um tipo de elemento não influencia a escolha de nenhum outro. Por exemplo, consideremos a seguinte situação: gostaríamos de saber quantas são as senhas alfanuméricas de cinco dígitos de modo que se o primeiro dígito é preenchido por uma vogal o último também seja preenchido por uma vogal; se o primeiro dígito é preenchido por uma consoante o último também seja preenchido por uma consoante; e se o primeiro dígito é preenchido por um numeral o último também seja preenchido por um numeral. Nessa situação não é possível aplicar diretamente o PFC. Para aplicar o princípio, primeiro teremos que separar a situação em três casos: senhas iniciadas por vogal ($5 \times 31 \times 31 \times 31 \times 4$), senhas iniciadas por consoante ($21 \times 31 \times 31 \times 31 \times 20$) e senhas iniciadas por numeral ($10 \times 31 \times 31 \times 31 \times 9$), e depois somar os resultados.

Outro aspecto diz respeito à ordem dos elementos do agrupamento que se quer formar. O PFC apenas poderá ser aplicado diretamente nos casos em que a ordem do agrupamento é importante. Por exemplo, ao nos perguntarmos sobre o número de comissões de três pessoas que podem ser formadas a partir de um grupo de oito pessoas (digamos, A, B, C, D, E, F, G e H), a simples aplicação direta do PFC não responde corretamente à questão. Aplicando o PFC teríamos 8 formas de escolher a primeira pessoa, 7 formas de escolher a segunda e 6 formas de escolher a terceira (totalizando $8 \times 7 \times 6$ possibilidades). Mas, como nesse caso a ordem em que essas pessoas serão agrupadas não importa, dentre as comissões contabilizadas estaríamos contando (equivocadamente!) como distintas a comissão formada pelas pessoas A, B e C, e a comissão formada pelas pessoas C, A e B. Ou a comissão formada pelas pessoas F, G e H, e a comissão formada pelas pessoas G, F e H. Dessa forma, devemos descontar todas as comissões equivalentes contadas equivocadamente como sendo distintas. Assim, por exemplo, podemos verificar (também pelo uso do PFC) que existem $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ grupos equivalentes formados pelas pessoas A, B e C. E que existem $3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$ grupos equivalentes formados pelas pessoas F, G e H. E o mesmo vale para qualquer outro grupo formado. Sendo assim, as comissões estão sendo contadas $3! = 6$ vezes dentro do total obtido via aplicação do PFC. Logo, o número real de comissões formadas será, na verdade, dado por $\frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$ ou $\frac{8!}{3! \times 5!}$.

Terminada a exposição do PFC, o vídeo introduz o conceito de fatorial como uma forma de representar o número de maneiras de arrumar 20 malas em uma esteira. O fatorial é apresentado no vídeo como uma forma de representação abreviada do produto de um número natural por todos os seus anteriores naturais a partir do 1. Você pode aproveitar esse momento para chamar a atenção dos alunos para esse conceito, pois, assim como o PFC, o fatorial pode ser aplicado em vários problemas de contagem, brevemente citados pelo vídeo.

Na parte final do vídeo, ressalte o comentário da personagem Raquel sobre o número de maneiras de dispor uma determinada quantidade de malas. O fato de esse número já ser muito grande para uma quantidade relativamente pequena de malas ilustra o crescimento rápido do fatorial, tema importante para aplicações em computação.

Depois da execução, você pode abordar um pouco mais dos conceitos aplicados no vídeo, através dos problemas propostos da folha de atividades.

Ao projetar o gráfico “Recurso – GRÁFICO FATORIAL – DE MALAS PRONTAS.ggb”, disponível em seu DVD, chame a atenção dos seus alunos para o fato da função fatorial ter como domínio o conjunto dos números naturais. Isso fica claro a partir da observação do gráfico que, nesse caso, é formado por pontos e não por curvas contínuas (quando o domínio é um conjunto discreto, como é o caso dos naturais, o gráfico da função é representado por pontos). Seu gráfico, portanto, corresponde apenas aos pontos marcados em vermelho. A curva pontilhada que está passando sobre esses pontos servirá como guia e ajudará na comparação do comportamento dela com o de outras funções reais.

Durante a resolução da quinta questão proposta na folha de atividades, a partir da projeção do gráfico, encoraje os alunos a sugerir leis algébricas para algumas funções que já foram trabalhadas anteriormente: função afim, função exponencial, por exemplo. Na mesma tela do gráfico da função fatorial, insira a lei algébrica e construa o gráfico das funções sugeridas pelos alunos. Para isso, insira na caixa de entrada do Geogebra as expressões das funções que forem sugeridas pelos seus alunos, ajudando-os a resolver a quinta questão proposta na folha de atividades.

É importante trabalhar com funções que sejam estritamente crescentes, já que esse é o comportamento da função fatorial.

Nesse momento, você poderá aproveitar para discutir e relembrar algumas características das funções já trabalhadas pelos alunos, como a relação entre os coeficientes e seu comportamento de crescimento, por exemplo.

Assim que todos os grupos tiverem terminado a tarefa, promova uma discussão sobre as conclusões que eles alcançaram com essa exploração.

Folha de Atividades – De malas prontas

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Questão 1

Como é chamada a estratégia de cálculo utilizada pela Raquel e pelo funcionário do aeroporto para determinar o número de maneiras possíveis e distintas de uma pessoa se vestir sabendo o número de pares de sapatos, pares de meias, calças e blusas que ela possui?

Questão 2

Utilizando a mesma estratégia de contagem usada pela Raquel e pelo funcionário do aeroporto, determine de quantas maneiras possíveis uma pessoa pode se vestir para uma ida à praia, dado que possui quatro pares de chinelos, cinco biquínis, duas bolsas de praia, dois óculos de sol e três chapéus?

Questão 3

No vídeo, o funcionário do aeroporto apresenta uma forma de determinar o número de maneiras que podemos arrumar, ordenadamente, certo *número de malas na esteira do aeroporto*. (Dica: faça uso da calculadora)

- a. De quantas maneiras isso poderia ser feito no caso de dispormos de 5 malas?

- b. De quantas maneiras isso poderia ser feito no caso de dispormos de 10 malas?

- c. E no caso de dispormos de 20 malas?

Questão 4

Há uma maneira de escrever cada um dos produtos acima de forma mais simples? Qual seria ela?

Questão 5 - Para pensar junto com a turma


A personagem de Raquel, no fim do vídeo, afirma que o resultado do fatorial de um número n cresce muito rápido quando o valor de n cresce. Mas qual a grandeza desta “rapidez”?

Para responder a esse questionamento, observe o gráfico apresentado pelo seu professor. Esse gráfico representa o comportamento do fatorial de n quando n vai de 0 até o infinito positivo.

Pense na expressão de algumas funções reais e peça para o seu professor construa o gráfico de cada uma delas nessa mesma janela.

- O que você pôde concluir?
- Dê exemplos de funções cujo crescimento é mais lento do que o crescimento da função fatorial.
- Dê exemplos de funções cujo crescimento é mais rápido do que o crescimento da função fatorial.

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Matemática na dieta	Computador com Datashow, folha de atividades e calculadora.	A atividade propõe, a partir da discussão da imagem de uma pirâmide alimentar e de um pequeno texto, uma aplicação de conhecimentos matemáticos para combinar diferentes tipos de alimentos. Após a leitura e discussão a respeito de bons hábitos alimentares, os alunos serão convidados a resolver as questões propostas na folha de atividades.	Grupos de 3 ou 4 alunos	40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, sugerimos que você inicie esta atividade com a apresentação da figura Pirâmide Alimentar, que está disponível em arquivo PDF em seu DVD. Para tal apresentação utilize um computador e um projetor multimídia. Caso esse tipo de material multimídia não esteja disponível para uso em sua unidade escolar, você pode tentar reproduzir a pirâmide na lousa. É importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

Após a observação da imagem e de uma reflexão sobre as informações nela contidas, solicite que a turma se divida em grupos de três ou quatro alunos, distribua a folha para os grupos, leia com eles o texto sobre a pirâmide alimentar apresentado na folha de atividades.

Após a apresentação e discussão do texto, oriente os grupos na resolução das questões propostas na folha de atividades. Ao final da atividade, promova um debate baseado nos resultados obtidos pelos alunos, de acordo com o proposto na seção aspectos pedagógicos.

Aspectos pedagógicos

Essa é uma atividade foi adaptada de uma proposta disponível no Portal do Professor do MEC, que se encontra no endereço: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=25069>.

Seu objetivo é apresentar aos alunos, num primeiro momento, a distribuição de diferentes alimentos numa pirâmide, de acordo com seus valores nutricionais. Após isso, são propostas algumas questões a partir de uma situação-problema que envolve métodos de contagem e diferentes maneiras de se combinar os alimentos disponíveis num cardápio.

