Fundação
CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Matemática na Educação 1

Volume 2 - Módulo 2
2ª edição

Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Gabriela dos Santos Barbosa
Rosana de Oliveira
Stella Maria Peixoto de Azevedo Pedrosa
Ana Lúcia Vaz da Silva
Beatriz Heleno Magno
Luiz Pedro San Gil Jutuca
Maria Tereza Serrano Barbosa

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério da
Educação

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PAÍS RICO É PAÍS SEM POBREZA

Apoio:

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua da Ajuda, 5 – Centro – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-000
Tel.: (21) 2333-1112 Fax: (21) 2333-1116

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Gabriela dos Santos Barbosa
Rosana de Oliveira
Stella Maria Peixoto de Azevedo Pedrosa
Ana Lúcia Vaz da Silva
Beatriz Heleno Magno
Luiz Pedro San Gil Jutuca
Maria Tereza Serrano Barbosa

COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristine Costa Barreto

SUPERVISÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL
Cristiane Brasileiro

DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO
Gustavo de Figueiredo Tarcsay
Marcelo Bastos Matos

AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO
Thaïs de Siervi

Departamento de Produção

EDITORA
Tereza Queiroz

REVISÃO TIPOGRÁFICA
Equipe Cederj

COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO
Katy Araújo

PROGRAMAÇÃO VISUAL
Bianca Lima
David Daniel Macêdo

ILUSTRAÇÃO
Sami Souza

CAPA
Sami Souza

PRODUÇÃO GRÁFICA
Verônica Paranhos

M425m

Matemática na Educação 1. v.2 / Andreia Carvalho Maciel Barbosa, Gabriela dos Santos Barbosa, Rosana de Oliveira, Stella Maria Peixoto de Azevedo Pedrosa, Ana Lúcia Vaz da Silva, Beatriz Heleno Magno, Luiz Pedro San Gil Jutuca, Maria Tereza Serrano Barbosa.
– 2.ed. – Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2013.
322 p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-7648-603-9

1. Matemática na educação 1. 2. Resolução de problemas. I. Barbosa, Andreia Carvalho Maciel. II. Barbosa, Gabriela dos Santos. III. Oliveira, Rosana de. IV. Azevedo, Stella Maria Peixoto de. V. Silva, Ana Lúcia Vaz da. VI. Magno, Beatriz Heleno. VII. Jutuca, Luiz Pedro San Gil. VIII. Barbosa, Maria Tereza Serrano. IX. Título.

CDD: 372.7

Referências Bibliográficas e catalogação na fonte, de acordo com as normas da ABNT e AACR2.

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia
Gustavo Reis Ferreira

Universidades Consorciadas

CEFET/RJ - CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO SUCKOW DA FONSECA
Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Silvério de Paiva Freitas

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves de Castro

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Carlos Levi

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Ana Maria Dantas Soares

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Matemática na Educação 1 | Volume 2 - Módulo 2

SUMÁRIO

AULA 15

Resolução de problemas

Meta da aula

Apresentar a utilidade da resolução de problemas em situações práticas.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. resolver problemas didaticamente;
2. identificar os principais tipos de problemas utilizados em turmas dos anos iniciais.

INTRODUÇÃO

Um dos principais objetivos do ensino de Matemática é ajudar o aluno a pensar produtivamente. Como já vimos, é fundamental que a criança desenvolva o raciocínio lógico para solucionar questões que surjam no seu cotidiano. Para que o aluno se interesse pela resolução de um problema, ele precisa sentir-se desafiado, envolvido na situação apresentada.

As mudanças sociais e o acelerado desenvolvimento da tecnologia exigem que a criança seja preparada para lidar com situações novas. O que hoje parece relevante pode tornar-se obsoleto em poucos anos. Mais do que nunca, é preciso formar pessoas ativas e participantes que sejam capazes de tomar decisões rápidas e precisas, cidadãos que saibam lidar com diferentes problemas da vida cotidiana.

Por isso é fundamental que a criança desenvolva a criatividade, a iniciativa e a autonomia. É importante que ela pense produtivamente! A resolução de problemas permite o desenvolvimento da capacidade de enfrentar situações novas e de tomar decisões, tanto quanto possível, precisas.

Para resolver problemas, é necessário desenvolver estratégias que se apliquem a variadas situações. Isso veremos no decorrer da Aula.

O QUE É UM PROBLEMA?

De um modo geral, no dia-a-dia a palavra *problema* está relacionada a: questão que se propõe para ser resolvida; coisa difícil de explicar; dúvida; questão; mistério; enigma.

Observe as figuras:

Figura 15.1: Situação 1.

Figura 15.2: Situação 2.

As duas situações apresentadas são exemplos de problemas do cotidiano. Nelas, a palavra *problema* indica uma situação que precisa ser resolvida, mas, para isso é necessário um tempo para pensar.

Geralmente, a palavra *problema* está relacionada a uma situação nem sempre solucionada com facilidade. Talvez por isso algumas pessoas, por analogia, considerem que os problemas de Matemática são questões de difícil solução.

!

Problema é qualquer situação que exija que você pense para solucioná-la.

O QUE É UM PROBLEMA DE MATEMÁTICA?

Segundo Polya, o "pai da resolução de problemas", problema é uma situação que exige uma solução elaborada, que não é imediata.

Isso não significa que a solução seja difícil; significa que é necessário analisar uma situação, organizar uma linha de pensamento e selecionar os processos para resolvê-la.

George Polya nasceu em 13 de dezembro de 1887 em Budapeste, Hungria. Interessava-se por Direito, latim, física, filosofia, além da matemática. Viveu em diversas cidades da Europa: Zurique, Oxford e Cambridge, e em 1940 mudou-se para os Estados Unidos, onde lecionou na Universidade de Stanford até 1953, ano em que se afastou das atividades docentes. Faleceu em 7 de setembro de 1985. Seu nome ficou registrado na História pela sua contribuição na metodologia da resolução de problemas.
http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/polya/index.htm

!

Problema matemático é qualquer situação que exija uma maneira matemática de pensar e conhecimentos matemáticos para que você possa solucioná-la.

Você já se perguntou o que difere um problema de um exercício?

O *exercício* serve para praticar um determinado **ALGORITMO** ou processo. Como o próprio nome diz, serve para exercitar.

ALGORITMO
Podemos dizer que um algoritmo é uma seqüência de passos pre-estabelecidos que são utilizados para a execução de uma tarefa, cujo objetivo é bem definido. Isso não significa que a aplicação de um algoritmo garante uma resolução correta. É preciso considerar cada situação.

Já o *problema* desenvolve o raciocínio lógico. É uma situação que exige iniciativa, criatividade e o conhecimento de algumas estratégias para sua resolução.

COMO SE RESOLVE UM PROBLEMA?

Segundo Polya, são quatro as etapas para a resolução de um problema:

1ª etapa: compreender o problema – estudar os dados do problema;
2ª etapa: elaborar um plano – planejar a execução da resolução do problema;
3ª etapa: executar o plano – colocar o planejamento em ação;
4ª etapa: fazer a retrospectiva ou verificação – examinar a solução obtida.

Exemplo 1

João quer passear de bicicleta, mas o pneu está vazio. Como resolver esse problema?

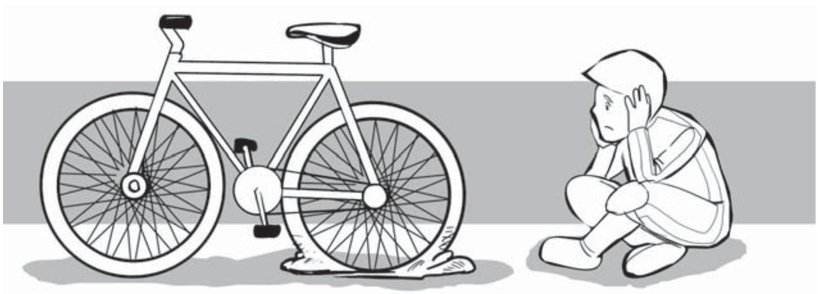


Figura 15.3: 1ª etapa: compreender o problema.

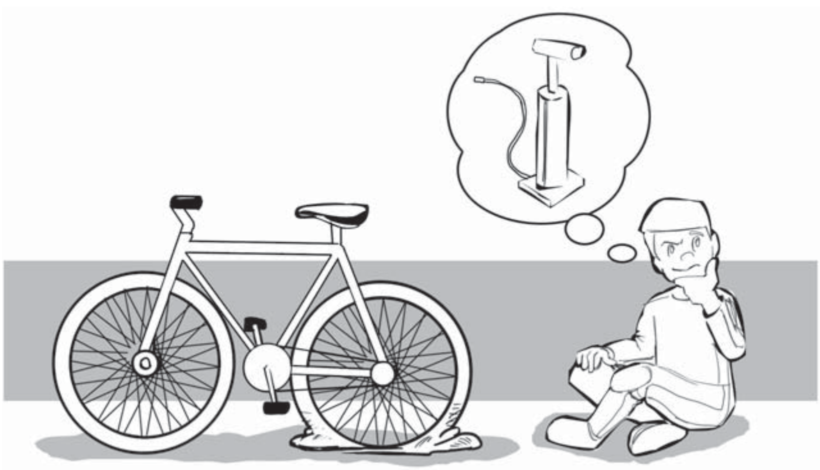


Figura 15.4: *2ª etapa:* elaborar um plano.

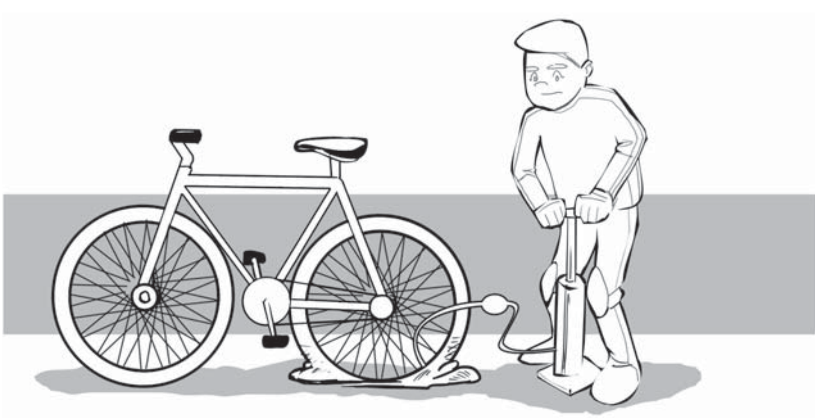


Figura 15.5: *3ª etapa:* executar o plano.

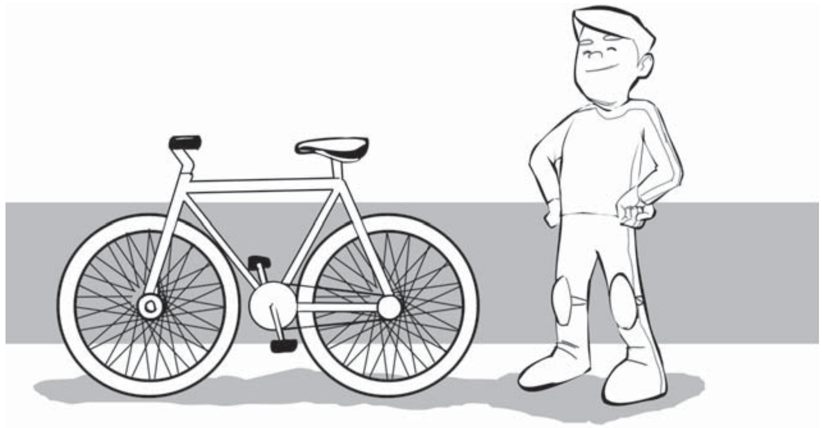


Figura 15.6: *4ª etapa:* fazer a retrospectiva ou verificação.

Exemplo 2

Julieta está fazendo fichas para um jogo. De cada folha de papel é possível fazer 8 fichas. Para o jogo serão necessárias 50 fichas. Quantas folhas de papel serão necessárias para fazer todas as fichas?

1ª etapa: compreender o problema.
Dados do problema:
Julieta precisa fazer 50 fichas.
Cabem 8 fichas em cada folha.

Figura 15.7: Folha de papel dividida para fazer 8 fichas.

2ª etapa: elaborar um plano.
Dividir 50 por 8, para saber quantas folhas serão necessárias.

3ª etapa: executar o plano.

$$\begin{array}{r|l} 50 & \underline{\ 8\ } \\ \underline{-48} & 6 \end{array}$$ → quantidade de folhas necessárias

2 fichas extras necessárias

Portanto, serão necessárias 6 folhas inteiras e mais 2 fichas.
Para se obter 2 fichas, será necessária mais uma folha.
Portanto, 6 + 1 = 7 folhas.

4ª etapa: fazer a retrospectiva ou verificação.

Com 6 folhas, obteremos 48 fichas, portanto, 6 folhas não são suficientes.

Com 7 folhas, podemos obter 56 fichas. Se precisamos de 50, podemos obtê-las a partir de 7 folhas.

Verificando a resposta: (6 x 8) + 2 = 50 fichas.

Resposta:

Serão necessárias 7 folhas de papel.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

1. Resolva, indicando cada etapa, o seguinte problema:
Na abertura das Olimpíadas, houve uma apresentação com 960 pessoas distribuídas em grupos com 80 pessoas em cada um. Quantos grupos foram formados?

RESPOSTA COMENTADA

Esta é uma entre várias possiblidades de encaminhamento da resolução do problema. Pode-se chegar a um mesmo resultado por diferentes caminhos lógicos.

1ª etapa: *compreender o problema.*

Dados do problema:
Uma apresentação com um total de 960 pessoas.
Cada grupo era constituído por 80 pessoas.

2ª etapa: elaborar um plano.

Dividir 960 por 80, para saber quantos grupos foram formados.

3ª etapa: executar o plano.

$$\begin{array}{r|l} 960 & 80 \\ \cline{2-2} \underline{-\ 80} & 12 \rightarrow \text{quantidade de grupos formados.} \\ 160 & \\ \underline{-160} & \\ 0 & \end{array}$$

Portanto, foram formados 12 grupos com 80 pessoas em cada um.

4ª etapa: fazer a retrospectiva ou verificação.
Com 12 grupos de 80 pessoas cada, teremos um total de 960 pessoas.
Verificando a resposta: (12 x 80) = 960 pessoas.
Logo, foram formados 12 grupos.

!

Lembre-se de que as etapas para a resolução de problemas não são rígidas, tampouco infalíveis. Entretanto, essas etapas servem como orientação para a resolução de problemas. A resolução de problemas é um processo complexo, portanto não se limita a um passo-a-passo.
Com a prática, as etapas serão seguidas, mas não precisarão ser registradas tão detalhadamente.

COMO RECONHECER UM BOM PROBLEMA

Um bom problema é aquele que apresenta as seguintes características:

- ser desafiador;
- ser real;
- ser interessante;
- não se limitar a uma aplicação direta de uma ou mais operações aritméticas;
- ter um nível adequado de dificuldade;
- ter uma linguagem adequada, sem frases longas e complexas.

Alguns exemplos de "bons problemas":

1. Na classe de Fernando há 37 alunos. Em um dia de chuva, faltaram 5 dos seus colegas. Sua professora pediu para que os alunos

formassem grupos de 4 para juntos montarem um quebra-cabeça. Quantos quebra-cabeças serão necessários para que cada grupo monte apenas um?

2. Rodrigo e Luiz colecionam figurinhas do álbum *Craques do futebol*. Rodrigo tinha 190 figurinhas coladas no álbum e Luiz 178. Hoje, Rodrigo colou mais 28 figurinhas diferentes no álbum, e Luiz, mais 37.

a) Qual dos dois tem mais figurinhas?

b) Com quantas a mais do que o outro?

c) Quantas figurinhas ainda faltam para cada um, se o total de figurinhas do álbum é 300?

(Os problemas são adaptações dos apresentados no livro de Luiz Roberto Dante)

ALGUNS CUIDADOS AO SE TRABALHAR COM PROBLEMAS

Alguns cuidados são necessários na seleção dos problemas a serem apresentados a sua turma. Lembre-se:

• Conhecer os objetivos do problema é primordial. Você precisa saber por que propor um determinado problema e não outro. Um problema cujo nível de dificuldade é inadequado pode deixar o aluno desestimulado a tentar resolvê-lo e baixar sua auto-estima.

• Procurar problemas relacionados ao dia-a-dia, que tenham significado para ele, pois só assim ele terá interesse em resolvê-los. Problemas com base em fatos relevantes do momento, vinculados à comunidade, ao cotidiano da cidade ou do país são, em geral, de interesse mais imediato. Por exemplo: campeonatos de futebol, eleições etc. Além disso, você poderá utilizar gravuras, filmes, histórias em quadrinhos, mapas etc. Também folhetos, encartes de propaganda de supermercados, de lojas de material de construção ou de eletrodomésticos e, ainda, notícias sobre meios de transporte ou alimentação podem ser úteis. Também as crianças gostam de inventar problemas e podem fazê-lo.

• Evitar excesso de atividades. Apresentar à criança um grande número de problemas apenas vai cansá-la.

• Ter segurança no passo-a-passo da resolução do problema. Não existe um padrão para se resolver um problema. Um mesmo problema pode ser resolvido de modos diferentes.

• Escrever o problema, ditado ou copiado, pode significar um esforço para a criança. Desse modo, ela iniciará a resolução do problema cansada.

!

Em algumas aulas, proponha um problema para a turma e organize pequenos grupos – com duas ou três crianças – para resolvê-lo em conjunto. Cada grupo deve apresentar sua solução, explicando a linha de raciocínio.

As dificuldades mais freqüentes na resolução de problemas são:

• Medo da Matemática – O medo paralisa o raciocínio. A pessoa sente-se impotente para resolver qualquer coisa, mesmo as mais simples.

• Dificuldade de leitura e interpretação – Má interpretação. Dificuldade para compreender o problema e planejar a sua execução.

• Falta de domínio do conceito da operação – Dificuldade em selecionar os cálculos envolvidos na resolução do problema. Muitas vezes, tenta-se adivinhar por meio de perguntas: "É de mais?" " É de menos?"

Interpretação dos resultados – Dificuldade em estimar o resultado do problema, nem mesmo avaliar se ele é possível. Por exemplo: o valor do troco não pode ser maior do que o valor dado para o pagamento.

ATIVIDADES

Atende aos Objetivos 1 e 2

Resolva os problemas a seguir. Você concorda em classificá-los como "bons problemas"? Lembre-se de que a forma da resolução de um problema não é fundamental, mas, sim o raciocínio lógico.

2. Na classe de Fernando, há 37 alunos. Em um dia de chuva, faltaram 5 dos seus colegas. Sua professora pediu para que os alunos formassem grupos de 4, para juntos montarem um quebra-cabeça. Quantos quebra-cabeças serão necessários para que cada grupo monte apenas um jogo?

3. Rodrigo e Luiz colecionam figurinhas do álbum *Craques do futebol*. Rodrigo tinha 190 figurinhas coladas no álbum, e Luiz, 178. Hoje, Rodrigo colou mais 28 figurinhas diferentes no álbum, e Luiz, mais 37.

a) Qual dos dois tem mais figurinhas?

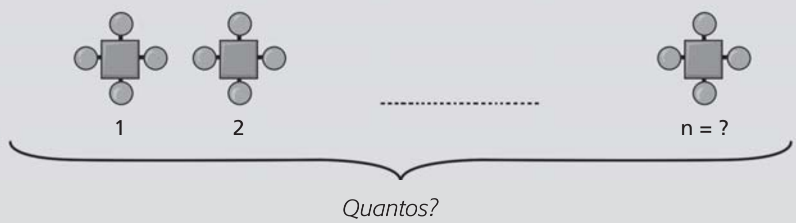
b) Com quantas a mais do que o outro?

c) Quantas figurinhas ainda faltam para cada um, se o total de figurinhas do álbum é 300?

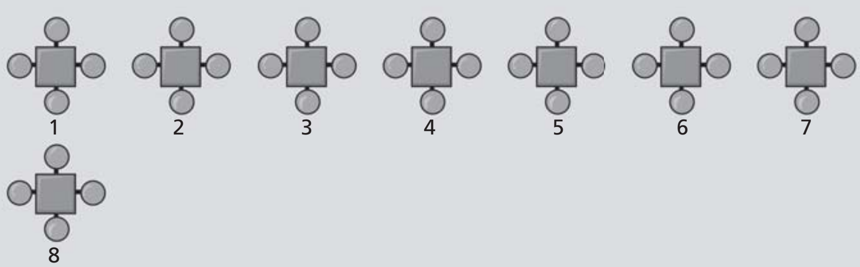
RESPOSTAS COMENTADAS

2. Na classe de Fernando há 37 alunos. Em um dia de chuva, faltaram 5 dos seus colegas. Sua professora pediu para que os alunos formassem grupos de 4 para juntos montarem um quebra-cabeça. Quantos quebra-cabeças serão necessários para que cada grupo monte apenas <u>um jogo</u>?

a) Compreendendo o problema:
Número de alunos: 37;
Número de alunos que faltaram: 5;
Formação de grupos de 4 alunos cada;
Um quebra-cabeça por equipe.
Objetivo: Determinar o número de quebra-cabeças necessários



b) Estabelecendo um plano:
<u>1ª estratégia</u>
Simbolizar os grupos de alunos da turma.



Serão formados 8 grupos, logo, serão montados 8 quebra-cabeças
<u>2ª estratégia</u>
Alunos presentes: 37 - 5 = 32.
grupos de 4 alunos = quebra-cabeças montados: 32 ÷ 4 = 8.
Serão formados 8 grupos, logo serão montados 8 quebra-cabeças.

c) Verificando a solução do problema:
Serão montados 8 quebra-cabeças, porque são 8 grupos.
Cada grupo é formado por 4 alunos
O total de alunos presentes é 8 x 4 = 32. Portanto são 32 os alunos presentes.
Faltaram: 5 alunos 32 + 5 = 37. Confere, pois são 37 o número de alunos da turma.

3. Rodrigo e Luiz colecionam figurinhas do álbum ***Craques do futebol****. Rodrigo tinha 190 figurinhas coladas no álbum, e Luiz, 178. Hoje, Rodrigo colou mais 28 figurinhas diferentes no álbum, e Luiz, mais 37.*

a) Qual dos dois tem mais figurinhas?
Rodrigo tinha 190 figurinhas e colou mais 28. Ficou com 190 + 28 = 218 figurinhas.
Luiz tinha 178 figurinhas e colou mais 37. Ficou com 178 + 37 = 215 figurinhas.
Rodrigo tem 218 figurinhas, e Luiz, 215. Portanto, Rodrigo ficará com mais figurinhas.

b) Com quantas a mais do que o outro?
Rodrigo tem 218 figurinhas e Luiz, 215. Como 218-215=3, Rodrigo tem 3 figurinhas a mais que Luiz.

c) Quantas figurinhas ainda faltam para cada um, se o total de figurinhas do álbum é 300?
Total de figurinhas do álbum: 300.
Rodrigo tem 218 figurinhas.
Luiz tem 215 figurinhas.
Para Rodrigo faltam 300 – 218 = 82 figurinhas.
Para Luiz faltam 300 – 215 = 85 figurinhas.

FORMAS DE APRESENTAÇÃO DE PROBLEMAS

Há muitas formas de apresentação de problemas, a saber:

a) *Problemas com enunciado escrito:*

São os mais comuns. Podem ser apresentados de diversas formas: quadro-de-giz, transparências, em folhas preparadas pelo professor, no livro didático. Em qualquer dos casos, deve-se evitar a cópia do enunciado, pois essa é uma tarefa cansativa para o aluno.

b) *Problemas orais:*

São especialmente apresentados para crianças não-alfabetizadas, mas podem e devem ser trabalhados sempre, pois favorecem o desenvolvimento de estratégias para resolver esse tipo de problema, muito presente no cotidiano.

Problema pode ser simplesmente enunciado pelo professor, mas também podem ser utilizados filmes e gravações. É interessante iniciar com problemas orais que conduzam a uma única operação. Aos poucos, eles poderão ser mais complexos.

c) *Problemas ilustrados:*

São apresentados por meio de gravuras, com enunciado escrito ou não. Como veremos adiante, essas gravuras também podem ser utilizadas para os alunos "inventarem" problemas.

Na educação infantil, período anterior à alfabetização, os problemas ilustrados são trabalhados oralmente.

d) *Problemas gráficos:*

São problemas apresentados por um esquema. Podem ser acompanhados por um dado escrito ou uma pergunta.

Exemplo:

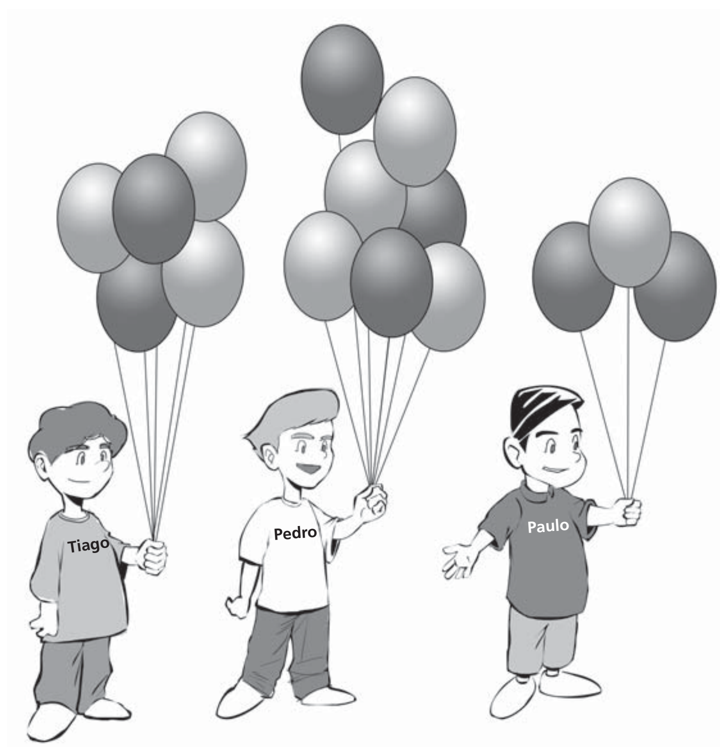


Figura 15.8: Problema gráfico.

Qual o nome do menino que tem mais balões?

Qual o nome do menino que tem menos balões?

e) *Problemas para inventar:*

Desenvolvem a criatividade, a imaginação e o raciocínio.

Exemplos:

Invente um problema com os seguintes dados:

16 balões amarelos, 12 balões azuis, 11 balões verdes.

Crie um problema a partir da seguinte sentença matemática: 3 x 5 = 15

Invente um problema a partir da figura apresentada a seguir:

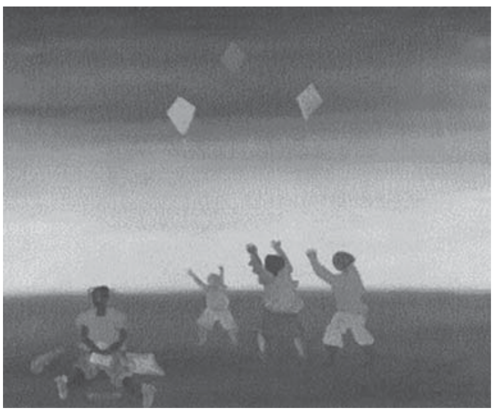


Figura 15.9: *Meninos soltando papagaios* – Portinari, 1947.

f) *Problemas sem pergunta:*

Em função dos dados do problema, tem-se de imaginar o que poderia ser pedido.

Exemplo:

Aninha comprou 2 pulseiras a R$ 5,00 cada uma.

Problemas desse tipo levam a criança a generalizações e extrapolações. São muito interessantes para relacionar a Matemática com a vida cotidiana. No problema dado como exemplo, a criança precisa raciocinar que a pergunta só pode ser "quanto gastou?". Como o preço é dado do problema, não poderia ser perguntado: "Qual o preço de cada pulseira?" Por não ter sido informado quanto deu para pagar, a pergunta não poderia ser: "Quanto recebeu de troco?"

g) *Problemas sem dados numéricos:*

Neste caso, a criança não trabalhará com números, mas deverá planejar as etapas do raciocínio.

Exemplo: Se você sabe quanto uma pessoa ganha por mês, como pode descobrir quanto ela ganha por dia?

h) *Problemas com dados a mais ou a menos:*

Os problemas nos quais falta um dado e os problemas com dados a mais podem ser apresentados sob a forma de adivinhações, e geralmente motivam as crianças maiores.

Exemplos:

Com dado a mais:

Bianca comprou 2 chocolates a R$ 2,00 cada um. Quanto recebeu de troco?

Luciano comprou 2 revistinhas a R$ 3,00 cada uma. Para pagar, deu uma cédula de R$ 10,00. Quanto gastou?

i) *Problemas em série:*

São problemas em que resolução de um deles depende de dados encontrados nos anteriores. Não é o mesmo que um problema com várias perguntas. Os problemas em série são muito interessantes, pois são comuns no cotidiano. Porém, devem ser evitados nas avaliações, pois, por exemplo, se o aluno errar o primeiro, todos os demais estarão baseados nesse erro.

Exemplo:

Luiza saiu com duas cédulas de R$ 10,00 e três de R$ 5,00 na carteira. Quanto levou Luiza?

No mercado, ela comprou queijo, tomates, ovos e pão. Retornou para casa com R$ 20,00. Quanto gastou no mercado?

j) *Problemas lúdicos:*

Esses problemas costumam agradar muito às crianças. Geralmente eles são apresentados sob a forma de adivinhações ou brincadeiras. Muitas vezes não envolvem o raciocínio quantitativo. Labirintos, charadas são exemplos de problemas lúdicos.

Embora muitas vezes esses problemas não envolvam os conteúdos programáticos habituais, eles contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da iniciativa, da coordenação motora etc.

Exemplos:

Que país é esse?

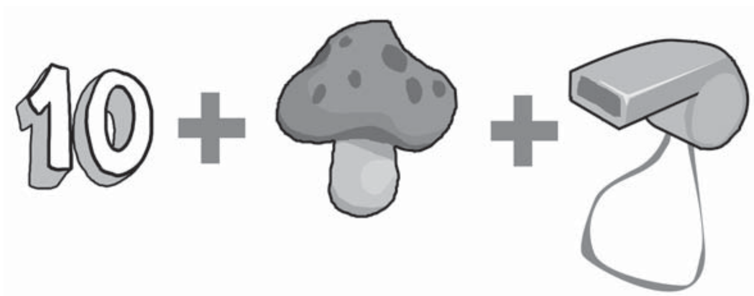


Figura15.10: Charada.

Resposta: dEz + coGumelo + apITO = EGITO

Qual dos pedaços se encaixa no quadro quebrado?

Figura 15.11: Quebra-cabeça.

Resposta: E.

Problema: Leve o menino até a bola, sem passar pela poça d´água.

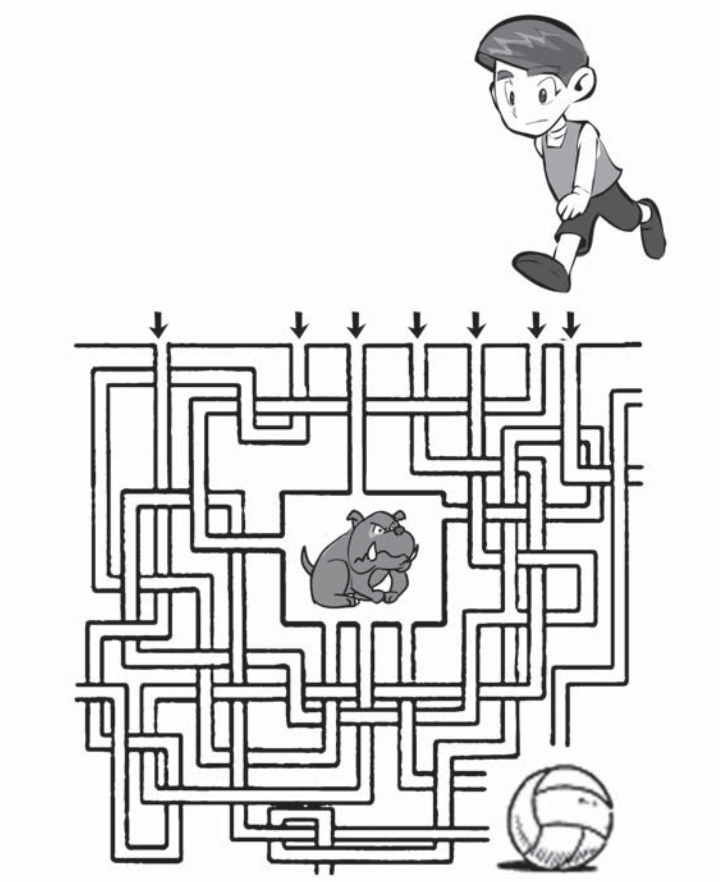


Figura 15.12: Labirinto.

k) *Problemas de quebra-cabeça:*

São problemas que constituem um desafio. Geralmente envolvem grande parte dos alunos. Constituem a Matemática recreativa.

