Volume 2 • Módulo 4 • Matemática

Expansão: Probabilidade Parte II

André Luiz Cordeiro dos Santos, Gabriela dos Santos Barbosa, Josemeri Araujo Silva Rocha (coordenadora) e Luciane de Paiva Moura Coutinho

Introdução

A unidade Probabilidade 2, da expansão do material do aluno, inicia a abordagem do tema a partir de um diálogo entre dois amigos sobre espaço amostral, evento e probabilidade nos jogos. O diálogo resgata um pouco do que foi discutido a respeito do tema nas aulas anteriores, e os exemplos utilizados tratam das maneiras de descobrir, no lançamento de dois dados, a probabilidade de a soma dos números das faces ser igual a 6 ou um número múltiplo de 3.

Preparamos para você, professor, um material complementar, cujo objetivo é apresentar atividades que ajudem a enriquecer a abordagem dos objetivos de aprendizagem deste módulo, que são os seguintes:

- Resolver problemas que envolvem probabilidade da união de eventos;
- Probabilidade de eventos complementares;
- Descrever o conceito de probabilidade condicional.

A nossa sugestão é que a primeira aula dessa unidade se inicie com uma atividade disparadora, para a qual apresentamos uma proposta: a atividade Explorando o jogo do máximo, que convidará os alunos a fazer duas atividades on line relacionadas a um jogo, chamado jogo do máximo, que envolve o conceito de probabilidade.

Para a Seção 1, temos quatro sugestões de atividade. Em Quais são suas chances?, os alunos refletirão sobre algumas questões envolvendo probabilidade. Na atividade Feliz aniversário!, eles refletirão sobre uma situação corriqueira envolvendo datas de aniversário e probabilidade. A atividade Reconhecendo problemas de probabilidade condicional cria condições para que os alunos consigam identificar a principal característica de um problema que envolve o cálculo de uma probabilidade condicional. E, para fechar esta seção, temos a atividade A escolha da porta certa, onde os alunos terão a oportunidade de calcular a probabilidade de ganhar um prêmio na brincadeira chamada Porta dos Desesperados.

Para a Seção 2, trazemos a atividade O jogo de roletas, que propõe a discussão dos principais conceitos associados à probabilidade da união de eventos e à probabilidade condicional. E na atividade Fórmulas: usá-las ou não usá-las? Eis a questão!, os alunos terão a oportunidade de refletir sobre as possibilidades de apresentar soluções distintas para um mesmo problema, usando fórmulas ou não.

Por fim, aconselhamos que a última aula desta unidade seja dividida em dois momentos. O primeiro deve ser dedicado a uma revisão geral do estudo realizado, consolidando o aprendizado do aluno a partir da retomada de questões que surgiram durante o processo. Já o segundo consiste num momento de avaliação do estudante, priorizando questionamentos reflexivos que complementem as atividades e exercícios resolvidos durante as aulas.

A descrição e o detalhamento das atividades sugeridas estão nos textos e tabelas a seguir

Apresentação da unidade do material do aluno

Caro professor, apresentamos, abaixo, as principais características desta unidade:

Disciplina	Volume	Módulo	Unidade	Estimativa de aulas para essa unidade
Matemática	2	4	Probabilidade Parte II	4 aulas de 2 tempos

Titulo da unidade	Tema
Probabilidade – Parte 2	Probabilidade
Objetivos da unidade	
Resolver problemas que envolvem probabilidade da união de eventos.;	
Probabilidade de eventos complementares;	
Descrever o conceito de probabilidade Condicional.	

Seções	Páginas no material do aluno
Para início de conversa...	177 a 178
Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??	179 a 184
Seção 2 – Vamos rever alguns problemas de uma manei¬ra diferente !!!??	184 a187
Veja ainda...	188
O que perguntam por aí?	191 a 192

Em seguida, serão oferecidas as atividades para potencializar o trabalho em sala de aula. Verifique a correspondência direta entre cada seção do Material do Aluno e o Material do Professor.

Será um conjunto de possibilidades para você, caro professor.

Vamos lá!

Recursos e ideias para o Professor

Tipos de Atividades

Para dar suporte às aulas, seguem os recursos, ferramentas e ideias no Material do Professor, correspondentes à Unidade acima:

Atividades em grupo ou individuais

São atividades que são feitas com recursos simples disponíveis.

Ferramentas

Atividades que precisam de ferramentas disponíveis para os alunos.

Applets

São programas que precisam ser instalados em computadores ou *smart-phones* disponíveis para os alunos.

Avaliação

Questões ou propostas de avaliação conforme orientação.

Exercícios

Proposições de exercícios complementares

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando o jogo do máximo	Computador com acesso à internet e Datashow	Os alunos farão duas atividades on line relacionadas ao jogo do máximo, que envolve o conceito de probabilidade	Duplas ou conforme a disponibilidade de computadores na escola	2 tempos de 40 minutos

Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??

Páginas no material do aluno

179 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Quais são suas chances?	Computadores com acesso à internet e Datashow ou quadro negro, caneta, lápis, borracha e caderno.	Os alunos refletirão sobre algumas questões envolvendo probabilidade	Grupos de até 4 alunos.	2 tempos de 40 minutos
	Feliz aniversário!	Computadores com acesso à internet e Datashow ou quadro negro, caneta, lápis, borracha e caderno.	Os alunos refletirão sobre uma situação corriqueira envolvendo datas de aniversário e probabilidade.	Grupos de até 4 alunos.	2 tempos de 40 minutos

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Reconhecendo problemas de probabilidade condicional	Uma ficha de atividades como a que segue no pendrive para cada dupla.	A atividade cria condições para que os alunos consigam identificar a principal característica de um problema que envolve o cálculo de uma probabilidade condicional.	Duplas	2 tempos de 40 minutos
	A escolha da porta certa	Cópias da folha de atividades.	Os alunos terão a oportunidade de calcular a probabilidade de ganhar um prêmio, numa brincadeira chamada Porta dos Desesperados.	Grupos de 4 ou 5 alunos	2 tempos de 40 minutos

Seção 2 – Vamos rever alguns problemas de uma maneira diferente !!!??