Professor, para dinamizar a discussão, você pode levantar questões que estimulem os alunos a manifestar suas opiniões e seus conhecimentos sobre o que a imagem da pirâmide representa e a refletir sobre o porquê de os alimentos estarem distribuídos dentro de uma pirâmide. Por exemplo, você poderá perguntar sobre a relação entre o número de porções de cada tipo de alimento e a área do desenho em que este tipo alimento está representado. Isso pode fazer com que os alunos percebam que as áreas maiores representam os alimentos que devemos consumir em maior quantidade e que as áreas menores representam os alimentos que devemos consumir em menor quantidade. Poderá perguntar também se a área destinada à representação do leite e produtos lácteos, carnes e ovos e leguminosas foi bem distribuída entre esses tipos de alimentos, observando que a área destinada à representação do leite e produtos lácteos deveria ser maior que a destinada às carnes e ovos e esta, por sua vez, maior que a área destinada às leguminosas.

Oriente os alunos a fazerem suas combinações de alimentos a partir da situação problema proposta na folha de atividades. Se desejar, você pode anotar na lousa algumas das diferentes possibilidades apresentadas por eles.

Após anotar algumas sugestões, apresente aos alunos combinações do tipo:

- Arroz, nhoque, alface, tomate, acelga, peixe e abacaxi
- Arroz, alface, acelga, nhoque, tomate, peixe e abacaxi.

Você pode mostrar aos alunos que as duas combinações possuem os mesmos elementos, mas listados de maneiras diferentes. Esse exemplo ilustra o conceito de Combinação Simples, ou seja, uma situação em que a ordem de escolha dos elementos não faz diferença para a composição final do agrupamento.

Porém se tivermos uma situação em que a ordem de escolha faça diferença para a composição final (como, por exemplo, os algarismos de um número de telefone ou de um endereço), temos outro tipo de agrupamento chamado Arranjo.

Desta forma, acreditamos que a diferença entre combinação simples e arranjo é reforçada, evitando os erros frequentemente cometidos pelos alunos na diferenciação entre estes conceitos.

Pode ser que os alunos encontrem diferentes maneiras de resolver o problema. Valorize cada iniciativa, porém apresente a resolução formal da combinatória para que entendam que nem sempre conseguirmos verificar todas as possibilidades apenas por tentativa.

Ao final da atividade, promova um debate a partir dos resultados obtidos pelos alunos. Você poderá questioná-los sobre a quantidade de possibilidades de escolha de um cardápio saudável. Poderá também levá-los a refletir sobre as suas próprias dietas, indicando se estariam ou não de acordo com o recomendado. Poderá, ainda, apontar que apenas ter hábitos alimentares saudáveis não é o bastante: é preciso incluir exercícios físicos regulares em suas rotinas diárias, dentre outras coisas.

Folha de Atividades – Matemática da Dieta

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Situação-problema

Suponha que, em um restaurante, nos deparamos com certa variedade de alimentos para compor uma refeição. Os alimentos oferecidos neste restaurante, agrupados segundo a Pirâmide Alimentar, são:

Grupo dos vegetais	Grupo do arroz e das massas	Grupo das carnes, peixes e ovos	Grupo das frutas
Alface	Arroz	Carne bovina	Banana
Cenoura	Macarrão	Frango	Laranja
Tomate	Lasanha	Peixe	Mamão
Beterraba	Nhoque	Ovos	Abacaxi
Repolho	Pão		Maçã
Acelga			

Imagine que uma nutricionista tenha nos informado que, para realizar uma refeição saudável, devemos escolher, dentro desta tabela:

- 3 alimentos do grupo dos vegetais;
- 2 alimentos do grupo do arroz e massas;

- 1 alimento do grupo das carnes, aves, peixes e ovos e
- 1 alimento do grupo das frutas.

A partir dessa situação, responda as questões a seguir:

Questão 1

Determine o número de possibilidades diferentes que temos para escolher 3 alimentos, dentre um total de 6, do grupo dos vegetais.

Questão 2

Como saber o número de maneiras diferentes que temos para escolher 2 alimentos do grupo arroz e massas, dentre um total de 5?

Questão 3

E para escolhermos 1 alimento do grupo das carnes, aves, peixes e ovos, quantas possibilidades diferentes temos?

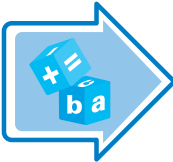
Questão 4

Seguindo os conselhos da nutricionista, de quantas maneiras podemos compor essa refeição?

Seção 1 – Combinação e Arranjo

Páginas no material do aluno

147 a 159

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Combinação ou permutação, o que utilizar?	Cópias da folha de atividades.	A atividade propõe a resolução de problemas que envolvem conceitos de combinação e apresenta uma forma de raciocinar que dispensa a utilização da fórmula. A ideia é incentivar os alunos a compreender o raciocínio que justifica a fórmula de combinação simples. Esperamos também que eles observem que um mesmo problema pode ser resolvido a partir de estratégias distintas.	Duplas	45 minutos

Aspectos operacionais

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma. No momento da aplicação da atividade, solicite que a turma se divida em duplas. Distribua uma folha de atividades para cada aluno, mas sugira que a dupla dialogue, trocando ideias para resolver cada uma das questões propostas. Assim que os grupos tiverem terminado a tarefa, promova uma discussão sobre as conclusões que eles alcançaram.

Aspectos pedagógicos

No item 1, apresentamos, a partir de um raciocínio baseado no princípio multiplicativo e na ideia de permutação, a solução de uma questão que geralmente é resolvida pela fórmula da combinação. Na letra c deste mesmo item, você pode chamar atenção para o significado da palavra permutação ali utilizada.

Esperamos que o aluno compreenda o raciocínio a fim de que não seja apenas um mero aplicador de fórmula. Repare que os alunos que se ocupam mais em aplicar a fórmula do que em compreender e resolver o problema têm

muito mais dificuldade em construir um significado sobre o que estão fazendo.

É nesse sentido que apresentamos essa atividade: incentivando que os alunos pensem sobre as situações propostas, utilizando os conhecimentos que já possuem sobre raciocínios combinatórios.

No último item, você pode mostrar para a turma como é obtida a fórmula da combinação a partir do raciocínio apresentado.

Folha de Atividades – Combinação ou permutação, o que utilizar?

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Acompanhe o raciocínio proposto na questão 1 e, em seguida, resolva as outras questões.

1. Quantas comissões diferentes com 3 pessoas podem ser formadas a partir de um conjunto de 5 pessoas?

a. De um conjunto de 5 pessoas, se quisermos selecionar três, é natural pensarmos:

- primeiro: de quantas maneiras podemos escolher a primeira pessoa.
- segundo: de quantas maneiras podemos escolher a segunda pessoa.
- terceiro: de quantas maneiras podemos escolher a terceira pessoa.

Nesse caso temos:

$$5 (1^{\text{a}} \text{ escolha}) \times 4 (2^{\text{a}} \text{ escolha}) \times 3 (3^{\text{a}} \text{ escolha}) = 60$$

Ou seja, há 60 maneiras de formar um conjunto com três elementos distintos a partir de um conjunto de 5 elementos.

b. Suponhamos que João, Marcelo e Daniela estejam nesse grupo de pessoas.

Pergunta: a comissão João, Marcelo e Daniela é igual ou diferente da comissão Daniela, Marcelo e João?

As duas comissões são exatamente a mesma. Nesse caso, a mudança da ordem de apresentação dos membros da comissão não importa.

c. Temos, então, que pensar de quantas maneiras essas três pessoas podem se organizar formando a mesma comissão.

Ora, isso corresponde a encontrar a quantidade de maneiras diferentes de organizar um grupo formado por essas três pessoas - ou, em outras palavras, na permutação dessas três pessoas. Assim, temos $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ maneiras de organizar essas três pessoas.

Repare que isso significa que essa mesma comissão é contada 6 vezes!

d. E se no lugar de João, Marcelo e Daniela tivéssemos Daniela, Andreia e Bruna? Aconteceria a mesma coisa?

Aconteceria exatamente a mesma coisa para esse grupo - e para qualquer outro grupo de 3 pessoas! Assim, cada comissão de 3 pessoas formada é contada 6 vezes.

e. Como fazer para descontar o excesso?

Para descontar o excesso, basta dividir o total de possibilidades, pela quantidade de vezes que cada comissão é contada.

$$\frac{60}{6} = 10$$

Logo, são 10 as comissões com 3 pessoas que podem ser formadas a partir de um conjunto de 5 pessoas.

2. Escolha 5 nomes e faça a lista das comissões, verificando se essa é realmente a quantidade de comissões possíveis indicada na resolução da questão 1.

Considerando o raciocínio apresentado na questão 1, responda:

3. De quantos modos podemos dividir 8 objetos em um grupo de 5 objetos?

4. E se o grupo tiver 3 objetos?

5. Um time de futebol é composto de 11 jogadores, sendo 1 goleiro, 4 zagueiros, 4 meio campistas e 2 atacantes. Considerando que o técnico dispõe de 3 goleiros, 8 zagueiros, 10 meio campistas e 6 atacantes, determine o número de maneiras possíveis de formar esse time.

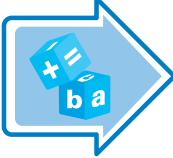
(Dica: determine primeiramente de quantas maneiras podem ser escolhidos o goleiro, os zagueiros, os meios campistas e os atacantes. Em seguida, multiplique os resultados).