Exemplo:

Com 24 palitos de fósforo, forme 9 quadradinhos, de acordo com a figura. Como fazer para que permaneçam 5 quadradinhos retirando apenas 4 palitos?

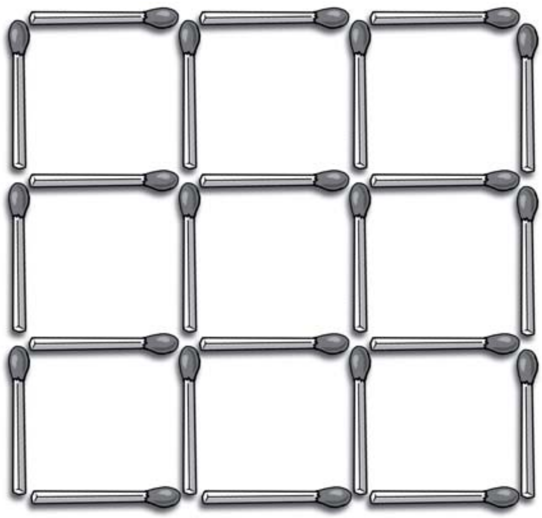


Figura 15.13: Disposição inicial dos fósforos no problema.

Resposta:

Observe a disposição após a retirada dos 4 palitos.

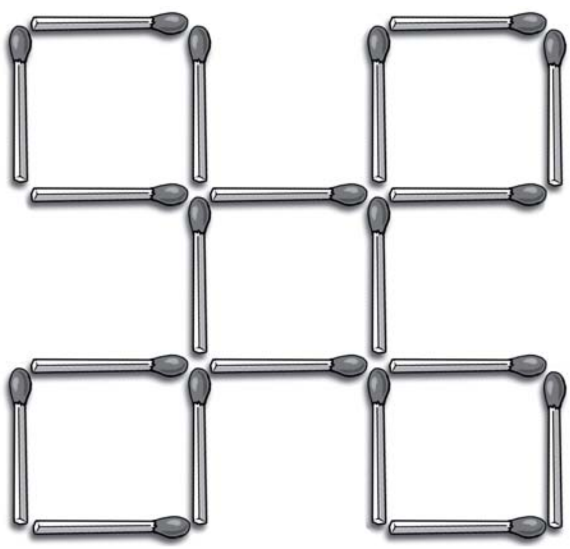


Figura 15.14: Disposição dos fósforos após a retirada dos palitos.

l) *Problemas formulados em cooperação:*

As crianças, em conjunto, escolhem uma situação e inventam um problema que deve ser redigido em colaboração.

> Quando você for planejar sua aula, escolha problemas relacionados ao universo de seu aluno, que o preparem para a vida e não para a prova!
> Algumas fontes que podem inspirar idéias de problemas.
> • notícias publicadas em revistas e jornais;
> • histórias em quadrinhos, livros e outras leituras;
> • atividades que eles realizam cotidianamente;
> • questões relacionadas à escola e à comunidade.

FATORES QUE PODEM DIFICULTAR A COMPREENSÃO DE UM PROBLEMA

Muitas vezes, o aluno não consegue resolver um problema por fatores que muitas vezes não são facilmente percebidos. Alguns exemplos:

• A linguagem empregada na formulação do problema.

É preciso estar atento ao vocabulário utilizado. Está de acordo com a turma e a idade do grupo? Existem termos regionais que eles não conhecem?

Podemos utilizar muitas figuras em problemas nos anos iniciais da escolarização e reduzi-las gradativamente até chegarmos a problemas inseridos em pequenos relatos.

• Tamanho e estrutura das frases.

Muitas crianças se perdem lendo frases longas e complexas. Ou seja, a dificuldade não está diretamente relacionada ao conteúdo da Matemática, mas à leitura e à interpretação.

• Vocabulário matemático específico.

Algumas vezes a criança desconhece ou ainda não incorporou a terminologia da Matemática.

• Tamanho dos números e complexidade dos cálculos.

Muitas vezes, o aluno se assusta com "números grandes" e desiste antes de começar, ou seja, sequer tenta solucionar o problema. Outro aspecto importante é a complexidade dos cálculos requeridos; se um problema exige grande quantidade de cálculos, certamente seu enunciado será de mais difícil compreensão. Nesse caso, o ideal é segmentar o problema, apresentando-o em várias partes. Naturalmente essa complexidade está relacionada com o estágio em que os alunos estão.

CONCLUSÃO

A resolução de problemas permite aplicar a Matemática em situações do dia-a-dia. Isso contribui para que o aluno veja sua utilização e, desse modo, desenvolva uma atitude positiva em relação ao estudo da Matemática.

Um *bom problema* desperta a curiosidade e o interesse em solucioná-lo. Não basta saber fazer as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão mecanicamente. É preciso saber como e quando usá-las. E, lembre-se: um mesmo problema pode ser resolvido de diferentes formas, por isso sempre deve-se verificar o caminho percorrido para se chegar a uma solução.

Não "se ensina" a resolver problemas, o que se faz é apresentar problemas para que os alunos desenvolvam processos de pensamento. Isso requer planejamento cuidadoso e atenção do professor ao desenvolvimento de cada aluno.

Para se resolver um problema, é necessário saber em quais circunstâncias uma ou outra operação deve ser realizada. Lembre-se de que não ensinamos a resolver problemas, mas sim proporcionamos oportunidades para que os alunos desenvolvam esta habilidade.

ATIVIDADE FINAL

Atende aos Objetivos 1 e 2

Pesquise, em livros utilizados nas escolas de sua cidade, problemas destinados a cada uma das séries iniciais do ensino fundamental. Escolha um destinado a cada série, resolva e comente suas características e adequação utilizando tudo aquilo que foi apresentado nesta aula.

COMENTÁRIO

Resposta pessoal, mas sugerimos que envie para seu tutor e para seus colegas pedindo-lhes que comentem, concordando ou discordando de seu posicionamento.

RESUMO

A resolução de problemas é um tema vasto. Um bom trabalho com problemas requer um bom planejamento e alguns cuidados básicos para que seu aluno alcance os resultados esperados. Existem diferentes tipos de problemas, não há necessidade de memorizar esta classificação, mas é importante conhecê-la. Um problema pode ser apresentado de diversas formas, e é importante que seu aluno tenha oportunidade de trabalhar com elas. A prática contribui para agilizar o raciocínio necessário para compreender e solucionar situações do dia-a-dia em que surgem questões muito próximas às apresentadas.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você estudará a conceituação e as propriedades de duas operações: a adição e a subtração. Esse conhecimento é fundamental para a sua atividade docente. Realizamos essas operações cotidianamente, muitas vezes sem nos darmos conta disso. Aprofundar seus conhecimentos sobre esse tema permitirá que você atue com mais segurança no seu trabalho em sala de aula.

AULA 16

Explorando o conceito da adição e da subtração

Meta da aula

Apresentar o conceito das operações de adição e de subtração e suas propriedades.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. utilizar os conceitos de adição e de subtração;
2. identificar os diferentes aspectos do ensino das operações de adição e de subtração;
3. elaborar situações de ensino-aprendizagem relacionadas ao estudo da adição e da subtração.

Pré-requisitos

Sugerimos que, antes de iniciar o estudo desta aula, você faça uma breve revisão das seguintes aulas: A construção do conceito de número (Aulas 9 e 10); Sistema de numeração decimal (Aulas 8 e 13); As quatro operações são fundamentais? (Aula 14); Resolução de problemas (Aula 15).

INTRODUÇÃO

Nesta aula, apresentaremos o conceito das operações de adição e subtração e suas propriedades. Abordaremos essas operações com o objetivo de contribuir para sua formação como pedagogo e professor do Ensino Fundamental.

Por isso, os tópicos apresentados foram cuidadosamente elaborados para prepará-lo para ser um efetivo mediador na aprendizagem do aluno.

No decorrer desta aula, talvez você questione se há necessidade de tal detalhamento para a compreensão de conceitos que em geral são considerados simples, pois, afinal, a adição e a subtração fazem parte do cotidiano de todos nós. Cremos que sim, pois somente a profunda compreensão do tema lhe permitirá a aquisição do conhecimento e da segurança necessários para sua atuação em sala de aula.

Constance Kamii, estudiosa do desenvolvimento matemático da criança, destaca em seus trabalhos que a participação mental ativa e autônoma é fundamental para a aprendizagem. Para tal, em muito contribuem dois tipos de atividades: situações diárias de sala de aula e jogos em grupos.

A partir da intuição e da lógica natural, o raciocínio deve ser desenvolvido, no que em muito podem contribuir os problemas de adição e de subtração que surgem inseridos no cotidiano dos alunos. Procure sempre incentivar seus alunos a pensar.

O CONCEITO DE ADIÇÃO

O conceito de adição no conjunto dos números naturais, IN = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}, está intimamente relacionado com a construção do conceito de número e com o conceito de sistema de numeração decimal.

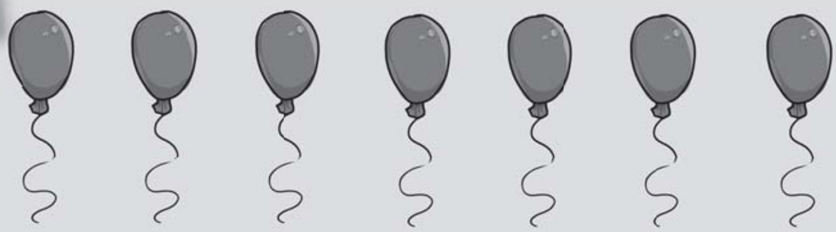
Lembre-se de que, para construir o conceito de número, a criança precisa vivenciar atividades que envolvam classificação, ordenação, seriação e contagem.

Na contagem está presente a ideia de adição, pois ao contar você acrescenta sempre mais um elemento.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

1. Observe os balões a seguir. Como você pode utilizar a adição para contá-los? Indique.



____

____

____

____

____

____

____

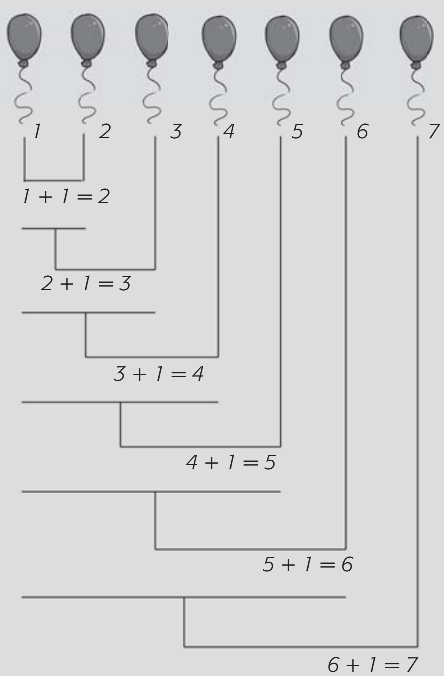
____

____

____

RESPOSTA COMENTADA

Se você quiser saber a quantidade total de balões, poderá contá-los um a um, utilizando a noção de adição. Observe como:



Observe:

um (1);
dois (1 + 1);
três (2 + 1);
quadro (3 + 1);
cinco (4 + 1);
seis (5 + 1);
sete (6 + 1).

Além da noção de contagem, como visto anteriormente, também é usual entender o conceito de adição, como junção de elementos (objetos, pessoas, animais, frutas etc.).

Em uma festa, foi combinado que cada um deveria contribuir levando refrigerantes em lata. Júlia levou cinco (5) latas, e Luiz levou três (3).

Figura 16.1: Cinco (5) latas levadas por Júlia e três (3) latas levadas por Luiz.
Fonte: Da autora.

Ao reunirem os refrigerantes, foi observado um total de oito (8) latas.

Figura 16.2: Total de 5 latas levadas por Júlia, mais 3 latas levadas por Luiz.
Fonte: Da autora.

Cinco latas mais três latas dão um total de oito latas: 5 + 3 = 8.

> No processo de ensino-aprendizagem, em especial nas séries iniciais, o professor deve explorar diferentes linguagens utilizadas em Matemática, por isso os números estão escritos por extenso e por meio do numeral.

As contribuições foram individuais, ou seja, cada um contribuiu com latas distintas. Por isso, para saber o *total* de refrigerantes, juntamos as contribuições de cada um.

Observe que o conceito de adição é construído a partir da união de dois conjuntos disjuntos ou distintos, ou seja, conjuntos que não possuem elementos em comum.

Os números adicionados são as *parcelas*, e o resultado da operação adição é a *soma* ou *total*.

Neste exemplo, temos o elemento 5 e o elemento 3, que são as *parcelas*, e o 8 é a *soma* ou *total*.

> !
>
> Em geral, empregamos o verbo *somar* em vez de *adicionar*, mas a operação que estamos realizando é denominada adição.

Observe as figuras a seguir apresentadas:

3 + 4 = 7

Figura 16.3: Adição.
Fonte: Da autora.

Observe que podemos associar duas ações à adição:

A de *juntar*:

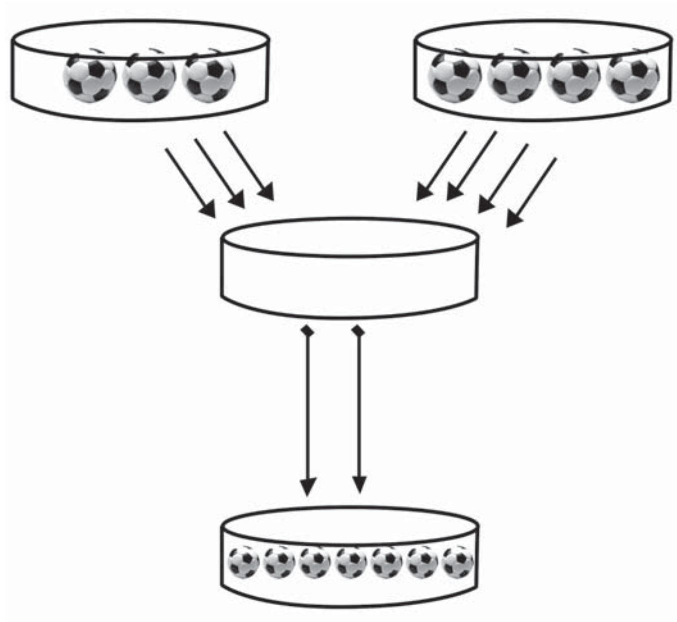


Figura 16.4: Adição como ação de juntar.
Fonte: Da autora.

A de *acrescentar*:

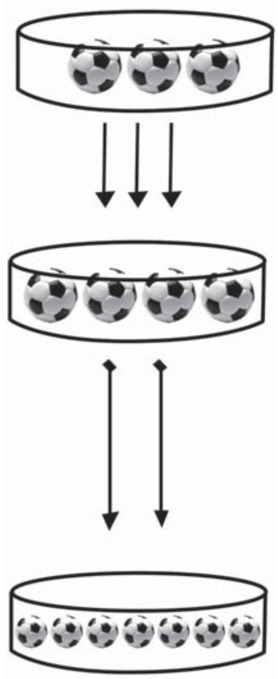


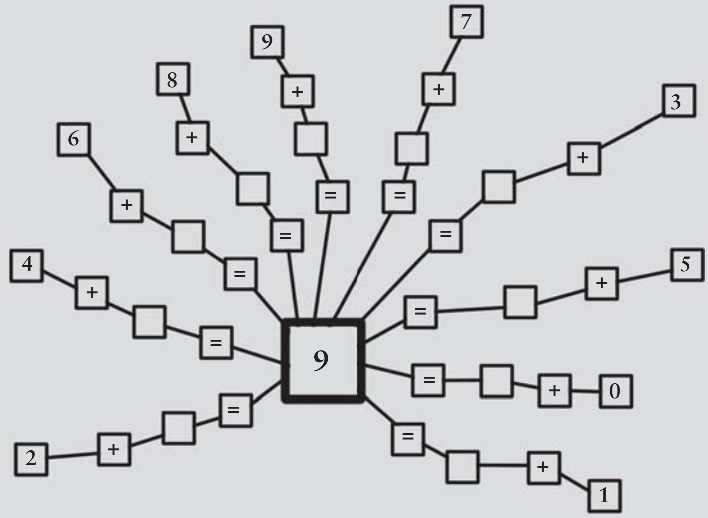
Figura 16.5: Adição como ação de acrescentar.
Fonte: Da autora.

Portanto, embora a operação de adição seja única, duas ideias podem estar a ela associadas: a de *juntar* e a de *acrescentar*.

ATIVIDADE

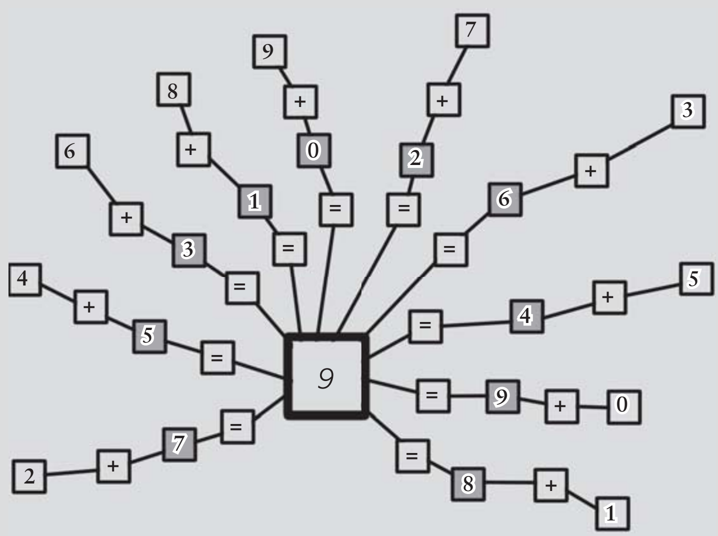
Atende ao Objetivo 1

2. Complete o labirinto observando as adições:



RESPOSTA COMENTADA

Observe as diferentes formas de você ter várias possibilidades para representar o número nove (9) por meio de uma adição. Com seus alunos, você poderá fazer essa representação reunindo palitos ou tampinhas, por exemplo, de diferentes modos. Dessa maneira, eles visualizarão melhor a representação da Atividade 2.



> **!**
>
> Nos problemas e exercícios, use linguagem simples, cativante e objetiva. Também, sempre que possível, inclua sutis toques de humor. Essa é a melhor forma de cativar seus alunos e despertar-lhes o interesse pela Matemática.

O CONCEITO DE SUBTRAÇÃO

O conceito de subtração no conjunto dos números naturais está diretamente relacionado ao conceito de adição. Quando contamos quantidades, 1, 2, 3, 4, 5,..., adicionamos 1 (um). Podemos de maneira análoga pensar numa contagem regressiva: 5, 4, 3, 2, 1. Nesse caso, estamos tirando 1 (um), ou seja, cinco, quatro (5 – 1), três (4 – 1), dois (3 – 1), um (2 – 1).

Podemos dizer que a operação subtração é aquela que tem por fim, dados dois números, achar um terceiro que adicionado ao segundo dê o primeiro. Assim:

2º número   2º número

1º número → 12 – 8 = 4   porque   4 + 8 = 12 ← 1º número

3º número   3º número

Dizemos que a subtração é a operação inversa da adição, pois consiste em, tendo-se a soma de dois números e um deles, achar o outro.

Nesse exemplo, temos o elemento 12, que é chamado de minuendo (M), o 8 é o subtraendo (S) e o 4 é o resto (R), diferença ou excesso. ‘

Minuendo ← 12 – 8 = 4 → Resto

Subtraendo

Assim temos: M – S = R

Daí, podemos afirmar que o minuendo é igual ao subtraendo mais o resto: $M = S + R$.

Tomando o mesmo exemplo, temos: $12 = 8 + 4$.

Equivalentemente, também podemos escrever que o subtraendo é igual ao minuendo menos o resto: $S = M - R$.

No exemplo: $8 = 12 - 4$.

Ou ainda que o resto é igual ao minuendo menos o subtraendo: R = M – S.

Com base no mesmo exemplo, temos: $4 = 12 - 8$.

Observe que podemos associar duas ações à subtração:

A de *tirar*:

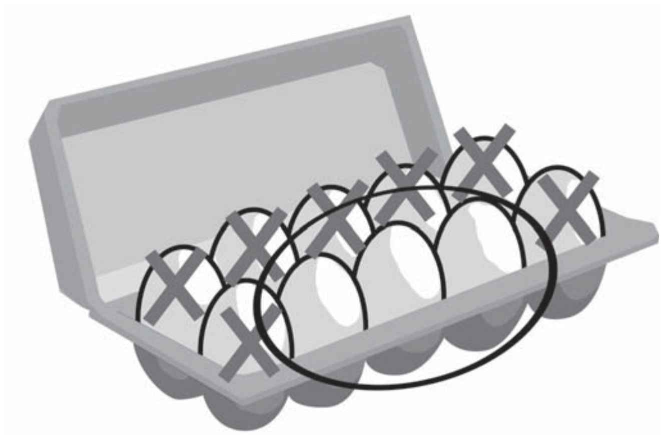


Figura 16.6: De uma caixa com dez ovos, tiramos sete. Quantos restaram?

A de *verificar quanto falta* para se obter um total esperado.

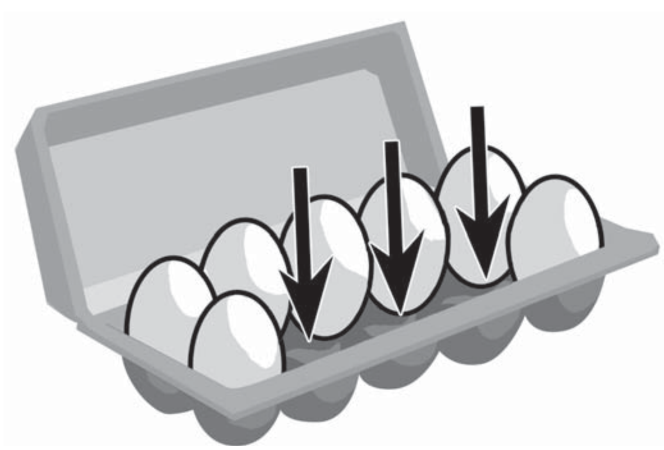


Figura 16.7: Tenho sete ovos, quantos faltam para completar uma caixa com dez?

Portanto, ainda que a operação de subtração seja única, duas ideias podem estar a ela associadas: a de *tirar* e a de *verificar quanto falta* para alcançar um valor esperado.

PROBLEMAS ENVOLVENDO AS NOÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Na perspectiva de resolução de problemas, as operações de adição e subtração e as ideias que envolvem estas operações – *juntar, acrescentar, tirar* e *verificar quanto falta*, sozinhas ou combinadas – podem gerar diferentes categorias de problemas.

Devemos estar atentos ao procedimento que cada aluno utiliza na resolução de um problema e manter constantemente uma postura que incentive a criação de soluções próprias.

Os problemas apresentados a seguir ilustram diferentes formas de resolução e, por isso, não devem ser tomados como modelos.

!

O professor deve estar voltado sempre para o raciocínio da criança e não para sua capacidade de escrever respostas certas.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

3. Resolva os problemas, considerando as ações solicitadas e indicadas nas ilustrações.

a. Nos dois primeiros problemas serão combinados dois estados para se obter um terceiro, ou seja, será realizada uma ação que se costuma entender como *juntar*.

Problema 1

Na hora do recreio, 7 meninos e 5 meninas participaram de pique-pega. Quantas crianças estavam nessa brincadeira?

e

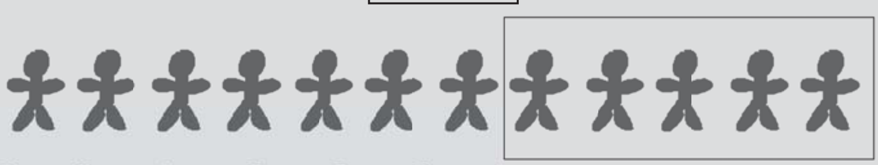
7 meninos

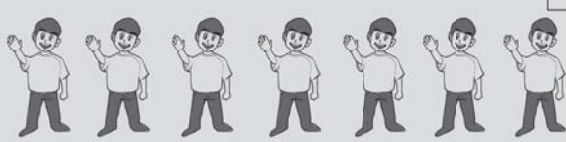
5 meninas

Problema 2

Participam de um jogo 12 crianças, meninos e meninas. Sabendo que 7 são meninos, quantas são as meninas?

12 crianças





7 meninos

b. No terceiro e no quarto problemas, um estado inicial será transformado pelo acréscimo ou retirada de elementos.

Problema 3

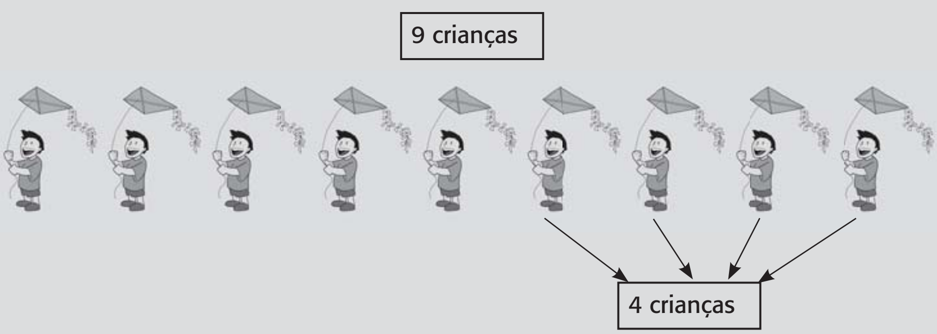
No parquinho brincavam 5 crianças, e chegaram mais 3 meninos. Qual o total de crianças no parquinho?

3 meninos

5 crianças

Problema 4

Na praia, 9 crianças estão soltando pipa, e 4 delas precisam sair para jantar. Quantas ainda continuarão brincando?

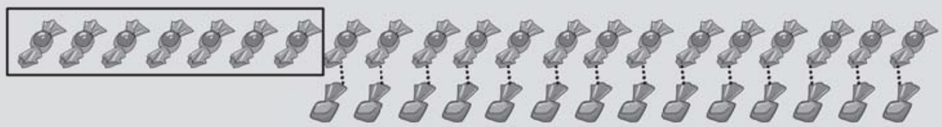


c. O quinto e o sexto problemas podem ser resolvidos comparando duas quantidades.

Problema 5

A professora deu um saco de balas para cada uma de suas turmas.
A turma alfa recebeu 21 balas, e a turma beta recebeu 14 balas. Quantas balas a turma alfa recebeu a mais?

Turma alfa - 21 balas



Turma beta - 14 balas

Problema 6

Ana e Paula contaram quantas folhas de papel de carta cada uma tem.
Ana tem 20 folhas, e Paula tem 5 folhas a menos que Ana. Quantas folhas de papel de carta possui Paula?

Ana tem 20 folhas

Paula tem
5 folhas a menos que Ana

RESPOSTAS COMENTADAS

Podemos, portanto, ter as seguintes resoluções:

a. Combinação de dois estados para obter um terceiro.

As diferenças entre as ideias são sutis, porém significativas quando se trata do desenvolvimento cognitivo de nosso aluno.

No problema 1, temos: 7 + 5 = ?

Observe que as quantidades 7 e 5 já existem inicialmente.

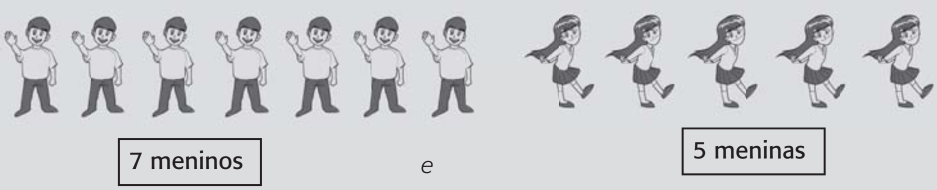
Já no problema 2 partimos de 7 + ? = 12.

As quantidades 7 e 12 já existem inicialmente.

As ideias envolvidas nesses problemas são a de juntar *e a de* ver quanto falta*.*

Problema 1

Na hora do recreio, 7 meninos e 5 meninas participaram de pique-pega. Quantas crianças estavam nessa brincadeira?



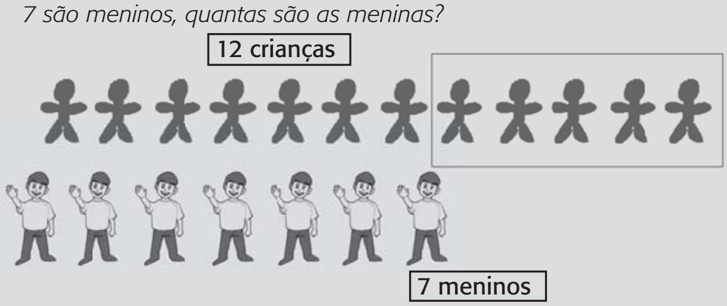
7 + 5 = ?

7 + 5 = 12

Na brincadeira de pique-pega estavam 12 crianças.

Problema 2

Participam de um jogo 12 crianças, meninos e meninas. Sabendo que 7 são meninos, quantas são as meninas?



7 + ? = 12
7 + 5 = 12
As meninas são 5.

b. Transformação de um estado inicial.
As ideias envolvidas são de *acrescentar* e *tirar*.

No problema 3, existe uma quantidade inicial e acrescenta-se uma outra.
Portanto, temos: 5 + 3 = ?

Já no problema 4, existe uma quantidade inicial da qual tira-se uma outra.
Nesse caso, temos: 9 – 4 = ?

Problema 3
No parquinho brincavam 5 crianças, e chegaram mais 3 meninos. Qual o total de crianças no parquinho?

5 + 3 = ?
5 + 3 = 8
No parquinho há o total de 8 crianças.

Problema 4
Na praia, 9 crianças estão soltando pipa, e 4 delas precisam sair para jantar. Quantas ainda continuarão brincando?

9 – 4 = ?
9 – 4 = 5.
Continuarão brincando 5 crianças.

c. Comparação entre duas quantidades.

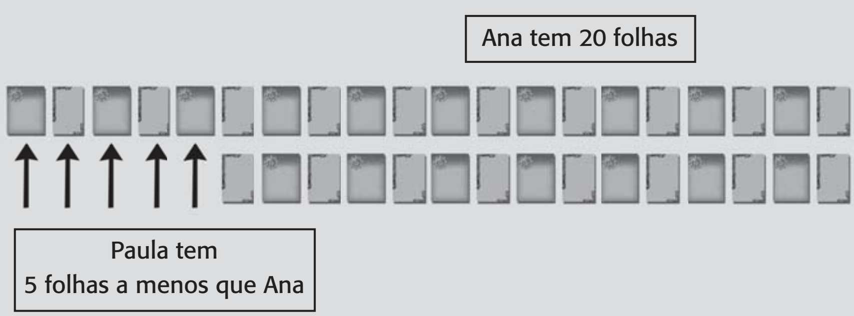
A ideia envolvida é a de comparação.
No problema 5, comparamos o número de balas da turma alfa com as recebidas pela turma beta. Temos, portanto, 21 – 14 = ?
No problema 6, sabemos quantos papéis tem uma das meninas e quanto a outra tem a menos. Ou seja, uma quantidade inicial e a informação de quanto a outra quantidade difere desta, logo 20 – 5 = ?

Problema 5

A professora deu um saco de balas para cada uma de suas turmas. A turma alfa recebeu 21 balas, e a turma beta recebeu 14 balas. Quantas balas a turma alfa recebeu a mais?

21 – 14 = ?
21 – 14 = 7
A turma alfa recebeu 7 balas a mais que a turma beta.

Problema 6
Ana e Paula contaram quantas folhas de papel de carta cada uma tem. Ana tem 20, e Paula tem 5 folhas a menos que Ana. Quantas folhas de papel de carta possui Paula?



20 – 5 = ?
20 – 5 = 15
Paula possui 15 folhas.

CONCLUSÃO

A aprendizagem requer participação mental ativa e autônoma da criança, sendo fundamentais dois tipos de atividades: situações diárias de sala de aula e jogos em grupos. Pense sempre nisso ao planejar suas aulas. Durante o curso você terá oportunidade de conhecer jogos interessantes que poderão contribuir para dinamizar suas aulas. De todo modo, de forma independente e constante, você deve pesquisar e procurar conhecer possibilidades que permitam criar oportunidades, situações, problemas, para que seus alunos possam desenvolver atividades em que a adição, e também a subtração, estejam envolvidas. Aprender a somar e a subtrair envolve um raciocínio lógico-matemático, e, como você já aprendeu, raciocínio não é técnica.

!

Essas diferentes ideias das operações, assim como as diferentes categorias de problemas, não devem ser "ensinadas" aos alunos. Você deve conhecê-las para poder explorar todas as possibilidades, identificar os erros dos alunos e perceber que, embora alguns problemas sejam resolvidos pela operação de adição ou de subtração, os níveis de dificuldade e as formas de pensamento são diferentes.