Páginas no material do aluno

184 a 187

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	O jogo de roletas	Cópias da folha de atividades	A atividade propõe a discussão dos principais conceitos associados à probabilidade da união de eventos e à probabilidade condicional.	Duplas ou grupos com 4 componentes	2 tempos de 40 minutos

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Fórmulas: usá-las ou não usá-las? Eis a questão!	Folhas de tamanho A4 para cálculos	A atividade dá aos alunos a oportunidade de refletir sobre as possibilidades que temos de apresentar soluções distintas para um mesmo problema, usando fórmulas ou não.	Duplas	2 tempos de 40 minutos

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas. A primeira consiste num registro de aprendizagens e a segunda, de questões objetivas e dissertativas, a serem escolhidas de acordo com as necessidades do professor.	Individual	40 minutos

Atividade Inicial

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Explorando o jogo do máximo	Computador com acesso à internet e Datashow	Os alunos farão duas atividades on line relacionadas ao jogo do máximo, que envolve o conceito de probabilidade	Duplas ou conforme a disponibilidade de computadores na escola	2 tempos de 40 minutos

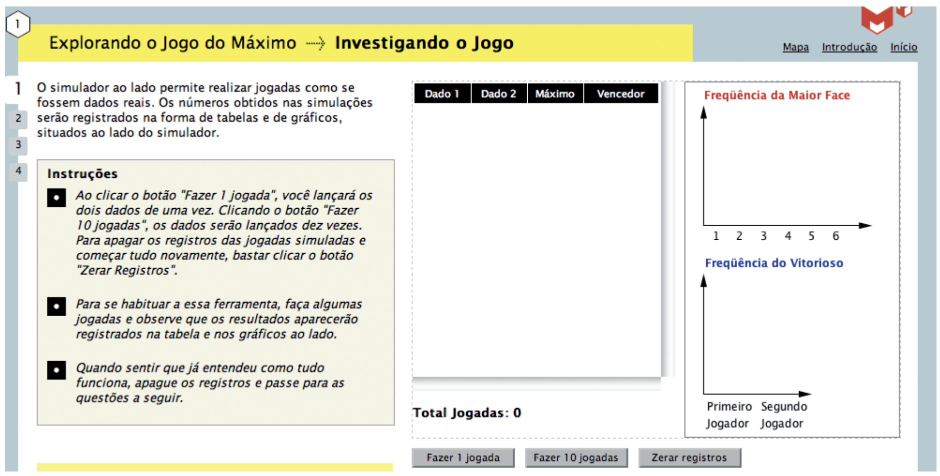
Aspectos operacionais

Prezado professor, peça que os alunos se dividam em dupla e que cada dupla escolha um computador para utilizar. Se a quantidade de computadores não for suficiente para que os alunos se organizem desta maneira, utilize um notebook e um Datashow, fazendo uma atividade coletiva em sala de aula. Desta forma, você pode chamar algumas duplas para participar da atividade enquanto os outros observavam e discutem as possíveis soluções. Para dar início à atividade, peça aos alunos que acessem o link http://m3.ime.unicamp.br/app/webroot/media/software/1237/mapa.html. Caso esteja utilizando o computador com Datashow, acesse o link você mesmo.

Na atividade 1 é feita uma investigação inicial do jogo do máximo a partir de simulações. Já o objetivo da atividade 2 é desmistificar o jogo. Antes de tudo, comece explicando as regras aos seus alunos. No jogo do máximo, duas pessoas jogam. A primeira delas lança dois dados de uma só vez. Se o valor máximo que aparecer em qualquer um dos dois dados estiver entre 1 e 4, ela vence. No entanto, se o maior valor a aparecer nos dados for 5 ou 6, então é o seu adversário, o segundo jogador, quem vence.

Atividade 1

Primeiramente, os alunos farão simulações para investigar o jogo. No próprio software há instruções de como operar o simulador, como podemos ver na tela abaixo:

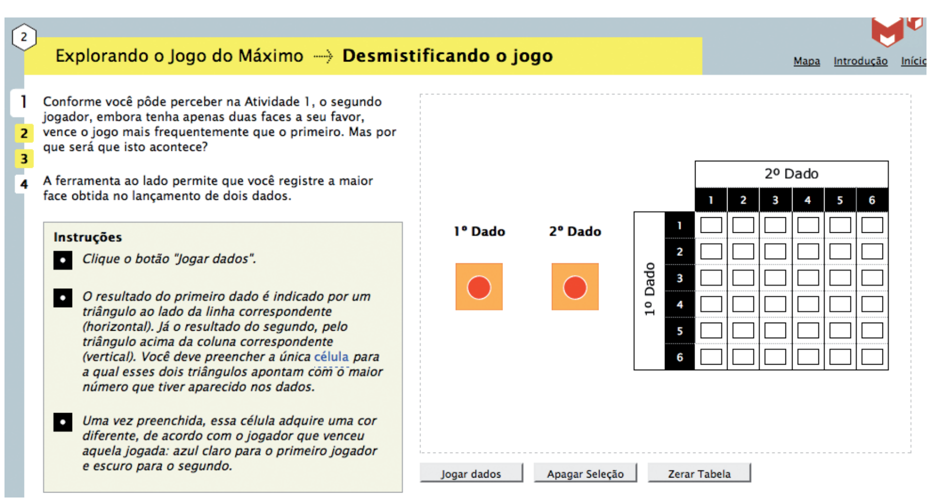


Após as simulações os alunos deverão responder a duas questões. Em seguida, é possível conferir os resultados.

A primeira atividade é composta por 4 etapas. Na primeira etapa, os alunos farão 10 simulações. Na segunda etapa, pelo menos 30 simulações e, na terceira etapa, 100 simulações. Após as simulações, os alunos responderão algumas questões. Na quarta e última etapa, os alunos serão convidados a fazer uma reflexão a respeito do jogo.

Atividade 2

Nessa atividade, o aluno vai tentar descobrir por que o segundo jogador, embora tenha apenas duas faces a seu favor, vence o jogo mais frequentemente que o primeiro, como visto na Atividade 1.



Na primeira etapa desta atividade, os alunos deverão preencher uma tabela. Na segunda e terceira etapa, os alunos deverão responder questões relacionadas à tabela preenchida anteriormente. Por fim, os alunos deverão responder a algumas questões refletindo sobre o jogo.

Aspectos pedagógicos

Os jogos despertam muito interesse nas pessoas. Os jogos com dados, em particular, são praticados pela humanidade há muito tempo. Eles fazem parte dos chamados "jogos de azar", cuja análise deu origem aos primeiros estudos sobre probabilidade na Matemática.