6. Agora, resolva a primeira questão utilizando a fórmula de combinação: $C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Compare a sua resposta com o resultado apresentado no item 1. O que você observa?

Seção 1 – Combinação e Arranjo

Páginas no material do aluno

147 a 159

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	De quantas maneiras posso amarrar meu cadarço?	Cópias da folha de lápis, modelo sugerido	Nesta atividade, será enunciado um problema de combinatória para determinar o número de maneiras de passar o cadarço em um tênis, obedecendo a certas regras.	Grupos de quatro alunos.	40 minutos

Aspectos operacionais

Essa é uma atividade desenvolvida pelo grupo de Recursos Educacionais Multimídia para a Matemática do Ensino Médio da Unicampe se encontra disponível no site: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1005>

A atividade envolve a utilização da combinatória para determinar o número de maneiras de passar o cadarço em um tênis. Para ajudar os alunos a visualizarem as soluções, você pode fazer um modelo utilizando papel - preferencialmente um papel mais “duro”, como o papel cartão. Para isso, pegue um pedaço de papel e dobre como indicado abaixo.

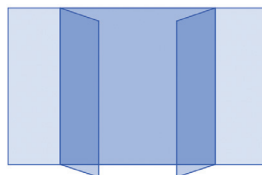


Figura1: Dobrando o pedaço de papel

Você deve ter algo como:

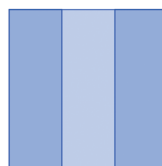


Figura 2: Pedaço de papel dobrado

Finalmente, faça seis pares de furos como indicado a seguir.

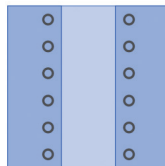


Figura 3: Pedaço de papel dobrado e com seis pares de furos

Utilize barbante no lugar do cadarço, se necessário. Repare que, no modelo, temos seis pares de furos, mas os alunos não precisam necessariamente usar todos os pares de furos em todos os momentos da atividade.

Uma vez que os modelos estejam prontos, distribua-os juntamente com as folhas de atividades para os grupos e, em seguida, apresente as regras de passagem do cadarço descritas na folha.

Peça, então, para que os alunos passem o cadarço ou o barbante pelos furos do modelo (sendo suficiente um modelo para cada grupo) de modo que as regras apresentadas sejam respeitadas.

Peça para que os grupos apresentem seus modelos para os outros grupos, já com os cadarços passados, para que possam comparar e verificar que existem muitas maneiras de executar esse procedimento.

Depois peça que executem os procedimentos descritos na folha de atividades.

Ao final da atividade, promova um debate baseado nos resultados obtidos, de acordo com o sugerido nos procedimentos pedagógicos.

Aspectos pedagógicos

A experiência com um tênis e um cadarço, ou utilizando o modelo sugerido, é indicada para que os alunos entendam como o cadarço pode passar pelos furos e compreendam a quantidade de possibilidades em cada passagem do cadarço. Os alunos deverão, então, para entender melhor o problema, tentar esboçar maneiras de passar o cadarço que satisfaçam todas as regras estabelecidas. É importante que eles vivenciem o processo para, em seguida, pensarem em uma maneira de descobrir quantas possibilidades de passar o cadarço existem.

Na comparação sugerida no item 1, os alunos devem perceber que um mesmo conjunto de regras permite várias maneiras de organização. Por isso, incentive que os grupos mostrem a sua organização e mostrem que a organização apresentada satisfaz as regras.

No item 2, os alunos devem registrar uma passagem de cadarço, para que nos dois itens seguintes estejam aptos a indicar a quantidade total de passagens de cadarço em um tênis com 5 pares de furos.

Ao final do item 3, você pode solicitar que cada um dos grupos vá até a lousa e desenhe uma possibilidade de passar o cadarço. Feito isso, pergunte à turma se os desenhos satisfazem as regras. Verifique se foram desenhadas todas as possibilidades. Se necessário, diga quantas ainda existem e peça para que continuem tentando desenhar. Só então esboce o restante das possibilidades – e conclua que são apenas seis, como indicado na figura a seguir.



Figura 4: Maneiras de passar o cadarço

O item 4 é uma maneira de instigar os alunos a utilizarem o raciocínio combinatório. Isso tomará um bom tempo dos alunos. Por isso, deixe-os discutir com calma.

O raciocínio fundamental para a solução do item 4 é que, como o padrão deve ser simétrico, basta decidir os primeiros seis furos pelos quais o cadarço deve passar, pois, a partir daí, os outros seis furos ficam determinados pela simetria.

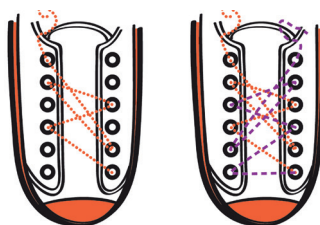


Figura 5: Simetria na forma de passar o cadarço

É importante notar ainda que a simetria também implica que apenas um dos furos de cada par deve ser visitado nas seis primeiras passadas do cadarço, pois, se não fossem, não haveria meio de conseguir a simetria desejada.

Além disso, devido à terceira, a primeira destas linhas (par de furos em lados opostos) deve ser obrigatoriamente a de cima regra e a última é obrigatoriamente a de baixo, já que os furos da linha de baixo devem ser visitados consecutivamente. Assim, a primeira e a sexta linhas têm a ordem de passagem de cadarço determinada, faltando apenas decidir como serão as passadas nos quatro furos intermediários.

Assim, para obter um padrão para o cadarço, podemos iniciar pelo furo da esquerda da linha superior e decidir em que ordem as quatro linhas intermediárias serão visitadas.

Para escolher a ordem das quatro linhas, lembramos primeiramente da quarta regra, de acordo com a qual devemos ficar alternando o lado de passagem do cadarço. A partir dela, concluímos que primeiro furo pode ser escolhido dentre quatro possibilidades. A seguir, concluímos que o segundo furo pode ser escolhido dentre três possibilidades, e o terceiro dentre duas possibilidades. Dessa maneira, o quarto furo já fica determinado, tendo apenas uma possibilidade de escolha. Logo, há $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ possibilidades de escolha para a ordem das linhas - e, portanto, 24 possibilidades de passar o cadarço satisfazendo as regras descritas pelo problema.

Ao final da atividade, promova um debate baseado nos resultados obtidos abordando questões do tipo: O que acontecerá com o número de possibilidades de passagem do cadarço se o número de furos aumentar ou diminuir? O que foi mais fácil: determinar o número de possibilidades da passagem dos cadarços usando tentativa e erro (ou seja, testando uma a uma) ou usando conhecimentos de Análise Combinatória?

Folha de Atividades – De quantas maneiras posso amarrar meu cadarço?

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Você já deve ter colocado o cadarço em um tênis, certo?



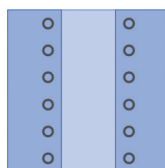
Nessa atividade, você determinará a quantidade de maneiras de colocar um cadarço em um tênis, seguindo as seguintes regras para a passagem do cadarço.

- O cadarço deve formar um padrão simétrico em relação ao eixo vertical;
- O cadarço deve passar exatamente uma vez por cada furo, sendo indiferente se ele o faz por cima ou por baixo;
- O cadarço deve começar e terminar nos dois furos superiores e deve ligar os dois furos inferiores diretamente - isto é, sem passar por outros furos;
- O cadarço deve alternar de um lado para o outro a cada passada.

1. Utilizando o modelo distribuído por seu professor, passe o barbante pelos furos de acordo com as regras citadas acima.

Compare o resultado com o de outros colegas e veja se vocês fizeram da mesma forma.

2. O esquema a seguir representa um tênis com 5 pares de furos. Desenhe neste esquema uma passagem de cadarço que se adeque a todas as regras citadas.



3. Agora, você deve indicar o número total de possibilidades para passar o cadarço em um tênis com 5 furos, obedecendo às regras acima.

Se quiser, utilize o modelo para passar o barbante e registre as possibilidades em seu caderno.


4. Se no tênis houvesse seis pares de furos, quantas maneiras diferentes existiriam para se passar o cadarço satisfazendo as regras estabelecidas?

Dica: utilize os conceitos de análise combinatória

Seção 2 – Permutação com repetição

Páginas no material do aluno

160 a 163

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Geometria do Taxista e Combinatória	Computador com Datashow, cópias da folha de atividades, mapa.	A atividade propõe uma discussão acerca dos conceitos de combinação e permutação, a partir da apresentação de um vídeo e de um problema sobre a menor distância entre dois pontos no plano.	Individual.	45 minutos

Aspectos operacionais

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

No dia da aplicação da atividade, utilize um computador e um projetor multimídia (Datashow) para apresentar o mapa, que se encontra na pasta Material DVD.

Caso sua unidade escolar não disponha do material multimídia, você poderá copiar o mapa na lousa.

Em seguida, faça o seguinte questionamento:

Imaginem que cada um dos pontos marcados no mapa assinala a posição de um determinado aluno. Nós queremos determinar a menor distância entre estes dois pontos, considerando que os dois alunos estão na esquina dos quarteirões. Qual a quantidade de caminhos possíveis para que um deles vá ao encontro do outro?