A adição é a primeira operação compreendida pela criança, e este conhecimento é fundamental para a aprendizagem das demais operações. Porém, isso não significa que a subtração deva ser apresentada simplesmente como o inverso da adição.

Mesmo quando a técnica operatória ainda não é trabalhada, você pode apresentar problemas, com situações reais, em que ela esteja presente.

É importante que o raciocínio seja desenvolvido a partir da intuição e da lógica natural. Problemas de adição e de subtração devem ser apresentados naturalmente, inseridos no cotidiano dos alunos. Propor exercícios sem significado, que tenham por objetivo apenas a prática das operações, são desnecessários e podem, até mesmo, ser prejudiciais. Procure sempre incentivar seus alunos a pensar. Não se limite a transmitir técnicas específicas para que eles respondam as suas questões.

ATIVIDADE FINAL

Atende aos Objetivos 1, 2 e 3

1. Elaborar uma atividade própria à construção do conceito de adição.

2. Elaborar uma situação-problema relacionada à propriedade comutativa da adição.

3. Elaborar uma atividade própria à construção do conceito de subtração.

COMENTÁRIO

As respostas são pessoais. Sugerimos que você discuta com seus colegas e tutores a atividade proposta e, também, que procure conhecer as propostas de seus colegas. Use a criatividade.

RESUMO

Apresentamos os conceitos e as propriedades de duas operações muito utilizadas em situações da vida diária e no Ensino Fundamental: adição e subtração.

Vimos que, no conjunto dos números naturais, o conceito de adição está intimamente relacionado com o conceito da construção do número. Por sua vez, o conceito de subtração está diretamente relacionado ao conceito de adição e da construção do número, pois, se adicionamos 1 (um) quando contamos quantidades, de maneira análoga realizamos uma contagem regressiva retirando 1 (um).

De modo geral, podemos associar duas ações à adição: a de **juntar** e a de **acrescentar**. Também são duas as ações usualmente associadas à subtração: a de **tirar** e a de **verificar quanto falta** para alcançar um valor esperado.

Apresentamos também alguns problemas envolvendo as noções de adição e subtração cujas resoluções tiveram como ponto de partida a combinação de dois estados para obter um terceiro, a transformação de um estado inicial e a comparação entre duas quantidades. Porém, como destacamos, não existe um único caminho para a resolução de um problema, e é preciso permitir que cada aluno compreenda o que o problema propõe e encontre uma forma correta para resolvê-lo, pois só se pode definir um caminho quando se conhece a meta.

Ao final da aula, foram apresentadas as principais propriedades da adição e da subtração no conjunto dos números naturais.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você estudará outros aspectos da adição e da subtração: os fatos fundamentais e os algoritmos.

AULA 17

Investigando a adição e a subtração

Meta da aula

Apresentar as propriedades da adição e da subtração dos números naturais.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. reconhecer regularidades e formular conjecturas;
2. investigar propriedades da adição e da subtração;
3. aplicar propriedades da adição em diferentes situações-problema.

INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos nos deter a explorar as investigações matemáticas envolvendo as operações de adição e subtração. É uma continuidade do que começamos a abordar na Aula 13 sobre atividades de investigação no ensino e aprendizagem de Matemática.

!

Atividades de investigação são atividades em que a ênfase é dada a processos matemáticos como a busca de regularidades, formulação, teste, justificativa e demonstração de conjecturas. Uma das características de uma situação investigativa é a motivação e a atmosfera de desafio entre alunos e professores.

Buscamos nesta aula trazer uma abordagem da adição e subtração com uma natureza investigativa, por meio de explorações que permitam a descoberta e a concretização de propriedades.
Vamos observar pelas regularidades numéricas se as propriedades se verificam ou não nas operações de adição e de subtração.

A ORDEM DAS PARCELAS ALTERA O RESULTADO?

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

1.

a. Complete a tabela a seguir efetuando as operações de adição.

a	b	a + b	b + a
10	12		
15	25		
43	14		
28	31		
98	47		
193	248		
2008	2009		

b. O que você pode observar de regularidade entre os resultados das 3ª e 4ª colunas?
c. Que conjectura você faria sobre essa observação?

RESPOSTAS COMENTADAS

a.

a	b	a + b	b + a
10	12	10 + 12 = 22	12 + 10 = 22
15	25	15 + 25 = 40	25 + 15 = 40
43	14	43 + 14 = 57	14 + 43 = 57
28	31	28 + 31 = 59	31 + 28 = 59
98	47	98 + 47 = 145	47 + 98 = 145
193	248	193 + 248 = 441	248 +193 = 441
2008	2009	2008 + 2009 = 4017	2009 + 2008 = 4017

b. Os resultados são iguais.

c. Usando a operação de adição, mesmo trocando a ordem das parcelas, os resultados serão sempre iguais para quaisquer dois números naturais.

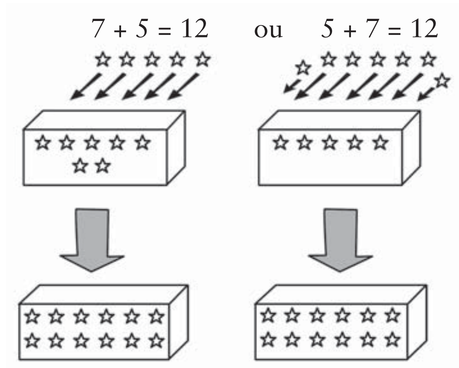
Nas séries iniciais, as propriedades devem ser abordadas por meio de seus diferentes usos. Quando uma criança tem que operar 8 + 21, e ela "guarda na cabeça" o 21(vinte e um) e conta nos dedos, acrescentando o 8 (oito), fazendo 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, ela está fazendo uso da propriedade comutativa da adição.

Podemos entender propriedades de uma operação como verdades que se verificam com todos os elementos de um conjunto que no caso é o conjunto dos números naturais.

A adição é comutativa, ou seja, para quaisquer dois números naturais a e b, temos:

$$a + b = b + a$$

Comutar significar trocar, por isso adicionar 7 e 5 pode ser feito de duas diferentes formas.



ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

2. A seguir, temos uma tabela de dupla entrada (linha e colunas):

a. Faça as adições completando a tabela.

+	50	34	28	7	165	897	1000
50							
34							
28							
7							
165							
897							
1000							

b. Identifique regularidades na tabela.

c. Uma das regularidades que podemos observar é que alguns resultados se repetem. Por que isso acontece?

RESPOSTAS COMENTADAS

a. Temos na primeira linha e na primeira coluna os números que vamos adicionar e nas linhas e colunas internas os resultados. Veja:

+	50	34	28	7	165	897	1000
50	100	84	78	57	215	947	1050
34	84	68	***62***	41	199	931	1034
28	78	***62***	56	35	193	915	1028
7	57	41	35	14	172	904	1007
165	215	199	193	172	330	1062	1165
897	947	931	915	904	1062	1794	1897
1000	1050	1034	1028	1007	1165	1897	2000

b.
- *A primeira coluna de resultados é igual à primeira linha de resultados.*
- *Os valores 100, 68, 56, 14, 330, 1794, 2000 que estão na diagonal aparecem uma única vez.*
- *Todos os outros resultados aparecem pelo menos duas vezes.*
- *Na última linha e na última coluna todos os números possuem quatro algarismos.*

Você ou seu aluno poderá identificar outras regularidades que não foram citadas aqui. É importante você perceber que todas as conjecturas devem ser valorizadas e avaliadas, pois indicam um conhecimento seu ou de seu aluno.

c. Veja o exemplo do 62, destacado na tabela. Ele é um resultado que aparece duas vezes na tabela, de 34 + 28 e também de 28 + 34. Nesse e em outros casos podemos identificar a comutatividade.

Mas será que toda operação é comutativa? Vamos investigar!

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

3. Retomando a tabela da Atividade 3.

a. Faça a subtração entre a coluna e a linha.

-	50	34	28	7	165	897	1000
50							
34							
28							
7							
165							
897							
1000							

b. Foi possível encontrar todos os resultados?

c. Existe algum resultado que se repete?

RESPOSTAS

a.

–	50	34	28	7	165	897	1000
50	0	16	22	43	---	---	---
34	---	0	**6**	27	---	---	---
28	---	---	0	21	---	---	---
7	---	---	---	0	---	---	---
165	115	131	137	158	0	---	---
897	847	863	869	890	732	0	---
1000	950	966	972	993	835	113	0

b. Não.
c. Sim, o zero.

Pense na subtração e nos números 7 e 5. Considerando as duas idéias envolvidas na subtração, *tirar* e *verificar quanto falta*, se fizermos 7 – 5 = 2, faz sentido *tirar* 5 de 7, ou pensar em, *quanto falta* ao 5 para completar 7. Se trocarmos a ordem e fizermos 5 – 7, as duas idéias que envolvem a subtração no conjunto dos números naturais não fazem sentido, ou seja, não podemos *tirar* 7 de 5, nem *verificar quanto falta* ao 7 para completar 5. Assim, podemos verificar que a subtração não é comutativa.

!

O seu aluno provavelmente chegará à conclusão de que não é possível fazer 5 – 7, embora você saiba que 5 – 7 = –2. A explicação é que o número –2 não é natural, ele pertence ao conjunto dos números inteiros. Como 7 – 5 é diferente de 5 – 7, podemos afirmar que a subtração não é comutativa.

O fato de 5 – 7 ser igual a –2, que não é um número natural, nos remete a outra propriedade, o fechamento.

RELEMBRANDO O FECHAMENTO...

O que é fechamento? Já falamos sobre isso na Aula 14, mas vamos conversar mais um pouco sobre essa propriedade. As teorias matemáticas trazem afirmações que por vezes nos parecem evidentes, mas essas verdades são necessárias para a lógica interna das teorias. Quando tomamos o conjunto dos números naturais e a operação adição, é sempre possível adicionar dois números, em qualquer ordem, e encontrarmos como resultado um número natural. Por isso, podemos afirmar que o conjunto dos números naturais **é fechado** em relação à operação adição.

!

A adição possui a propriedade do fechamento, ou seja, para quaisquer dois números naturais a e b, temos:

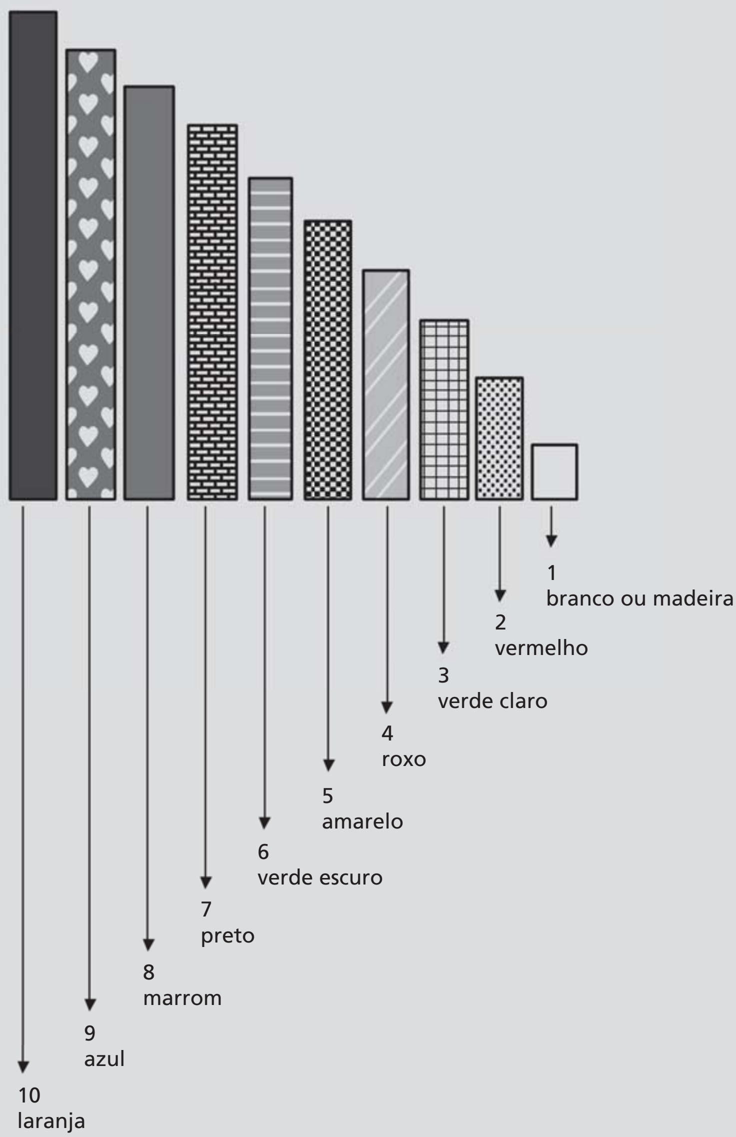
a + b é um número natural.

O mesmo não acontece quando tomamos o conjunto dos números naturais e a operação subtração. Como vimos no item anterior, em relação ao fato de a subtração não ser comutativa (5 – 7 = –2), embora os números 5 e 7 sejam naturais, o resultado –2 não é um número natural, por isso, podemos afirmar que o conjunto dos números naturais *não é fechado* em relação à operação subtração.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

4. O material Cuisinaire ou as "barrinhas coloridas" é constituído de pequenas barras de madeira cujo comprimento varia de 1cm a 10 cm, para cada comprimento há uma cor. As cores devem ser respeitadas, pois a cada cor é associado um número. O princípio é estabelecer uma correspondência entre cor e número. Esse material foi confeccionado pelo professor belga Georges Cuisinaire, que trabalhou com ele durante 23 anos, antes de torná-lo público em 1952. Seu primeiro livro intitulava-se: "Os números em cor: novo processo de cálculo pelo método ativo, aplicável a todas as séries da Escola Primária" e seu material é utilizado até hoje em vários países da Europa. A idéia inicial é associar cada cor a um número.



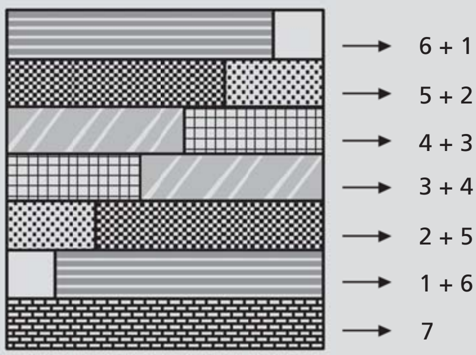
Considere como referência a barra preta, a do número 7.

a. Construa um “murinho” colocando duas barras que formam o 7. Registre a operação e explique como visualizamos a propriedade comutativa da adição nas barras.

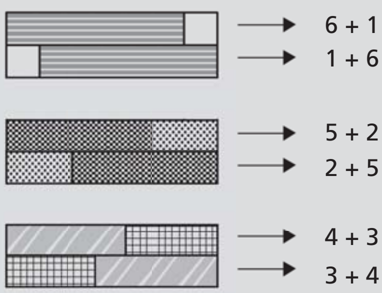
b. Agora desconstrua o murinho. Em cada “andar”, quando você retirar uma peça, registre a operação.

RESPOSTA COMENTADA

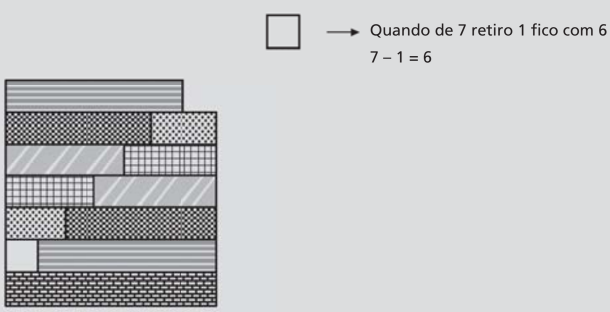
a. Quando construímos o murinho do 7, temos:

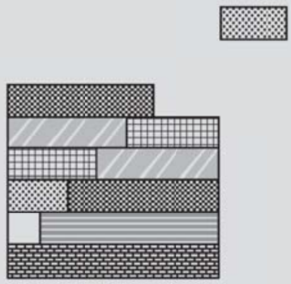


Observe a visualização da propriedade comutativa no material de Cuisinaire.

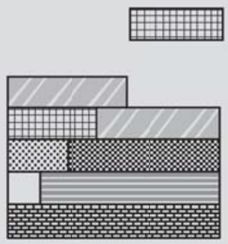


b. Quando retiramos de cada andar uma peça temos:

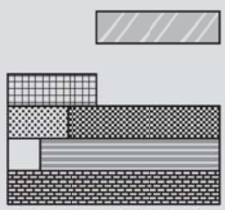




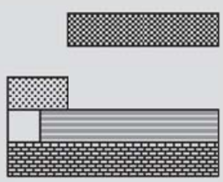
Quando de 7 retiro 2 fico com 5
7 – 2 = 5



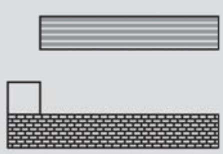
Quando de 7 retiro 3 fico com 4
7 – 3 = 4



Quando de 7 retiro 4 fico com 3
7 – 4 = 3



Quando de 7 retiro 5 fico com 2
7 – 5 = 2



Quando de 7 retiro 6 fico com 1
7 – 6 = 1

Vamos tomar com exemplo as operações 7 – 6 = 1 e 7 – 1 = 6. Observe que com essa ação o aluno visualiza pelo tamanho da peça que quando retiramos quantidades diferentes do mesmo número, o resultado também fica diferente.

ASSOCIANDO...

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

5.

a. Complete a tabela a seguir associando as parcelas e resolvendo as operações conforme indicado na primeira linha.

a	b	c	(a + b) + c	a + (b + c)
56	34	21	(56 + 34) + 21 = 111	56 + (34 + 21) = 111
89	11	45		
10	77	62		
124	40	36		
210	190	100		
1023	7	17		

b. O que você pode observar de regularidade entre os resultados das 4ª e 5ª colunas?

c. Que conjectura você faria sobre essa observação?

RESPOSTAS COMENTADAS

a.

a	b	c	(a + b) + c	a + (b + c)
56	34	21	(56 + 34) + 21 = 111	56 + (34 + 21) = 111
89	11	45	(89 + 11) + 45 = 145	89 + (11 + 45) = 145
10	77	62	(10 + 77) + 62 = 149	10 + (77 + 62) = 149
124	40	36	(124 + 40) + 36 = 200	124 + (40 + 36) = 200
210	190	100	(210 + 190) + 100 = 500	210 + (190 + 100) = 500
1023	7	17	(1023 + 7) + 17 = 1047	1023 + (7 + 17) = 1047

b. Os resultados são iguais.
c. Na adição de mais de duas parcelas, podemos associar os números em diferentes disposições que o resultado será o mesmo.

Se adicionarmos os números 7, 5 e 13, podemos fazer (7 + 5) + 13 ou 7 + (5 + 13), em ambos os casos o resultado é o mesmo, 25. Por isso, podemos afirmar que a adição é associativa. A propriedade associativa é usada em especial em cálculos mentais com muitas parcelas, em que procuramos associar valores mais fáceis de serem operados. Nesse exemplo, quando associamos 5 + 13 encontramos 18; adicionado ao 7 temos 25.

A adição é associativa, ou seja, para quaisquer três números naturais a, b e c temos:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Também pode ser útil para decompormos um número em diferentes adições, assim é importante que o aluno saiba que um número, por exemplo o 8, pode ser escrito como 7 + 1, 6 + 2, 5 + 3 e 4 + 4.

Enquanto na adição podemos associar quaisquer dois números e adicioná-los, quando se trata da operação subtração isso já não acontece. Vamos explorar uma tabela e verificar o que ocorre.

Tabela 17.1: Análise de que a subtração não é associativa.

a	b	c	(a - b) - c	a - (b - c)
25	12	7	(25 – 12) – 7 = 6	25 – (12 – 7) = 19
60	40	20	(60 – 40) – 20 = 0	60 – (40 – 20) = 40
78	53	11	(78 - 53) – 11 = 14	78 – (53 – 11) = 36

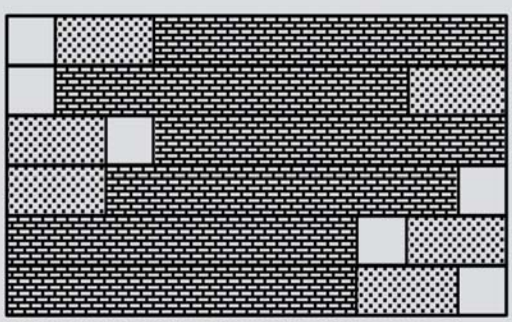
Observe os resultados das 4ª e 5ª colunas, eles são diferentes, por isso, podemos afirmar que a subtração não é associativa.

ATIVIDADE

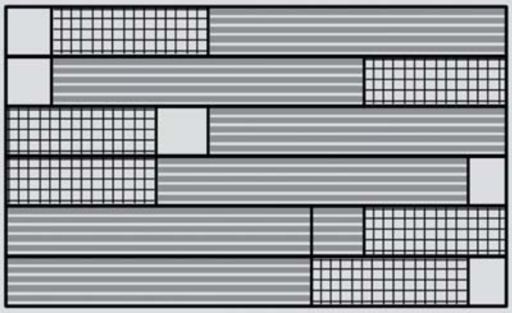
Atende aos Objetivos 2 e 3

6. Com o material de Cuisinaire, registre todas as maneiras de encontrar a barra laranja (número 10) usando três barras de cores diferentes.

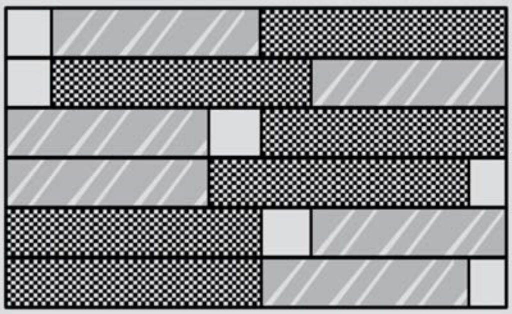
RESPOSTAS



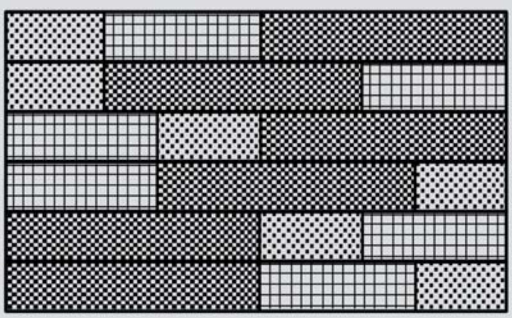
1 + 2 + 7
1 + 7 + 2
2 + 1 + 7
2 + 7 + 1
7 + 1 + 2
7 + 2 + 1



1 + 3 + 6
1 + 6 + 3
3 + 1 + 6
3 + 6 + 1
6 + 1 + 3
6 + 3 + 1



1 + 4 + 5
1 + 5 + 4
4 + 1 + 5
4 + 5 + 1
5 + 1 + 4
5 + 4 + 1

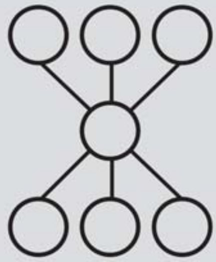


2 + 3 + 5
1 + 5 + 3
3 + 2 + 5
3 + 5 + 2
5 + 2 + 3
5 + 3 + 2

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 2 e 3

7. Coloque os números do conjunto A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} dentro dos círculos de modo que a soma dos três números que estão numa mesma linha seja igual a 12. Os números não podem ser repetidos e você deve usar todos os números.



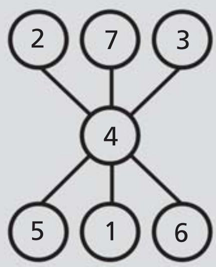
a. A resposta encontrada é única?

b. Qual foi o número encontrado no círculo central?

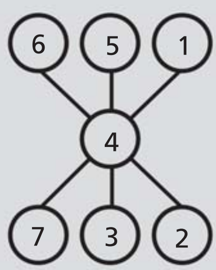
c. Ele pode ser modificado? Por quê?

RESPOSTAS COMENTADAS

A proposta é que você tente encontrar a solução por meio de uma estratégia pessoal, de uma investigação. Caso utilize a tentativa e erro, não apague suas tentativas, isso ajudará você a avaliar e encaminhar outras tentativas sem cometer erros anteriores.



a. Não. Veja outra solução possível:



Observe que a diferença da solução está apenas na posição dos números mas as adições feitas são as mesmas.

b. O número 4.
c. Não, o quatro é o único número possível para estar no círculo central. Veja uma justificativa e também uma forma de resolver sem utilizar a tentativa e erro.
Sem considerar as trocas nas posições das parcelas, as adições cujo resultado é 12 são:
1 + 4 + 7 1 + 5 + 6
2 + 4 + 6 2 + 5 + 5
3 + 3 + 6 3 + 4 + 5
4 + 4 + 7
Como temos 7 números para serem colocados em 7 círculos, vamos eliminar as possibilidades cujas parcelas repitam o mesmo número. Assim ficamos com 4 possibilidades:
1 + 4 + 7 1 + 5 + 62 + 4 + 63 + 4 + 5
O número do círculo do meio deve ser comum a todas as adições. Nesse caso, as adições devem ter o número 4 em uma das parcelas e ficamos com 3 possibilidades:
1 + 4 + 7 2 + 4 + 63 + 4 + 5.
Agora basta dispor os números de modo que tanto nas linhas horizontais, quanto nas ligadas com um traço o resultado seja 12.
Enquanto na primeira solução, as adições escritas foram:
2 + 4 + 6 7 + 4 + 13 + 4 + 5
Na segunda, temos:
6 + 4 + 2 1 + 4 + 75 + 4 + 3

O que diferencia uma solução de outra é a ordem das parcelas (utilizando a propriedade associativa e comutativa).

O ELEMENTO NEUTRO DA ADIÇÃO

Uma importante regularidade que pode ser observada é quando adicionamos qualquer número natural a zero. O resultado dessa adição será sempre o próprio número. Por isso dizemos que o zero (0) é o *elemento neutro* da adição.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1+0=1	2+0=2	3+0=3	4+0=4	5+0=5	6+0=6	7+0=7	8+0=8	9+0=9	10+0=10

A adição possui o 0 como elemento neutro, pois para qualquer número natural a, temos:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

OUTRAS INVESTIGAÇÕES...

Vamos buscar outras regularidades numéricas.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

8. Complete as colunas conforme o exemplo, resolvendo as operações.

1ª parcela	2ª parcela	Adicione as duas parcelas	Acrescente 21 à 1ª parcela	Adicione esse novo valor à 2ª parcela
35	25	35 + 25 = 60	35 + 21 = 56	56 + 25 = 81
40	60			
67	13			
124	176			
244	899			
1045	1055			

a. Observe as 3ª e 4ª colunas e diga o que acontece com o total, quando somamos um determinado valor a uma das parcelas.

b. O que aconteceria com o total se subtraíssemos um determinado valor a uma das parcelas?

RESPOSTAS COMENTADAS

1ª parcela	2ª parcela	Adicione as duas parcelas	Acrescente 21 à 1ª parcela	Adicione esse novo valor à 2ª parcela
35	25	35 + 25 = 60	35 + 21 = 56	56 + 25 = 81
40	60	40 + 60 = 100	40 + 21 = 61	61 + 60 = 121
67	13	67 + 13 = 80	67 + 21 = 88	88 + 13 = 101
124	176	124 + 176 = 300	124 + 21 = 145	145 + 176 = 321
244	899	244 + 899 = 1143	244 + 21 = 265	265 + 899 = 1164
1045	1055	1045 + 1055 = 2100	1045 + 21 = 1066	1066 + 1055 = 2121

a. O total fica acrescido desse mesmo valor.
Veja por quê: $35 + 25 = 60$; se somarmos 21 à primeira parcela teremos:
$(35 + 21) + 25 = 56 + 25 = 81$
Assim, $81 - 60 = 21$
Com isso podemos inferir que o total fica acrescido do mesmo valor que foi acrescido a uma das parcelas.
b. No caso de subtrairmos um valor a uma das parcelas, a situação é análoga:
Veja por quê: $35 + 25 = 60$; se subtrairmos 21 à primeira parcela teremos:
$(35 - 21) + 25 = 14 + 25 = 39$
Assim, $60 - 39 = 21$
Com isso podemos inferir que o total fica subtraído do mesmo valor que foi subtraído a uma das parcelas.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 2 e 3

9. O Código Nacional de Trânsito prevê que cada tipo de infração pertence a uma categoria, e cada categoria corresponde a certo número de pontos "perdidos" na carteira. O motorista não pode ultrapassar 20 (vinte) pontos "perdidos" no período de um ano. A tabela a seguir mostra alguns exemplos de infrações com as categorias e o número de pontos perdidos:

Categoria	Tipo de Infração	Número de Pontos
Gravíssima	• dirigir sem carteira de habilitação; • dirigir embriagado; • ameaçar pedestres; • ultrapassar sinais.	7
Grave	• não usar cinto de segurança; • estacionar irregularmente.	5
Média	• dirigir falando ao telefone celular; • parar na faixa de pedestres.	4
Leve	• dirigir sem atenção.	3

Agora responda:

a. Uma pessoa que foi multada 1 vez quando ultrapassou o sinal, 2 vezes por andar sem cinto de segurança e 1 vez por estacionar irregularmente. Quantos pontos ela "perdeu" em sua carteira de habilitação?

b. Uma pessoa já "perdeu" 14 pontos na carteira, por cometer 2 infrações gravíssimas. Seu amigo também perdeu 14 pontos, cometendo 1 infração grave e 3 infrações leves. Investigue todas as maneiras possíveis de "perder" 14 pontos na carteira, usando as categorias e os pontos apresentados na tabela.

c. É possível que um motorista perca a carteira de habilitação se levar duas multas? E se levar três? Descreva as situações possíveis.

d. Um motorista levou muitas multas e não perdeu a carteira. Sabemos que ele levou uma multa grave. Nessas condições, descreva em qual situação ele leva o número máximo de multas. Quantas multas ele tomou?

RESPOSTAS COMENTADAS

a. Esse item pede uma adição simples em que os valores devem ser retirados da tabela. Assim temos: $7 + 5 + 5 + 5 = 22$.
b. Neste item temos a decomposição do 14 e as parcelas só podem ser 3, 4, 5 e 7. Já temos $7 + 7 = 14$ e $5 + 3 + 3 + 3 = 14$.
Ainda podemos ter:
$3 + 4 + 7$, $4 + 5 + 5$ e $3 + 3 + 4 + 4$.
c. Levando duas multas, ele não perde a carteira, pois a pior situação é que ele tome duas multas gravíssimas, nesse caso, perderia no máximo $7 + 7 = 14$ pontos. Logo, não é possível.
Já com três multas, se ele tomar três multas gravíssimas ele perderia $7 + 7 + 7 = 21$ pontos e perde sua carteira, pois ultrapassou 20 pontos. Em nenhuma outra situação ele perde a carteira com três multas, essa é a única.

d. Se o motorista levou uma multa grave ele já perdeu 5 pontos. A melhor situação para ele é levar todas as outras multas leves. Nesse caso $3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$, totalizando 5 multas leves. Nessa situação ele tomou uma multa grave e 5 multas leves, num total de 6 multas. Lembre-se de que com 20 pontos o motorista não perde a carteira, só se ultrapassar esse somatório.

CONCLUSÃO

A idéia proposta nesta aula é que as atividades de investigação sejam o ponto de partida para o aluno inferir as propriedades. No Ensino Fundamental, o estudo das propriedades deve ser um elemento a mais para que os alunos construam certa flexibilidade no trabalho com as operações. Saber ou não o nome das propriedades não deve ser o mais importante no trabalho com os alunos. As atividades de investigação são uma poderosa ferramenta para que o aluno explore padrões numéricos, situações-problema e manipule materiais que o permitam vivenciar de maneira exploratória as propriedades da adição e subtração.

Por meio da exploração e do registro de tentativas é possível levantar conjecturas, estabelecer relações entre os números, contribuindo, assim, para que o aluno construa um *senso numérico* (LINS, 1997).

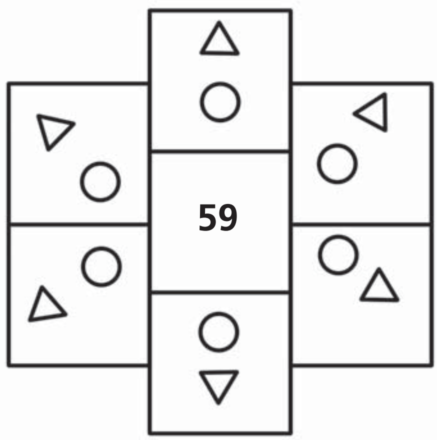
ATIVIDADE FINAL

Atende aos Objetivos 2 e 3

Na figura a seguir temos sete quadrados e em seis deles temos um triângulo e um círculo dentro. Resolva o problema proposto fazendo uma investigação e registrando as etapas da solução.

Complete todos os círculos e triângulos com os seguintes números 14, 17, 21, 22, 24, 28, 31, 35, 37, 38, 42, 45, sem repeti-los, de forma que:

- Os números em cada quadrado somem 59;
- Os números que estão nos círculos somem 177.