Essa primeira atividade é extremamente rica, uma vez que, além de iniciar o estudo dessa unidade sobre probabilidade de forma interativa, ela permite ao aluno refletir que nem sempre uma situação aparentemente favorável para um determinado jogador (o jogador 1 ganha se o resultado for 1, 2, 3 ou 4 - 4 possibilidades - enquanto o jogador 2 ganha apenas se os resultados forem 5 ou 6 - 2 possibilidades) não será favorável de fato. Podemos perceber isso mais claramente na tabela a seguir:

		2º Dado					
		1	2	3	4	5	6
1º Dado	1	1	2	3	4	5	6
	2	2	2	3	4	5	6
	3	3	3	3	4	5	6
	4	4	4	4	4	5	6
	5	5	5	5	5	5	6
	6	6	6	6	6	6	6

Nesta tabela, que pode ser encontrada na Atividade 2, podemos perceber que há 20 resultados com 5 ou 6, favoráveis ao segundo jogador, enquanto há apenas 16 resultados com 1, 2 3 ou 4, favoráveis ao primeiro jogador. Isso faz com que o segundo jogador tenha mais chances de ganhar do que o primeiro jogador. Nessa atividade, procure explorar junto com o seu aluno a ideia de chance de ganhar o jogo e o por quê de não serem igualmente distribuídas.

Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??

Páginas no material do aluno

179 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Quais são suas chances?	Computadores com acesso à internet e Datashow ou quadro negro, caneta, lápis, borracha e caderno.	Os alunos refletirão sobre algumas questões envolvendo probabilidade	Grupos de até 4 alunos.	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, leve os alunos para o laboratório de informática, peça que se dividam em grupos de até quatro pessoas e que cada grupo escolha um computador para trabalhar. Em seguida, peça que acessem o link http://www.planetseed.com/pt-br/mathpuzzles/quais-sao-suas-chances . Caso tenha dificuldades em acessar o laboratório de informática, você pode passar as questões no quadro e pedir que os grupos resolvam as questões. Em seguida, peça que alguns grupos apresentem as soluções encontradas e faça uma explanação articulando estas soluções com as soluções corretas.

A idéia é fazer com que os alunos reflitam e respondam às seguintes questões:

1. Se você jogar um par de dados, qual é a probabilidade de conseguir com que a soma de duas faces viradas para cima seja igual a 2?

2. E se novamente jogar o par de dados, qual é a probabilidade de conseguir com que a soma de duas faces viradas para cima seja igual a 7?

Por que são diferentes?

No caso de a atividade ser realizada no laboratório de informática, os alunos poderão, após a resolução, clicar em Confira nossa solução para verificarem se acertaram.

Aspectos pedagógicos

Professor, é interessante construir com a turma as possibilidades de solução dos questionamentos. Apresentamos a seguir, uma sugestão para esta construção:

1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	6	6
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6

Veja que existem 36 resultados possíveis. Um desses, mostrado em verde, é aquele cuja soma é igual a 2, ou seja, aquele em que cada um dos dados apresenta o número 1 na face superior. Assim, a probabilidade de se conseguir soma 2 é de 1/36.

Seis das 36 possibilidades, mostradas em vermelho, somam 7. Assim, a probabilidade de se conseguir soma 7 é de 6/36 = 1/6.

Agora, reflita com a turma por que as probabilidades são diferentes, uma vez que, só há uma única possibilidade da soma resultar 2, enquanto há seis possibilidades para a soma dos números mostrados nas faces superiores dos dados ser 7.

Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??

Páginas no material do aluno

179 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Feliz aniversário!	Computadores com acesso à internet e Datashow ou quadro negro, caneta, lápis, borracha e caderno.	Os alunos refletirão sobre uma situação corriqueira envolvendo datas de aniversário e probabilidade.	Grupos de até 4 alunos.	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

Professor, leve os alunos para o laboratório de informática, peça que se dividam em grupos de até quatro pessoas e que cada grupo escolha um computador para trabalhar. Em seguida, peça que acessem o link http://www.planetseed.com/pt-br/mathpuzzles/feliz-aniversario. Caso o laboratório não esteja disponível, você pode realizar a atividade com papel e lápis, quadro e caneta.

Essa atividade será composta por 3 etapas:

1ª etapa:

Peça que os alunos reflitam sobre as situações propostas:

Você já notou que muitas pessoas fazem aniversário no mesmo dia que você? Com apenas 366 datas possíveis para aniversariar e mais de 6 bilhões de pessoas no mundo, deve haver um monte de pessoas fazendo anos no seu dia. Mas se você estivesse dentro de uma sala com algumas pessoas, qual é a probabilidade de haver ao menos duas delas fazendo aniversário no mesmo dia?

2a etapa:

Quantos alunos há em sua classe? Existem muitos aniversários em comum?

Professor, para responder a essas perguntas, peça para que cada um diga a data do seu aniversário e verifique se há aniversários em comum.

3ª etapa:

Por fim, peça para que os alunos resolvam algumas situações:

Quantas pessoas você acha que deveria haver na sala para termos uma boa chance de, no mínimo, duas delas fazerem aniversário no mesmo dia?

Em outras palavras, quantas pessoas são necessárias para que a probabilidade de um aniversário em comum seja maior que 50%? De quantas pessoas você precisa para a probabilidade ser maior que 90%?

Aspectos pedagógicos

Professor, essa é uma atividade interessante para realizar em sala, pois envolve a data de aniversário e todos gostam de dizer quando irão comemorar mais uma primavera.

Uma maneira de resolver esse problema é analisá-lo ao contrário e pensar qual a probabilidade de não haver nenhuma coincidência em um grupo de determinado tamanho. Suponha uma sala em que há apenas uma pessoa. Neste caso, não há possibilidades de aniversários em comum, já que para haver coincidência de aniversários são necessários, no mínimo, dois aniversariantes. A probabilidade de não haver coincidências nesse caso é 1, pois eventos considerados certos têm a probabilidade de 1. No outro extremo, com 367 pessoas na sala, é certo que haverá pelo menos um aniversário em comum, já que, nesta situação, não haverá datas diferentes disponíveis para todos.

Imagine agora que uma segunda pessoa entrou na sala. A probabilidade de essa pessoa não ter o mesmo aniversário do primeiro ocupante da sala é 365 / 366 - ou 0,997 – pois apenas uma dentre as 366 datas de aniversário coincidirá com a do primeiro ocupante. Agora, se as duas primeiras pessoas na sala tiverem datas de aniversário diferentes e uma terceira pessoa entrar, haverá dois dias ocupados – portanto, a probabilidade de não haver compartilhamento entre os três é de 1 * 365 / 366 * 364 / 366 = 0,992, que ainda é mais de 99%. Então, com 2 ou 3 pessoas na sala, há menos de 1% de chance de um aniversário em comum.

Você pode continuar a calcular as chances de não ter um aniversário em comum para qualquer número de pessoas:

1 * 365 / 366 * 364 / 366 * 363 / 366 * 362 / 366 ...

As coisas mudam rapidamente à medida que o número de pessoas aumenta. Com 10 pessoas na sala, ainda há mais de 10% de chance de uma coincidência. Quando há 23 pessoas na sala, a chance de um aniversário em comum é levemente maior de 50%, e aumenta para mais de 90% com 41 pessoas.