Após algumas soluções (duração de, no máximo, 15 minutos), reproduza o vídeo Qual o Melhor Caminho? encontrado na pasta Material DVD, ou no site <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1164>.

Em seguida, distribua uma folha de atividades para cada aluno e peça a eles que realizem a atividade.

Aspectos pedagógicos

Essa atividade foi adaptada a partir das atividades Qual o melhor caminho? e Taxi e Combinatória, que se encontram disponíveis em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1164> e <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1035>, res-

pectivamente. As duas atividades fazem parte da coleção M3 Matemática Multimídia, desenvolvida pela UNICAMP.

É interessante ressaltar que o problema levantado no vídeo Qual é o menor caminho?, apesar de ser originalmente destinado a trabalhar o conceito de distância entre pontos, também pode ser utilizado para abordar as permutações com repetição, que tratam da contagem de conjuntos com vários elementos repetidos.

Dado um conjunto de n elementos com n_1 elementos iguais do tipo 1, n_2 elementos do tipo 2, e assim sucessivamente até n_k elementos do tipo k , a quantidade de permutações que podemos formar com estes elementos é dada por:

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Considerando o problema do menor caminho até o ponto P , temos um conjunto de $P_1 + P_2$ ruas, onde P_1 são horizontais e P_2 verticais, ou seja, temos uma permutação com repetição de n elementos, agrupados k a k , que pode ser escrita como uma permutação com k elementos repetidos de um tipo e $(n-k)$ de outro.

A distância euclidiana usual é apropriada na descrição de muitos fenômenos, mas em algumas situações, pode não ser a mais apropriada. Por exemplo, a menor distância para ir de casa até a escola depende das ruas que possibilitam esse trajeto e, sendo assim, dificilmente será definida como a medida do segmento entre estes dois pontos. O nome geometria do táxi, como é conhecida a geometria que apresentamos nesta atividade, vem da associação com a ideia de trafegar por ruas.

Na geometria do táxi, se considerarmos o sistema de coordenadas cartesiano usual, dados dois pontos do plano, $A=(x_A, y_A)$ e $B=(x_B, y_B)$, a distância entre esses pontos é calculada assumindo que só é possível fazer trajetos paralelos aos eixos (horizontais e verticais). Formalmente, essa distância pode ser definida usando a função módulo de números reais:

$$d_{\text{táxi}}(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

Neste experimento, o cenário é um mapa quadriculado cujas quadras são as unidades de medida. O aluno escolhe, no mapa, a esquina onde quer colocar a casa de um amigo, tendo em mente que todos os pontos de referência no experimento têm sempre coordenadas inteiras.

As etapas propostas exploram essencialmente a quantidade de maneiras diferentes de fazer trajetos com comprimento mínimo. Quando as localidades ficam mais distantes, a organização do processo de contagem leva naturalmente aos conceitos introdutórios de combinatória.

Etapas 1: Qual é a menor distância?

Na primeira etapa, apresente no quadro negro um mapa quadriculado com as marcações da posição da casa do aluno e de uma região (um bairro de uma cidade) onde ele deverá escolher a localização da casa de seu amigo. Faça com que os alunos participem, perguntando onde eles moram e tente representar os locais no mapa. O objetivo é encontrar visualmente o número mínimo de quadras que devem ser percorridas de uma localidade a outra e também perceber que existe mais do que um trajeto mínimo entre elas.

Etapas 2: Quantos menores caminhos existem?

A segunda etapa é destinada à organização e à sistematização da percepção anterior. A proposta desta etapa é analisar a quantidade de maneiras diferentes com que podemos fazer um trajeto entre duas localidades utilizando o menor número possível de quadras. Para esta análise, sugerimos utilizar as letras H e V para fazer referência, respecti-

vamente, ao deslocamento de uma quadra na horizontal ou na vertical.

O aluno deverá perceber que a contagem dos trajetos mínimos, facilmente efetuada visualmente quando as localidades estão próximas, torna-se muito complexa quando elas se afastam, requerendo um procedimento mais organizado. Isso deverá motivar a busca por uma expressão mais formal, usando o conceito de combinação para o cálculo do número de trajetos mínimos no caso geral.

Assumindo que o aluno já conheça o conceito de permutação, colocamos a seguir uma forma de se obter, passo a passo, a expressão geral acima mencionada. Essa forma também pode ser usada como motivação para o estudo do conceito de combinação. Recomendamos que a dedução dessa expressão seja discutida com os alunos no fechamento do experimento.

Outra questão importante: por que o número de trajetos mínimos é dado por uma combinação?

Vamos supor que entre as localidades A e G o menor trajeto deve ser percorrido através de 8 quadras, sendo 3 horizontais e 5 verticais. Um exemplo de trajeto mínimo de A para G, que está representado na figura, pode ser denotado por HVVHVHV, significando que a primeira quadra é percorrida na horizontal, as duas seguintes na vertical, e assim por diante até a oitava quadra, que é percorrida na vertical.

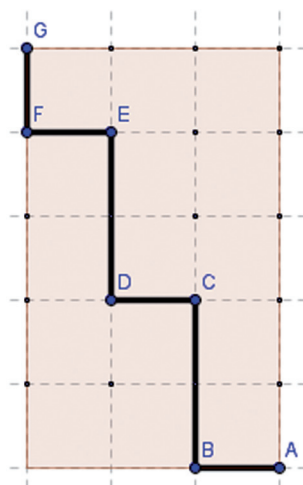


Figura 6: Trajeto entre os pontos A e G

A seguir, vamos analisar quantos trajetos mínimos diferentes existem entre A e G.

Se as oito letras envolvidas na representação do trajeto fossem diferentes, a resposta seria o número correspondente a todas as permutações possíveis das oito letras, isto é, $8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40320$ trajetos. Mas, neste caso, teremos um número bem menor de possibilidades: teremos que repetir a letra H três vezes, e a letra V 5 vezes, para preencher as oito posições, a fim de representar os três deslocamentos horizontais e os cinco verticais necessários, variando a ordem.

Consideremos o exemplo do trajeto mínimo HVVHVHV. Obteremos o mesmo trajeto se trocarmos as letras H entre si e as letras V entre si. Assim, nas 8! permutações que seriam possíveis com letras diferentes, estaríamos contando este trajeto várias vezes. Mais precisamente, como há 3! modos de trocar as letras H entre si (permutações das posições 1ª, 4ª, e 7ª) e 5! modos de trocar as letras V entre si (permutações das posições 2ª, 3ª, 5ª, 6ª e 8ª), teríamos

contado $5!3!$ vezes este mesmo trajeto.

Como o argumento acima pode ser considerado para qualquer outro trajeto mínimo entre as localidades A e G, o número total de trajetos mínimos diferentes é dado por $8!/(3!5!)$.

Note que este número é exatamente o número de combinações de 8 elementos tomados 3 a 3, pois:

$$\frac{8!}{3!5!} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = C_8^3$$

De modo geral, se o menor trajeto entre as localidades A e G deve ser percorrido através de n quadras –divididas entre p quadras horizontais e q quadras verticais - então o número de trajetos mínimo diferentes é dado por:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Note que este número é o mesmo se um trajeto mínimo entre A e G for através de n quadras, sendo q horizontais e p verticais, pois, como $p + q = n$, vale:

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!q!} = \frac{n!}{(n-q)!q!} = C_n^q$$

Professor, recomendamos que você faça essa atividade junto com os alunos, discutindo cada etapa, instigando-os e fazendo-os perceber que a análise combinatória pode ser muito divertida e interessante para o cotidiano de todos eles.

Folha de Atividades – Geometria do Taxista e Combinatória

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Os problemas abaixo serão apresentados com o propósito de fixar e aprofundar o assunto abordado no vídeo Qual é o melhor caminho?.

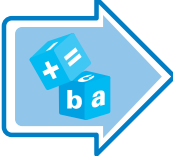
Problema 1: Suponhamos que um construtor necessite subir um andaime. Ele se movimenta utilizando os cantos do andaime, onde tem três possibilidades de movimento: ir à direita, ir à frente ou subir ao andar de cima. Noutras palavras, o construtor pode mover-se nas três direções do espaço. Se considerarmos o seu ponto inicial como o $(0, 0, 0)$ e o ponto de chegada como o $(2, 4, 3)$ de quantas maneiras o construtor poderá ir ao ponto de chegada fazendo o menor número de deslocamentos possível?

Problema 2: Qual o número de pontos inteiros que estão a uma mesma distância do taxista, que está situado na origem? Por exemplo, para $n=2$, há 8 pontos que distam 2 da origem, são eles: $(\pm 1, \pm 1), (\pm 2, 0), (0, \pm 2)$.

Seção 2 – Permutação com repetição

Páginas no material do aluno

160 a 163

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	A Matemática no método Braille	Cópias da folha de atividade	A atividade propõe a resolução de um problema relacionado a conceitos combinatórios, utilizando como contexto a escrita em relevo do sistema Braille.	Trios	45 minutos

Aspectos operacionais:

Professor, é importante que você reproduza a folha de atividades, com antecedência, de acordo com o número de alunos da sua turma.