RESPOSTA COMENTADA

Apresentamos nesta solução uma das investigações que podem ser desenvolvidas na resolução desse problema.
Como os números em cada quadrado somam 59, podemos organizá-los nas seguintes adições.
14 + 45
17 + 42
21 + 38
22 + 37
24 + 35
28 + 31

Agora precisamos decidir quais são os números que devem ser colocados nos círculos, ou seja, escolher seis números cuja adição seja 177.

Uma das estratégias possíveis é pensar primeiro. Qual o resultado se colocarmos nos seis círculos os maiores números? Nesse caso, teríamos:

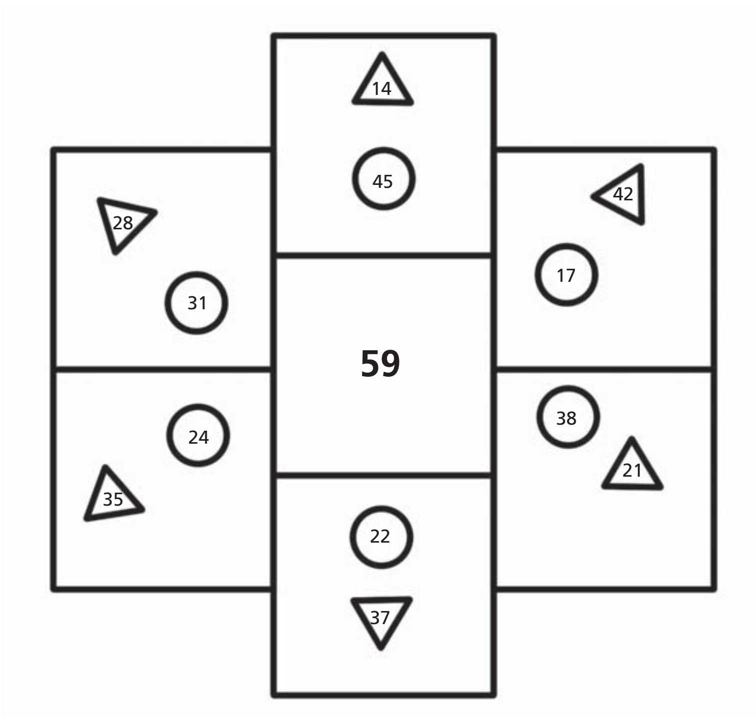
45 + 42 + 38 + 37 + 35 + 31 = 228.
Como desejamos atingir 177, houve uma sobra de 51.

Assim, temos que trocar alguns números maiores por menores de forma que a diferença total entre os números seja 51.

Observe a diferença das parcelas em cada quadrado:

45 - 14 = 31
42 - 17 = 25
38 - 21 = 17
37 - 22 = 15
35 - 24 = 11
31 - 28 = 3

Observe que 25 + 15 + 11 dá a diferença total, 51, que desejamos. Assim, trocamos na adição inicial o 42 pelo 17, o 37 pelo 22 e, por fim, o 35 pelo 24 e resolvemos o problema.
Tínhamos 45 + 42 + 38 + 37 + 35 + 31 = 228.
Com as trocas temos: 45 + 17 + 38 + 22 + 24 + 31 = 177. Agora é só dispor os números nas figuras.



RESUMO

As propriedades da adição e da subtração podem ser exploradas na perspectiva de investigação, em que o aluno explora, por meio de diferentes atividades propostas e concretiza ações e propriedades.

Além de explorar diferentes situações-problema e regularidades, o uso do material concreto, como as réguas ou barras de Cuisinaire possibilitam uma série de atividades de exploração e concretização de idéias. O material de Cuisinaire é formado por dez tipos de peças que se diferenciam pela cor e pelo tamanho. Com ele, podemos explorar diversas atividades com números como, por exemplo, a escrita das operações associadas, a vivência de propriedades e a decomposição da adição, sempre associando a visualização com o material.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Você prefere multiplicar ou dividir? Decida sobre isso na próxima aula.

AULA 18

Multiplicação e divisão: conceitos

Meta da aula

Nesta aula, vamos apresentar os principais conceitos associados à multiplicação e à divisão.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. construir significado para os conceitos de multiplicação e de divisão;
2. resolver e elaborar problemas que envolvem os vários conceitos associados à multiplicação e à divisão;
3. planejar e orientar situações de ensino-aprendizagem relacionadas ao estudo da multiplicação e da divisão.

Pré-requisitos

Para acompanhar esta aula, é necessário rever as características do sistema de numeração decimal, os conceitos de operação e a algebrização da aritmética, trabalhados na Aula 14. Além disso, são necessários os conceitos e propriedades associados às operações de adição e subtração, vistos nas Aulas 15 e 16.

INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos falar mais especificamente sobre os conceitos das operações de multiplicação e divisão. Esclarecemos que, para que o aluno compreenda tais operações, é preciso muito mais do que simplesmente efetuar os algoritmos. Propomos uma série de situações-problema que favorecem a construção desses conceitos e oportunizamos a elaboração de outras. Procuramos, também, refletir sobre as estratégias que o professor pode adotar ao longo do ensino.

Compreender os conceitos que envolvem determinados conteúdos é fundamental para um ensino e uma aprendizagem significativos em Matemática. Como já dissemos em outros momentos, num primeiro olhar você poderá julgar que basta saber operar para estar apto a ensinar os alunos a operarem. A prática tem mostrado que não é bem assim, os alunos apresentam dificuldades de ordens diversas, e o professor precisa conhecer mais profundamente os conceitos que envolvem as operações, para poder então propor atividades que contribuam para a construção do conhecimento matemático do seu aluno.

Particularmente, na divisão, os alunos apresentam grandes dificuldades, e na maioria das vezes o professor sente-se imobilizado para sanar as dúvidas dos alunos.

O CONCEITO DE MULTIPLICAÇÃO

A multiplicação de números naturais pode ser definida através da união de CONJUNTOS DISJUNTOS com o mesmo número de elementos da mesma espécie.

CONJUNTOS DISJUNTOS

São aqueles que não possuem elementos em comum, isto é, a interseção deles é vazia.

Essa definição nos remete a considerar a multiplicação como soma de parcelas iguais (raciocínio aditivo), que é a forma mais usual utilizada por professores e abordada em livros didáticos. O problema proposto na Atividade 1 relaciona-se a essa definição.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

1. Considere uma caixa que contém cinco bolas. Se tivermos seis caixas iguais, com o mesmo conteúdo, quantas bolas teremos?

RESPOSTA COMENTADA

$$\underbrace{5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5}_{6} = 6 \times 5 = 30$$

O número 6 indica a quantidade de parcelas iguais.

Considerando a multiplicação: $\boxed{6 \times 5 = 30}$

Dizemos que o multiplicando é a parcela que se repete, na Atividade 1, é o número 5; o multiplicador é o número de vezes que ela se repete, que na Atividade 1, é o número 6; e o produto é o resultado da operação. Dentro de uma situação-problema ou desafio, fica mais evidente essa nomenclatura, mas, se tomamos simplesmente a operação de multiplicação entre dois números, já não identificamos multiplicando e multiplicador, por isso, é comum chamarmos os termos de uma operação de multiplicação, de fatores.

O sinal de multiplicação é um **×** que também pode ser substituído por um ponto (.). Nos anos iniciais, o ponto é pouco usado. Seu uso se justifica mais tarde por causa das expressões algébricas, onde o sinal **×** pode ser confundido com a letra **x** que representa uma variável.

OUTRAS IDEIAS QUE ENVOLVEM O CONCEITO DA OPERAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO

Além de introduzir o conceito da operação de multiplicação através da adição de parcelas iguais, você também pode introduzir o conceito através do produto cartesiano de dois conjuntos. Nesse caso, a multiplicação é a operação que associa o par formado pelos números de elementos de dois conjuntos ao número de elementos do produto cartesiano desses dois conjuntos (raciocínio multiplicativo).

Quando fazemos o produto cartesiano do conjunto A pelo conjunto B, encontramos o conjunto formado por todos os pares (*a*, *b*) possíveis em que *a* é um elemento de A, e *b* é um elemento de B. Vejamos um exemplo: O conjunto A é formado pelos elementos 1 e 2, e o conjunto B, pelos elementos a, b e c. O produto cartesiano de A por B é o conjunto formado pelos pares (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b) e (2, c). Observe que, se multiplicarmos o número de elementos do conjunto A pelo número de elementos do conjunto B, encontraremos o número de elementos do produto cartesiano de A por B.

Essa é uma das ideias que envolvem o conceito de multiplicação dentro da metodologia de resolução de problemas e é chamada de combinação. Observe que, quando estamos fazendo o produto cartesiano de dois conjuntos, estamos *combinando* elementos de um conjunto com elementos do outro.

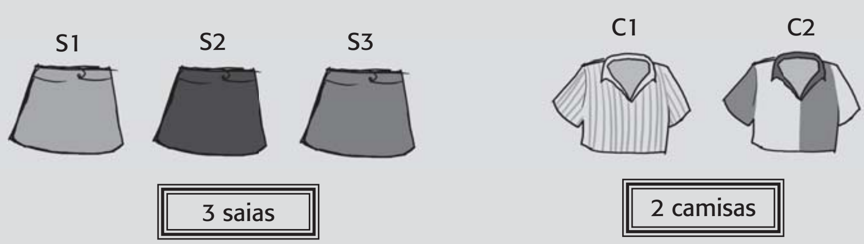
Uma situação que exemplifica essa ideia é a que propomos a seguir.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

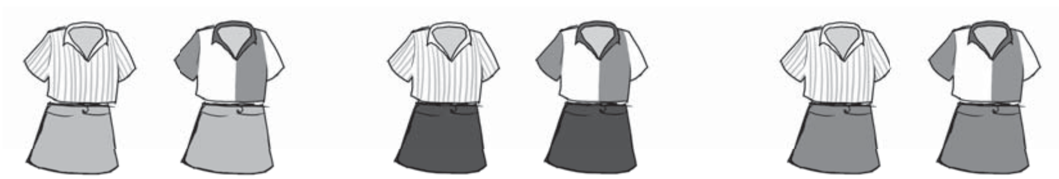
2. Uma menina possui duas camisas diferentes para combinar com três saias diferentes. De quantas maneiras distintas ela poderá se vestir?

RESPOSTA COMENTADA



Se considerarmos as três saias como S1, S2 e S3 e as duas camisas como C1 e C2, podemos escrever o número total de possibilidades como o conjunto de pares ordenados: {(S1, C1); (S1,C2); (S2, C1); (S2, C2); (S3, C1); (S3, C2)}, num total de 6 possibilidades.

Para expressar a solução deste problema, podemos utilizar diferentes representações.



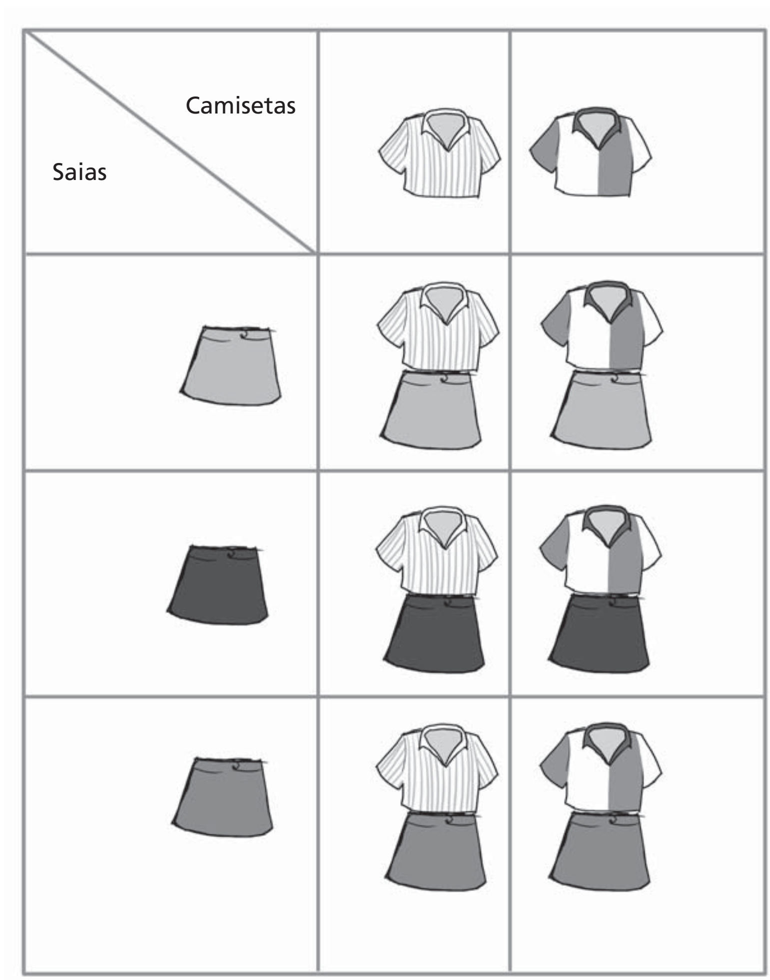
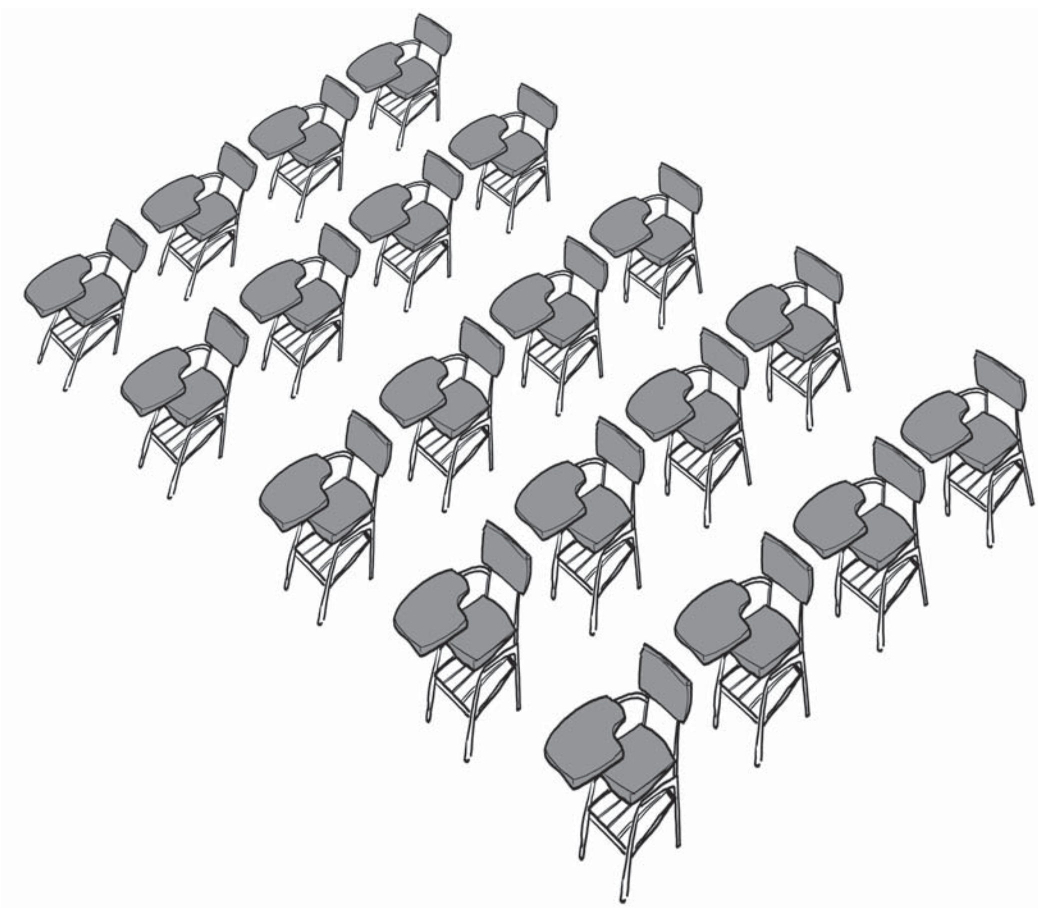


Figura 18.1: Combinação de saias e blusas.

A utilização de diferentes representações para uma mesma situação favorece a construção dos conceitos envolvidos nela direta ou indiretamente. Nesse caso, a construção da tabela abre caminho para a *configuração retangular*, que é outra ideia associada ao conceito de multiplicação.

A configuração retangular é aquela em que prevalece a disposição de elementos em linhas e colunas. Ela se associa à multiplicação, pois o número de elementos dispostos é igual ao produto do número de linhas pelo número de colunas. Quando, por exemplo, somos informados que, numa sala de aula, as carteiras estão arrumadas em 5 fileiras e que, em cada fileira, há 4 carteiras, podemos usar a configuração retangular para representar esta situação.

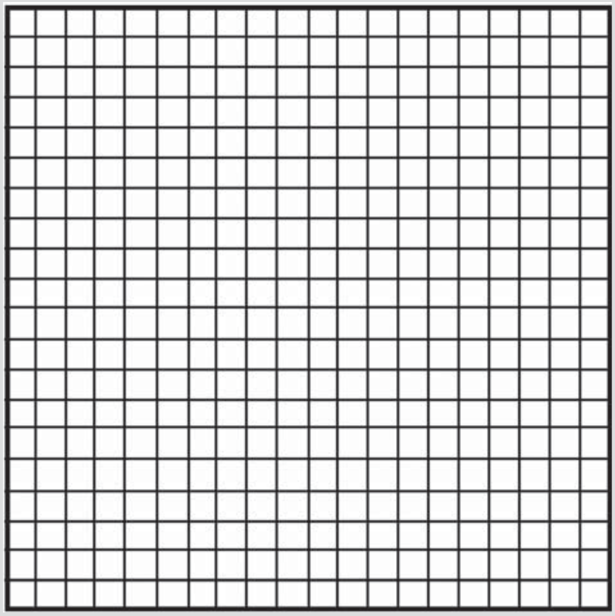


Observe que o produto do número de linhas pelo número de colunas é igual ao número de elementos, nesse caso, 4 x 5 = 20.

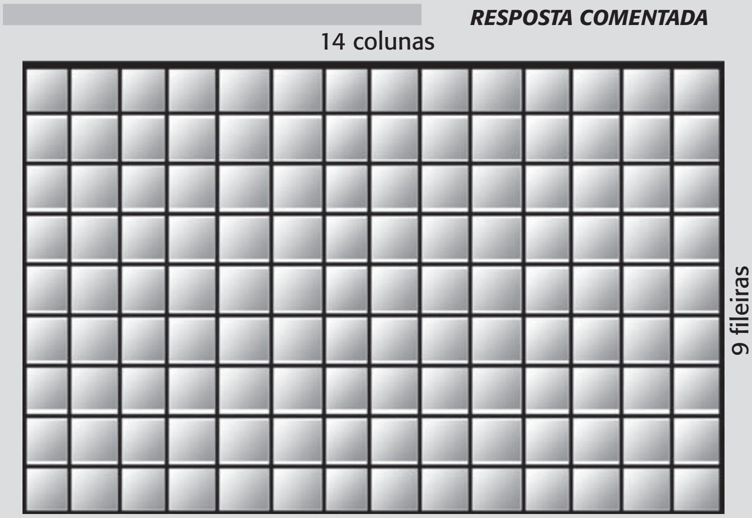
ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

3. O Sr. João reservou 130 azulejos para colocar em uma das paredes do banheiro de sua casa. Ele já sabe que serão 9 fileiras e 14 colunas de azulejos. Será que a quantidade de azulejos é suficiente?



RESPOSTA COMENTADA

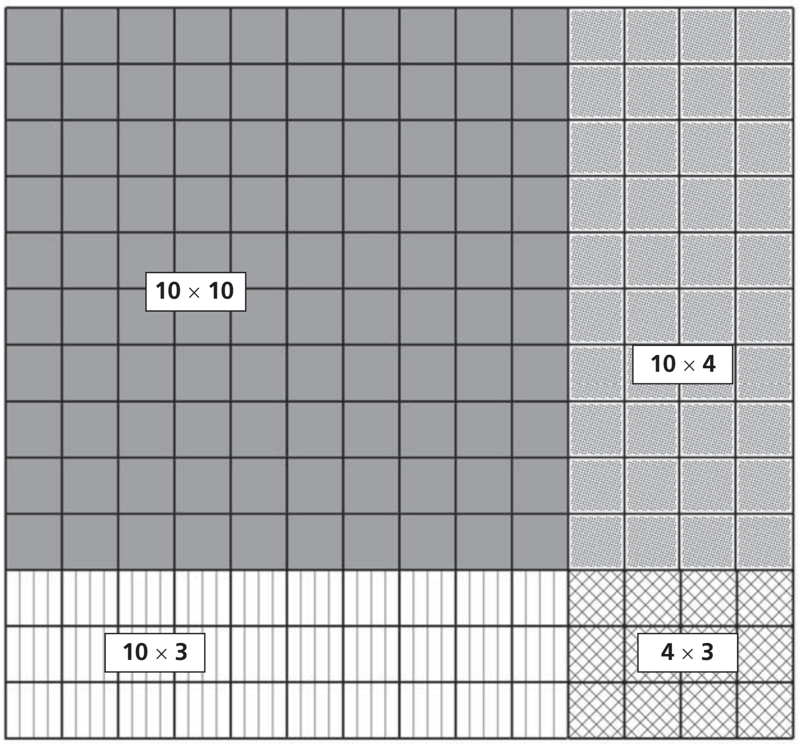


9 x 14 = 126

Os 130 azulejos que o Sr. João reservou são suficientes para cobrir a parede do banheiro

Na solução de problemas desse tipo, é recomendável o uso do papel quadriculado. O papel quadriculado favorece a visualização da unidade e a disposição das unidades em *arranjos retangulares* que, por sua vez, favorece a compreensão de certos procedimentos multiplicativos. O aluno pode, por exemplo, ter uma percepção visual da multiplicação e de suas propriedades.

Usando a organização retangular, observe uma maneira de efetuar a multiplicação 13×14.



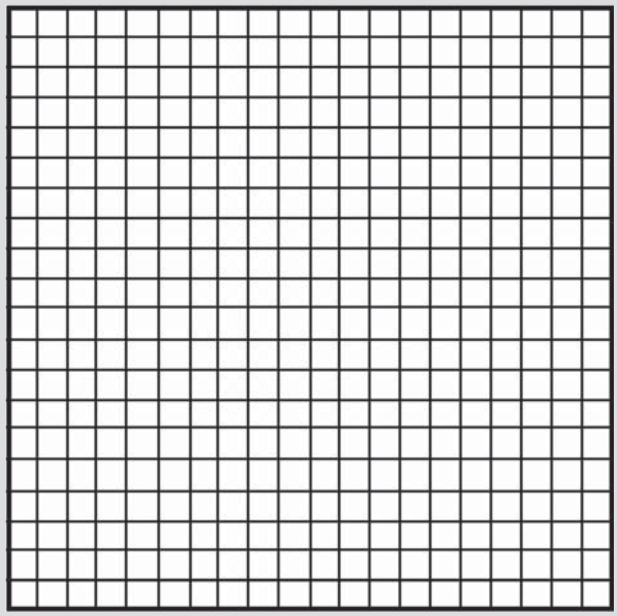
$$13 \times 14 = (10 + 3) \times (10 + 4) = \mathbf{10 \times 10 + 10 \times 3 + 10 \times 4 + 4 \times 3}$$

Figura 18.2: Representação retangular para a multiplicação.

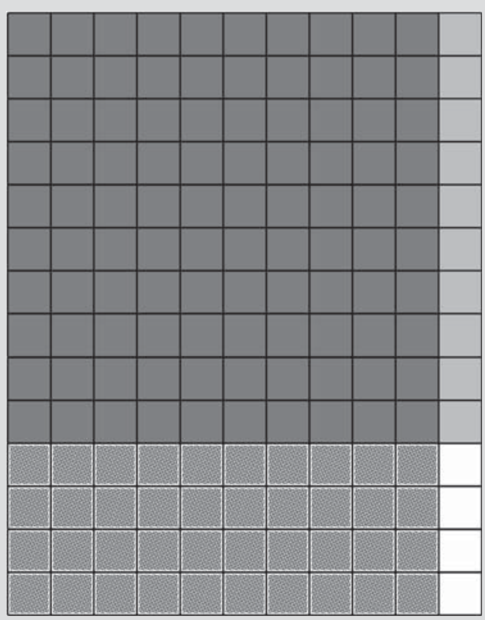
ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

4. Usando papel quadriculado, siga o exemplo feito e registre a multiplicação 11 x 14.



RESPOSTA COMENTADA



Como segue da figura, 11 x 14 = (10 + 1) x (10 + 4) = 10 x 10 + 10 x 1 + 10 x 4 + 4 x 1.

Associada à operação de multiplicação, há ainda a ideia de comparação. Estamos comparando quantidades quando tentamos estabelecer uma relação entre elas. Quando dizemos que uma pessoa é mais alta que outra, estamos comparando suas alturas. Quando dizemos que um número é menor do que outro ou que um número é o dobro do outro, estamos comparando-os. São palavras muito usadas em problemas de comparação: dobro, triplo, quádruplo, metade etc.

Para a explicarmos melhor, propomos a Atividade 5.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

5. Observe o problema:

Renato tem 5 cartões de telefone, seu amigo Charles tem 4 vezes o que Renato tem. Quantos cartões tem Charles?

a) Resolva o problema.
b) Identifique as grandezas que estão sendo comparadas.

RESPOSTA COMENTADA

Efetuando o produto 4 x 5, concluímos que Charles tem 20 cartões. Neste problema estão sendo comparadas as quantidades de cartões

É importante observarmos que, comumente, a ideia trabalhada na Atividade 4 causa alguma confusão na compreensão dos alunos. Para o problema proposto na Atividade 5, muitos apresentam a seguinte solução:

Solução de um aluno	
Renato 5	
Renato 5	*Charles 15*
Renato 5	

Figura 18.3: Solução de um aluno para um problema de comparação.

Como podemos notar, o aluno não utiliza um algoritmo usual para o registro da solução do problema. Porém, identificamos no seu registro o conceito de multiplicação.

PROPORCIONALIDADE: UMA PODEROSA FERRAMENTA

A ideia de proporcionalidade é uma das mais importantes na aprendizagem de Matemática. Diferentes situações-problema podem ser resolvidas de forma mais imediata se utilizarmos o raciocínio proporcional.

A situação-problema da Atividade 6 exemplifica essa ideia.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

6. Luiz coleciona selos. Seu álbum tem 12 páginas, e em cada página cabem 8 selos.
a) Se ele só preencher 3 páginas, quantos selos terá o álbum?
b) Quantos selos terá o álbum de Luiz depois de completo?

RESPOSTA COMENTADA

Se em uma página, Luiz coloca 8 selos, em 3 páginas, ele vai colocar 3 x 8 = 24 selos. Da mesma forma, em 12 páginas, ele vai colocar 12 x 8 = 96 selos.

Assim, a noção de proporcionalidade pode ser explicitada da seguinte forma: 1 está para 8, assim como 12 está para 96. Utilizando uma tabela, podemos, ainda, explorar outra solução para esse problema.

Tabela 18.1: Exemplo de proporcionalidade entre grandezas

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**12**
8	**16**	**24**	**32**	**40**	**48**	**96**

Uma justificativa que os alunos oferecem quando constroem tabelas como essa é:

Justificativa de um aluno

Comecei colocando 1 página e fui aumentando; quando cheguei no 6, percebi que para 12 era só dobrar o resultado e assim cheguei ao 12.

Figura 18.4: Justificativa de um aluno para problemas de proporcionalidade.

E ela nos permite identificar o raciocínio proporcional empregado na solução do problema.

Com tudo que foi discutido até aqui, está claro que saber multiplicar é muito mais do que saber realizar cálculos. Segundo o "Caderno TV Escola" (1998), saber multiplicar é:

- Reconhecer se a multiplicação é o recurso mais adequado para a resolução de um problema.
- Dispor de procedimentos para calcular produtos.
- Estabelecer relações entre diferentes sentidos do conceito – comparação, proporcionalidade, combinação e produto de medidas ou configuração retangular.
- Eleger as estratégias mais econômicas, de acordo com a situação abordada.

O ensino das operações, em particular nas séries iniciais, deve priorizar o desenvolvimento dos conceitos e as ideias que envolvem as operações. O ensino dos algoritmos não deve anteceder a compreensão dos conceitos.

O CONCEITO DE DIVISÃO

Dizemos que a divisão exata é a operação inversa da multiplicação. Dados dois números, a divisão exata consiste em verificar por quanto devemos multiplicar o segundo para obter o primeiro. Isso só acontece quando o primeiro número for múltiplo do segundo.

$$\boxed{63 \div 7 = 9 \text{ porque } 7 \times 9 = 63}$$

Figura 18.5: Reversibilidade entre divisão e multiplicação.

Nessa divisão, o 63 é o *dividendo (D)*, 7 é o *divisor (d)*, e o 9 é o *quociente (q)*. Como a divisão é exata, o *resto (r)* é 0 (zero). O sinal de divisão é expresso pelos símbolos ÷ ou : . É importante destacar que o traço de fração, às vezes, também, substitui o sinal ÷ de divisão.

A representação da operação divisão, quando armamos a conta, se apresenta da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} 172 & 3 \\ \cline{2-2} & \\ \end{array}$$

Figura 18.6: Armando a divisão.

O significado habitual da divisão envolve a ideia de repartir em partes iguais. Na Atividade 7, proporemos a reflexão sobre um problema que envolve essa ideia.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

7. Observe o problema a seguir:

> Se distribuímos dezoito (18) bombons igualmente em seis (6) caixas, quantos bombons colocamos em cada caixa?

a) Resolva o problema.
b) Que grandeza está sendo repartida?
c) Está ocorrendo uma repartição em quantas partes iguais?

RESPOSTA COMENTADA

Dividindo dezoito (18) por seis (6), encontramos três (3), ou seja, o número de bombons que colocamos em cada caixa. Neste problema, a grandeza bombons *está sendo distribuída em seis (6) partes iguais.*

Outro significado para a divisão é verificar quantas vezes uma quantidade cabe na outra. Essa ideia nos remete à ação que podemos chamar de *subtrações sucessivas*. Dentro dessa perspectiva, vamos ver um exemplo.

$$\boxed{63 \div 7 = 9}$$

Figura 18.7: Divisão.

Para dividir 63 por 7, podemos proceder da seguinte forma:

Tabela 18.2: Subtrações sucessivas

63 – 7 = 56	56 – 7 = 49	49 – 7 = 42	42 – 7 = 35	35 – 7 = 28
28 – 7 = 21	21 – 7 = 14	14 – 7 = 7	7 – 7 = 0	

O 7 (sete) foi subtraído 9 (nove) vezes até chegar ao 0 (zero). Portanto, 9 é o quociente (resultado) da divisão de 63 por 7. O conceito de subtração é utilizado no algoritmo da divisão que será visto na próxima aula. A seguir, propomos um problema que envolve essa ideia.

A divisão por meio das subtrações sucessivas pode ser feita com números maiores e usando a calculadora. Experimente dividir 256 por 6. Uma dica: após apertar as teclas, 2, 5, 6, ÷, 6, basta apertar o sinal de igual, pois ele "prende" a última operação realizada. Conte quantas vezes apertou o igual, esse número será o resultado (quociente) da divisão.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

8. Observe o problema:

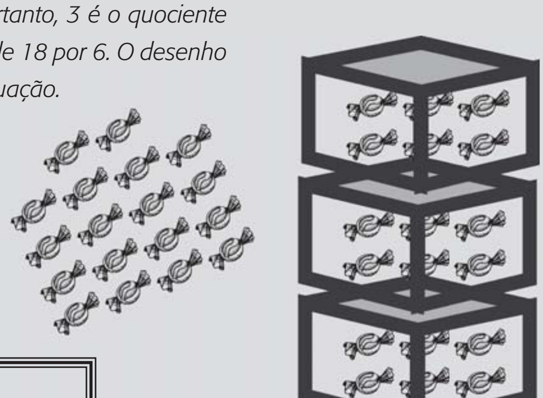
> Se quisermos guardar dezoito (18) bombons em caixas onde cabem seis (6) bombons em cada uma, quantas caixas completamente cheias devem ser utilizadas?

a) Resolva o problema, utilizando as subtrações sucessivas.
b) Que número está sendo subtraído sucessivamente? Quando você decidiu interromper a sequência de subtrações?

RESPOSTA COMENTADA

18 – 6 = 12	*12 – 6 = 6*	*6 – 6 = 0*

O 6 (seis) foi subtraído 3 (três) vezes até chegar ao 0 (zero). Portanto, 3 é o quociente (resultado) da divisão de 18 por 6. O desenho a seguir ilustra essa situação.



$18 \div 6 = 3$
Serão necessárias 3 caixas

Em todos os exemplos que vimos até agora, as divisões deixam resto zero. São chamadas de divisões exatas. Nesses casos, podemos generalizar a seguinte relação:

Dividendo = divisor × quociente

$$\boxed{D = d.q} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} D & d \\ \hline 0 & q \end{array}$$

Figura 18.8: Divisão exata.