Essa atividade pode ter um desdobramento prático. Peça para que os alunos realizem uma enquete com outras turmas na escola perguntando a data de nascimento de cada um. Após recolher essas informações, tente confirmar experimentalmente os cálculos realizados anteriormente de maneira teórica.

Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??

Páginas no material do aluno

179 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Reconhecendo problemas de probabilidade condicional	Uma ficha de atividades como a que segue no pendrive para cada dupla.	A atividade cria condições para que os alunos consigam identificar a principal característica de um problema que envolve o cálculo de uma probabilidade condicional.	Duplas	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

O objetivo desta atividade é criar condições para que os alunos consigam identificar a principal característica de um problema que envolve o cálculo de uma probabilidade condicional: saber que um evento B ocorreu pode nos ajudar a avaliar a probabilidade de ocorrência de um evento A.

Inicialmente você pode estabelecer com a turma um diálogo, levantando os seguintes questionamentos: Saber que o primeiro filho de um casal é menino muda a chance do segundo filho deste mesmo casal ter um segundo filho do sexo feminino? Em que tipo de situação saber de uma informação a mais altera nossa avaliação da probabilidade de um evento ocorrer?

Em seguida, distribua uma ficha como a que segue no Pendrive para cada dupla e peça aos alunos que, organizados em dupla, tentem resolver os problemas ali propostos. Quando eles concluírem, peça-lhes que exponham seus raciocínios.

Aspectos pedagógicos

Professor, nossa sugestão aqui é que, quando os alunos expuserem suas soluções, você faça uma leitura coletiva dos problemas procurando compará-los. Inicialmente leia e compare os problemas 1 e 2. Embora o contexto seja o mesmo – a extração de uma carta de um baralho – qual a diferença entre um e outro? Os alunos precisam entender que, no primeiro problema, o espaço amostral é formado pelas 52 cartas e, como são 4 reis, a probabilidade desejado é 4/52 ou 2/13. Já no segundo, o fato de sabermos que a carta retirada era vermelha nos leva a restringir o espaço amostral a 26 elementos. Para resolvermos este problema, devemos saber que as cartas vermelhas são de dois naipes distintos: copas e ouro. Outra informação importante é que a quantidade de cartas em cada naipe é a mesma: 13 cartas. Assim temos 26 cartas vermelhas e, destas, duas são reis: o rei de ouro e o rei de copas.

Após estas informações, podemos calcular a probabilidade pedida. Mais uma vez, é importante ajudar os alunos a visualizar e definir os eventos envolvidos na situação:

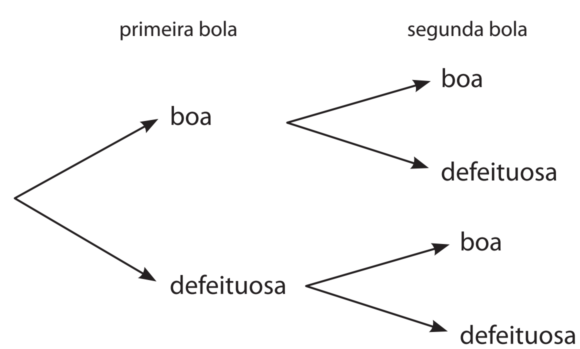
V = sair uma carta vermelha

R = sair rei

Logo, $P(R/V) = \dfrac{n(R \cap V)}{n(V)} = \dfrac{2}{26} = \dfrac{1}{13}$

Nos problemas 3 e 4, caso nenhuma dupla apresente o diagrama de árvore em suas soluções, é importante construí-lo o e valorizá-lo junto aos alunos, mostrando que este é um esquema de simples construção e bastante intuitivo. Estabelecendo e usando esta forma de registro dos dados, os alunos podem avançar no processo de construção dos principais conceitos associados ao cálculo das probabilidades.

No problema 3, ao retirarmos a 1ª peça, temos duas possibilidades: ser boa ou ser defeituosa. Para cada uma, há duas possibilidades para a 2ª peça retirada, que também pode ser boa ou defeituosa.



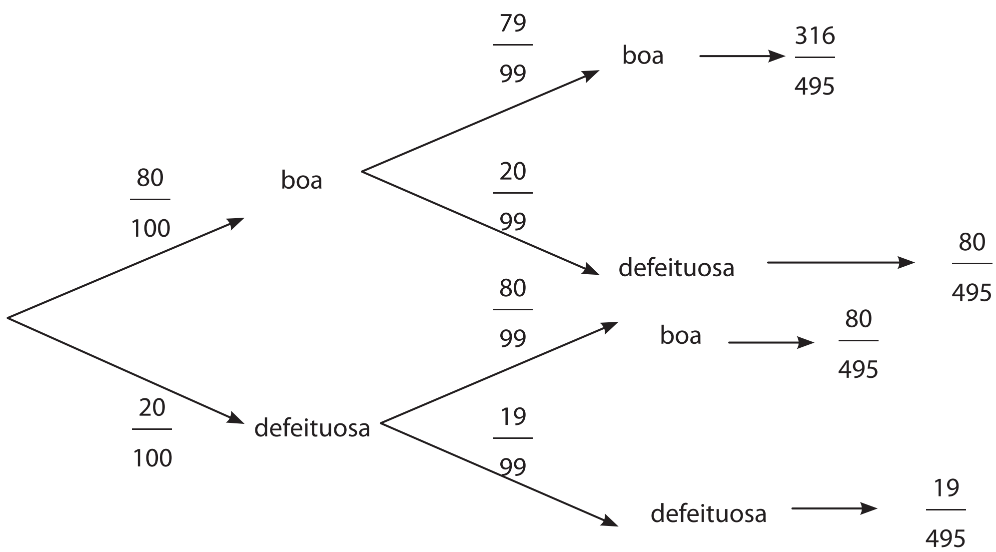
Para calcular estas probabilidades é importante lembrar a fórmula da probabilidade condicional: $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por P(B) podemos reescrever esta fórmula como $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Assim, podemos concluir que para calcular a probabilidade em cada saída devemos multiplicar as probabilidades dos ramos que antecedem a saída. Por exemplo:

P(primeira boa $\cap$ segunda boa) = P(primeira boa)·P(segunda boa /primeira boa).