Na aula anterior à da aplicação da atividade, solicite que os alunos pesquisem sobre o sistema Braille. Essa pesquisa poderá ser efetuada em grupo. No dia da atividade, peça para que os alunos apresentem brevemente as informações obtidas na pesquisa feita sobre o método Braille e, depois, distribua uma folha de atividades para cada aluno.

Deixe que eles efetuem a leitura do texto proposto na folha de atividades por alguns minutos (essa etapa não deve levar mais que 5 minutos) e, então, peça aos alunos que respondam a questão proposta.

Assim que os grupos tiverem terminado a tarefa, promova uma discussão sobre as soluções que eles encontraram para questões propostas.

Aspectos pedagógicos

Essa atividade foi elaborada a partir da atividade A Matemática no método Braille, proposta pelo professor Marcos Noé, integrante da Equipe Brasil Escola. Ela se encontra disponível no site <http://www.brasilecola.com/matematica/a-matematica-no-metodo-braille.htm>.

O método Braille utiliza combinações de pontos relacionados a símbolos que representam letras. Por se tratar de uma aplicação prática e útil de conceitos ligados à análise combinatória, essa pode ser uma ótima forma de motivar os alunos na aprendizagem deste conteúdo.

Para facilitar a leitura individual do texto, cada um dos alunos deve receber uma cópia da folha de atividades.

No entanto, você, professor, deve sugerir que os integrantes de cada grupo dialoguem entre si, de forma a resolver em conjunto a questão proposta, que é a seguinte:

Quantas celas Braille distintas é possível estabelecer?

Encoraje os alunos a desenhar algumas configurações possíveis para a cela Braille. Isso pode ajudá-los a estabelecer boas estratégias de contagem.

Ajude-os a perceber que a quantidade de configurações possíveis para a cela depende do número de pontos em relevo.

Separando as configurações da cela pelo número de pontos em relevo, é possível pensar no problema a partir de duas estratégias de contagem:

- Combinação – A ideia aqui é combinar n pontos (com n variando entre 1 e 6) dos 6 disponíveis na cela, de modo que o número total de celas possíveis seria dado por: $C_{6,1} + C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$.
- Permutação com repetição – A estratégia, neste caso, é associar a cada posição da cela, numerada de 1 a 6, uma determinada letra. Se o ponto estiver em relevo, usaremos a letra P e, se o ponto estiver em branco, usaremos a letra B. Por exemplo, a cela relacionada à letra b seria representada pela sequência de letras: PPBBBB. E o número de celas com dois pontos em relevo poderia ser obtido pela permutação dessas 6 letras, sendo que o P se repete 2 vezes e o B se repete 4 vezes. Ou seja, $P_6^{2,4} = 15$. Assim, o número total de celas possíveis seria dado por: $P_6^{1,5} + P_6^{2,4} + P_6^{3,3} + P_6^{4,2} + P_6^{5,1} + P_6^6 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$.

Folha de Atividades – A Matemática no Método Braille

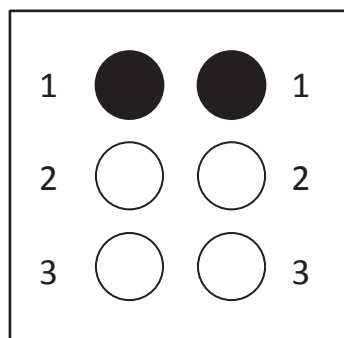
Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

O Sistema Braille

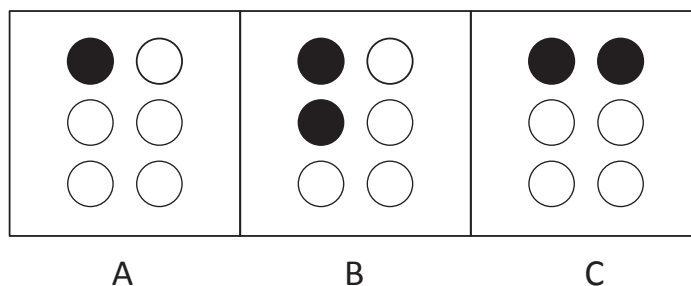
Vocês acabaram de fazer uma pesquisa sobre o Sistema Braille e, certamente, encontraram sobre ele várias informações importantes e interessantes. Devem ter descoberto que o sistema é uma escrita feita em relevo, constituída por 63 sinais codificados por pontos. Estes pontos são organizados em uma tabela com três linhas e duas colunas, formando um retângulo que chamamos de cela Braille. Cada ponto da cela é numerado de acordo com seu posicionamento. A numeração é feita de forma crescente, verticalmente e de cima para baixo, começando com o ponto que está no canto superior esquerdo, que recebe o número um. Encerrada a coluna da esquerda, a numeração continua na coluna da direita. Acompanhe na figura a seguir.

Cela Braille



As arrumações distintas possíveis desses pontos estão relacionadas a símbolos, que podem representar letras simples e acentuadas, pontuações, notas musicais e sinais algébricos, entre outros. Dessa forma, o deficiente visual poderá realizar a leitura e escrita de qualquer texto. Por exemplo, a letra É (acentuada) é representada pela disposição apresentada na figura anterior.

Devido a esse tipo de configuração da cela, o método admite um número finito de caracteres, pois os pontos em relevo são posicionados em diferentes lugares. Veja a seguir alguns exemplos de celas possíveis:




Agora é com você! Quantas celas Braille distintas é possível estabelecer?

Seção – O que perguntam por aí?

Páginas no material do aluno

171 a 172

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Questões de vestibular	Computador com Datashow, imagem para projeção (disponível neste material e no DVD do professor)	-	Duplas	-

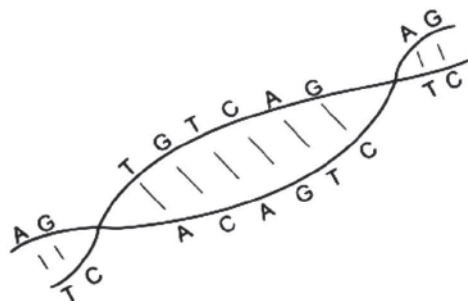
Aspectos operacionais

Na seção O que perguntam por aí? desta unidade do material do aluno são apresentadas duas questões de vestibulares que envolvem conceitos de Análise Combinatória trabalhados. Essas questões já se encontram resolvidas no material do aluno, mas você poderá trabalhá-las a partir da projeção das imagens disponíveis no seu DVD e neste material, conforme a seguir:

1) (UFF_2001) O estudo da genética estabelece que, com as bases adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G), podem-se formar, apenas, quatro tipos de pares: A - T , T - A , C - G e G - C .

Certo cientista deseja sintetizar um fragmento de DNA com dez desses pares, de modo que:

- dois pares consecutivos não sejam iguais;
- um par não seja seguido por um par e vice-versa;
- um par não seja seguido por um par e vice-versa.



Sabe-se que dois fragmentos de DNA são idênticos se constituídos por pares iguais dispostos na mesma ordem. Logo, o número de maneiras distintas que o cientista pode formar esse fragmento de DNA é:

- a) 2^{11}
- b) 2^{20}
- c) 2×10
- d) 2^{10}
- e) $2^2 \times 10$

Aspectos pedagógicos

Após a resolução destas questões em aula, você pode promover uma análise coletiva das respostas encontradas pelos alunos, com uma breve discussão a respeito dos possíveis erros (erros mais comuns) por eles cometidos.

Resolução Comentada

Solução: Tarefa 1 podemos escolher qualquer um dos quatro pares possíveis para as outras 9 tarefas temos 2 possibilidades para cada uma delas. Pelo Princípio Multiplicativo temos $4 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 4 \cdot 2^9 = 2^2 \cdot 2^9 = 2^{11}$. Logo a resposta é a alternativa a).


(Unifesp-SP 2002) Em um edifício residencial de São Paulo, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes será possível fazer estas escolhas?

- a) 64.
- b) 126.
- c) 252.
- d) 640.
- e) 1260.

Solução:

A primeira tarefa é escolher um dos dez para ser o síndico e a segunda tarefa é escolher quatro dentre os nove restantes para serem membros do conselho fiscal. Na primeira tarefa temos 10 possibilidades e na segunda $C(9, 4) = 126$. Pelo Princípio Multiplicativo temos $10 \cdot 126 = 1260$ possibilidades. Logo a alternativa correta é a letra e).

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios adicionais	Cópias da folha de atividades	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade, dividido em duas etapas. A primeira consiste no registro de aprendizagens e a segunda na resolução de questões objetivas e dissertativas. A escolha das questões a serem aplicadas fica a critério do professor, levando em consideração as especificidades de cada turma.	Individual	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação das habilidades a serem desenvolvidas, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado a esta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Aqui, você poderá propor que o aluno registre individualmente, na folha de atividades (disponível para reprodução neste material), as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para nortear esta avaliação, apresentamos algumas questões. A ideia é que estas questões complementem aquelas que você já usa normalmente para avaliar o desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas, que registramos novamente a seguir:

- Análise Combinatória
- Diferença entre Arranjo e Combinação
- Permutação com Repetição

Para ajudar os alunos nos seus registros, sugerimos as seguintes questões, que também estão disponíveis na folha de atividades:

1. Qual foi o conteúdo matemático estudado nessa unidade? Cite alguns conceitos relacionados a este tema

que formam estudados nesta unidade.