Podemos, então, escrever: o *dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente*.

NEM SEMPRE A DIVISÃO É EXATA...

O que caracteriza uma divisão não exata é o resto diferente de zero, ou seja, não existe um número natural que, multiplicado pelo divisor, dê o dividendo. Dito de uma outra forma, o divisor não cabe uma quantidade exata de vezes no dividendo. Nesse caso, a divisão nos dá o maior número (natural) de vezes que um número contém o outro. Esse fato pode ser mais bem compreendido na Atividade 9.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

9. Tente resolver o problema e, em seguida, responda:
Se tivermos R$ 14,00 (quatorze reais) e quisermos comprar toalhas que custam R$ 4,00 (quatro reais) cada uma, qual o maior número de toalhas que poderemos comprar?
Foi possível comprar um número de toalhas e não haver troco?
Certamente você realizou uma divisão ou subtrações sucessivas para resolver esse problema. A que termo da divisão o troco corresponde?

RESPOSTA COMENTADA

Resolvendo o problema, verificamos que:

$14 \div 4 = 3$ e sobram 2
Podemos comprar 3 toalhas
e ainda sobram R$ 2,00

$$\begin{array}{r|l} 14 & 4 \\ \hline 2 & 3 \end{array}$$

Os R$ 2,00 de troco correspondem ao resto da divisão de quatorze por quatro.

Assim, dependendo da situação-problema em questão, o resto poderá ter um significado. No caso das compras do problema anterior, ele correspondeu ao troco; quando estivermos formando grupos com certo número de pessoas estabelecido previamente, ele corresponderá ao número de pessoas que formarão um grupo incompleto etc.

Utilizando a ideia de generalização aritmética, podemos representar a divisão não exata da seguinte forma:

Dividendo = divisor × quociente + resto

$$\boxed{D = d \times q + r}$$

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

Figura 18.9: Divisão com resto – fórmula geral.

Uma reflexão interessante é pensar sobre o maior resto possível numa divisão. Para isso, vamos usar uma tabela. A divisão escolhida é $47 \div 5$.

$$\boxed{47 \div 5 = 9 \text{ e resto } 2}$$

Figura 18.10: Divisão com resto – um exemplo numérico.

Tabela 18.3: Divisões exatas e não exatas

Resto (r)	**5 x 9 + r**	Divisão
0	5 × 9 + **0** = 45	Exata
1	5 × 9 + **1** = 46	Não exata
2	5 × 9 + **2** = 47	Não exata
3	5 × 9 + **3** = 48	Não exata
4	5 × 9 + **4** = 49	Não exata
5	5 × 9 + **5** = 50 ou 5 × 10 + **0** = 50	Exata

No nosso exemplo, os restos possíveis na divisão por 5 são 0, 1, 2, 3 ou 4. O nosso divisor, no caso, é o 5, e o maior resto possível é o 4 (5 – 1). O menor resto possível é o zero, nesse caso a divisão é exata. Caso a divisão não seja exata, o menor resto possível é 1.

Em qualquer divisão, o maior resto possível é o divisor menos um, ou seja,

$$\mathbf{r = d - 1.}$$

Podemos dizer que o maior resto possível é o número que antecede o divisor.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

10. Agora volte ao problema da Atividade 9 e reflita: faria sentido um troco de R$ 4,00 naquela situação?

RESPOSTA COMENTADA

O troco de R$ 4,00 não faria sentido, pois com ele seria possível comprar mais uma toalha.

INTERPRETANDO O RESTO DA DIVISÃO

Como vimos, a interpretação que fazemos do resto de uma divisão depende da situação-problema em que ela foi mobilizada. Na Atividade 11, podemos analisar mais uma situação.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

11. Uma escola vai levar os alunos da 1ª série para fazer uma visita ao planetário. São cinco turmas da primeira série e cada turma tem 28 alunos. Vão junto com os alunos 6 professoras, 2 orientadoras e 5 responsáveis. Para tal visita, a escola precisa alugar transporte coletivo. Depois de algumas pesquisas de preço, resolveram contratar uma empresa que aluga micro-ônibus com a capacidade para 34 passageiros. Quantos micro-ônibus serão necessários para levar todas essas pessoas, partindo do princípio de que não haverá faltas?

RESPOSTA COMENTADA

Em primeiro lugar, precisamos saber o total de pessoas que farão o passeio, para isso, vamos fazer uma tabela:

Grupos	*Totais*
Alunos	*5 x 29 = 145*
Professoras	*8*
Orientadoras	*2*
Responsáveis	*5*
Total de pessoas	*140 + 6 + 2 + 5 = 160*

agora precisamos fazer a divisão, para saber quantos micro-ônibus serão necessários;

160 ÷ 34 = 4 e resto 24

interpretamos o resultado:

4 micro-ônibus lotados e 1 com 24 pessoas, logo serão necessários 5 micro-ônibus, o quociente mais 1 (4 + 1)

E quantos micro-ônibus lotados serão necessários?

Responda: 4 é o próprio quociente.

Cabe destacar que, para resolver problemas como este, os alunos podem usar estratégias diferentes, subtrações, somas sucessivas ou distribuição. O importante é que saibam o que o problema está pedindo e sejam críticos na hora de dar a resposta. O uso de representações variadas, como tabelas e desenhos, e a simulação da situação por meio de pequenas encenações, podem favorecer o desenvolvimento de uma postura mais crítica ao longo da resolução de problemas.

CONCLUSÃO

Os conceitos das operações de multiplicação e divisão compõem, junto com o conceito das operações de adição e subtração, o que chamamos de quatro operações fundamentais. Estudamos que há ideias distintas associadas a cada operação.

A resolução de problemas tem se caracterizado como uma das grandes dificuldades dos alunos na aprendizagem das operações. O conhecimento das ideias pode instrumentalizar os professores e alunos e contribuir para sanar ou diminuir tal dificuldade.

ATIVIDADES FINAIS

Atende aos Objetivos 1 e 2

1. A partir de 16 fichas, pense e registre modos diferentes de formar grupos com quantidades iguais. Quantos grupos possuem a maior quantidade de fichas? Quantos grupos possuem a menor quantidade de fichas?

RESPOSTA COMENTADA

Podemos formar apenas um grupo com 16 fichas, dois grupos com 8 fichas, quatro grupos com quatro fichas ou oito grupos com duas fichas. Numa atividade como esta, devemos perceber que um número pode ser decomposto em vários produtos. Nesse caso, para o número 16, temos 1 x 16, 2 x 8, 4 x 4 e 8 x 2.

Atende aos Objetivos 1 e 2

2. Paulo arrumou seu álbum colando 4 fotos em cada página e completou 9 páginas. Sua irmã resolveu colar 6 fotos em cada página e completou 6 páginas. Qual dos dois tem mais fotos? Mostre seu raciocínio.

RESPOSTAS COMENTADAS

Paulo colou 4 x 9, ou seja, 36 fotos e sua irmã colou 6 x 6, ou seja, 36 fotos. Portanto, os dois colaram o mesmo número de fotos e não há, entre eles, aquele que possui mais fotos. Além de favorecer o uso do raciocínio multiplicativo, este problema, assim como o da atividade anterior, contextualiza o fato de que podemos decompor um mesmo número em produtos distintos.

Atende ao Objetivo 3

3. Elabore seis problemas. Cada um deles deve envolver as diferentes ideias das operações de multiplicação e divisão, abordadas no texto. Apresente uma solução para cada um deles.

RESPOSTA COMENTADA

Esta é uma questão pessoal. Entretanto, algumas orientações são necessárias. Na elaboração de problemas, o professor deve tomar alguns cuidados. Vejamos:

- A situação proposta deve ser semelhante àquelas vivenciadas pelas crianças no cotidiano.

- O enunciado do problema deve conter dados suficientes à sua solução.

- Os valores numéricos precisam estar adequados ao contexto. Por exemplo, numa questão sobre crianças que possuem figurinhas, não faz sentido o uso do número da ordem dos milhões, pois nenhuma criança no mundo possui milhões de figurinhas.

- A pergunta deve ser formulada de forma clara e objetiva.

Atende ao Objetivo 3

4. As calculadoras tornaram-se atualmente um instrumento bastante acessível. Encontramos pequenas calculadoras ao preço médio de R$ 2,00 (dois reais). Em contrapartida, sua qualidade é questionável, pois é comum apresentarem defeitos diversos. Imagine que você tem uma dessas calculadoras, e a tecla da divisão (÷) esteja quebrada. Mesmo assim, você terá que efetuar as divisões utilizando as calculadoras. Descreva a estratégia utilizada e os resultados encontrados para o quociente e o resto de 358 ÷ 36.

RESPOSTA COMENTADA

Uma maneira de efetuar essa divisão é recorrer às subtrações sucessivas: Digitar "358 – 36" e teclar "=" até que o número obtido no visor seja menor que 36. A quantidade de vezes que você tiver teclado "=" corresponderá ao quociente e o número menor que 36 que surgir será o resto. Assim, o quociente é 9 e o resto é 34.

Atende ao Objetivo 3

5. Encontre uma solução para os problemas a seguir. Reflita sobre as diferenças entre eles e faça os registros das soluções e das reflexões.

a) Laura saiu de casa com R$ 17,00 reais para comprar toalhas. Ao chegar à loja, a toalha de que gostou custava R$ 4,00. Quantas toalhas, no máximo, ela pôde comprar? Ela gastou todo o dinheiro?

b) Marcelo, Luiz, Cláudio e Roberta foram a um restaurante. A despesa total foi R$ 17,00. Decidiram que pagariam todos a mesma quantia. Quanto coube a cada um deles?

c) Maria Luíza, professora do 1º ciclo, levou 17 lápis de cor para serem distribuídos entre os quatro alunos que se destacassem nas avaliações. Quantos lápis de cor cada um recebeu?

RESPOSTAS COMENTADAS

*Em **a**, Laura pôde comprar 4 toalhas e sobrou R$ 1,00; em **b**, coube a cada um pagar R$ 4,25; e, em **c**, cada criança recebeu 4 lápis e sobrou 1.*

*Notamos que, para resolver os três problemas, podemos efetuar a divisão de 17 por 4. No problema **a**, a quantidade de toalhas compradas por Laura corresponde ao número inteiro de vezes que o número 4 cabe no número 17. Já nos problemas **b** e **c**, a divisão é usada com a ideia de distribuição. A diferença entre eles é que, no problema **b**, faz sentido dividir o resto igual a 1 chegando aos centavos e, no problema **c**, com esse procedimento, estaríamos desperdiçando um lápis. Assim, são contextos diferentes que envolvem os mesmos números.*

É comum os alunos perguntarem: é de mais ou de menos? É de multiplicar ou dividir? Por isso, propositalmente, utilizamos nos 3 problemas os mesmos números, 17 e 4. Nossa intenção é estimular o aluno a ler realmente o problema. Buscando modificar a posição acomodada de identificar os números e utilizar qualquer operação para resolver o problema. Visando ao desenvolvimento da postura crítica dos alunos, é fundamental que o professor estabeleça comparações como estas com eles.

RESUMO

Nesta aula, estudamos as principais ideias associadas à multiplicação e à divisão. Somente o estudo dessas ideias por meio da resolução de problemas deixará o aluno apto a escolher adequadamente a operação que pode lhe ser útil para solucionar um problema escolar ou do dia a dia. Além da soma de parcelas repetidas, que é ensinada com mais frequência nos anos iniciais do Ensino Fundamental, podemos associar à multiplicação as ideias de combinação, configuração retangular, comparação e proporcionalidade. Já à divisão podemos associar as ideias de distribuição e subtrações sucessivas. As divisões podem, ainda, ser exatas ou não exatas. O sucesso de um aluno em problemas relativos a uma ideia não lhe assegura sucesso em problemas ligados à mesma operação, mas associado à outra ideia. É preciso que, ao longo da vida escolar, o aluno tenha experiência e compare as várias ideias.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Dando prosseguimento ao estudo da multiplicação e da divisão, na próxima aula vamos estudar as propriedades e fatos fundamentais associados a essas operações.

AULA 19

Investigando a multiplicação e a divisão

Meta da aula

Apresentar as propriedades da multiplicação e da divisão de números naturais.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. investigar propriedades da multiplicação e da divisão;
2. aplicar propriedades da multiplicação em diferentes situações-problema.

INTRODUÇÃO

Vimos que, para cada operação, valem propriedades, e que estas não necessariamente valem para outras operações. Para saber o que vale e o que não vale, é necessário investigar e raciocinar, sempre tomando como base o conceito da operação em questão.

O termo tabuada é bastante antigo e designa um conjunto de fatos, como por exemplo: $3 \times 1 = 3$, $3 \times 2 = 6$, $3 \times 3 = 9$. Esses fatos têm sido chamados, por diversos autores, de *fatos fundamentais da multiplicação*.

Saber a tabuada de cor, "na ponta da língua", era uma questão essencial para alunos e professores do antigo primário. Não se colocava em dúvida a necessidade desta mecanização. A partir da segunda metade do século XX, surgem iniciativas para organizar as mudanças que se tornam importantes na prática do professor. Essas mudanças se intensificam a partir dos anos 1970.

Uma das críticas em relação ao ensino dito tradicional recaiu sobre a mecanização da tabuada. Alguns professores, apoiados em teorias pedagógicas, aboliram a memorização da mesma. A professora ou professor que obrigasse seus alunos a decorar a tabuada era, muitas vezes, considerado "antiquado", "retrógrado".

O argumento dos renovadores, contrário à memorização, era basicamente este: "Não se deve obrigar o aluno a decorar a tabuada; deve-se, isto sim, criar condições para que ele a compreenda."

Alguns professores rebatiam esta afirmação alegando que, sem saber a tabuada de cor, um aluno não poderia realizar multiplicações e divisões. A cada momento, na realização de cálculos e na resolução de problemas, ele "engasgaria" por não saber a tabuada de cor. A necessidade da memorização justifica-se. Não é à toa que os fatos fundamentais têm este nome. A fixação dos mesmos é importante para que o aluno compreenda e domine algumas técnicas de cálculo.

É importante memorizar a tabuada? Os anos se passaram, e essa discussão ainda permanece entre nós. É importante discutir com os alunos a necessidade da memorização da tabuada. Eles devem saber que ela é necessária para que possamos apresentar um bom desempenho em situações mais complexas, que surgem na exploração de novas ideias matemáticas. Em conteúdos como frações, múltiplos, divisores, a multiplicação aparecerá com frequência. Se o aluno não tiver fixado os fatos fundamentais, a cada momento ele precisará de um tempo para recorrer a outros recursos de cálculo, como contar nos dedos, desenhar pauzinhos, desviando sua atenção das novas ideias que estão sendo trabalhadas.

Convém enfatizar que esta memorização deve ser precedida pela compreensão e pela exploração de regularidades. A ênfase do trabalho deve ser posta na construção dos conceitos, e a preocupação com a memorização não deve ser obsessiva e exagerada, pois, explorando a tabuada de várias formas, o aluno com essa prática memoriza as relações fundamentais das tabuadas.

Trabalhando com materiais variados, tais como papel quadriculado, grãos, palitos, Material Dourado e explorando jogos e situações diversas, os alunos poderão, aos poucos, construir e registrar os fatos fundamentais que compõem a tabuada. Essas atividades contribuem para o processo de memorização da tabuada. Se um aluno, em algum momento, não se lembrar, por exemplo, de quanto é 9×7, é importante que ele tenha a chance de pensar e descobrir por si próprio. Por exemplo, ele pode pensar assim:

$10 \times 7 = 70$ e $70 - 7 = 63$; logo, $9 \times 7 = 63$

Isso mostra que o aluno manipula bem os conceitos das operações, ele compreende o que faz e aonde quer chegar.

Há autores de livros didáticos que trabalham a tabuada da multiplicação em casos separados. Exploram inicialmente a tabuada do 2, 4 e 8 com a ideia de dobrar, trabalham a tabuada de 3 com a de 9, pois nesse caso a operação envolvida nas duas é triplicar. Partem da tabuada do 10, que tem um padrão mais simples (acrescentar um zero) e, usando a ideia de metade, chega-se à tabuada do 5. Relacionando as tabuadas do 2 e a do 3 e usando propriedades, constrói-se a tabuada do 6. Por fim, trabalha-se a tabuada do 7 separadamente.

Essa é uma forma de conduzir o processo, mas não é a única. O mais importante é criar condições e encaminhamentos lógicos que facilitem esse processo. A ideia que será apresentada nesta aula para a construção das tabuadas (fatos fundamentais) faz uso de tabelas, de alguns fatos fundamentais iniciais e de propriedades.

Nesta aula, vamos investigar as propriedades da multiplicação e da divisão, vamos observar regularidades, ver exemplos e contraexemplos e só então formalizaremos as propriedades observadas.

A ORDEM DOS FATORES ALTERA O PRODUTO?

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

1.
a) Complete a tabela a seguir efetuando as operações de multiplicação.

a	**b**	**a×b**	**b×a**
11	15		
20	31		
18	10		
202	51		

b) O que você pode observar de regularidade entre os resultados das 3ª e 4ª colunas?

c) Que conjectura você faria sobre essa observação?

RESPOSTAS COMENTADAS

1.
a)

a	***b***	***a×b***	***b×a***
11	*15*	*11×15 = 165*	*15×11 = 165*
20	*31*	*20×31 = 620*	*31×20 = 620*
18	*10*	*18×10 = 180*	*10×18 = 180*
202	*51*	*202×51 = 10.302*	*51×202 = 10.302*

b) Os resultados são iguais.

c) Usando a operação de multiplicação, mesmo trocando a ordem dos fatores, os resultados serão sempre iguais para quaisquer números naturais.

Nas Aulas 14 e 17, falamos da propriedade comutativa. Observamos que a adição é comutativa e que a subtração não é comutativa. Agora veremos essa propriedade em relação à multiplicação e à divisão.

Uma maneira de visualizar que a multiplicação é comutativa pode ser feita utilizando um importante significado dessa operação, que é a organização retangular. Para isso, pegaremos 24 quadradinhos e os organizaremos em retângulos. Veja:

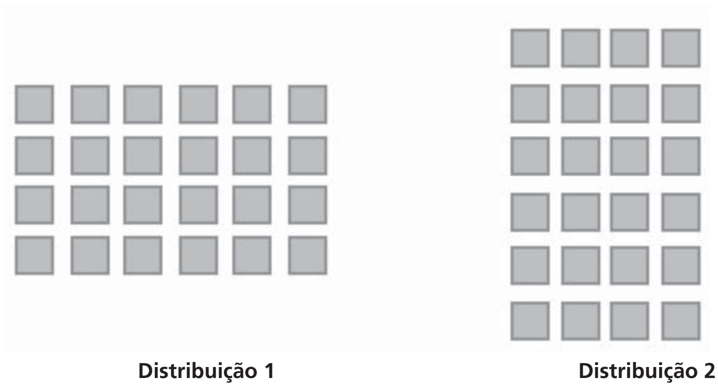


Figura 19.1: Propriedade comutativa da multiplicação.

Na distribuição 1, temos os 24 quadradinhos dispostos em 4 linhas e 6 colunas; já na distribuição 2 eles estão dispostos em 4 colunas e 6 linhas, logo, o total de quadradinhos é 24, resultado de 4×6 ou 6×4.

Isso nos permite compreender que a multiplicação é comutativa, isto é, *a ordem dos fatores não altera o produto*.

!

A multiplicação é comutativa, ou seja, para quaisquer dois números naturais a e b, temos:

$$a \times b = b \times a.$$

E na divisão? O que ocorre?

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

2. Pense nos seguintes problemas:
a) Imagine que você tenha 8 reais para dividir igualmente entre 4 pessoas. Quanto receberá cada pessoa?

b) Imagine que você tenha 4 reais para dividir igualmente entre 8 pessoas. Quanto receberá cada pessoa?

Resolva cada problema e procure formular uma generalização sobre a divisão.

RESPOSTAS COMENTADAS

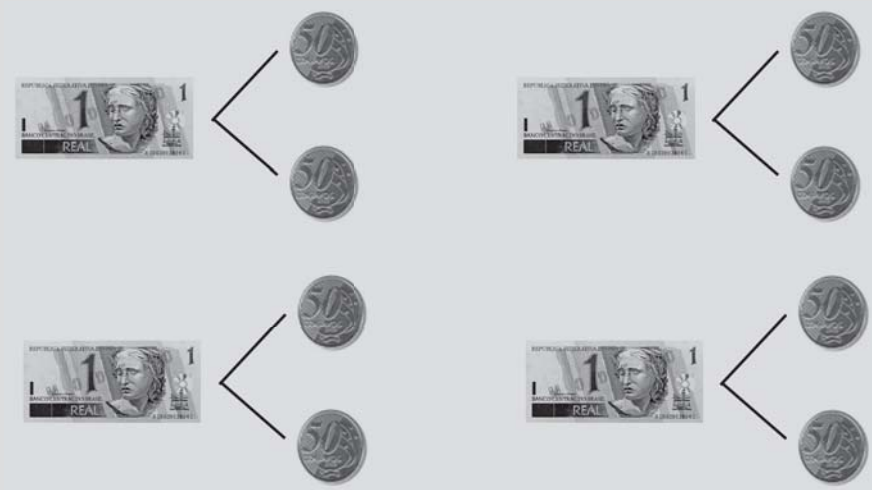
No problema 1, você tem 8 reais para dividir igualmente entre 4 pessoas.

Distribuindo 1 real para cada pessoa, teremos ao final dois reais para cada uma.

Expressando matematicamente, temos: $8 \div 4 = 2$

E se invertermos a ordem como no problema 2, isto é, 4 reais para dividir entre 8 pessoas, quanto receberá cada uma?

Se dermos 1 real para cada pessoa, 4 pessoas ficarão sem receber. Nesse caso, precisamos trocar as notas por moedas. Trocaremos cada nota de 1 real por 2 moedas de 50 centavos.



Temos então agora 8 moedas de 50 centavos para dividir por 8 pessoas. Cada pessoa receberá 50 centavos, que escrevemos 0,50.
A representação matemática para essa situação é $4 \div 8 = 0{,}50$ que não é um número natural.

Você percebeu que $8 \div 4$ é diferente de $4 \div 8$. Com esse exemplo, podemos concluir que a operação divisão não possui a propriedade comutativa.

E A ASSOCIATIVIDADE?

Uma maneira de visualizarmos essa propriedade é fazendo uma analogia à organização retangular, só que utilizando cubos; poderíamos chamar de "organização em blocos". Para isso tomaremos 24 cubinhos. Essa atividade poderá ser feita com os cubinhos do Material Dourado.

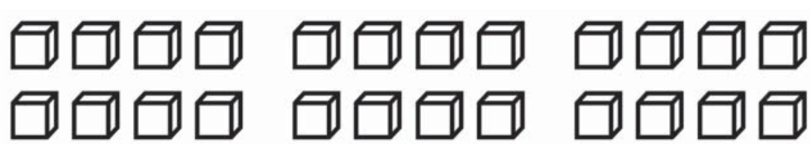


Figura 19.2: Cubinhos.

Veja como podemos organizá-los em pilhas:

Caso A: Organizamos 2 andares, com 12 cubinhos em cada andar. Esses 12 cubinhos estão dispostos em 3 linhas e 4 colunas. Matematicamente, podemos expressar os 24 cubinhos como: $2 \times 12 = 2 \times (3 \times 4)$.

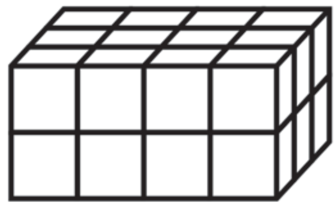


Figura 19.3: Cubinhos organizados em blocos.

Caso B: Organizamos 4 andares, com 6 cubinhos em cada andar. Esses 6 cubinhos estão dispostos em 2 linhas e 3 colunas. Matematicamente, podemos expressar os 24 cubinhos como: $4 \times 6 = 6 \times 4 = (2 \times 3) \times 4$.

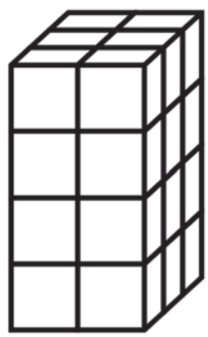


Figura 19.4: Outra organização dos cubinhos em bloco.

O número 24, de acordo com essas pilhas, pode ser expresso como $2 \times (3 \times 4)$, ou $(2 \times 3) \times 4$. Essa propriedade da multiplicação é que permite iniciar o cálculo, associando em qualquer ordem.

!

A multiplicação é associativa, ou seja, para quaisquer três números naturais a, b e c, temos:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

3. Já vimos que as operações adição e multiplicação possuem a propriedade associativa. Será que vale o mesmo para a divisão? Para isso, precisamos verificar se a igualdade $(a \div b) \div c = a \div (b \div c)$ é verdadeira para três números naturais quaisquer.
Investigue a respeito, dando valores para a, b e c, e registre sua conclusão.

RESPOSTA COMENTADA

Considere os números 60, 10 e 2:

$(60 \div 10) \div 2 = 6 \div 2 = 3$
$60 \div (10 \div 2) = 60 \div 5 = 12$

Ao associar em ordens diferentes, não obtemos o mesmo resultado, pois $(60 \div 10) \div 2 = 3$ *é diferente de* $60 \div (10 \div 2) = 12$. *Isso nos permite concluir que a operação divisão não é associativa.*
Pode até acontecer de, na primeira escolha que seja feita para associar, o resultado não ser um número natural. Veja o exemplo:

$8 \div (2 \div 4) = 8 \div 0{,}5 = 16$
$(8 \div 2) \div 4 = 4 \div 4 = 1$

Também pode acontecer que em uma situação a propriedade se verifique. Veja o exemplo:

$(8 \div 4) \div 1 = 2 \div 1 = 2$ *e* $8 \div (4 \div 1) = 8 \div 4 = 2.$

Mas mesmo que nesse caso ela se verifique, não é uma propriedade, pois não vale para quaisquer três números naturais.

O QUE É DISTRIBUIR?

A propriedade distributiva é muito utilizada para o cálculo mental. Mas como aplicamos essa propriedade?

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

4. Efetue os cálculos:
I. $(3 + 4) \times 6$.
II. $3\times 6 + 4\times 6$.

a) Quais os resultados?

b) Os dois resultados expressam a multiplicação de qual número por 6?

c)Investigue e explique por que os resultados dos dois itens são iguais.

RESPOSTAS COMENTADAS

a) Os resultados das expressões I e II são iguais a 42.

b) 7×6.

c) Usando a ideia de somas repetidas, temos:

$$(3 + 4) \times 6 = 7\times 6 = \; = \underbrace{6 + 6 + 6}_{3\ vezes} + \underbrace{6 + 6 + 6 + 6}_{4\ vezes} = 3\times 6 + 4\times 6$$

Essa explicação também pode ser feita em linguagem corrente.

É comum um raciocínio semelhante a esse quando estamos fazendo "conta de cabeça" (cálculo mental). Por exemplo, se vamos fazer 21×7, uma decomposição conveniente é $(20 + 1) \times 7$. Aí é possível fazermos a conta $20\times 7 = 140$ e $1\times 7 = 7$ de cabeça e somarmos os resultados encontrando 147.
Só podemos fazer esse raciocínio porque usamos o fato de que:
$(20 + 1) \times 7 = 20\times 7 = 140 + 1\times 7 = 7$.
Podemos decompor o 21, na multiplicação de 21 por 7 de diversas maneiras: $21 = 19 + 2$, $18 + 3$, $17 = 4$, e assim por diante. De todas as formas, se fizermos o mesmo raciocínio, o resultado será o mesmo, entretanto são decomposições que não auxiliariam no cálculo mental.

!

A multiplicação é distributiva em relação à adição, ou seja, para quaisquer três números naturais a, b e c, temos:

$$(a + b) \times c = a \times b + a \times c.$$

A propriedade distributiva é utilizada quando se trabalha em multiplicações do tipo 32×5, 123×5, 23×13, pois nesses casos decompomos os fatores que serão multiplicados em unidades, dezenas, centenas. Tal fato é bem entendido quando se trabalha com o Material Dourado. Veja o exemplo:

$32 \times 3 = (30 + 2) \times 3$

O número 32 é formado por 3 dezenas e 2 unidades, que no Material Dourado são representados, respectivamente, por 3 barras e 2 cubinhos. Quando multiplicamos esse número por três, as 3 barras se transformam em 9 e os 2 cubinhos se transformam em 6, portanto, obtemos um total de 9 barras e 6 cubinhos, que representa o número 96.

Logo, as expressões $(30 + 2) \times 3$ e $(30 \times 3) + (2 \times 3)$ possuem os mesmos resultados. Essa propriedade, que permite distribuir a multiplicação em duas ou mais somas e que pode ser feita com qualquer número natural, é chamada de *propriedade distributiva*.

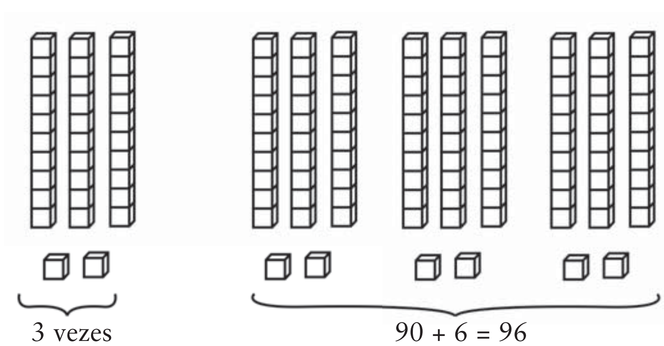


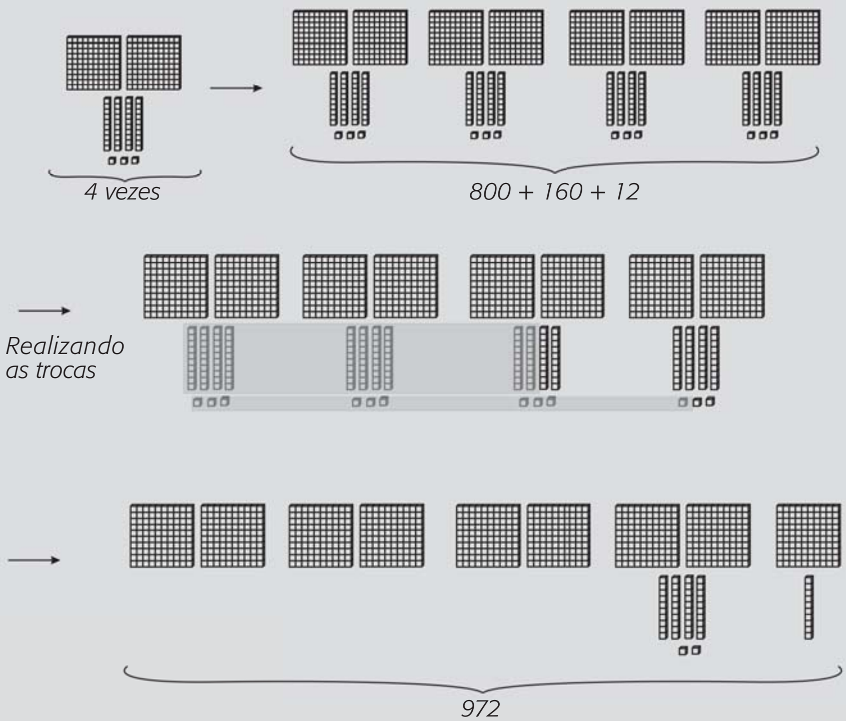
Figura 19.5: Multiplicação com Material Dourado.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

5. Faça a multiplicação 243×4 usando cubinhos, placas e barras.

RESPOSTA COMENTADA

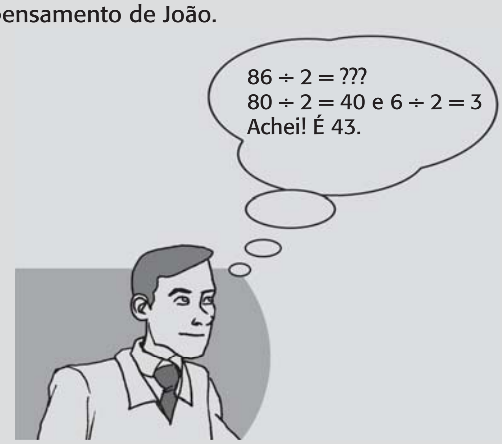


Será que poderemos fazer o mesmo com a divisão?