Agora já é possível preencher o diagrama com as probabilidades:



Para a 2ª peça ser defeituosa, temos duas possibilidades, que são "a 1ª ser boa e a 2ª ser defeituosa" ou "a 1ª ser defeituosa e a 2ª ser defeituosa". A palavra "ou" tem um significado de união então:

P(segunda defeituosa) = P(primeira boa $\cap$ segunda defeituosa) + P(primeira defeituosa $\cap$ segunda defeituosa)

Substituindo os valores obtemos $\frac{80}{495}+\frac{19}{495}=\frac{99}{495}$

No problema 4, é aconselhável que você chame a atenção dos alunos para o fato de que a informação que possuímos é da 2ª peça - o que, no diagrama da árvore, significa uma informação a posteriori e não a priori. Portanto, neste caso, a fórmula da probabilidade condicional é essencial. E, sendo assim, temos:

$$P(\textit{primeira}\ \text{boa / segunda defeituosa})=\frac{P(\textit{primeira}\ \text{boa}\cap\text{segunda defeituosa})}{P(\text{segunda defeituosa})}=\frac{\frac{80}{495}}{\frac{99}{495}}=\frac{80}{99}$$

Seção 1 – Vamos lançar moedas e dados novamente e resolver alguns problemas diferentes !!!??

Páginas no material do aluno

179 a 184

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	A escolha da porta certa	Cópias da folha de atividades.	Os alunos terão a oportunidade de calcular a probabilidade de ganhar um prêmio, numa brincadeira chamada Porta dos Desesperados.	Grupos de 4 ou 5 alunos	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais:

Esta atividade foi adaptada de um roteiro de ação proposto no curso de formação continuada para professores de Matemática da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro. Ela enfatiza o estudo do conceito de probabilidade condicional, um assunto essencial nos estudos das probabilidades na Matemática do Ensino Médio. A situação problema apresentada na ficha é baseada no problema clássico de A. C. Morgado: Os dois bodes.

Para começar, professor, organize os grupos de trabalho com 4 componentes, procurando colocar num mesmo grupo alunos com diferentes níveis de compreensão do que foi estudado até então. Depois que distribuir as fichas, você pode pedir aos grupos que comecem a lê-las e tentem responder os itens ali presentes. Mas, atenção: enquanto eles tentam fazer isso, é fundamental que você circule pela sala, procurando identificar as dúvidas que forem surgindo e esclarecendo-as sempre que possível. Nesta ficha, a compreensão dos itens iniciais favorece a compreensão dos itens finais. Se os alunos não tiverem suas dúvidas esclarecidas, poderão perder o interesse pela atividade. É razoável que você reserve um tempo no final da aula para que os alunos exponham suas soluções, mas também permita que os grupos troquem ideias com você e entre eles mesmos ao longo de toda a aula.

Aspectos pedagógicos

Professor, o item 1 é relativamente fácil e nossa experiência tem mostrado que a maioria dos alunos consegue respondê-lo sem maiores dificuldades. Considerando-se que as portas têm a mesma chance de conterem o prêmio, temos que a probabilidade de ganhar é $p=1/3$ e de perder é $q=1-1/3=2/3$. Aconselhamos apenas que você aproveite esse item para reforçar a ideia de probabilidade do evento complementar, que é um dos descritores da matriz de referência do Currículo Mínimo.

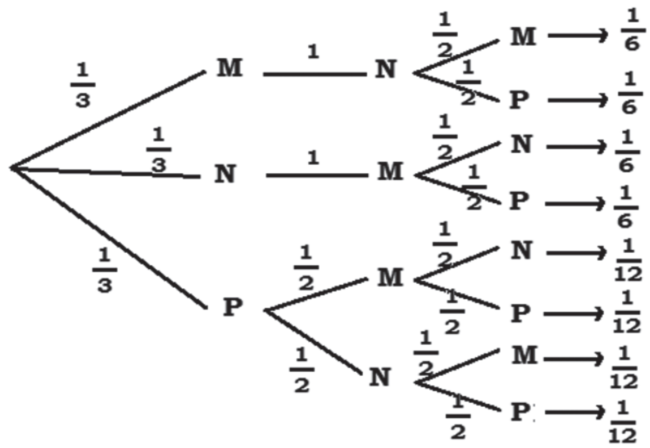
No segundo item, introduzimos a ideia de probabilidade condicional. É importante levar os alunos a perceber que, dependendo da condição estabelecida na pergunta, o resultado da probabilidade será alterado. Na verdade, dependendo do que é perguntado, o espaço amostral da situação pode se alterar. Supondo que o participante escolheu uma porta com um monstro, o apresentador, que sabe o que está por trás das 3 portas, deverá escolher a outra porta que contém um monstro. Logo a probabilidade do apresentador escolher essa porta é P=1 ou 100%. Já no item 3, como o apresentador sabe que o participante escolheu uma porta que contém um prêmio, ele terá duas opções de portas com monstro para abrir. Logo sua probabilidade de abrir uma porta com um monstro é P=1/2 ou 50%.

A partir do item 4, professor, é aconselhável que você relembre com seus alunos a ideia de probabilidade de eventos independentes e sucessivos, que nos diz que, se um experimento aleatório é composto por vários eventos sucessivos e independentes, a probabilidade de ocorrência é o produto da probabilidades dos eventos componentes. Note ainda que está implícita no problema a regra do "ou" (probabilidade da união) para eventos independentes, que nos diz que, se A e B são dois eventos independentes, então a Probabilidade de correr o evento A ou o evento B (eis o motivo de a regra ser chamada de regra do ou) é dada pela soma das probabilidades dos eventos. Se estas ideias estiverem bem trabalhadas, facilmente seus alunos conseguirão preencher corretamente a árvore do item 4, que resumimos a seguir:

Ganha o prêmio Trocando de porta	Perde o prêmio Trocando de porta
Caso 1: 1/3 x 1 = 1/3 Caso 2: 1/3 x 1 = 1/3	Caso 3: 1/3 x 1/2 = 1/6 Caso 4: 1/3 x 1/2 = 1/6
A Probabilidade é de p= 1/3 + 1/3 = 2/3	A Probabilidade é de p= 1/6 + 1/6 = 1/3

Além disso, concluirão que, após o apresentador abrir a porta que contém um monstro, as chances do participante de ganhar o prêmio aumentam, que é a solução do item 6. Afinal, antes do apresentador abrir a porta, sua probabilidade era de p=1/3, o que equivale a aproximadamente, 33,3%. Com a abertura da porta que contém um monstro, intuitivamente, suas chances aumentam para p=1/2=50%.

Perceba como a construção da árvore de probabilidades é um excelente recurso para a organização do pensamento e para a decisão dos cálculos a serem feitos. Aqui nossa sugestão é que você reflita com seus alunos sobre isso e estimule o preenchimento da árvore proposta no item 7. Ela fica como a que segue abaixo. Se for preciso, procure auxiliá-los.



As respostas dos itens 8 e 9, 10 são, respectivamente p=1/12 + 1/12 = 1/6 e p=1/6 + 1/6 = 2/6 ou p = 1/3. A partir destes cálculos, seus alunos poderão ainda concluir que a probabilidade do participante ganhar o prêmio trocando de porta é o dobro da probabilidade de ganhar o prêmio sem trocar, o que responde ao item 10.