2. Cite alguma situação do cotidiano que envolve os conhecimentos aqui estudados.
3. Considere os algarismos 2, 3, 5, 6 e 8.
 - a. Quantos números de três algarismos podem ser formados?
 - b. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados?
 - c. Quantos números de três algarismos distintos que terminam com 5 podem ser formados?
4. Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPPI?
5. Guilherme possui 4 bolas amarelas, 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 1 bola verde. Pretende colocá-las em um tubo acrílico translúcido e incolor, onde elas ficarão umas sobre as outras na vertical. De quantas maneiras distintas ele poderá formar esta coluna de bolas?

Sugerimos, também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção e entrega de registros ao seu formador, no curso de formação presencial. Desta forma, esperamos acompanhar com você a maneira como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos e, se for o caso, repensar as estratégias de acordo com as críticas e sugestões apresentadas.

Aspectos pedagógicos

Etapa 1

Respostas e comentários da folha de atividades

Questão 1: Análise Combinatória.

Princípio multiplicativo, combinação, arranjo, permutação simples, permutação com repetição.

Questão 2: Resposta pessoal, podendo recorrer aos exemplos trabalhados em aula.

Questão 3: Para resolver esse exercício, podemos usar o princípio multiplicativo: $5 \times 5 \times 5 = 125$. Logo, podem ser formados 125 números.

Para resolver esse exercício, podemos usar o princípio multiplicativo: $5 \times 4 \times 3 = 60$. Logo, podem ser formados 60 números distintos.

Para resolver esse exercício, podemos usar o princípio multiplicativo: $4 \times 3 \times 1 = 12$. Repare que na última posição só pode entrar o número 5, por isso o último termo do produto é 1. Logo, podem ser formados 12 números distintos.

Questão 4: Nesse caso, temos uma permutação com repetição. Temos

1 letra M;

4 letras I's;

4 letras S's; e

2 letras P's.

Assim, $P_{11}^{4,4,2} = \frac{11!}{4! \times 4! \times 2!} = 34650$. Logo, são 34 650 anagramas!

Questão 5: Neste caso de permutação com elementos repetidos temos um total de 10 bolas de quatro cores diferentes.

Sendo: 4 amarelas; 3 vermelhas; 2 azuis e 1 verde.

Segundo a repetição das cores, devemos calcular $P_{10}^{4,3,2} = \frac{10!}{4! \times 3! \times 2!} = 12600$. Então, Guilherme poderá formar esta coluna de bolas de 12600 maneiras diferentes.

Folha de Atividades – Avaliação – Etapa 1

Nome da escola: _____

Nome do aluno: _____

Momento de Reflexão

Neste momento, propomos que você retome as discussões feitas nesta unidade e registre as aprendizagens matemáticas adquiridas com o estudo desta unidade. Para ajudá-lo nos seus registros, tente responder as questões a seguir:

Questão 1

Qual foi o conteúdo matemático estudado nessa unidade? Cite alguns conceitos relacionados a este tema que foram estudados nesta unidade.

Questão 2

Cite alguma situação do cotidiano que envolve os conhecimentos aqui estudados.

Questão 3

Considere os algarismos 2, 3, 5, 6 e 8.

a. Quantos números de três algarismos podem ser formados?

b. Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados?

c. Quantos números de três algarismos distintos que terminam com 5 podem ser formados?

Questão 4

Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPI?

Questão 5

Guilherme possui 4 bolas amarelas, 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 1 bola verde. Pretende colocá-las em um tubo acrílico translúcido e incolor, onde elas ficarão umas sobre as outras na vertical. De quantas maneiras distintas ele poderá formar esta coluna de bolas?

Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Para compor esta etapa do instrumento avaliativo, sugerimos a escolha de pelo menos uma questão objetiva que contemple uma das habilidades pretendidas nesta unidade.

Sugestões de questões objetivas para a avaliação:

Questão 1: (UFMG - 2006)

A partir de um grupo de oito pessoas, quer-se formar uma comissão constituída de quatro integrantes. Nesse grupo, incluem-se Gustavo e Danilo, que, sabe-se, não se relacionam um com o outro. Portanto, para evitar problemas, decidiu-se que esses dois, juntos, não deveriam participar da comissão a ser formada.

Nessas condições, de quantas maneiras distintas se pode formar essa comissão?

- a. 70
- b. 35
- c. 45
- d. 55

Questão 2: (FGV - 2005)

Um fundo de investimento disponibiliza números inteiros de cotas aos interessados nessa aplicação financeira. No primeiro dia de negociação desse fundo, verifica-se que 5 investidores compraram cotas, e que foi vendido um total de 9 cotas. Em tais condições, o número de maneiras diferentes de alocação das 9 cotas entre os 5 investidores é igual a:

- a. 56.
- b. 70.
- c. 86.
- d. 120.
- e. 126.

Questão 3: (PUC MG - 2003)

Um bufê produz 6 tipos de salgadinhos e 3 tipos de doces para oferecer em festas de aniversário. Se em certa festa devem ser servidos 3 tipos desses salgados e 2 tipos desses doces, o bufê tem x maneiras diferentes de organizar esse serviço. O valor de x é:

- a. 180
- b. 360
- c. 440
- d. 720

Questão 4: (UFV - 2004)

Um farmacêutico dispõe de 4 tipos de vitaminas e 3 tipos de sais minerais e deseja combinar 3 desses nutrientes para obter um composto químico. O número de compostos que poderão ser preparados usando-se, no máximo, 2 tipos de sais minerais é:

- a. 32
- b. 28
- c. 34
- d. 26
- d. 30

Questão 5: (UEL - 2006)

Na formação de uma Comissão Parlamentar de Inquérito (CPI), cada partido indica certo número de membros, de acordo com o tamanho de sua representação no Congresso Nacional. Faltam apenas dois partidos para indicar seus membros. O partido A tem 40 deputados e deve indicar 3 membros, enquanto o partido B tem 15 deputados e deve indicar 1 membro. Assinale a alternativa que apresenta o número de possibilidades diferentes para a composição dos membros desses dois partidos nessa CPI.

- a. 55
- b. $(40 - 3) \cdot (15 - 1)$
- c. $[40!/(37! \cdot 3!)] \cdot 15$
- d. $40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 15$
- e. $40! \cdot 37! \cdot 15!$

Sugestões de questões discursivas para a avaliação:

Questão 1

De um total de 6 pratos à base de carboidratos e 4 pratos à base de proteínas, pretendo fazer o meu prato com 5 destes itens, sem repeti-los, de sorte que contenha ao menos 2 proteínas. Qual é o número máximo de pratos distintos que poderei fazer?

Questão 2

Em uma sapateira irei guardar 3 sapatos, 2 chinelos e 5 tênis. Quantas são as disposições possíveis desde que os calçados de mesmo tipo fiquem juntos, lado a lado, na sapateira?

Questão 3: (FUVEST)

O jogo da sena consiste no sorteio de 6 números distintos, escolhidos ao acaso, entre os números 1, 2, ..., até 50. Uma aposta consiste na escolha (pelo apostador) de 6 números distintos entre os 50 possíveis, sendo premiadas aquelas que acertarem 4 (quadra), 5 (quina) ou todos os 6 (sena) números sorteados.

Um apostador, que dispõe de muito dinheiro para jogar, escolhe 20 números e faz todos os 38.700 jogos possíveis de serem realizados com esses 20 números. Realizado o sorteio, ele verifica que todos os 6 números sorteados estão entre os 20 que ele escolheu. Além de uma aposta premiada com a sena:

- a. Quantas apostas premiadas com a quina esse apostador conseguiu?

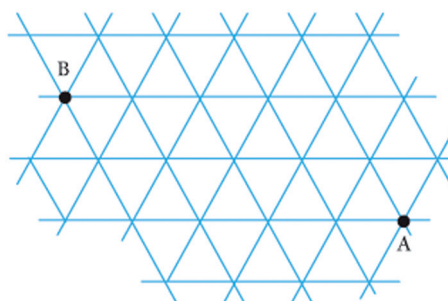
b. Quantas apostas premiadas com a quadra ele conseguiu?

Questão 4

Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra CALOUROS, de maneira que sempre haja a presença da sequência OURO, nesta ordem, e as letras C e S nunca estejam juntas qualquer que seja a ordem?

Questão 5

Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação abaixo.



Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos, percorrendo X caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a d.

Sabendo que d corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, determine o valor de X.