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

6. Veja o pensamento de João.

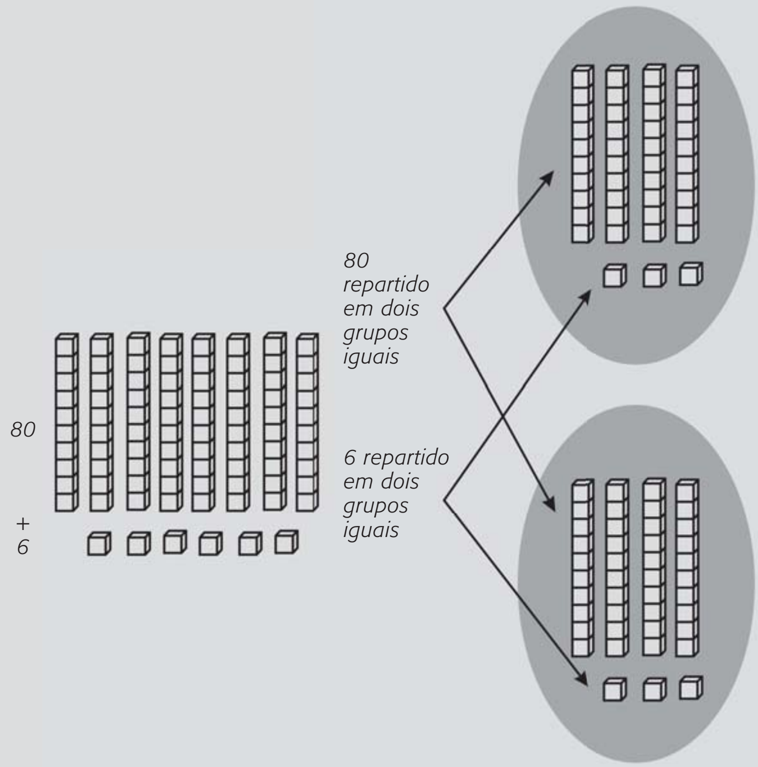


O que você acha do pensamento de João, é correto? Use o Material Dourado para justificar.

RESPOSTA COMENTADA

Dividir 86 por dois é o mesmo que dividir 80 por 2, depois dividir 6 por 2 e ao final somar os resultados?

86 são 8 dezenas (8 barras) e 6 unidades (6 cubinhos) que na divisão por 2 serão transformados em 4 barras e 3 cubinhos. Observe a seguir com o Material Dourado.



Compare o processo com o Material Dourado com o processo feito quando registramos a conta.

$86 \div 2 = (80 + 6) \div 2 = (80 \div 2) + (6 \div 2) = 40 + 3 = 43$

!

Lembrando o dividendo
Representamos a divisão de a por b, onde b não é zero, assim:

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

O número ‘a’ chama-se dividendo, ‘b’ é o divisor, ‘q’ é o quociente e ‘r’ é o resto.

!

A divisão é distributiva em relação à adição se quando decompomos o dividendo cada parcela da adição é divisível pelo divisor, ou seja, para quaisquer três números naturais a, b e c, com $c \neq 0$, e se a e b são divisíveis por c, temos:
$(a + b) \div c = a \div b + a \div c$.

1. É importante que a decomposição do dividendo seja divisível pelo divisor. A propriedade continua válida, entretanto o resultado de cada divisão não é um número natural. Veja:

$62 \div 2 = (39 + 23) \div 2 = 39 \div 2 + 23 \div 2 = 19{,}5 + 11{,}5 = 31$

2. Podemos aplicar a propriedade distributiva decompondo o dividendo em mais de duas parcelas. Por exemplo:

$564 \div 4 = (400 + 160 + 4) \div 4 = 400 \div 4 + 160 \div 4 + 4 \div 4 = 100 + 40 + 1 = 141$.

MULTIPLICANDO POR...

Multiplicando por zero

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

7. Complete a tabela:

x	**0**
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

O que você pode concluir?

RESPOSTA COMENTADA

Entendendo a multiplicação como soma de parcelas repetidas, percebemos que, multiplicando por zero, estaremos sempre somando zero e que portanto o resultado é zero. Observe a tabela:

x	**0**
1	1x0 = 0
2	2x0 = 0 + 0 = 0
3	3x0 = 0 + 0 + 0 = 0
4	4x0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0
5	5x0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0
6	6x0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0
7	7x0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0
8	8x0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0
9	9x0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0

Assim, podemos concluir que, para qualquer número natural a, temos que $a \times 0 = 0$, ou seja, qualquer número natural multiplicado por zero é zero.

Multiplicando por um

Atende aos Objetivos 1 e 2

ATIVIDADE

8. Complete a tabela

x	**1**
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Investigue o resultado e registre.

RESPOSTA COMENTADA

x	**1**
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 1 = 1 + 1 = 2$
3	$3 \times 1 = 1 + 1 + 1 = 3$
4	$4 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$
5	$5 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$
6	$6 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$
7	$7 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$
8	$8 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$
9	$9 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9$

Os resultados vão aumentando de um em um.
Qualquer número multiplicado por 1 tem como resultado ele mesmo.

Qualquer número natural multiplicado por 1 dá como resultado ele mesmo, ou seja, para qualquer número natural a, temos que

$$a \times 1 = a.$$

Por este motivo, o número 1 é chamado o elemento neutro da operação multiplicação.

Multiplicando por um, dois, três..., nove.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

9. A tabela a seguir tem os resultados das multiplicações pelos números de 1 a 9.
Complete as demais multiplicações sem utilizar a tabuada, mas utilizando as propriedades comutativa e distributiva.

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3			9				21		
4			12				28		
5			15				35		
6			18				42		
7			21				49		
8			24				56		
9			27				63		

Depois de completar investigue os resultados e registre suas observações.

RESPOSTA COMENTADA

Existem muitas maneiras de preencher a tabela. Aqui apresentamos uma das muitas estratégias possíveis.

Vamos primeiro usar a propriedade comutativa: a ordem dos fatores não altera o produto. Assim, teremos:

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12				28		
5	5	10	15				35		
6	6	12	18				42		
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24				56		
9	9	18	27				63		

Agora vamos usar a propriedade distributiva. Pela propriedade comutativa, completamos também a coluna do 4.

$4 = 2 + 2$ (podemos usar também $1 + 3$).

Assim:

$4\times4 = (2 + 2)\times4 = 2\times4 + 2\times4 = 8 + 8 = 16;$

$4\times5 = (2 + 2)\times5 = 2\times5 + 2\times5 = 10 + 10 = 20;$

$4\times6 = (2 + 2)\times6 = 2\times6 + 2\times6 = 12 + 12 = 24;$

$4\times7 = (2 + 2)\times7 = 2\times7 + 2\times7 = 14 + 14 = 28;$

$4\times8 = (2 + 2)\times8 = 2\times8 + 2\times8 = 16 + 16 = 32;$

$4\times9 = (2 + 2)\times9 = 2\times9 + 2\times9 = 18 + 18 = 36.$

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20			35		
6	6	12	18	24			42		
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32			56		
9	9	18	27	36			63		

Repetindo o mesmo procedimento para o 5, o 6, o 7 e o 8, você acaba de completar a tabela.

×	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

São muitas as observações que você pode fazer a partir da observação dos resultados. Veja algumas:
A linha e a coluna do 2 vão aumentando de 2 em 2, a do 3, de 3 em 3, e assim sucessivamente.
A linha do 5 é igual à linha do 2 mais a do 3.
A linha do 6 é o dobro da linha do 3. O mesmo ocorre com a do 2 e a do 4, a do 4 e a do 8.

Essa atividade, além de trabalhar as localizações dos dados nas tabelas, ainda proporciona a utilização de propriedades. Com isso, a tabuada vai sendo construída com significado.

Mais propriedades trabalhando a ideia de proporcionalidade...

Observe com bastante atenção a tabela a seguir.

Tabela 19.1: Investigando o quociente 3

dividendo	divisor	quociente
6	2	3
12	4	3
18	6	3
24	8	3
30	10	3
36	12	3
42	14	3

Investigando, podemos observar que a primeira linha correspondente à divisão exata $6 \div 2 = 3$. Da primeira para a segunda linha, o dividendo e o divisor foram ambos multiplicados por 2; o quociente permaneceu inalterado. Da primeira para a terceira linha, o dividendo e o divisor foram multiplicados por 3 e o quociente é o mesmo, e assim por diante. Cada divisão foi gerada a partir da primeira, multiplicando-se o dividendo e o divisor por um mesmo número. Em todos os cálculos, o quociente não se alterou.

Podemos registrar essa propriedade buscando uma generalização.

Se a e b são dois números naturais, $b \neq 0$, tais que divididos resultam em c, $a \div b = c$, então, para qualquer número natural m diferente de zero, temos $(ma) \div (mb) = c$.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

10. Observe a tabela. Complete-a e generalize a regularidade encontrada.

dividendo	divisor	quociente
6	2	
12	2	
18	2	
24	2	
30	2	
36	2	
42	2	

RESPOSTA COMENTADA

Completando a tabela, temos:

dividendo	*divisor*	*quociente*
6	*2*	*3*
12	*2*	*6*
18	*2*	*9*
24	*2*	*12*
30	*2*	*15*
36	*2*	*18*
42	*2*	*21*

Em todas as divisões, o divisor é constante. Da primeira divisão para as seguintes, o dividendo foi multiplicado por 2, 3, 4 até o 7. Observe que o quociente correspondente ficou, respectivamente, multiplicado por 2, 3, 4, 5, 6 e 7.
Podemos generalizar esse fato: se a e b são dois números naturais, com $b \neq 0$*, tais que divididos resultam em c,* $a \div b = c$*, então, para qualquer número natural m, temos* $(ma) \div b = mc$.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 2 e 3

11. Usando a tabuada de multiplicação até o nove, complete a tabela a seguir usando a propriedade distributiva, conforme os exemplos. Registre suas observações.

×	11
2	2× (9 + 2) = 2×9 + 2×2 = 18 + 4 = 22
3	3× (8 + 3) = 3×8 + 3×3 =
4	
5	
6	6× (5 + 6) = 6×5 + 6×6 = 30 + 36 = 66
7	
8	
9	

RESPOSTA COMENTADA

×	*11*
2	*2× (9 + 2) = 2×9 + 2×2 = 18 + 4 = 22*
3	*3× (8 + 3) = 3×8 + 3×3 = 24 +9 = 33*
4	*4× (7 + 4) = 4×7 + 4×4 = 28 + 16 = 44*
5	*5× (6 + 5) = 5×6 + 5×5 = 30 + 25 = 55*
6	*6× (5 + 6) = 6×5 + 6×6 = 30 + 36 = 66*
7	*7× (4 + 7) = 7×4 + 7×7 = 28 + 49 = 77*
8	*8× (3 + 8) = 8×3 + 8×8 = 24 + 64 = 88*
9	*9× (2 + 9) = 9×2 + 9×9 = 18 + 81 = 99*

Observe que, na multiplicação do 1 ao 9 por 11, os resultados são formados por dois números iguais ao primeiro fator da multiplicação.
Outra observação é que, na decomposição escolhida, sempre a segunda parcela é a multiplicação do primeiro fator por ele mesmo.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 3

12. Complete a tabela a seguir, observando o padrão.

×	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	4							
20	40							
200	400							

Explique por que de uma coluna para outra estamos apenas acrescentando o zero.

RESPOSTA COMENTADA

×	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
2	*4*	*6*	*8*	*10*	*12*	*14*	*16*	*18*
20	*40*	*60*	*80*	*100*	*120*	*140*	*160*	*180*
200	*400*	*600*	*800*	*1.000*	*1.200*	*1.400*	*1.600*	*1.800*

Repare que, se sabemos o resultado de 2×a, para encontrar o resultado de 20×a podemos escrever o 20 como 10×2 e usamos a propriedade associativa. Veja:

$20 \times a = (10 \times 2) \times a = 10 \times (2 \times a)$.
Como para realizar a multiplicação por 10 basta acrescentar um zero à direita, acrescentando um zero à direita ao resultado de $2 \times a$.
O mesmo raciocínio justifica a multiplicação por 200, já que $200 = 100 \times 2$, só que nesse caso acrescentamos dois zeros.

CONCLUSÃO

Como você observou nas atividades apresentadas e realizadas, é importante que o significado das operações seja construído por você, pois o uso dessas propriedades facilita tanto na compreensão da tabuada quanto no desenvolvimento do cálculo mental. Cada um faz conta de cabeça de um jeito, mas esse "jeito" está sempre relacionado com as propriedades.

Existem pessoas que ao dividir por 5, por exemplo, não armam a conta. Elas multiplicam por 2 e depois dividem por 10. Por exemplo, $85 \div 5$, fazem mentalmente $85 \times 2 = 170$ e depois $170 \div 10 = 17$ (basta andar uma casa decimal). Encontrar mecanismos que facilitem o cálculo deve ser o foco do trabalho do professor para provocar nos alunos a descoberta e o desenvolvimento de suas próprias estratégias de cálculo.

ATIVIDADE FINAL

Atende ao Objetivo 1

A propriedade distributiva também é válida com a multiplicação em relação à subtração. Observe:

$92 \times 3 = (100 - 8) \times 3 = (100 \times 3) - (8 \times 3) = 300 - 24 = 276$.

Com base em tal propriedade e usando as tabuadas de 4, 10 e 100, veja como calculamos 87×4, depois calcule 45×5, usando as tabuadas de 5 e de 50.

Generalize a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração.

Escreva uma maneira de fazer 98×8 e 11×48 pelo cálculo mental.

RESPOSTAS COMENTADAS

a) $87 = 100 - 13$*; assim,*
$87\times4 = (100 - 13)\times4 = 100\times4 - 13\times4 = 400 - 52 = 348.$

$45 = 50 - 5$*; assim,*
$45\times5 = (50 - 5)\times5 = 50\times5 - 5\times5 = 250 - 225 = 225.$

b) A multiplicação é distributiva em relação à subtração, ou seja, para quaisquer três números naturais a, b e c, temos:
$(a - b)\times c = a\times b - a\times c.$

Vamos mostrar duas maneiras de fazer cada conta mentalmente.
$98\times8 = (100 - 2)\times8 = 100\times8 - 2\times8 = 800 - 16 = 784$ *ou,*
$98\times8 = 98\times(10 - 2) = 98\times10 - 98\times2 = 980 - 196 = 784.$

$11\times48 = (10 + 1)48 = 480 + 48 = 528$ *ou,*
$11\times48 = 11\times(50 - 2) = 11\times50 - 11\times2 = 550 - 22 = 528.$

RESUMO

Quando exploramos as propriedades da adição e da subtração, buscamos mostrar atividades nas quais, a partir da exploração, você consiga formular propriedades e regularidades. Atividades de natureza investigativa para explorar propriedades da multiplicação e da divisão, além de provocar no aluno um processo de descoberta, fornecem estratégias para que o mesmo desenvolva o cálculo mental.
Além de explorar diferentes situações-problema e regularidades, trouxemos nesta aula o Material Dourado, que pode ser utilizado pelo professor para o trabalho com as propriedades comutativa, associativa e distributiva, buscando ser mais um aliado na construção de significados das operações e propriedades.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, vamos discutir o algoritmo (conta armada) da multiplicação. Não perca!

AULA 20

Algoritmos da multiplicação

Metas da aula

Apresentar os algoritmos da multiplicação mais encontrados nos livros didáticos e analisar suas possibilidades de ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. reconhecer a importância de o aluno criar o seu próprio algoritmo;
2. identificar as diferentes estratégias de construção do algoritmo da multiplicação;
3. escolher os algoritmos mais adequados para trabalhar com alunos de cada ano do ensino fundamental;
4. planejar, orientar e avaliar situações de ensino-aprendizagem relacionadas aos diversos algoritmos da multiplicação.

Pré-requisito

Para acompanhar esta aula, você deverá rever os conceitos e as propriedades da multiplicação que foram trabalhados, respectivamente, nas Aulas 18 e 19 deste módulo.

INTRODUÇÃO

Nas duas aulas anteriores tivemos a oportunidade de apresentar o conceito da operação de multiplicação, assim como a construção das suas principais propriedades. Dando sequência, nesta aula, vamos discutir as questões envolvidas no ensino dos diversos algoritmos da multiplicação encontrados nos livros dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Apresentamos tais algoritmos e propomos a reflexão sobre sua adequação no processo de ensino e aprendizagem da multiplicação; além disso, procuramos criar condições para que você construa seus próprios algoritmos.

Antes de apresentar algum **ALGORITMO**, o professor deve incentivar seus alunos, por meio de brincadeiras e jogos, a construir seus próprios algoritmos e depois a fazer o registro das etapas percorridas para chegar ao resultado em questão.

O **ALGORITMO** é o conjunto de regras e técnicas utilizadas para fazer cálculos. São exemplos dessas regras: a maneira como a conta deve ser "armada"; a decisão do "lado" por onde devemos iniciar os cálculos; a utilização do "vai um" e do "pede um emprestado" etc.

O professor deve acreditar que o aluno pode criar seu próprio caminho para encontrar os resultados das multiplicações e que, além de encontrar a solução, pode registrar como a conseguiu. Isso o ajudará a desenvolver sua capacidade de se comunicar matematicamente.

É importante lembrar que, para a construção do algoritmo, o aluno deve seguir um caminho no qual tenha experiências diversas, tais como:

- construção de tabelas em forma de adições sucessivas;
- compreensão das propriedades distributiva, associativa e comutativa;
- conhecimento das propriedades da multiplicação (um número multiplicado por zero é sempre zero; qualquer número multiplicado por um tem como resultado ele mesmo);
- para multiplicar um número por dez, cem ou mil, basta acrescentar um, dois ou três zeros a ele.

Os algoritmos apresentados aqui têm o objetivo de fazer o aluno perceber que existem vários processos possíveis para chegar ao resultado.

CONSTRUINDO O SEU PRÓPRIO ALGORITMO

Um aspecto relevante neste curso é o de que todo o ensino da Matemática deve ter como objetivo explícito preparar o aluno para lidar com atividades práticas que envolvam aspectos quantitativos da realidade. Durante a aprendizagem de um algoritmo, queremos que o aluno perceba que, em Matemática, um problema pode ser resolvido de várias formas e que ele se sinta seguro para propor suas soluções pessoais e aprenda a comunicar-se matematicamente.

ORIENTAÇÕES DIDÁTICAS

Na aula anterior, foram propostas algumas atividades que exploraram a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e à subtração, o que é fundamental para a compreensão de qualquer algoritmo existente ou de qualquer um que venha a ser criado pelo aluno.

Nessa etapa, vamos reforçar algumas dessas atividades e discutir o que se espera do aluno antes da apresentação formal de algum dos algoritmos que existem para se efetuar a multiplicação. Como em outros momentos, aqui, é muito importante a participação do aluno, seja individualmente ou em grupos.

Nos anos iniciais, é importante explorar com os alunos problemas que envolvam as diferentes ideias do conceito de multiplicação, ou seja, configuração retangular, proporcionalidade, combinação e comparação. Para isso, já vimos na aula anterior que situações escolares podem ser exploradas.

A forma mais usual é considerar a multiplicação como a soma de parcelas iguais (raciocínio aditivo), porém essa não é a única forma. Por meio da exploração de outras ideias, o aluno constrói o raciocínio multiplicativo e pode propor diferentes caminhos para a sua solução.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

1. Considere o problema: A estante da nossa sala de aula tem 6 prateleiras. Em cada prateleira cabem 4 livros. Quantos livros cabem na estante?

a) Elabore duas soluções diferentes para este problema.

b) Proponha-o a seus colegas de curso e compare as soluções que surgirem com as suas.

c) Que recursos foram utilizados em cada solução?

RESPOSTA COMENTADA

a) Uma possível solução seria:

Prateleiras	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Livros	*4*	*8*	*12*	*16*	*20*	*24*

b) Uma outra solução:

4 + 4 +4 + 4 + 4 + 4 = 24

Analisando as soluções dos colegas, você poderá encontrar, entre outras, 6 x 4 = 24. Ao analisar soluções, é importante que você observe a variedade de recursos que podem ser utilizados. Além das operações, podem ser usadas tabelas como a que desenhamos aqui. Algumas pessoas podem ainda desenhar a estante com suas prateleiras e livros ou recorrer a símbolos como pauzinhos, para representar cada livro ou prateleira. Esses recursos são representações da situação-problema e favorecem o encaminhamento das soluções.

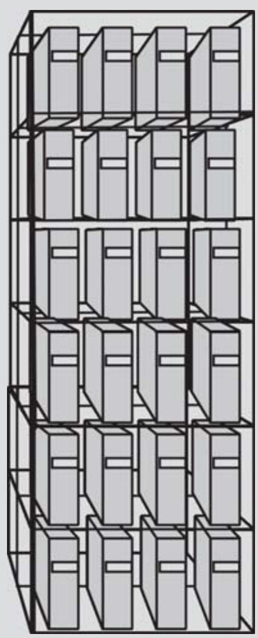


Figura 20.1: Situação-problema 1.

Depois de explorar as diferentes soluções na Atividade 1, utilizando as ideias que envolvem a multiplicação, o professor poderá apresentar problemas que ampliem o universo numérico dos alunos, ou seja, com números maiores em que se usem, além das unidades, dezenas, centenas etc.

Por exemplo, o problema anterior poderia se transformar no que apresentamos na Atividade 2.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 2 e 3

2. Pense em soluções para o problema a seguir e, em seguida, faça o que é pedido nos itens:
A estante da nossa sala de aula tem 20 prateleiras. Em cada prateleira cabem 15 livros. Quantos livros cabem na estante?

a) Empregue as soluções apresentadas na Resposta Comentada da Atividade 1 para os valores numéricos em questão.

b) Na sua opinião, quais dessas soluções tornaram-se demasiadamente demoradas?

c) Consultando as orientações para o ensino de Matemática oferecidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais de 1ª a 4ª série, decida a partir de que ano do Ensino Fundamental esse problema pode ser abordado.

RESPOSTA COMENTADA

a) Construindo a tabela, temos:

Prateleiras	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Livros	*15*	*30*	*45*	*60*	*75*	*90*	*105*	*120*	*135*	*150*

Prateleiras	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
Livros	*165*	*180*	*195*	*210*	*225*	*240*	*255*	*270*	*285*	*300*

Já a solução por meio da adição de parcelas repetidas pode ser escrita da seguinte maneira:

$$15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 +$$
$$15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 = 300$$

E simplificada pela multiplicação 20 x 15 = 300.
b) A construção da tabela e a adição de parcelas repetidas são soluções que, nesse contexto numérico, requerem mais tempo. É um momento oportuno para que o professor encoraje seus alunos a recorrer à multiplicação. Entretanto, deve-se respeitar as soluções que eles apresentarem e refletir coletivamente, comparando-as.
c) Frequentemente esse contexto numérico pode ser trabalhado no 4º ano do Ensino Fundamental, podendo ser antecipado para o 3º ano em função da compreensão dos alunos sobre o sistema de numeração decimal.

O papel quadriculado (1cm x 1cm) é um material bastante apropriado para o trabalho com multiplicação, e o problema da Atividade 1 inicialmente poderia ser resolvido apenas com os alunos contando os quadrados de um em um (contagem), ou com adição de parcelas iguais (raciocínio aditivo) ou ainda multiplicando 6 x 4.

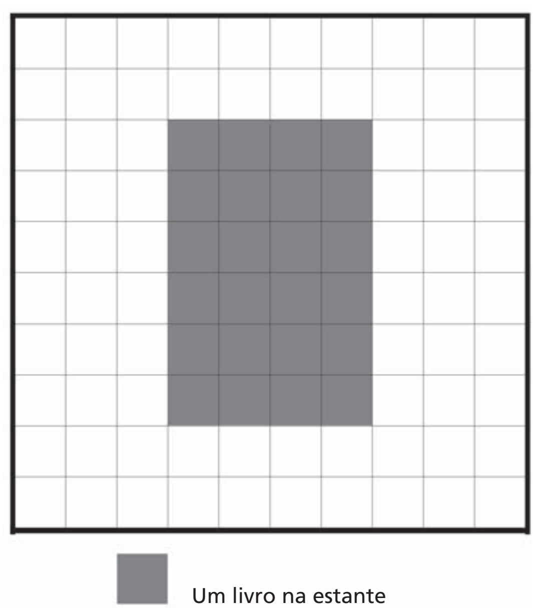


Figura 20.2: Situação-problema 2.

Os problemas terão um grau de complexidade maior ou menor, dependendo do ano em que o professor estiver trabalhando; cabe a ele propor aquele que desperte o maior interesse da turma.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 4

3. Elabore um problema multiplicativo que possa despertar o interesse dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e favoreça a criação de diferentes soluções.

RESPOSTA COMENTADA

Estes são exemplos possíveis para serem desenvolvidos por meio de ações que motivem os alunos a pensar e criar:

• Se um trabalhador ganhasse 30 reais por dia, depois de 20 dias quanto ele teria recebido?
• A cantina da escola comprou 14 caixas de guaraná com 24 garrafas em cada caixa. Quantas garrafas a cantina comprou?
• Em uma sala de cinema existem 11 filas de poltronas e em cada fila existem 22 poltronas. Quantas pessoas podem assistir a um filme sentadas?

Esses ou outros problemas devem ser propostos para os alunos em forma de ações, simulações de um contexto ou de brincadeira. Porém, qualquer atividade deve vir acompanhada de pedido para apresentar solução por meio de registro. Estimulando o registro individual dos alunos, o professor verificará que eles apresentarão diferentes soluções, em que poderão ou não chegar ao resultado correto do problema proposto.

A importância dessa atividade crescerá à medida que o professor conseguir tirar dela indícios de como o aluno está pensando, para, por intervenções adequadas, poder ajudá-lo na construção do seu conhecimento. Além disso, o uso da linguagem e das simbologias associadas a um conceito favorece a sua construção por parte dos alunos. O registro não só é um meio de comunicação entre professor e aluno como, também, é um elemento fundamental no processo de conceitualização. Por exemplo, para registrar uma situação, o aluno observa mais detalhadamente suas propriedades, e isso o leva à construção dos conceitos presentes nela.

As descobertas e os vários registros dos alunos devem ser sempre valorizados e estimulados, pois são eles que lhes dão autoconfiança na busca de soluções para os problemas com que irão se deparar, na escola e na vida. Entre os vários registros, destacamos o registro matemático das situações. Sempre que possível, o professor deve criar condições para que seus alunos utilizem a linguagem matemática e a comparem com outras representações. Por ser precisa e concisa, ela também permite que os alunos avancem na compreensão de situações-problema.

O uso excessivo da linguagem matemática desde os anos iniciais do Ensino Fundamental vem sendo apontado como uma das causas do fracasso do ensino dessa disciplina no Brasil. Isso é verdade nos casos em que ela não faz sentido para o aluno e é a única linguagem trabalhada nas aulas. Entretanto, se os seus significados forem sempre negociados com os alunos e se o professor puder, durante as aulas, compará-la com outras formas de registro, ela favorecerá a construção de conceitos matemáticos.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 4

4. Utilizando a situação-problema proposta na Atividade 2, os alunos poderiam explicar ou escrever suas etapas de pensamento de diferentes formas. Descreva duas explicações possíveis e seus registros matemáticos.

COMENTÁRIOS

Como outras questões colocadas anteriormente, esta também é pessoal, portanto não há apenas uma resposta. Você precisa atentar apenas para o fato de a linguagem matemática representar corretamente a explicação. Oferecemos a seguir, três possibilidades:

Primeiro aluno: Primeiro achei que 20 multiplicado por 10 é igual a 200 e que 20 multiplicado por 5 é igual a 100, então somei 200 a 100 e encontrei 300.

Dependendo do ano em que a atividade estiver sendo trabalhada, o professor deverá propor ao aluno que escreva isso utilizando símbolos matemáticos e identificando as propriedades utilizadas.
20 x 15 = 20 x (10 + 5) = 20 x 10 + 20 x 5 = 200 + 100 = 300 (propriedade distributiva)
Segundo aluno: Primeiro achei que 15 multiplicado por 10 é igual a 150, e assim 15 multiplicado por 20 seria o dobro de 150, ou seja, 150 + 150 = 300.
20 x 15 = 2 x 10 x 15 = 2 x (10 x 15) = 2 x 150 = 300 (propriedade associativa)
Terceiro aluno: Primeiro fiz 20 multiplicado por 10, depois 20 multiplicado por 3 e depois 20 multiplicado por 2.
20 x 15 = 20 x (10 + 3 + 2) = 20 x 10 + 20 x 3 + 20 x 2 = 200 + 60 + 40 = 300 (propriedade distributiva)

Observe que as propriedades da multiplicação são usadas em meio às resoluções do problema para, entre outras ações, facilitar cálculos. A preocupação em associar a propriedade ao seu nome, muito presente num modelo de ensino tradicional, tornou-se secundária.

OS ALGORITMOS DA MULTIPLICAÇÃO

Deve-se notar que, após os alunos mostrarem entendimento de que podem existir vários caminhos para alcançar os resultados, está na hora de o professor apresentar outros algoritmos e, se possível, aproveitar, na sua apresentação, as propostas que surgiram nas atividade anteriores.

A seguir, serão apresentados alguns algoritmos para cada um dos cálculos propostos. O algoritmo mais utilizado, por sua rapidez e praticidade, servirá de comparação em todas as resoluções e suas etapas serão explicitadas. A partir da facilidade de calculadoras, não adianta muito que o aluno seja um bom executor de um algoritmo sem compreender o porquê das etapas que executa.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

5. Multiplique o número 345 pelo número 6, utilizando o algoritmo tradicional. Em seguida, explique cada etapa que você cumpriu durante o cálculo. Como os números são organizados? Por que começou a multiplicação pelo algarismo da direita?

RESPOSTA COMENTADA

De acordo com o algoritmo tradicional, teríamos:

$$\begin{array}{r} 3^{2}4^{3}5 \\ \times \quad 6 \\ \hline 2070 \end{array}$$

Ao explicar esse algoritmo, você deve enfatizar que as parcelas são organizadas de modo que unidade fique embaixo de unidade, dezena embaixo de dezena, e assim por diante. Iniciamos os cálculos pela ordem das unidades, que é a menor.

A utilização do quadro valor de lugar (Q. V. L.) nesse momento pode ajudar muito o aluno a entender o que aconteceu no cálculo anterior:

dm	um	c	d	u
		3	4	5
				6
	2	0	7	0

6 x 5 unidades = 30 unidades (30).

6 x 4 dezenas (40) = 24 dezenas (240).

6 x 3 centenas (300) = 18 centenas (1800).

1800 + 240 + 30 = 2070.

Nesse momento, o professor poderia mostrar um cálculo em que a segunda parcela tivesse dois algarismos, tal como 345 x 16. Para esse cálculo, pelo algoritmo tradicional, teríamos:

345
x16
2070
3450
5520

Figura 20.3: Algoritmo 1.

Agora, para explicar o que foi feito, precisamos de duas etapas:

Primeira etapa

dm	um	c	d	u
		3	4	5
			1	6
	2	0	7	0

6 x 5 unidades = 30 unidades (30).

6 x 4 dezenas (40) = 24 dezenas (240).

6 x 3 centenas (300) = 18 centenas (1800).

1800 + 240 + 30 = 2070.

Segunda etapa

dm	um	c	d	u
		3	4	5
			1	6
	2	0	7	0
	3	4	5	0
	5	5	2	0

Cuidado: Esse **1** vale 10 unidades.

10 x 5 unidades = 50 unidades (50).

10 x 4 dezenas (40) = 40 dezenas (400).

10 x 3 centenas (300) = 30 centenas (3000).

3000 + 400 + 50 = 3450.

Uma forma alternativa de fazer esses mesmos cálculos que poderíamos denominar de algoritmo 2 seria decompondo um dos fatores em dezenas e unidades:

345 x 16 = 345 x (10 + 6) =

345 x 10 = 3450

345 x 6 = 2070

345 x 16 = 3450 + 2070 = 5520

Observe que o número 16 foi decomposto em uma dezena mais 6 unidades e que depois utilizou-se a propriedade distributiva da multiplicação.

Figura 20.4: Algoritmo 2.

Perceba que, pelo fato de ser a multiplicação uma operação comutativa, colocamos o maior número em cima, mas poderíamos ter feito o contrário. Mesmo não sendo o mais prático, fazer das duas formas pode ajudar o aluno a entender o algoritmo tradicional.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

6. Faça a multiplicação de 345 por 16, porém coloque o 16 em cima. Em seguida, justifique seus procedimentos de cálculo.

RESPOSTA COMENTADA

Efetuando os cálculos, temos:

```
   16
 x345
   80
  640
 4800
 5520
```

Para justificá-los, precisamos de três etapas.

Primeira etapa

dm	um	c	d	u
			1	6
		3	4	**5**
			8	0

5 x 6 unidades = 30 unidades (30).
5 x 1 dezena (10) = 5 dezenas (50).
50 + 30 = 80.

Segunda etapa

dm	um	c	d	u
			1	6
		3	**4**	5
			8	0
		6	4	0

***Cuidado**: Esse **4** vale 40 unidades.*
40 x 6 unidades = 240 unidades (240).
40 x 1 dezena (10) = 40 dezenas (400).
240 + 400 = 640.

Terceira etapa

dm	um	c	d	u
			1	6
		3	4	5
			8	0
		6	4	0
	4	8	0	0
	5	5	2	0

***Cuidado**: Esse **3** vale 300 unidades.*
300 x 6 unidades = 1800 unidades (1800).
300 x 1 dezena (10) = 300 dezenas (3000).
1800 + 3000 = 4800.