Por fim, no item 11, a probabilidade procurada é p = 1/12 + 1/12 = 1/6 . Aproveite este fechamento para observar junto à turma que, nas condições e critérios apresentados pelo problema, é mais vantajoso trocar de porta. Porém deve ficar claro que nem sempre isso é o que acontece. Afirmar que sempre é melhor trocar de porta é dizer que essa probabilidade é 100%, o que é falso. Em geral, o critério adotado pelo apresentador na escolha da porta que contém um monstro pode levar o participante à escolha da porta certa.

Seção 2 – Vamos rever alguns problemas de uma maneira diferente !!!??

Páginas no material do aluno

184 a 187

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	O jogo de roletas	Cópias da folha de atividades	A atividade propõe a discussão dos principais conceitos associados à probabilidade da união de eventos e à probabilidade condicional.	Duplas ou grupos com 4 componentes	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais

Nesta atividade, que é uma adaptação de um roteiro de ação do curso de formação continuada para professores da rede estadual do Rio de Janeiro, propomos a discussão dos principais conceitos associados à probabilidade da união de eventos e à probabilidade condicional. Nela, é interessante que você reflita com seus alunos não só sobre as fórmulas que podem ser deduzidas no estudo destes assuntos, mas também sobre a possibilidade de resolvermos problemas sem necessariamente termos que recorrer a elas.

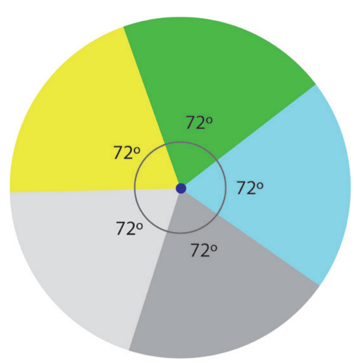
Para começar, professor, você pode organizar a turma em duplas ou grupos com 4 componentes, de maneira que os alunos tenham afinidades pessoais e também consigam estabelecer uma parceria de trabalho, respeitando-se. Em seguida, distribua para cada grupo uma ficha como a que segue em anexo. Antes que eles comecem a lê-la, vale à pena um pequeno bate papo sobre jogos e, principalmente, sobre aqueles em que os jogadores utilizam roletas. Questione-os se já participaram de algum jogo deste tipo e onde costumam ver roletas. Em muitos jogos infanto-juvenis, em certos programas de auditório na televisão e em parques de diversão podemos vê-las facilmente. Estas constatações ajudarão os alunos a se aproximarem do contexto das situações problema que são apresentadas na ficha.

Depois disso, você pode pedir aos alunos que leiam atentamente as fichas, tentem resolver os problemas e, quando concluírem, proponha uma correção coletiva. Faça uma grande roda e dê oportunidade para que seus alunos exponham suas soluções e os pontos de vista subjacentes em cada solução. Nestes momentos, é aconselhável que você faça poucas intervenções, permitindo a troca de opinião entre os alunos. Porém, esteja atento às falas dos alunos para poder sinalizar para a turma os pontos de aproximação entre os raciocínios empregados por eles e os conhecimentos matemáticos que estes raciocínios mobilizam.

Aspectos pedagógicos

Professor, no item 1, é fundamental que seus alunos percebam que, como cada um dos 5 setores tem a mesma chance de ocorrência na parada do ponteiro, temos que todos os setores são congruentes. Logo a chance de ocorrência de cada setor será $\mathbf{p} = \frac{1}{5}$.

Uma possível representação dessa situação pode ser:



Dividindo o círculo em 5 setores congruentes, teremos que cada setor terá ângulo central de 72º.

Recomendamos que, durante a correção coletiva ou mesmo enquanto os alunos ainda estiverem resolvendo as situações da ficha, você procure comparar este círculo com o círculo que serve de base para as questões de 2 a 5. Nossa experiência tem mostrado que alguns alunos se distraem e não levam em conta este último, respondendo as questões como se as chances em todos os setores fossem as mesmas. Se estiverem atentos ao círculo certo, facilmente concluirão que o maior setor de um círculo é aquele que possui a maior área e consequentemente o maior ângulo central. Além disso, como o ponteiro cai no setor amarelo, que possui 120°, temos que a probabilidade de isso ocorrer é p=área do setor (120°)/área do círculo (360°)=1/3.

Seguindo este raciocínio, no item 3, a resposta é o setor de cor azul, pois possui a maior área e, no item 4, não se surpreenda se alguns alunos pensarem assim:

"Temos que p=área do setor (x°)/área do círculo (360°)=12,5%=125/1000=1/8. Logo esse setor corresponde a 1/8 do círculo. Com isso, seu ângulo central será de 360/8=45°. Logo, o setor pedido no problema é aquele que possui um ângulo central de 45º".

Mas, caso algum aluno apresente muitas dificuldades na resolução desse item, procure reforçar a ideia de que a probabilidade de ocorrência do espaço amostral é 100% (ou 1).

Esta ideia, por sua vez, pode também servir como argumento para que sua turma compreenda que a resposta do item 5 é não, pois a soma das probabilidades desses três setores, que formam o espaço amostral é 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8 < 1.

Por construção, os 8 setores têm ângulos centrais respectivamente iguais a 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70° e 80°. Vale ressaltar que só faz sentido falar nessa probabilidade, pois a soma dos ângulos centrais dos 8 setores é igual a 10°+ 20°+ 30°+ 40°+ 50°+ 60°+ 70°+ 80°=360° , que é o ângulo central referente ao espaço amostral.

Para o item 6, lembre aos alunos que a maior chance ocorrerá no setor de maior área e, portanto, de maior ângulo central. Logo, o ponteiro tem a maior chance de parar no setor cujo ângulo central mede 80°. Já para o item 7, a menor chance ocorrerá no setor de menor área e, portanto, de menor ângulo central. Logo o ponteiro tem a menor chance de parar no setor cujo ângulo central mede 10°.