Aspectos pedagógicos

Respostas das questões objetivas sugeridas

1.(D) 2.(B) 3.(D) 4.(C) 5.(C)

Respostas e comentários das questões discursivas sugeridas:

Questão 1:

Se não houvesse a restrição das duas proteínas, o cálculo seria simplesmente $C_{10,5}$:

$$C_{10,5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} \Rightarrow C_{10,5} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 5!} \Rightarrow C_{10,5} = \frac{30240}{120} \Rightarrow C_{10,5} = 252$$

Mas como há tal restrição, devemos descontar deste total o número de pratos que só contém carboidratos, que é igual a $C_{6,5}$:

$$C_{6,5} = \frac{6!}{5!(6-5)!} \Rightarrow C_{6,5} = \frac{6 \times 5!}{5! \times 1!} \Rightarrow C_{6,5} = \frac{6}{1} \Rightarrow C_{6,5} = 6$$

Não podemos nos esquecer de que também podemos montar pratos contendo apenas um item de proteína,

então devemos desconsiderá-los também. Estes pratos são o produto de $C_{6,4}$, referentes aos quatro itens de carboidrato, por $C_{4,1}$, referentes ao único item de proteína:

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} \Rightarrow C_{6,4} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} \Rightarrow C_{6,4} = \frac{30}{2} \Rightarrow C_{6,4} = 15$$

$$C_{4,1} = \frac{4!}{1!(4-1)!} \Rightarrow C_{4,1} = \frac{4 \times 3!}{1! \times 3!} \Rightarrow C_{4,1} = 4$$

Multiplicando as combinações:

$$C_{6,4} \times C_{4,1} = 15 \times 4 = 60$$

Podemos formar então 6 pratos sem qualquer item de proteína e mais 60 pratos com somente um item de proteína. Então de 252 que é o número total de combinações possíveis sem a restrição, devemos subtrair 66 pratos para obtermos a resposta do exercício, ou seja, 186.

Poderíamos ter resolvido este exercício de outra maneira. Vamos explicar como e dar o resultado, mas o desenvolvimento em si você mesmo deverá fazer, para que consiga fixar melhor os conhecimentos adquiridos. Por favor, não deixe de fazê-lo.

O produto $C_{6,3} \cdot C_{4,2} = 20 \cdot 6 = 120$ nos dá o total de pratos contendo 3 itens de carboidrato e 2 itens de proteína.

Já o produto $C_{6,2} \cdot C_{4,3} = 15 \cdot 4 = 60$ é igual ao total de pratos contendo 2 itens de carboidrato e 3 itens de proteína.

Por fim o produto $C_{6,1} \cdot C_{4,4} = 6 \cdot 1 = 6$ resulta no total de pratos contendo 1 item de carboidrato e 4 itens de proteína.

Somando 120, 60 e 6, obtemos o mesmo resultado obtido anteriormente.

Portanto o número máximo de pratos distintos que poderei fazer, contendo ao menos dois itens de proteína, é igual a 186 pratos.

Questão 2:

Como temos três tipos de calçados, a permutação destes três tipos é igual a 6:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Ou seja, estando todos os calçados de um mesmo tipo juntos, o número de permutações é igual a 6, levando-se em consideração apenas o tipo de calçado, mas não o calçado em si.

Para os sapatos, temos 3 deles – que, permutados entre si, resultam em 6 permutações:

$$P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Para os chinelos, temos 2 pares – que, permutados entre si, resultam em 2 permutações:

$$P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$$

Finalmente para os tênis, temos 5 pares – que, permutados entre si, resultam em 120 permutações:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Multiplicando estes quatro números temos:

$$P_3 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_5 = 3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 5! = 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 120 = 8640$$

Este é o número de disposições possíveis.

Veja que os três últimos fatores (P_3 , P_2 e P_5) se referem às permutações dos sapatos, chinelos e tênis, respectivamente entre eles mesmos, sem haver mistura de tipos de calçados.

Note, no entanto que o primeiro fator (P_3) se refere às permutações entre os tipos de calçados em si, por exemplo, “sapatos, chinelos, tênis” é um agrupamento e “chinelos, tênis, sapatos” é um outro agrupamento, ou seja, embora não haja mistura entre calçados de tipos diferentes, os tipos de calçados como um todo permutam entre si.

Portanto as disposições possíveis são 8640.

Questão 3:

a) Para 5 números da aposta temos a combinação dos 6 números sorteados tomados de 5 a 5 e para o último podemos escolher qualquer um dos $20 - 6 = 14$ restantes. Pelo princípio multiplicativo, nossa resposta será:

$$C_{6,5} \times 14 = 6 \times 14 = 84$$

b) Agora temos 4 números da aposta para a combinação dos 6 números sorteados tomados de 4 a 4. Os 2 números restantes serão uma combinação dos 14 restantes tomados de 2 a 2. Isto é: $3.5 \cdot 7.13$

Questão 4:

Trocando a sequência OURO por *, de CALOUROS passamos a ter CAL*S. Agora temos cinco caracteres, logo devemos permutá-los para obter o número de anagramas:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Dos 120 anagramas possíveis, temos alguns que possuem ou a sequência CS, ou a sequência SC. Como desconsiderá-los?

Vamos trocar a sequência formada pelas letras C e S, em qualquer ordem, por \$. Ficamos então com \$AL*.

Temos então que calcular P_4 , mas como C e S são 2 letras que também permutam entre si, devemos multiplicar P_4 por P_2 :

$$P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 48$$

Atente ao fato de que no caso da sequência CAL*S calculamos P_5 , mas não a multiplicamos por nada, isto porque diferentemente do que ocorre com as letras da sequência CS, as letras da sequência OURO não sofrem permutação entre si. A sequência é sempre a mesma.

Então, dos 120 anagramas possíveis, 48 deles possuem uma das permutações da sequência CS. Vamos portanto descontá-los:

$$120 - 48 = 72$$

Logo: podemos formar 72 anagramas que correspondem às condições do enunciado.

Questão 5:


Admita que cada lado horizontal de cada triângulo da figura seja H e cada lado em diagonal seja D.

Observando a figura, conclui-se que, para sair do ponto A e chegar ao ponto B, deslocando-se sobre os lados desses triângulos e percorrendo o menor caminho, é necessário realizar um percurso total de 4H e 2D.

O número de sequências formadas com essas 6 letras é igual ao número X de caminhos distintos. As sequências (HHHHDD) e (HDHDDH) representam dois desses caminhos. Utilizando a análise combinatória, pode-se determinar o número de sequências distintas formadas com as 6 letras das seguintes maneiras:

$$P_6^{4,2} = \frac{6!}{4! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2!} = \frac{30}{2} = 15 \text{ ou } C_6^2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = \frac{30}{2} = 15$$

Exercícios complementares

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Exercícios adicionais	Cópias da folha de atividades	Essa atividade propõe alguns exercícios que podem auxiliar na fixação das principais noções ligadas a Análise Combinatória	Duplas ou Trios	-

Aspectos operacionais

A seguir, apresentamos alguns exercícios que podem auxiliar você, professor, na fixação das principais noções ligadas a Análise Combinatória trabalhadas ao longo dessa unidade. Com esses exercícios será possível fazer com que os alunos retenham alguns conceitos importantes, como o princípio fundamental da contagem ou multiplicativo, a relação entre a permutação simples e o princípio multiplicativo, a noção de arranjo, de combinação e de permutação com repetição.

Esses exercícios foram distribuídos em uma folha de atividades – que se encontra disponível para reprodução no DVD do professor – que poderá ser aplicada de forma fracionada ao término de cada seção do material do aluno ou de uma só vez no momento reservado para a consolidação dos conteúdos trabalhados. Você também poderá encontrar as soluções desses exercícios em um arquivo no Grid de aula de seu DVD.

Quanto à realização da atividade, peça que os alunos se organizem em duplas ou em trios. Mas procure distribuir uma folha de atividades para cada um, de forma que todos possam ficar com uma cópia do material, que será

mais uma fonte de consulta.

Dentre os exercícios propostos a seguir (e também disponíveis na folha de atividades), escolha previamente quais exercícios se adequam melhor à realidade de sua turma e à abordagem escolhida para apresentação dos conceitos introduzidos nessa unidade.

Exercícios sugeridos

Questão 1

O mapa a seguir representa a divisão política do Brasil em regiões. Cada uma delas deve ser colorida de modo que aquelas com uma fronteira comum tenham cores distintas. Tendo como base essa condição, responda:



Fonte: <http://www.mapasparacolorir.com.br/mapa-brasil.php>

- Quantas cores, no mínimo, são necessárias para colorir o mapa?
- Dispondo de cinco cores e usando-as, de quantas maneiras o mapa pode ser colorido?
- Dispondo de cinco cores e colorindo-se as regiões Nordeste e Sul com a mesma cor, de quantas maneiras o mapa pode ser colorido?

Questão 2:(UFF)

A partir de um grupo de 6 alunos e 5 professores será formada uma comissão constituída por 4 pessoas das quais, pelo menos duas devem ser professores. Determine de quantas formas distintas tal comissão pode ser formada.

Questão 3: (UERJ)

Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

- um dentre os tipos de pão: calabresa, orégano e queijo;

- um dentre os tamanhos: pequeno e grande;
- de um até cinco dentre os tipos de recheio: sardinha, atum, queijo, presunto e salame, sem possibilidade de repetição de recheio num mesmo sanduíche.

Calcule:

- quantos sanduíches distintos podem ser montados;
- o número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, se ele não gosta de orégano, só come sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada sanduíche.

Questão 4: (UFRJ)

Quantos números de 4 algarismos podemos formar nos quais o algarismo 2 aparece ao menos uma vez?