Assim como descrito anteriormente, também o número 345 poderia ser decomposto em centenas, dezenas e unidades. Usando a propriedade distributiva, teríamos:

345 = 300 + 40 + 5.
Logo, 345 x 16 = (300 + 40 + 5) x 16.
Pelo uso da propriedade distributiva, obtemos:
345 x 16 = 300 x 16 + 40 x 16 + 5 x 16.
Efetuando os produtos parciais:
300 x 16 = 4800;
40 x 16 = 640;
5 x 16 = 80;
Assim, 345 x 16 = 4800 + 640 + 80 = 5520.

Figura 20.5: Algoritmo 3.

Um outro algoritmo poderia decompor tanto o 345 como o número 16, e os cálculos ficariam:

345 = 300 + 40 + 5 e 16 = 10 + 6.

Logo,

345 x 16 = (300 + 40 + 5) x (10 + 6) = 300 x (10 + 6) + 40 x (10 + 6) + 5 x (10 + 6) =

300 x 10 + 300 x 6 + 40 x 10 + 40 x 6 + 5 x 10 + 5 x 6.

300 x 10 = 3000;

300 x 6 = 1800;

40 x 10 = 400;

40 x 6 = 240;

5 x 10 = 50;

5 x 6 = 30.

Assim,

345 x 16 = 3000 + 1800 + 400 + 240 + 50 + 30 = 5520.

Figura 20.6: Algoritmo 4.

E ainda poderia ser utilizado um outro algoritmo, que às vezes é denominado o *processo longo*.

```
            345
          x  16
 ----------------------------------------------
 300 x 10 + 300 x 6 = 3000 + 1800 =   4800
  40 x  10  +  40 x 6 =   400 +   240 =    640
   5 x  10  +    5 x 6 =     50 +    30  =      80
 ----------------------------------------------
                                          5520
```

Figura 20.7: Algoritmo 5.

Comparando os algoritmos, percebemos que todos estão fundamentados nas propriedades da multiplicação e do sistema de numeração decimal, o que nos permite destacar a importância do trabalho com números e sistemas de numeração desde a Educação Infantil.

CONCLUSÃO

É fundamental que o professor reflita sobre o significado de cada passo do algoritmo. Como foi dito na aula anterior, os alunos devem compreender a ideia de agrupamento de unidades formando dezenas e agrupamento de dezenas formando centenas, ou seja, a cada ordem, novos agrupamentos de 10 são feitos. Se o significado for trabalhado com os alunos, eles vão perceber que no “mundo da

Matemática" podem existir diferentes caminhos para a solução de um problema e que eles podem e devem procurar os seus.

ATIVIDADE FINAL

Atende aos Objetivos 1 e 4

Proponha uma atividade completa ligada às ideias da multiplicação, que incentive alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental a descreverem os caminhos que seguiram para solucionar um problema e a realizarem os cálculos de várias maneiras. Em seguida, responda: Qual o algoritmo da multiplicação que você acha mais fácil de ensinar? Por quê?

COMENTÁRIO

As respostas desta atividade também são pessoais, mas vale lembrar que, para pensar em atividades que motivem os alunos, é fundamental conhecê-los, ouvi-los e observá-los. O professor precisa oportunizar suas falas e seus registros. As turmas geralmente são heterogêneas, portanto não há o algoritmo mais fácil. O que é mais fácil para uns alunos pode não ser para outros. Cabe ao professor refletir sobre o maior número possível de estratégias, e cada aluno escolherá o que melhor lhe convier. Um bom exercício é efetuar os cálculos relativos à atividade que você criou pelos cinco algoritmos apresentados nesta aula.

RESUMO

Diante de um problema, os alunos podem propor soluções e estratégias de cálculo distintas. O professor deve incentivá-los a registrá-las com diversas simbologias, entre elas os símbolos matemáticos. Para efetuar multiplicações, existem, pelo menos, cinco algoritmos, todos fundamentados nas propriedades da multiplicação e do sistema de numeração decimal. No estudo dos algoritmos, é essencial que o aluno não só aprenda a executá-los como também compreenda os fundamentos matemáticos que justificam cada procedimento. Essa compreensão contribuirá para que ele avance na construção dos conceitos associados à multiplicação e escolha adequadamente as operações que poderão ajudá-lo na resolução de problemas escolares e não escolares que enfrenta.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, vamos refletir sobre o uso da calculadora como recurso didático. Veremos quantas situações de aprendizagem podem ser favorecidas quando o aluno a utiliza. Entretanto, a calculadora não desprestigia a compreensão e criação de algoritmos. Essas ações levam os alunos a efetuar cálculos corretamente e, além disso, permitem que desenvolvam estratégias de resolução de problemas.

AULA 21

O uso da calculadora: sim ou não?

Meta da aula

Apresentar o funcionamento da calculadora comum e atividades.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. utilizar diferentes possibilidades para uso da calculadora;
2. elaborar e resolver atividades com uso de calculadora;
3. avaliar o uso da calculadora como recurso pedagógico.

Pré-requisitos

Para o desenvolvimento desta aula, você deve possuir uma calculadora comum e lembrar os conceitos e os algoritmos das operações fundamentais de números naturais.

INTRODUÇÃO

O uso de calculadora em sala de aula é assunto bastante polêmico. Muitos acreditam que seu uso atrapalha o desenvolvimento do raciocínio, enquanto outros julgam que a calculadora é importante para a realização de algumas atividades e pode ser um facilitador na investigação de padrões.

As calculadoras surgiram na década de 1930, e sua evolução confunde-se com a evolução dos computadores. Suas peças e seus preços foram ficando menores e, com isso, começaram a ser popularizadas no fim da década de 1970 e início da década de 1980, pois, até então, os estudantes usavam réguas de cálculo para fazer contas mais complexas.

Nos dias de hoje, a calculadora encontra-se bastante difundida e com preço muito acessível. Dentro desse quadro, passou-se a pensar no uso de calculadora em sala de aula, onde a máquina faria a conta pelo aluno. Mostraremos que o objetivo, no contexto educacional, não é apenas esse.

Quando falamos do uso de calculadora em sala de aula, estamos entrando numa discussão com posições bastante divergentes. Alguns são contra e afirmam que "a calculadora acomoda" ou "na minha época não a usávamos", e acham que tudo deve continuar como sempre foi. Outros são a favor, acreditam que "acelera as contas", e afirmam: "Eu adoro calculadoras e, por isso, acho que meus alunos devem poder usá-las." Para decidir sobre o uso de calculadora como recurso didático, devemos procurar ampliar essas questões.

Nos caminhos para fazer Matemática em sala de aula, o PCN, de 1997, afirma que:

> estudos e experiências evidenciam que a calculadora é um instrumento que pode contribuir para a melhoria do ensino da Matemática. A justificativa para essa visão é o fato de que ela pode ser usada como um instrumento motivador na realização de tarefas exploratórias e de investigação (BRASIL. MEC, 1997).

Vamos conhecer um pouco dessa ferramenta, antes de questionar seu uso.

CONHECENDO A CALCULADORA

O modelo de calculadora mostrado é um dos mais comuns dentre os diversos atualmente encontrados; e é considerado um instrumento simples. Em outros modelos, a disposição das teclas e a nomenclatura utilizada variam.

Figura 21.1: Calculadora.

Ela é composta dos algarismos de 0 a 9, das quatro operações fundamentais: +, –, x, ÷ e =. Localize os algarismos e os sinais em sua calculadora. Além disso, a calculadora possui algumas outras teclas:

1 - A tecla ON/CE liga a máquina e apaga os valores que estão no visor.

Figura 21.2: Tecla ON/CE.

!

Em algumas calculadoras, essa tecla vem separada em duas, uma tecla para o ON e outra para o CE.
Também encontramos o CE apenas como C em alguns modelos.

Quando a calculadora está desligada, ao apertar a tecla ON/CE, aparece o zero no visor.

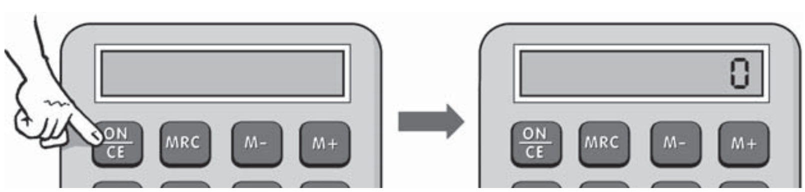


Figura 21.3: Ligando a calculadora.

E, ao digitar o número 123 e apertar a tecla ON/CE, a imagem é apagada e aparece o zero.

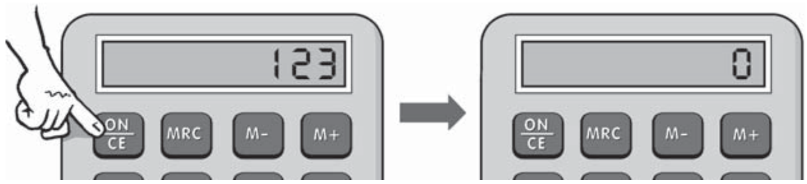


Figura 21.4: Limpando os números.

2 - A tecla OFF desliga a calculadora.

Figura 21.5: Desligando a calculadora.

3 - A tecla "ponto" representa a "vírgula" que utilizamos na notação decimal. Essa diferença ocorre porque em alguns países utiliza-se o ponto, em vez da vírgula, na expressão dos números decimais.

Figura 21.6

!

O valor R$ 100.000,00 na escrita brasileira significa cem mil reais. Esse mesmo número escrito nos Estados Unidos ou na Inglaterra é representado por R$ 100,000.00.

Vamos fazer algumas contas na calculadora.

Calcule 145 + 498.

Digite:

Figura 21.7

O número que aparecerá no visor será 643.

Calcule agora 12,45 - 4,76.

Digite:

Figura 21.8: Subtração entre 12,45 e 4,76.

No visor, aparecerá o resultado 7,69.

!

As atividades a seguir exploram o sistema de numeração e podem ser desenvolvidas com alunos a partir do 1º ciclo do Ensino Fundamental.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

1. Tecle:

a) 8 e depois 6. Que número apareceu no visor?

b) 6 e depois 8. E agora?

c) Escreva os números que aparecem no visor de sua calculadora, se você teclar:

zero e nove.
nove e zero.
dois e três.
três e dois.
zero e dois.
dois e zero.

d) A ordem em que você tecla os algarismos é importante? Por quê?

e) Que característica do sistema de numeração essa atividade trabalha?

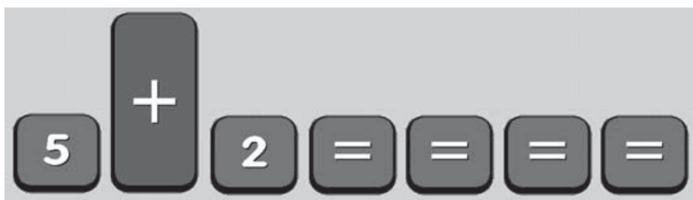
RESPOSTAS COMENTADAS

a) 86.
b) 68.
c) 9, 90, 23, 32, 2, 20.
d) Sim, porque altera a ordem das classes.
e) O valor posicional.

O SINAL DE IGUAL DEPOIS DE UMA OPERAÇÃO

Nem tudo na calculadora funciona como no papel. Dois sinais de igual juntos no papel não têm significado, enquanto na calculadora significam a repetição da operação com o último número digitado, ou seja, a operação de adição é repetida a cada vez que você aperta o sinal de igual.

Por exemplo, quando digitamos sucessivamente as teclas



,

Figura 21.9: Utilizando sucessivamente a tecla de igual.

a conta feita na calculadora corresponde à expressão – 5 + 2 + 2 + 2 + 2 –, cujo resultado é 13. Assim, na expressão resolvida na calculadora, cada sinal de igual digitado depois do primeiro igual corresponde a adicionar 2, que era o número inicialmente adicionado.

!

Na utilização de qualquer recurso didático, ocorre uma mudança de perspectiva, e, para que o aprendizado aconteça, o aluno deve transpor as características do material, no caso a calculadora, e compreender as ações realizadas nas atividades.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1, 2 e 3

2.

a) Tecle 6 + = = = = = =. Qual o resultado encontrado? Escreva uma expressão matemática que represente esse resultado usando somente o 6.

b) A tecla de multiplicação está com defeito, e você tem de usá-la para calcular o valor de 7×4. Como você pode realizar essa conta?

c) Digitei o número 4, o sinal de adição e depois fui apertando a tecla de igual, mas acabei me perdendo nas contas. O resultado que encontrei foi 96. Quantas vezes apertei a tecla de igual? Explique como você raciocinou.

A utilização da calculadora nessas atividades foi mecânica?

RESPOSTAS COMENTADAS

a) Você primeiro apertou a tecla do 6 e do +. Quando você aperta o primeiro =, a calculadora registra 6, no segundo, o 12, no terceiro, o 18, no quarto, o 24, no quinto, o 30, e por fim, no sexto, o 36.

As expressões escritas podem ser: 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 ou 6×6 = 36.

b) Uma maneira de fazer essa conta é: 7 + 7 + 7 + 7 = 28.

c) Observe que o número de vezes que você aperta a tecla = é o número de parcelas da adição. Temos: 96÷4 = 24.

d) Não, nessas atividades a proposta foi buscar significado matemático aos procedimentos da calculadora.

A ORDEM DAS OPERAÇÕES

Calculadoras simples efetuam operações na ordem em que são digitadas. Assim, se digitarmos

,

Figura 21.10: Ordem das operações.

a calculadora efetua a adição de 7 com 2 e, quando você aperta a tecla de multiplicação, aparece o 9 no visor. Digitando o 5, ela faz a multiplicação do 9 por 5, e encontramos 45 como resultado.

Essa mesma expressão, posta no papel, é escrita como: $(7 + 2) \times 5$.

Se os parênteses não fossem colocados, escreveríamos a expressão $7 + 2 \times 5$, cujo resultado é 17, pois a multiplicação de 2 por 5 seria a primeira operação a ser feita.

!

As calculadoras científicas já têm parênteses que permitem efetuar operações na ordem desejada.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

3.

a) Qual a diferença entre os resultados obtidos quando digitamos na calculadora, nesta ordem, cada uma das expressões: $5 + 7\times2$ e $7\times2 + 5$?

b) Ocorre o mesmo quando escrevemos no papel para resolver de acordo com as regras da linguagem matemática?

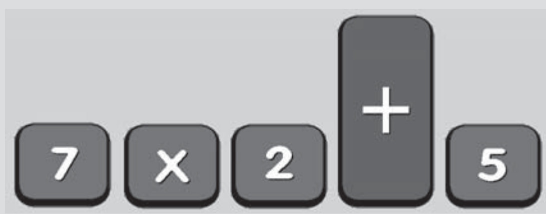
RESPOSTAS COMENTADAS

a) Se digitarmos:

,

a calculadora soma 5 + 7 = 12 e depois multiplica esse resultado por 2. Nesse caso, você encontrou 24.

Já quando você digita as teclas



,

a calculadora faz 7×2 = 14 e depois soma 5, e você encontrou 19.

b) Como expressões numéricas, ambas têm o mesmo valor. Para que na primeira conta possamos encontrar o valor feito na calculadora, temos que "obrigar" a adição a anteceder a multiplicação. Nesse caso, usamos parênteses: (5 + 7) × 2.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

4. Resolva, na calculadora, a expressão (6 + 5)× 9 + 2. Indique a sequência de teclas que você digitou.

RESPOSTA

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1, 2 e 3

5. Para usar uma calculadora, a fim de determinar o valor da expressão 7 + 5×9, não se pode digitar as teclas diretamente (na ordem em que aparecem). Por quê? Que propriedade você deve usar para fazer esse cálculo de maneira correta? Explique.

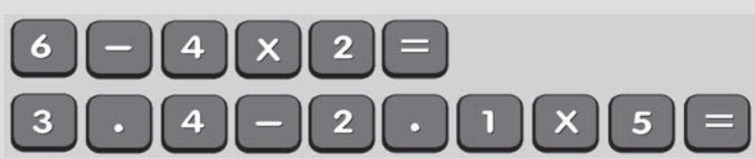
RESPOSTA COMENTADA

Porque se digitarmos na calculadora a sequência 7, +, 5, x, 9, a calculadora fará primeiro a adição de 7 com 5 e multiplicará o resultado por 9. Nesse caso, encontraremos 63.
Na expressão 7 + 5 x 9, precisamos fazer primeiro a multiplicação 5x9 e depois a adição desse resultado com o 7, encontrando 52.
Pela propriedade comutativa da adição, sabemos que 7 + 5 × 9 = 5 × 9 + 7.
Assim, podemos digitar a sequência 5, ×, 9, + 7.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

6. Escreva, em linguagem matemática, as expressões referentes às seguintes sequências de teclas de calculadora:



RESPOSTA COMENTADA

(6 – 4)x2
(3,4 – 2,1)x5

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

7. Usando cinco símbolos, dois sinais de operação diferentes e três algarismos, escreva a expressão matemática que representa o resultado da conta feita quando apertamos a seguinte sequência de teclas:

RESPOSTA COMENTADA

As teclas somam ao 7, cinco parcelas iguais a 9.
Assim: 7 + 5 × 9 ou 7 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9

USANDO AS TECLAS MRC, M+ E M–

Veja o problema: Rafaela foi ao supermercado e comprou 5 pacotes de biscoito a R$ 1,15 cada, 3 latas de milho a R$ 1,34 cada, 4 kg de açúcar a R$ 1,27 o quilo e 2 kg de arroz a R$ 1,82 o quilo. Quanto Rafaela gastou?

O problema pode ser resolvido de muitas maneiras, e uma delas é o cálculo da expressão simplificada:

5 x 1,15 + 3 x 1,34 + 4 x 1,27 + 2 x 1,82.

Como não podemos digitar as teclas diretamente, para fazer esse cálculo sem utilizar outro recurso, deveríamos calcular o valor total de cada produto, anotar e depois somar.

Essa maneira de fazer contas é bastante semelhante ao da conta feita de acordo com as regras aprendidas, mas você pode calcular o valor da expressão sem fazer anotações, utilizando as teclas de memória:

Figura 21.11: Memória positiva.

1 – A tecla M+ acumula os valores que são somados;

Figura 21.12: Memória negativa.

2 – A tecla M– acumula os valores que são subtraídos;

Figura 21.13: Resultado/Limpar.

3 – A tecla MRC apresenta o resultado dos valores acumulados na memória.

Assim, para resolver a expressão:

5×1,15 + 3×1,34 + 4×1,27 + 2×1,82, fazemos:

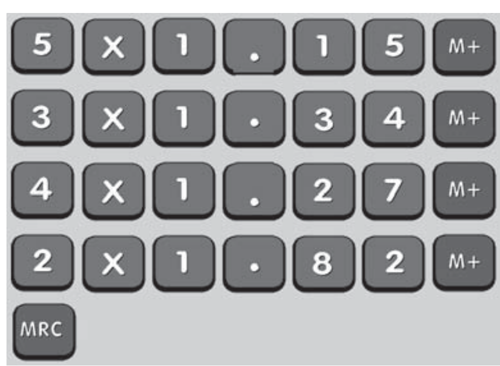


Figura 21.14: Exemplos de utilização da memória.

E, no visor, aparecerá 18.49.

Logo, Rafaela gastou R$ 18,49 no supermercado.

Atividades elaboradas por meio das teclas de memória podem auxiliar a reforçar as regras da ordem das operações, ou seja, as multiplicações e as divisões devem ser feitas antes das adições e subtrações.

Após encontrar o resultado de sua conta, usando a tecla MRC, aperte-a novamente, para limpar a memória. Em caso contrário, ao realizar a próxima operação, o resultado irá acumular-se com o anterior.

Por isso, não se esqueça de limpar a memória.

Vamos ver outro exemplo, resolvendo a expressão:

$9{\times}45 + 14 \times 38 - 12 \times 18 + 21{\times}72$.

Digitamos sucessivamente:

Figura 21.15: Outro exemplo de utilização da memória.

Encontramos o valor 2.233.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

8. Faça as contas a seguir na calculadora, usando a memória.

a) 56x47 + 68x98 – 32x21 =

!

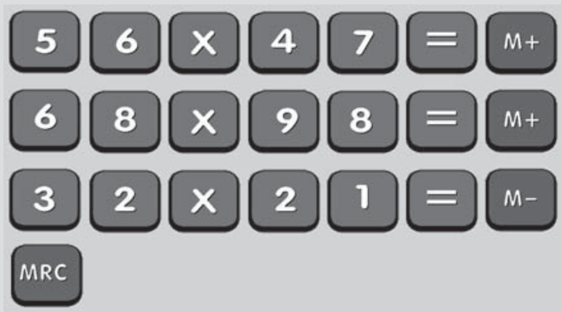
Lembre-se de apagar a memória!

b) 1,12x4,56 + 7,91x8,77 – 1,34x4,56 – 3,24x1,17 =

c) 72x5,4x3,2 – 4,1x2,3 + 21,5x7,2 =

RESPOSTAS

a.



56x47 = M+
68x98 = M+
32x21 = M-
MRC
E você encontra 8.624.

b.

1.12x4.56 = M+
7.91x8.77 = M+
1.34x4.56 = M-
3.24x1.17 = M-
MRC

E você encontra 64,5767.

c.

72x5.4x3.2 = M+
4.1x2.3 = M-
21.5x7.2 = M+
MRC

E você encontra 1.389,53.

INVESTIGANDO COM A CALCULADORA

Malba Tahan, autor do livro *O homem que calculava*, disse:

> A generalização das calculadoras tornou inteiramente obsoletas as provas das operações. Não se pode falar em prova dos noves numa época em que as máquinas é que operam. Retirado esse entulho algebrístico, poderíamos ocupar o tempo do educando fazendo-o aprender outros pontos da Matemática que são de indiscutível interesse (TAHAN, 1984).

O autor, matemático consagrado, já naquela época reconheceu o valor de tirar dos procedimentos o foco do ensino de Matemática, mas muitos educadores ainda hoje não aceitam esse fato.

É importante esclarecer que "tirar o foco" dos procedimentos não significa abrir mão de ensiná-los, mas de não considerar os algoritmos como essência da Matemática.

Falando mais especificamente, muitos dizem que não podem usar a calculadora, pois os alunos nem a tabuada sabem. A simples ação de decorar a tabuada não faz com que o aluno seja capaz de agir sobre o que memorizou, não o torna capaz de raciocinar e resolver problemas.

Por outro lado, os alunos poderão não usar a calculadora em sala de aula, mas não temos como controlar seu uso fora delas. Na maioria das cidades, um caixa de supermercado ou mesmo da mercearia da esquina tem de fazer uso de uma máquina registradora, e nela os cálculos e o troco são feitos automaticamente. Se por um lado pode parecer absurdo um aluno não saber fazer um cálculo, por outro também parece não fazer sentido que um aluno não saiba utilizar uma calculadora. O uso das teclas de memória é um exemplo de que essa afirmação é razoável. Se tiver dúvida, pergunte a um grupo de pessoas que você conhece. Verá que muitos não sabem utilizá-las. Pense e discuta mais sobre o assunto.

Só a necessidade e o hábito de fazer cálculos e estimativas levam à compreensão dos significados das operações fundamentais e à habilidade com os algoritmos.

Por meio de atividades diversificadas, como contas com algoritmos e exploração de situações, pode-se melhorar a compreensão dos algoritmos e procedimentos, além de dar significado ao aprendizado de Matemática.

Podemos, nessa perspectiva, elaborar uma atividade que proponha um olhar diferente à tabuada. Por exemplo, pedir aos alunos que construam a tabuada de multiplicação do 3, que encontrem fatos curiosos, que prolonguem a tabuada, calculando 11×3, 12×3, 13×3, e assim por diante, registrando suas observações. Essas atividades permitem que o aluno encontre regularidades nas multiplicações.

Outras observações numéricas também são interessantes para serem realizadas com a calculadora.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

9. Tecle 12.345.679 e multiplique por 9. O que observou?
Tecle 12.345.679 e multiplique por 18. O que observou?
Por quanto devemos multiplicar esse número para que no visor só apareça 5? Explique.

RESPOSTA COMENTADA

12.345.679×9 = 111.111.111,
12.345.679×18= 222.222.222,

Por 45. Veja:
12.345.679×45 = 555.555.555
Na primeira multiplicação, multiplicamos por 1×9 e apareceu só 1. Na segunda, por 18 = 2×9, e apareceu só 2. Para que apareça só 5, multiplicamos por 5×9 = 45.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

10. Considere o número 142.857.
Multiplique-o por 1, 2, 3, 4, 5, 6 e vá anotando os resultados. O que ocorre?
E multiplicando por 7, o que ocorre?
Agora multiplique por 8, 9, 10, 11, 12, 13 e comente os resultados.

RESPOSTA COMENTADA

142.857 × 1 = 142.857
142.857 × 2 = 285.714
142.857 × 3 = 428.571
142.857 × 4 = 571.428
142.857 × 5 = 714.285
142.857 × 6 = 857.142
Observe que os algarismos 1, 2, 4, 5, 7, e 8 aparecem embaralhados em todos os resultados.

Já na multiplicação por 7 temos uma sequência de noves.
142.857 × 7 = 999.999

142.857 × 8 = 1.142.856
142.857 × 9 = 1.285.713
142.857 × 10 = 1.428.570
142.857 × 11= 1.571.427
142.857 × 12 = 1.714.284
Observe que a partir da multiplicação por 8 não ocorrem mais regulares.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

11. Vamos formar cadeias de números, repetindo uma instrução. Escolha um número natural. Se ele for par, divida-o por 2; se for ímpar, multiplique-o por 3 e some 1 ao resultado.

Complete mais alguns termos dessa cadeia. O que acontece?
Experimente outras cadeias, começando por números diferentes. O que elas têm em comum?
Use a calculadora para acelerar os cálculos.

RESPOSTA COMENTADAS

Continuando a cadeia, encontramos: 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1...
Repare que a cadeia a partir do quarto termo fica repetindo a sequência 4, 2, 1.

Começando agora com outros números, temos:
17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1...
55, 166, 83, 250, 125, 376, 188, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1.186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1.132, 566, 283, 850, 425, 1.276, 638, 319, 958, 479, 1.438, 719, 2.158, 1.079, 3.238, 1.619, 4.858, 2.429, 7.288, 3.644, 1.822, 911, 2.734, 1.367, 4.102, 2.051, 6.154, 3.077, 9.232, 4.616, 2.308, 1.154, 577, 1.732, 866, 433, 1.300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1...

A sequência 4, 2, 1 sempre aparece, mas em alguns a cadeia é mais longa do que em outros. Toda vez que o 16 aparece a cadeia logo ocorre.

CONCLUSÃO

Dentre os objetivos gerais do Ensino Fundamental dos PCN, de 1997, temos:

> Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos.
> Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação (BRASIL. MEC, 1997).

Dentre os aspectos positivos do uso de calculadora estão a redução do tempo gasto nas contas e a possibilidade de explorar situações-problema cujos dados não são arrumadinhos como nos problemas usuais, que são aproximações das situações do cotidiano.

Um exemplo dessas vantagens foi o problema do supermercado, apresentado anteriormente. Pensando um pouco mais nesse mesmo contexto, vamos considerar os 45 produtos da cesta básica.

Cesta Básica

abóbora vermelha - 1kg
alface - 1pé
alho roxo - 1kg
banana-caturra - 1kg
batata-inglesa - 1kg
cebola branca - 1kg
cenoura vermelha - 1kg
chuchu - 1kg
couve - 1 molho
feijão tipo carioquinha - pacote de 1kg
laranja-pêra - 1kg
mandioca - 1kg
ovos brancos grandes - 1dúzia
quiabo - 1kg
repolho verde - 1kg
tomate santa cruz - 1kg
vagem - 1kg
arroz tipo 1 - pacote de 5kg

carne de boi de segunda - 1kg
frango resfriado -1kg
leite tipo C/longa vida - 1 l
açúcar cristal - pacote de 5kg
biscoito maisena - pacote de 200g
café em pó - pacote de 500g
extrato de tomate - lata de 370g
farinha de mandioca - pacote de 1kg
farinha de trigo - pacote de 1kg
fubá mimoso - pacote de1kg
margarina vegetal - pote de 500g
óleo de soja - lata de 900ml
pão de sal - 50g
queijo prato - 1kg
sal refinado - pacote de 1kg
salsicha a granel - 1kg
talharim c/ovos - pacote de 500g
vinagre de vinho - 750ml
água sanitária - garrafa de 1l
detergente líquido - 500 ml
sabão em pó - caixa 1kg
sabão em pedra - pacote c/5, 200 g
papel higiênico - pacote c/4 unidades
absorvente hig. - pacote c/ 10 unidades
creme dental - tubo 90g
desodorante - unidade 90 a 100ml
sabonete - unidade 90g

Por meio desses itens, uma atividade possível é construir uma lista de "cesta básica" com os alunos e depois confrontá-la com a oficial.

ATIVIDADE FINAL

Sua máquina está com a tecla 7 quebrada. Encontre mais duas maneiras de fazer as seguintes operações na calculadora.

a. 87×12

b. 37 + 71

c. 47 – 8

d. 48×17

RESPOSTAS COMENTADAS

a) Podemos fazer

ou

b)

ou

c)

ou

d)

ou

RESUMO

Existem muitas opiniões sobre o uso da calculadora e algumas delas são bastante superficiais. Entretanto, para utilizar a calculadora na sala de aula precisamos conhecer seu funcionamento e explorar situações que possam ser relevantes ao ensino.
Por meio de atividades que exploram a escrita do número, a compreensão da escrita das expressões e utilizando as teclas de memória, podemos trabalhar o uso da calculadora de forma mais reflexiva e crítica.
Um bom uso para a calculadora é trabalhar atividades que permitam modelar as situações do cotidiano. Quando trabalhamos com números do dia a dia, como dados do IBGE, cestas básicas, dentre outros, os números não são arrumadinhos, e pode-se perder muito tempo com as contas, em vez de focar na resolução de problemas. Isso também ocorre na observação de regularidades e padrões numéricos em atividades cuja natureza é investigativa, em que a exploração de muitas situações acarretam muitas contas que, feitas no papel, podem ser cansativas e repetitivas.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, o assunto é o algoritmo da divisão.

AULA 22

Divisão: algoritmo

Meta da aula

Apresentar os dois principais conceitos da divisão para a construção de algoritmos.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- reconhecer processos de cálculo mental e estimativa para a divisão;
- utilizar operações sucessivas para a resolução de situações-problema do cotidiano que envolvam o conceito de divisão;
- identificar e aplicar propostas de algoritmo para a divisão em situações-problema;
- propor situações-problema que envolvam o conceito e o algoritmo da divisão.

Pré-requisitos

Para que você encontre maior facilidade na compreensão desta aula, faça uma breve revisão do conteúdo das aulas: Investigando a adição e a subtração (Aula 17); Multiplicação e divisão: conceitos (Aula 18); Investigando a multiplicação e a divisão (Aula 19); Algoritmos na multiplicação (Aula 20).

INTRODUÇÃO

Nas aulas anteriores, ressaltamos a importância de que o aluno crie e descreva seu próprio algoritmo, pois isso permite que ele se expresse de forma natural. Cabe a você, professor, conciliar as soluções corretas que lhe forem apresentadas com os algoritmos existentes, buscando sempre valorizar as iniciativas de seus alunos. Por isso, apresentar problemas ligados à vivência dos alunos é de fundamental importância.

O entendimento e a aplicação de um algoritmo decorrem da sua importância na resolução de um problema e da necessidade de aplicá-lo, quando não se é capaz de resolver a operação de cabeça. Precisamos estar atentos a isso!

Na divisão, existem dois conceitos principais: o de partilha e o de medida. A construção dos algoritmos deverá levar em consideração esses conceitos.

Na prática do Ensino Fundamental são utilizados diferentes algoritmos. Entre os professores, não há unanimidade na preferência por um determinado processo. Consideramos que aos alunos devam ser apresentadas diferentes possibilidades e que lhes seja permitido escolher como trabalhar. Essa escolha não faz diferença na aprendizagem. O importante é que o aluno compreenda o que está fazendo, e não que decore o processo de forma mecânica.

Um algoritmo é um método com instruções bem definidas para se realizar uma tarefa, no caso a operação de divisão, mas isso não significa que a aprendizagem do algoritmo da divisão seja a memorização de uma sequência dos passos necessários para realizar a operação. Para que um aluno de fato aprenda, ele precisa ter interesse na atividade e reconhecer o que está fazendo, ou seja, compreender o porquê de cada passo realizado.

Nesta aula, prosseguiremos o estudo da divisão. Os dois principais conceitos da divisão – o de partilha e o de medida – serão considerados para a construção dos algoritmos desta operação. Um algoritmo é um método, com orientações definidas, para se realizar uma tarefa, mas sua aprendizagem não se limita à memorização de uma sequência dos passos.

Para que ocorra a aprendizagem, é preciso reconhecer o que se está operando, ou seja, compreender o porquê de cada ação. Destacamos que cabe ao professor conciliar as soluções corretas que lhe forem apresentadas por seus alunos, pois a compreensão e a aplicação de um algoritmo decorrem da sua utilização na resolução de problemas.