Os itens 8 e 9 exploram a probabilidade geométrica e a propriedade da união de dois eventos, representada por p(A U B). No item 8, como o ponteiro cai num setor de cor branca, isso pode acontecer nos setores cujos ângulos centrais são respectivamente iguais a 20° e 60°. Por construção, esses setores correspondem a eventos independentes e, assim, teremos:

Evento A = O ponteiro cair no setor de ângulo central igual 20°.

p(A) = área do setor (20°) / área do círculo (360°) = 20/360 = 1/18

Evento B = O ponteiro cair no setor de ângulo central igual 60º.

p(B) = área do setor (60°) / área do círculo (360°) = 60/360 = 1/6

Logo, como os eventos A e B são independentes, pela "regra do ou" temos:

p(A U B)= 1/18 + 1/6 = 1/18 + 3/18 = 4/18 = 2/9

No item 9, como o ponteiro não cai num setor de cor branca ou azul, ele só pode cair num setor de cor verde ou amarela. Assim temos que:

Evento A = O ponteiro cair no setor de cor verde (ângulo central igual 10° ou 40° - "regra do ou").

p (A) = área do setor verde / área do círculo (360°) = 10/360 + 40/360 = 50/360

Evento B = O ponteiro cair no setor de cor amarela (ângulo central igual 50° ou 80° - "regra do ou").

p (B) = área do setor amarelo / área do círculo (360°) = 50/360 + 80/360 = 130/360

Logo, como os eventos A e B são independentes, pela "regra do ou" temos:

p(A U B) = 50/360 + 130/360 = 180/360 = 1/2 = 50%

o que nos diz que essa chance é de 50%.

Professor, o item 10 explora a probabilidade geométrica e a propriedade de probabilidade condicional, representada por p(A / B). Nele, é importante que os alunos entendam que a probabilidade condicional p(A / B) trata da probabilidade de ocorrência de um evento A, tendo ocorrido um evento B, ambos do espaço amostral, ou seja, ela é calculada sobre o evento B e não em função do espaço amostral Ω. O entendimento dessa mudança no espaço amostral é fundamental para que os alunos desenvolvam seus próprios métodos para resolver este tipo de situação.

No caso do item 10, o espaço amostral deixa de ser o círculo e passa a ser os setores circulares de cor verde.

Como se sabe que o ponteiro caiu num setor de cor verde, ele só pode ter caído nos setores cujos ângulos centrais são respectivamente iguais a 10° e 40°. Logo temos que o espaço amostral deixa de ser o circulo como um todo e passa a ser os setores de cor verde. Assim segue que:

Evento A = O ponteiro cair no setor de cor verde de ângulo central igual 40º.

Evento B (Espaço amostral) = O ponteiro cair no setor de cor verde (ângulo central igual 10° ou 40°).

p(A / B) = área do setor verde (40°) / área dos setores verdes (10°+40°) = 40/50= 4/5=80%

Seção 2 – Vamos rever alguns problemas de uma maneira diferente !!!??

Páginas no material do aluno

184 a 187

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Fórmulas: usá-las ou não usá-las? Eis a questão!	Folhas de tamanho A4 para cálculos	A atividade dá aos alunos a oportunidade de refletir sobre as possibilidades que temos de apresentar soluções distintas para um mesmo problema, usando fórmulas ou não.	Duplas	2 tempos de 40 minutos

Aspectos operacionais:

Professor, esta é uma atividade simples em que você terá oportunidade de refletir com seus alunos sobre as possibilidades que temos de apresentar soluções distintas para um mesmo problema. Poderá mostrar a eles também que, embora existam fórmulas, nem sempre empregá-las é o caminho mais rápido para solucionar um problema. Para começar, escreva no quadro os problemas abaixo e peça aos alunos que tentem resolvê-los em dupla. Quando eles concluírem, peça que exponham suas soluções.

Problema 1: Em uma determinada turma o professor resolveu chamar um aluno para ir a um quadro. Para isso ele escolheu, de forma aleatória, um dos 29 números da chamada que se encontrava em seu diário de classe. Qual a probabilidade de ter sido escolhido um número que seja par ou múltiplo de 3?

Problema 2: Em uma festa de fim de ano de uma empresa os funcionários resolveram participar de um amigo oculto. No entanto, ao colocar os nomes nos papéis decidiram que colocariam os nomes das mulheres em papel vermelho e os nomes dos homens em papel azul. Entre os funcionários desta empresa estão Marlise e Nilton. Participaram do amigo oculto 25 homens e 35 mulheres. Sabendo que Marlise retirou um papel azul, qual é a probabilidade dela ter retirado o papel com o nome Nilton?

Aspectos pedagógicos

Professor, antes de os alunos começarem a expor suas soluções, é aconselhável que você faça a leitura dos problemas com eles. O problema 1, por exemplo, pode ser resolvido a partir da simples observação da lista de números mencionada no enunciado e da identificação dos números que compõem os casos favoráveis e os casos possíveis. Entretanto, se alguma dupla tiver resolvido o problema 1 utilizando a fórmula para a probabilidade da união de eventos, procure verificar se, em primeiro lugar, eles definiram claramente os eventos A = sair número par e B = sair número múltiplo de 3.

Desta forma, temos n(A) = 15, n(B) = 9 e n(Ω) = 29. Além disso, devemos criar condições para que os alunos entendam o que está sendo pedido. Eles devem perceber que o evento sair número par ou número múltiplo de 3 significa $A \cup B$. Já o evento $A \cap B$ significa sair número par e número múltiplo de 3, ou seja, múltiplo de 6 assim $n(A \cap B)$ = 4.

Assim, as probabilidades que podemos calcular são:

p(A) = 15/29, p(B) = 9/29 $p(A \cap B)$ e = 4/29

E, usando a fórmula da probabilidade da união de dois eventos, temos:

p(A U B) = 15/29 + 9/29 – 4/29 = 20/29

Já no problema 2, como sabemos que a pessoa sorteada pela Marlise foi um homem, ela só pode ter retirado um dos 25 nomes. Então podemos considerar o conjunto com estes 25 nomes como sendo o nosso "espaço amostral". Considerando o evento A como "sair o papel com o nome Nilton", e sabendo que o papel azul saiu, caímos no caso de uma probabilidade condicional, pois já conhecemos uma informação adicional - neste caso, que o papel retirado era azul.

Se denotarmos o evento "sair papel azul" pela letra B, é possível calcular p(A/B), ou seja, a "probabilidade do evento A ocorrer sabendo que B ocorreu", que pode ser lido como "probabilidade de A dado B". Assim, p(A / B) = $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ = 1/25, pois dos 25 papéis azuis 1 tem o nome de Nilton. Lembrando que $A \cap B$ = papel azul e que contém o nome Nilton.

De maneira geral, quaisquer que sejam os eventos A e B, teremos p(A / B) = $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$. E, ao dividirmos o numerador e o denominador por n(Ω), teremos:

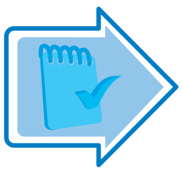
p(A / B) = $\dfrac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}}$, ou seja, p(A / B) = $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

Utilizando esta fórmula no exemplo anterior temos:

p(A / B) = $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{1}{60}}{\frac{25}{60}} = \dfrac{1}{25}$, o mesmo resultado que obtivemos sem a utilização da fórmula.