Questão 5

Utilizando o nome COPACABANA, calcule o número de anagramas possíveis.

Questão 6: (UNIVALI-SC)

Formados e dispostos em ordem alfabética todos os anagramas da palavra AMOR, a palavra ROMA ocupará a:

- (A) 24ª posição (B) 23ª posição (C) 20ª posição (D) 19ª posição (E) 18ª posição

Questão 7: (MACKENZIE)

Com os diretores A, B, C, D, E, F e G de uma empresa, podemos formar, com a presença obrigatória de A e B, N comissões de 5 diretores. O valor de N é:

- (A) 10 (B) 35 (C) 6 (D) 21 (E) 120

Questão 8: (PUC-RS)

Um centro de pesquisas conta com 6 professores pesquisadores e 8 alunos auxiliares de pesquisa. Deve ser formado, neste centro, um grupo constituído por 5 auxiliares de pesquisa e dois pesquisadores, sendo um destes o coordenador do grupo. O número de escolhas possível para a formação deste grupo é:

- (A) 86 (B) 640 (C) 840 (D) 1220 (E) 1680

Questão 9: (UFF)

Uma empresa vai fabricar cofres com senhas de 4 letras, usando as 18 consoantes e as 5 vogais. Se cada senha deve começar com uma consoante e terminar com uma vogal, sem repetir as letras, o número de senhas possíveis é:

- (A) 3060 (B) 24480 (C) 37800 (D) 51210 (E) 73440

Questão 10: (PUC)

O campeonato brasileiro tem, em sua primeira fase, 28 times que jogam entre si. Nesta etapa, o número de jogos é de:

- (A) 376 (B) 378 (C) 380 (D) 388 (E) 396

Aspectos pedagógicos:

Depois que os alunos concluírem o conjunto de exercícios que você escolheu aplicar, procure discutir as soluções apresentadas, valorizando cada estratégia, mesmo que esta não tenha conduzido a uma resposta verdadeira.

Procure incentivar os alunos a executar tais exercícios sem a sua intervenção. Isso pode favorecer o desenvolvimento da autonomia dos alunos no que diz respeito à habilidade de resolver problemas.

Respostas e comentários dos exercícios sugeridos

1.

a. Observando o mapa dado, podemos verificar que o número máximo de regiões adjacentes entre si é igual a três (Norte, Centro-Oeste e Nordeste ou Centro-Oeste, Sudeste e Nordeste ou Centro-Oeste, Sudeste e Sul). Logo o número mínimo de cores que devemos ter para pintar tal mapa sem que regiões adjacentes tenham a mesma cor será igual a 3.

b. Se dispusermos de cinco cores e todas forem utilizadas na pintura do mapa, então cada região será pintada com uma das cinco cores. Assim o número de maneiras desse mapa ser colorido, nessas condições, é igual a $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ (basta utilizar o princípio multiplicativo).

c. Dispomos de cinco cores e as regiões Nordeste e Sul serão coloridas com a mesma cor. A cor usada na região Nordeste não poderá ser usada para pintar as regiões adjacentes a ela (Norte, Centro-oeste e Sudeste), justamente as três regiões que sobraram. Logo para pintar as regiões Nordeste e Sul dispomos de 5 cores (5 possibilidades). Uma vez pintadas as regiões Nordeste e Sul, para a região Norte, por exemplo, sobrariam apenas 4 possibilidades de cores a escolher. Uma vez pintadas as regiões Nordeste, Sul e Norte, sobrariam apenas 3 possibilidades de cores a escolher para a região Centro-oeste. Uma vez pintadas as regiões Nordeste, Sul, Norte e Centro-oeste, sobrariam apenas 3 possibilidades de cores a escolher para a região Sudeste (a cor da região Norte pode ser usada na região Sudeste já que estas não são adjacentes). Assim temos que o número de maneiras desse mapa ser colorido, nessas condições, é igual a $5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$ (basta utilizar o princípio multiplicativo).

2. Nesse caso é mais simples determinar o número de comissões possíveis retirando do número total de comissões de quatro pessoas formadas a partir de um grupo de onze pessoas, o número de comissões contendo apenas um

professor e o número de comissões formadas apenas por alunos. Dessa forma, temos:

- o número total de comissões de quatro pessoas formadas a partir de um grupo de onze pessoas: $C_{11,4}$.
- o número de comissões contendo apenas um professor: $5 \times C_{6,3}$.
- o número de comissões formadas apenas por alunos: $C_{6,4}$.

(Obs.: Se tratam de combinações uma vez que a ordem dos elementos não importa para a formação das comissões.)

Assim, o número de comissões possíveis é igual a:

$$C_{11,4} - (5 \times C_{6,3} + C_{6,4}) = 330 - (5 \times 20 + 15) = 330 - (100 + 15) = 330 - 115 = 215.$$

3.

a. O número de sanduíches distintos que podem ser montados, nessas condições, é o resultado da multiplicação das possibilidades de escolha do tipo do pão, do tamanho do pão e do número de combinações possíveis de recheios (princípio multiplicativo). Assim, temos:

- número de possibilidades de escolha do tipo pão: 3.
- número de possibilidades de escolha do tamanho do pão: 2.
- número de combinações possíveis de recheios: $C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5} = 31$.

Assim, o número de sanduíches distintos que podemos obter, nessas condições, é igual a: $3 \times 2 \times 31 = 186$.

b. O número de sanduíches distintos que podem ser montados, nessas condições, é o resultado da multiplicação das possibilidades de escolha do tipo do pão, do tamanho do pão e do número de combinações possíveis de recheios (princípio multiplicativo). Assim, temos:

- número de possibilidades de escolha do tipo pão: 2.
- número de possibilidades de escolha do tamanho do pão: 1.
- número de combinações possíveis de recheios: $C_{5,2} = 10$.

Assim, o número de sanduíches distintos que podemos obter, nessas condições, é igual a: $2 \times 1 \times 10 = 20$.

4. Nesse caso é mais simples se determinarmos a quantidade de números de 4 algarismos e retirar deste a quantidade de números de 4 algarismos nos quais o algarismo 2 não aparece nenhuma vez. Dessa forma, temos:

- a quantidade de números de 4 algarismos: $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$.
- a quantidade de números de 4 algarismos nos quais o algarismo 2 não aparece nenhuma vez: $8 \times 9 \times 9 \times 9 = 5832$.

(Obs.: Em um numeral de 4 algarismos, o primeiro – das unidades de milhar – não poderá ser igual a 0.)

Assim, o número de numerais de 4 algarismos que podemos formar nos quais o algarismo 2 aparece ao menos uma vez é igual a: $9000 - 5832 = 3168$.

5. Trata-se de uma permutação com repetição, de modo que as letras O, P, B e N não se repetem, a letra C se

repete duas vezes e a letra A quatro vezes. Assim, temos:

$$P_{10}^{2,4} = \frac{10!}{2!4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6}^3 \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}{2 \times 1 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 3 \times 5 = 75600.$$

6. Primeiro é preciso verificar que a palavra ROMA corresponde à última palavra quando os anagramas são dispostos em ordem alfabética. Depois basta determinar o número de anagramas que podem ser formados a partir das letras da palavra AMOR, que serão: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Logo a palavra ROMA ocupará a 24ª posição na listagem. Letra A.

7. Nesse caso, como A e B devem necessariamente compor a comissão, resta determinar quais serão os possíveis grupos de três indivíduos que poderão compor a comissão juntamente com A e B. Para isso, podemos escolher dentre C, D, E, F e G esses três membros. Assim, o número N de comissões possíveis será igual a $C_{5,3} = 10$. Letra A

8. Para a escolha dos dois professores pesquisadores que irão compor o grupo de pesquisa, temos 6 opções e para a escolha dos cinco alunos auxiliares temos 8 opções. Assim, temos que:

- o número de duplas de pesquisadores será igual a: $A_{6,2}$ (nesse caso, se trata de um arranjo já que um deles será coordenador e outro não, logo a ordem interfere na composição da dupla).
- o número de grupos de 5 auxiliares será igual a: $C_{8,5}$.

Então, o número de escolhas possível para a formação deste grupo é: $A_{6,2} \times C_{8,5} = 30 \times 56 = 1680$. Letra E.

9. O número de senhas distintas que podem ser montadas, nessas condições, é o resultado da multiplicação das possibilidades de escolha de cada um de seus quatro dígitos (princípio multiplicativo). Assim, temos:

- número de possibilidades de escolha do primeiro dígito: 18 (apenas consoantes).
- número de possibilidades de escolha do quarto dígito: 5 (apenas vogais).
- número de possibilidades de escolha do segundo dígito: 21 (das 23 letras disponíveis, duas já foram usadas).
- número de possibilidades de escolha do terceiro dígito: 20 (das 23 letras disponíveis, três já foram usadas).

Assim, o número de senhas distintas que podemos obter, nessas condições, é igual a: $18 \times 21 \times 20 \times 5 = 37800$. Letra C.

10. Cada jogo consiste no confronto de 2 dos 28 times. Assim, o número de partidas dessa fase é igual a: $C_{28,2} = 378$. Letra B.