Mas, lembre-se, nosso objetivo aqui é destacar para os alunos que nem sempre vale a pena usar fórmulas mecanicamente sem antes entendermos o que está sendo pedido. Este é um bom exemplo de situação em que a fórmula pode ser desnecessária.

Avaliação

Tipos de Atividades	Título da Atividade	Material Necessário	Descrição Sucinta	Divisão da Turma	Tempo Estimado
	Avaliação da Unidade	Folha de atividades, material do aluno, lápis/caneta.	Esta atividade sugere um instrumento avaliativo para a unidade dividido em duas etapas. A primeira consiste num registro de aprendizagens e a segunda, de questões objetivas e dissertativas, a serem escolhidas de acordo com as necessidades do professor.	Individual	40 minutos

Aspectos operacionais

Para o momento de avaliação, sugerimos a utilização do último tempo de aula destinado à Unidade 4 do Módulo 4. A seguir, apresentamos sugestões para a avaliação das habilidades pretendidas nesta unidade. Dividiremos nossas sugestões avaliativas em duas etapas, conforme explicitadas a seguir.

Etapa 1: Registros de aprendizagens (Momento de Reflexão)

Apresentamos a seguir algumas questões para os alunos responderem, que podem complementar as suas, no que diz respeito à avaliação do desenvolvimento das habilidades matemáticas pretendidas. A idéia é que elas complementem as estratégias que você já usa com este objetivo.

1. Qual o conteúdo matemático estudado nesta unidade?
2. Cite dois eventos associados ao lançamento sucessivo de três moedas.
3. Dê um exemplo de experimento aleatório e defina eventos A e B associados a este experimento, de forma que $A \cap B = \varnothing$.
4. Dois dados, um vermelho e outro amarelo, são arremessados simultaneamente. Sendo A o evento em que o resultado do dado vermelho é par e o resultado do dado amarelo é 1 e B o evento em que o resultado de ambos os dados são iguais, descreva o evento A U B.
5. Em que situação no dia a dia você percebe a necessidade de saber sobre probabilidade? Por quê?

Sugerimos, também, que este material seja recolhido para uma posterior seleção de registros, que serão entregues ao seu formador, durante a etapa presencial do processo de formação. Desta forma, esperamos acompanhar com você a maneira como os alunos estão reagindo aos caminhos que escolhemos para desenvolver este trabalho - e, se for o caso, repensá-los a partir dos resultados apresentados.

Etapa 2: Questões objetivas e discursivas

Para compor o instrumento avaliativo nesta etapa, sugerimos a escolha de pelo menos uma questão objetiva e uma questão discursiva que contemplem uma habilidade pretendida nesta unidade. Nosso objetivo aqui é fazer com que o aluno compreenda uma situação real, aplique o princípio multiplicativo ou o conceito de permutação e faça uma reflexão mais profunda sobre procedimentos para contagem.

Sugestão de questão objetiva para a avaliação:

Questão 1: (ENCE)

Num município, 36% das famílias têm cachorro e 22% das famílias que têm cachorro, têm um gato. Além disto, 30% das famílias têm um gato. A probabilidade condicional de uma família selecionada aleatoriamente ter um cachorro, dado que ela tem um gato é:

a) 26,4%

b) 30%

c) 34,5%

d) 43%

e) 52,4%

Sugestão de questão discursiva para a avaliação:

Questão:

Considere o dado em forma de icosaedro (poliedro de 20 faces), conforme apresentado na figura a seguir.

Suponha que este dado seja lançado aleatoriamente.

a) Qual o espaço amostral associado ao experimento?

b) Dado que o resultado de um lançamento do dado em forma de icosaedro é par, qual a probabilidade deste resultado ser menor ou igual a 12?

Gabarito

Registros de Aprendizagem

1. Probabilidade de reunião de eventos e probabilidade condicional.

2. Pode-se escolher A como sendo o evento em que o primeiro arremesso tem como resultado "cara" e B o evento no qual ocorrem pelo menos dois resultados "cara" nos três arremessos. Perceba que há outras possibilidades de eventos, ficando a critério de cada um a definição destes, desde que não se trate de um evento impossível para o experimento.

3. Aproveitando ainda o arremesso sucessivo de três moedas, podemos escolher A como sendo o evento em que o primeiro arremesso tem como resultado "cara" e B o evento em que o primeiro arremesso tem como resultado "coroa". Claro que .

4. Se um evento simples {(v,a)} denota o resultado de um arremesso do dado vermelho e amarelo respectivamente, então

A = {(2,1), (4,1), (6,1)} e B = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}

Donde A U B = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (2,1), (4,1), (6,1)}

5. Há inúmeras situações, aqui. No entanto, em geral, o interesse pelos jogos de azar é o que mais desperta a necessidade do conhecimento. O motivo é simplesmente tentar a avaliar suas reais chances de vencer.

Resposta e comentários da questão objetiva sugerida:

Se julgar necessário, você pode fazer um diagrama, facilitando assim a compreensão dos alunos e a organização das ideias. As informações são apresentadas explicitamente, bastando apenas fazer a leitura e identificação dos eventos.

Chamando G o evento "possuir um gato" e C o evento "possuir um cachorro", deve-se calcular p(C / G) = $\frac{p(C \cap G)}{p(G)}$ isto é, a probabilidade de possuir um cão, dado que se possui um gato. Como =22%.36% e p(G)=30%, tem-se que, p(C / G) = $\frac{p(C \cap G)}{p(G)} = \frac{22\%.36\%}{30\%} = 26,4\%$

Resposta e comentários da questão discursiva sugerida:

Você pode, inicialmente, dizer aos alunos que este dado apresenta muito mais resultados do que um dado tradicional fornece. Vale a pena elucidar a forma geométrica do mesmo. A fim de induzir uma conclusão sobre o espaço amostral, você pode perguntar se determinados resultados são possíveis. Com isto, peça que escrevam o espaço amostral. Para o segundo item, peça que enumere os resultados "pares" e, em seguida, os resultados enumerados que são menores ou iguais a 12.

Como o conjunto de todos os possíveis resultados de um arremesso é S={1,2,...,20}, este é o espaço amostral. Agora, considere que o evento A é o "resultado é par" e o evento B é "o resultado é menor ou igual a 12". Precisamos calcular

p(B / A) = $\dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

isto é, a probabilidade de B dado que A ocorreu. Ora, como A = {2,4,6,...,20}, p(A)=10/20 = 1/2 . Por outro lado, $p(A \cap B)$ = 6/20=3/10 pois $A \cap B = \{2,4,\ldots,12\}$ donde, p(B/A) = 3/5.