Por isso, ressaltamos a importância de que o aluno crie seu próprio algoritmo.

As atividades apresentadas nesta aula pretendem contribuir para que você conheça diferentes possibilidades para trabalhar com seus alunos, identificando aquelas mais pertinentes ao estágio em que eles se encontram.

!

A apresentação de uma situação-problema – cuja solução envolva os conceitos de medida ou partilha relacionados a uma divisão – pode ser o mote para que os alunos proponham vários algoritmos para encontrar a solução.
Inicie com os problemas mais simples até alcançar os mais complexos. Mas quer sejam simples ou complexos, você deve sempre incentivar o cálculo mental.

ALGORITMOS DA DIVISÃO

O homem começou a fazer contas há cerca de quatro mil anos. No decorrer do tempo, diferentes métodos foram utilizados para resolver as operações.

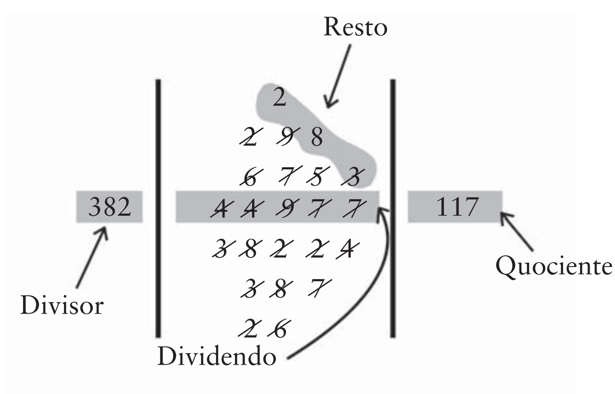
No passado, apenas aqueles que eram considerados sábios conseguiam realizar cálculos que envolviam a divisão, pois os métodos eram muito complexos, como os apresentados a seguir.

• Método de divisão (BOYER, 1996).

Divisor ↘ 382; Quociente → 117; Dividendo → 44977

$$
\begin{array}{r|r}
 & 117 \\
\cline{2-2}
382 & 44977 \\
 & 382 \\
\cline{2-2}
 & 677 \\
 & 382 \\
\cline{2-2}
 & 2957 \\
 & 2674 \\
\cline{2-2}
 & 283
\end{array}
$$

• Método de riscar ou método do galeão (BOYER, 1996):



PROCESSOS MENTAIS

Apresentamos alguns possíveis processos mentais, os mais comumente utilizados. É importante que você peça aos seus alunos que apresentem suas soluções e que você compare os diferentes processos que eles seguiram.

> **!**
>
> Os processos mentais não são uma "receita de bolo", por isso devem ser apresentados aos alunos como um levantamento de possibilidades, de diferentes caminhos de ação que alcançam um mesmo resultado.

Incentive o cálculo mental e as estimativas a partir de questões bastante simples, como a seguinte:

Bianca tem 165 figurinhas para distribuir por 12 crianças.

• As crianças receberão mais ou menos do que dez figurinhas cada uma?

Se cada uma receber 10 figurinhas, teremos: 10 figurinhas distribuídas para 12 crianças.

10 x 12 = 120.

Observe que 120 é menor do que o número total de figurinhas que serão distribuídas, portanto ainda restarão figurinhas a serem distribuídas.

Pode-se concluir que cada uma receberá mais do que dez figurinhas.

• As crianças receberão mais ou menos do que 15 figurinhas cada uma?

Se cada uma receber 15 figurinhas, teremos: 15 figurinhas distribuídas para 12 crianças. 15 x 12 = 180

Observe que 180 é maior do que o número total de figurinhas que serão distribuídas, portanto faltarão figurinhas. Logo, elas não poderão receber 15 figurinhas.

Pode-se concluir que cada uma receberá menos do que 15 figurinhas.

• Se ela der 10 figurinhas para cada criança, quantas figurinhas restarão com ela?

Se ela der 10 figurinhas, então:

12 x 10 = 120.

Cada criança recebeu 10 figurinhas, e Bianca ainda ficará com 165 – 120 = 45 figurinhas.

Posteriormente, incentive seus alunos a prosseguir nos cálculos:

• Como o número de crianças é menor do que o de figurinhas que ficaram com Bianca, ela ainda poderá distribuir mais algumas figurinhas para cada uma das crianças.

Ela ainda poderá distribuir mais 2 figurinhas para cada criança, então: 12 x 2 = 24.

Cada criança ficou com 12 figurinhas, e Bianca ainda ficará com 45 – 24 = 21.

O número de crianças é menor do que o de figurinhas que ainda restam com Bianca. Desse modo, ela poderá distribuir mais algumas figurinhas para cada uma das crianças.

Se for distribuída mais uma figurinha para cada criança, então:

12 x 1 = 12

Cada criança ficará com 13 figurinhas e Bianca ficará com 21–12 = 9.

Como o número de crianças é maior do que o de figurinhas que ainda restam, ela já não poderá mais distribuir igual número de figurinhas para cada uma das crianças.

Portanto, ao final da distribuição de figurinhas, cada criança ficará com 13 figurinhas, e ainda restarão 9 figurinhas.

Ressalte que o número de figurinhas a serem distribuídas é o dividendo, o número de crianças que receberão figurinhas é o divisor, e as figurinhas que não puderam ser distribuídas (pois não são suficientes para serem distribuídas igualmente por todas as crianças) são o resto.

— Por que você não para de rolar de um lado para o outro? – perguntou o diabo dos números.

Robert viu, então, que sua cama estava dentro de uma caverna.

Diante dele, o velho, sentado, abanava a bengala.

— Hora de levantar, Robert! – disse ele. — Hoje nós vamos dividir!

— Mas eu mereço isso? – perguntou Robert. — Você poderia ao menos ter esperado até que eu adormecesse. E, além do mais, eu não suporto divisão.

— Não? E por quê?

— Porque, veja, quando se trata de mais, menos ou vezes, toda conta dá certo. Só na hora de dividir é que não dá. Aí vive sobrando um resto, e eu acho isso uma chateação.

— A pergunta então é quando.

— Quando o quê? – perguntou Robert.

— Quando sobra resto e quando não sobra – explicou o diabo dos números. — Aí é que está o xis da questão. No caso de muitos números, vê-se logo pelo jeitão deles que é possível dividi-los sem que sobre um resto.

— Claro – concordou Robert. — Com os números pares, a conta dá sempre certo, se a gente os divide por 2, sem problemas! E é fácil também dividir os números da tabuada do 3 (ENZENSBERGER, 1997, p. 50).

!

Hans Magnus Enzensberger nasceu em 11 de novembro de 1929 em Kaufbeuren, Alemanha. Estudou literatura e filosofia, trabalhou como redator na rádio de Stuttgart e exerceu a docência até 1957. Escreveu um livro, cujo título é muito significativo: *O diabo dos números — Um livro de cabeceira para todos aqueles que têm medo de Matemática*. Na contracapa deste livro você pode ler o seguinte:

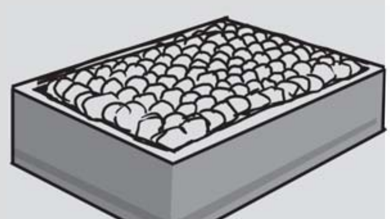
> Matemática? Aquela montanha de números sem sentido? Aqueles cálculos que não servem para calcular nada? Não, nem pensar. Robert, o menino de pijama azul, fazia parte dessa maioria que acha os números não só monstruosos, mas também absurdos e inúteis. Um dia, entretanto, ele começa a sonhar com um certo Teplotaxl, um diabo que pinta e borda com a Matemática. No total são doze sonhos e em cada sonho o tal Teplotaxl faz malabarismos tão interessantes que os números simplesmente deixam de ser malditos. Ficam claros e diabolicamente divertidos (ENZENSBERGER, 1997).
> Um livro que vale a pena conhecer... e ler!

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

1. Rodrigo coleciona pedrinhas. Ele tem 200 pedrinhas para serem distribuídas por 10 caixas.

a) Em cada caixa, ele colocará mais ou menos do que 25 pedrinhas?



b) Em cada caixa, ele colocará mais ou menos do que 15 pedrinhas?

c) Em cada caixa, ele colocará mais ou menos do que 20 pedrinhas?

RESPOSTAS COMENTADAS

a) Em cada caixa, ele colocará mais ou menos do que 25 pedrinhas?
Se em cada caixa ele colocasse 25 pedrinhas, teríamos:
25 x 10 = 250.
Como ele possui 200 pedrinhas, podemos dizer que colocará menos que 25 em cada caixa.

b) Em cada caixa, ele colocará mais ou menos do que 15 pedrinhas?
Se em cada caixa ele colocasse 15 pedrinhas, teríamos:
15 x 10 = 150
Ainda sobrariam pedrinhas, portanto em cada caixa ele colocará mais que 15 pedrinhas.

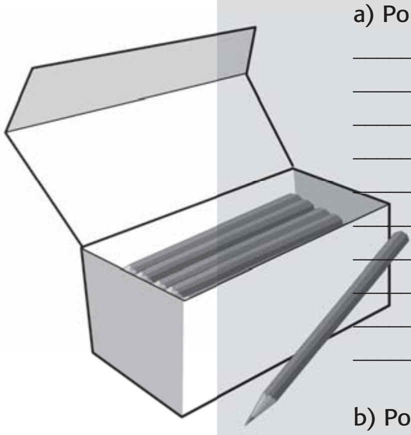
c) Em cada caixa, ele colocará mais ou menos do que 20 pedrinhas?
Se em cada caixa ele colocasse 20 pedrinhas, teríamos:
20 x 10 = 200.
Nesse caso, não sobraria nenhuma pedrinha, portanto, em cada caixa, ele colocará 20 pedrinhas.
Sua resposta termina aqui, mas você ainda pode levantar outras possibilidades:
E se ele distribuir por 5 caixas? 4 caixas? 8 caixas?

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

2. Seus alunos poderão pensar e resolver alguns problemas que envolvem a divisão realizando operações sucessivas. Poderão realizar subtrações ou adições ou multiplicações. Para melhor compreender as formas de pensar de seus alunos, resolva, você mesmo, o problema a seguir, considerando essas diferentes possibilidades.
Se em cada caixa de lápis cabem 16 lápis, quantas caixas serão necessárias para guardar 80 lápis?

a) Por subtrações sucessivas:



b) Por adições sucessivas:

c) Por multiplicações sucessivas:

RESPOSTAS COMENTADAS

a) Por subtrações sucessivas:
A partir do total de lápis a serem distribuídos, poderão ser realizadas subtrações sucessivas do número de lápis a serem colocados em cada caixa.

Caixas de lápis	**Número de lápis em cada caixa**	**Operações realizadas**
1	16	80 - 16 = 64
2	16	64 - 16 = 48
3	16	48 - 16 = 32
4	16	32 - 16 = 16
5	16	16 - 16 = 0

b) Por adições sucessivas:
Poderão ser realizadas adições sucessivas do número de lápis a serem colocados em cada caixa.

Caixas de lápis	**Número de lápis em cada caixa**	**Operações realizadas**
1	16	0 + 16 = 16
2	16	16 + 16 = 32
3	16	32 + 16 = 48
4	16	48 + 16 = 64
5	16	64 + 16 = 80

c) Por multiplicações sucessivas:
Poderão ser realizadas multiplicações sucessivas do número de lápis por caixa até ser encontrado o produto igual ao número total de lápis.

Caixas de lápis	**Número de lápis em cada caixa**	**Operações realizadas**
1	16	1 x 16 = 16
2	16	2 x 16 = 32
3	16	3 x 16 = 48
4	16	4 x 16 = 64
5	16	5 x 16 = 80

Apresente a seus alunos diversos problemas que envolvam o conceito de divisão. Isso permitirá que você observe se os seus alunos compreenderam verdadeiramente esse conceito. Só então passe ao algoritmo da divisão.
Lembre-se de que a compreensão é fundamental para o aprender. O aluno precisa atribuir significado ao que aprende, portanto, não pode simplesmente mecanizar procedimentos e regras, ele deve saber o porquê das coisas!

E você? Sente segurança para prosseguir? Pelo sim, pelo não, realize mais esta atividade.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

3. Tio Luiz comprou 54 bolinhas de gude para dividir igualmente pelos 9 sobrinhos. Quantas bolinhas receberá cada um deles?

Para praticar, resolva por operações sucessivas.

RESPOSTA COMENTADA

Você pode ter resolvido o problema por subtrações sucessivas, adições sucessivas ou multiplicações sucessivas. Confira o procedimento escolhido e dê uma olhadinha nos demais!

A partir do total de bolinhas de gude que serão divididas pelos sobrinhos e considerando-se que a cada um será entregue o mesmo número de bolinhas, o tio iniciará dando uma bolinha para cada um. Ele repetirá o procedimento quantas vezes for necessário, enquanto ainda houver bolinhas. Assim, teremos:

a) Por subtrações sucessivas:

Rodadas de distribuição	***Total de bolinhas distribuídas a cada rodada***	***Operações realizadas***
1	*9*	$54 - 9 = 45$
2	*9*	$45 - 9 = 36$
3	*9*	$36 - 9 = 27$
4	*9*	$27 - 9 = 18$
5	*9*	$18 - 9 = 9$

b) Por adições sucessivas:

Rodadas de distribuição	**Total de bolinhas distribuídas a cada rodada**	**Operações realizadas**
1	9	$0 + 9 = 9$
2	9	$9 + 9 = 18$
3	9	$18 + 9 = 27$
4	9	$27 + 9 = 36$
5	9	$36 + 9 = 45$
6	9	$45 + 9 = 54$

c) Por multiplicações sucessivas:

Rodadas de distribuição	**Total de bolinhas distribuídas a cada rodada**	**Operações realizadas**
1	9	$1 \times 9 = 9$
2	9	$2 \times 9 = 18$
3	9	$3 \times 9 = 27$
4	9	$4 \times 9 = 36$
5	9	$5 \times 9 = 45$
6	9	$6 \times 9 = 54$

Lembre-se de que o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno é fundamental, e, por isso, você deve permitir que ele procure formas de chegar ao resultado.

PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO

Fernando doou 166 livros para a escola de seu bairro. Os livros serão distribuídos, igualmente, pelas doze turmas do Ensino Fundamental. Quantos livros cada turma receberá?

Embora esse problema também possa ser resolvido por operações sucessivas, existem alguns processos que agilizam o cálculo. A seguir, sistematizaremos dois deles.

Processo longo

O procedimento longo para o cálculo do quociente vincula-se à ideia de "repartir igualmente", reproduzindo exatamente o que uma criança faz quando deseja repartir determinada quantidade de objetos.

A introdução desse método é feita a partir de subtrações sucessivas. Com o tempo, pela prática das subtrações sucessivas apresentadas anteriormente, seus alunos perceberão que a distribuição de 1 em 1 pode ser extremamente demorada. Se, além da prática de subtrações sucessivas, eles praticarem a estimativa, não terão dificuldade em realizar a divisão pelo processo longo.

Iniciem realizando uma estimativa. Observem que serão mais do que 10 livros para cada turma. Portanto, pode-se iniciar com 10.

$$\begin{array}{r|l} 166 & 12 \\ \cline{2-2} -\ 120 & 10 \\ \cline{1-1} 46 & \end{array}$$

Pelo número de livros que sobram a partir dessa primeira divisão, você poderá realizar uma nova estimativa. Por exemplo:

$$\begin{array}{r|r} 166 & 12 \\ \cline{2-2} -\ 120 & 10 \\ \cline{1-1} 46 & \\ -\ \ 36 & 3 \\ \hline 10 & \mathbf{13} \end{array}$$

Resumindo:

Para dividir 166 por 12, foi realizada uma primeira tentativa, 10 livros para cada turma. Como sobraram 46 livros, uma nova estimativa faz-se necessária.

Para dividir 46 por 12, foi estimado mais 3 livros para cada turma. Após realizados os cálculos, tivemos como resto dez.

Dessa forma, observamos que nesse processo fazemos uma estimativa inicial e, se o resto permitir, fazemos uma nova "distribuição", ou seja, definimos um novo quociente parcial continuando o processo até que o resto seja menor que o divisor. Ao final, somamos os quocientes parciais.

$$\begin{array}{r|l}
166 & 12 \\ \cline{2-2}
-\ 120 & 10 \longrightarrow \text{1 dezena} \\ \cline{1-1}
46 & \\
-\ 36 & \ \ 3 \longrightarrow \text{3 unidades} \\ \cline{1-2}
10 & \mathbf{13} \longrightarrow \text{1 dezena + 3 unidades}
\end{array}$$

Embora seja mais demorado, esse processo é mais facilmente compreendido pela criança.

Com a prática, vocês poderão trabalhar de forma mais compacta:

$$\begin{array}{r|l}
\text{C D U} & \\
1\ 6\ 6 & 12 \\ \cline{2-2}
-\ 1\ 2\ 0 & 13 \\ \cline{1-1}
4\ 6 & \text{DU} \\
-\ \ 3\ 6 & \\ \cline{1-1}
1\ 0 &
\end{array}$$

É fundamental que você proponha atividades que permitam concluir que, ao se procurar o múltiplo do divisor que mais se aproxima do dividendo, o resto deverá sempre ser menor do que o divisor. De forma natural, essa descoberta vai se processando pela vivência das atividades, não havendo necessidade de explicitar essa propriedade.

Desse modo, é iniciada a passagem para a construção do algoritmo do processo abreviado.

Processo abreviado

Observe que, no processo longo, colocamos uma estimativa de 10 livros por turma. Como sobraram 46 livros, na segunda estimativa foi encontrado o 3, e concluímos que cada turma receberia 13 livros. No processo longo, fazemos distribuições sucessivas até que o resto seja menor que o divisor. Então, somamos os quocientes parciais.

No processo abreviado, procuramos o maior número possível para ser colocado no quociente e, dessa forma, obtemos o resto menor que o divisor.

$$\begin{array}{r|l}
\text{C D U} & \text{...DU} \\
166 & 12 \\ \cline{2-2}
-\ 120 & 13 \\ \cline{1-1}
46 & \text{D U} \\
-\ 36 & \\ \cline{1-1}
10 &
\end{array}$$

Naturalmente, pela vivência de diferentes atividades, seus alunos descobrirão que ao se procurar o múltiplo do divisor que mais se aproxima do dividendo, o resto deverá sempre ser menor que o divisor.

Se os alunos entenderem as etapas realizadas, não terão dificuldade quando trabalharem com números maiores. Por isso é fundamental que os primeiros passos na divisão sejam bem compreendidos, pois serão o suporte para muitos estudos posteriores.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 3

4. Resolva os problemas a seguir, realizando as divisões necessárias pelo processo indicado.

a) Se para fazer um jogo de varetas são utilizadas 35 varetas, quantos jogos poderão ser feitos com 3.567 varetas? Resolva pelo processo longo.

b) O álbum *História da Matemática* tem 288 figurinhas distribuídas por 48 páginas. Cada página contém o mesmo número de figurinhas. Quantas figurinhas estão coladas em cada página? Resolva pelo processo abreviado.

c) Ledinha é doceira. Hoje ela preparou 1.251 brigadeiros que deverão ser distribuídos em caixas que acomodam 30 docinhos cada. Prometeu aos seus filhos que lhes daria os docinhos que restassem. Quantos docinhos os filhos de Ledinha ganharam? Resolva pelo processo longo.

RESPOSTAS COMENTADAS

Verifique se você chegou aos resultados a seguir. Lembre-se de que é importante você sentir segurança ao realizar as operações por diferentes processos.
Em caso de dúvida, recorra ao seu tutor para que ele verifique se você realizou cada uma das operações corretamente.
a) Poderão ser feitos 101 jogos. Observe que ainda restaram varetas.
b) Em cada página estão coladas 6 figurinhas.
c) Os filhos de Ledinha ganharam 21 docinhos. Observe que eles ganharam os docinhos que restaram.

CONCLUSÃO

A divisão é uma operação complexa que requer conhecimento de multiplicação, subtração e adição. Por isso, a divisão deverá ser apresentada por meio de situações didáticas gradativas que despertem o interesse do aluno e lhe permitam chegar aos fatos fundamentais da operação. A redescoberta é o mais adequado procedimento para se trabalhar a divisão nas turmas das séries iniciais.

Um planejamento cuidadoso permitirá que seu aluno compreenda, relacione e integre os novos conteúdos em um contexto maior.

Não lhe ofereça respostas prontas, mas, sim, incentive-o na busca de aplicações da divisão em problemas cotidianos. Desse modo, desenvolve-se a atitude positiva em relação ao conhecimento, instiga-se a curiosidade, o questionamento e a reflexão.

ATIVIDADE FINAL

Atende ao Objetivo 4

1. Proponha uma atividade para você realizar com seus alunos, tendo como objetivo introduzir a necessidade de um algoritmo da divisão.

2. Planeje uma atividade para que seus alunos percebam a divisão como um processo em várias etapas.

COMENTÁRIOS

1) A resposta é pessoal. Sugerimos que você discuta com seus colegas e tutores a atividade proposta e, também, que procure conhecer as propostas de seus colegas. Use sua criatividade!

2) A resposta é pessoal. Sugerimos que você discuta com seus colegas e tutores o seu planejamento e, também, que procure conhecer as idéias de seus colegas. Seja criativo!

RESUMO

A divisão é uma operação complexa, mas isso não significa que não possa ser bem compreendida. No Ensino Fundamental, são lançadas as bases para todos os conhecimentos posteriores na área da Matemática, por isso é essencial que cada aluno não apenas realize a divisão, mas que compreenda todo o processo que está realizando.

O algoritmo é um método, com instruções bem definidas, em várias etapas, para se realizar uma tarefa. Isso não significa que sua aprendizagem limite-se à memorização de uma sequência de procedimentos. Para uma efetiva aprendizagem, o aluno precisa reconhecer o que está fazendo, ou seja, compreender o porquê de cada passo realizado.

Após apresentar diferentes possibilidades de cálculo por operações sucessivas, você deve trabalhar, cuidadosamente, o algoritmo da divisão pelo processo longo e, posteriormente, pelo processo abreviado.

O processo longo está vinculado à idéia de "repartir igualmente". Ele é realizado a partir de subtrações sucessivas realizadas até que o resto seja menor que o divisor.

No processo abreviado, procura-se o maior quociente possível para se obter um resto menor que o divisor.

INFORMAÇÕES SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, será apresentado um panorama dos materiais concretos. Você terá acesso a diferentes opiniões contra e a favor de seu uso. Ao final dos estudos, você poderá chegar a suas próprias conclusões.

AULA 23

Um passeio nos materiais concretos

Meta da aula

Apresentar diferentes tipos de materiais, suas características, sua abrangência e suas limitações.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. explorar os materiais apresentados;
2. utilizar materiais em diferentes tipos de atividades;
3. estruturar outros materiais.

Pré-requisitos

Para acompanhar esta aula, você deve relembrar alguns materiais utilizados: os Blocos Lógicos foram vistos na Aula 8, o Ábaco e o Material Dourado foram vistos na Aula 9, e as Barras de Cuisinaire na Aula 17.

INTRODUÇÃO

No decorrer deste curso, em algumas aulas, apresentamos ou utilizamos algum material concreto (ou manipulável). Nesta aula, queremos ampliar seu conhecimento sobre eles e apresentá-los a novos materiais, sua potencialidade, sua abrangência e suas limitações.

O uso de materiais no ensino de Matemática aqui no Brasil assume destaque na década de 1980. Influência dos estudos piagetianos, a perspectiva construtivista do ensino e aprendizagem ganha força em diferentes cidades brasileiras.

Usualmente são chamados de materiais concretos, porque são aqueles em que é possível pegar, ver, sentir. Porém, dentro da perspectiva construtivista, a aprendizagem se efetiva na relação entre sujeito e objeto. Portanto, mais do que ter um material concreto, é preciso que o aluno possa manipulá-lo, e, além disso, propostas de atividades desafiadoras devem ser apresentadas ao aluno junto com o material. Os conceitos e as relações não estão presentes no material, mas sim no sujeito que interage com ele e com outros sujeitos.

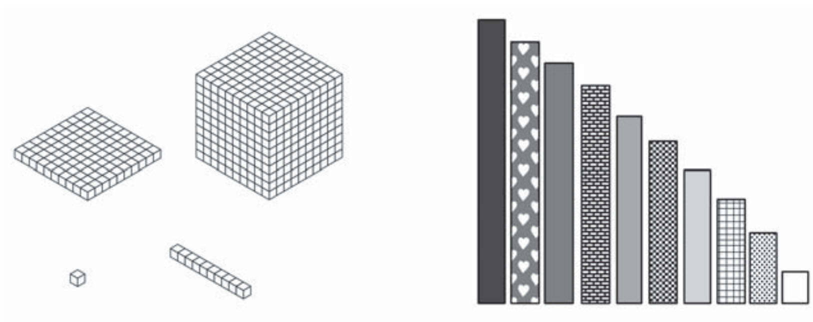
Desde então, surgem aqueles que defendem e outros que repudiam o uso de materiais. A decisão de usá-los ou não no trabalho que venha a desenvolver com seus alunos é sua, mas para isso é preciso conhecê-los. Nossa posição é de que os materiais manipuláveis são mais um recurso entre outros que o professor poderá utilizar para contribuir com a produção de significados em Matemática pelo aluno.

Não existe material ideal; a decisão sobre sua utilização deve levar em conta o conhecimento do professor acerca de seus alunos e seu conhecimento acerca das diferentes alternativas de que dispõe para o trabalho.

> O professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material, porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da Matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina (FIORENTINI; MIORIM, 1993).

MATERIAIS ESTRUTURADOS E NÃO-ESTRUTURADOS

Os materiais estruturados são aqueles que foram pensados e idealizados para se trabalhar conceitos e conteúdos predeterminados; o Material Dourado e as réguas de Cuisinaire são exemplos de materiais estruturados.



Os materiais não-estruturados são aqueles que não foram criados para esse fim, mas de que fazemos uso didático. Canudos, palitos, grãos, elásticos e copos são exemplos de materiais não-estruturados. Os canudos foram criados para beber líquido e não para contá-los e agrupá-los.

MATERIAIS QUE CONTRIBUEM PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE NÚMERO

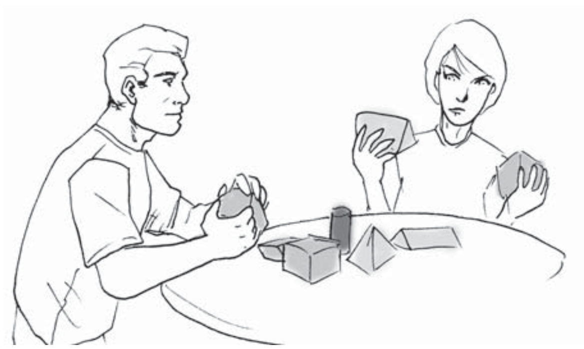
Qualquer material que possa ser agrupado e classificado poderá ser usado utilizado em atividades que envolvam essas ações. Na Aula 8, exploramos atividades usando o crachá e palavras escritas aleatoriamente em tiras de papel para serem agrupadas. Também apresentamos os Blocos Lógicos de Dienes, que é um material conhecido entre os professores na educação infantil e em turmas de alfabetização.

As sucatas também favorecem a atividades dessa natureza. Por meio de diferentes embalagens trazidas pelos alunos, eles podem classificar por formas, tamanhos, tipo de material e até pelo tipo de produto que contêm.

Blocos Lógicos

Quando trabalhamos os Blocos Lógicos na construção do conceito de número, dispomos de várias atividades como as descritas na Aula 8, em que agrupamos as peças de acordo com os atributos cor, tamanho, forma e espessura, questionando situações de classificação e agrupamento.

Os Blocos Lógicos são um material manipulável, estruturado e de grande importância para trabalhar classificação e seriação nas séries iniciais. Dizemos que eles são estruturados porque foram concebidos segundo uma estrutura lógica. Possuem quatro atributos, ou seja, cor, forma, espessura e tamanho. O atributo cor possui três valores: amarelo, azul e vermelho. O atributo forma possui quatro valores: triângulo, quadrado, retângulo e círculo. O atributo espessura possui dois valores: fino e grosso. O atributo tamanho também possui dois valores: pequeno e grande.



!

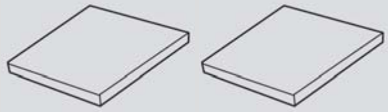
Uma crítica que é feita a esse material é o fato de ele tratar o conjunto dos quadrados e o conjunto dos retângulos como disjuntos. Teoricamente, isso é um erro, pois todo quadrado é um retângulo. Assim, o conjunto dos quadrados é um subconjunto dos retângulos. Apesar disso, defendemos seu uso, pois possibilita a exploração de várias atividades de classificação e seriação.

Caso deseje montar esse material para o trabalho com alunos, você pode usar material emborrachado ou substituir a espessura pelo atributo com traço ou sem traço.
Você também pode substituir os atributos e criar outros materiais com a mesma estrutura. Por exemplo, para trabalhar geometria espacial, podemos substituir as formas planas por espaciais, e a espessura por textura.

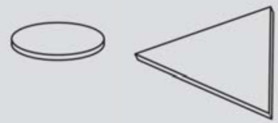
ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

1. Dados dois blocos, nós podemos ter, por exemplo, uma ou duas diferenças de atributos entre os dois blocos. Veja:



Uma diferença



Duas diferenças

Utilizando os Blocos Lógicos, construa uma seqüência de blocos utilizando pelo menos 15 peças em que a diferença de atributo de um bloco para o outro seja de:
a. apenas uma;
b. duas;
c. três;
d. é possível ter quatro diferenças? Em caso afirmativo, dê um exemplo.

RESPOSTA COMENTADA

As respostas não são únicas. A seguir, temos alguns exemplos.
a. triângulo, amarelo, pequeno e grosso,
triângulo, amarelo, pequeno e fino,
quadrado, amarelo, pequeno e fino,
quadrado, vermelho, pequeno e fino,
círculo, vermelho, pequeno e fino,
círculo, azul, pequeno e fino,
retângulo, azul, pequeno e fino,
retângulo, azul, grande e fino,
retângulo, azul, grande e grosso,
retângulo, amarelo, grande e grosso,
retângulo, vermelho, grande e grosso,
retângulo, vermelho, grande e fino,
retângulo, vermelho, pequeno e fino,
triângulo, vermelho, pequeno e fino,
triângulo, azul, pequeno e fino.

b. triângulo, amarelo, pequeno e grosso,
triângulo, amarelo, grande e fino,
triângulo, azul, grande e grosso,
triângulo, amarelo, pequeno e fino,
quadrado, vermelho, pequeno e fino,
quadrado, amarelo, grande e fino,
quadrado, azul, grande e grosso,
círculo, azul, pequeno e grosso,
círculo, vermelho, pequeno e fino,
círculo, vermelho, grande e grosso,

retângulo, vermelho, grande e fino,
retângulo, azul, grande e grosso,
retângulo, azul, pequeno e fino,
retângulo, amarelo, grande e fino,
quadrado, azul, grande e fino.

c. triângulo, amarelo, pequeno e grosso,
triângulo, azul, grande e fino,
triângulo, vermelho, pequeno e grosso,
quadrado, vermelho, grande e fino,
quadrado, amarelo, pequeno e grosso,
círculo, azul, grande e grosso,
retângulo, amarelo, pequeno e grosso,
retângulo, azul, grande e fino,
retângulo, vermelho, pequeno e grosso,
retângulo, amarelo, grande e fino,
círculo, amarelo, pequeno e grosso,
círculo, vermelho, grande e fino,
quadrado, azul, pequeno e fino,
quadrado, vermelho, grande e grosso,
retângulo, vermelho, pequeno e fino.

d. triângulo, amarelo, pequeno e grosso,
círculo, azul, grande e fino,
triângulo, vermelho, pequeno e grosso,
quadrado, amarelo, grande e fino,
retângulo, vermelho, pequeno e grosso,
quadrado, azul, grande e grosso,
retângulo, amarelo, pequeno e fino,
triângulo, azul, grande e grosso,
círculo, vermelho, pequeno e grosso,
retângulo, amarelo, grande e fino,
círculo, amarelo, pequeno e grosso,
retângulo, vermelho, grande e fino,
quadrado, azul, pequeno e grosso,
triângulo, vermelho, grande e grosso,
retângulo, amarelo, pequeno e fino.

Uma variação dessa atividade é transformá-la em um jogo similar ao dominó. Distribua as 48 peças entre os participantes, e cada um na sua vez joga a peça; caso não tenha a peça que se encaixe, deixa a vez para o outro jogador. Ganha o jogo quem acabar primeiro com as peças. Inicialmente os jogadores combinam entre si qual será o número de diferenças entre as peças. Os outros jogadores precisam estar atentos para conferir se o jogador está colocando a peça correta.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 2 e 3

2. Para o trabalho com sua turma, você levou diferentes frutas. Seu objetivo inicial deve ser trabalhar a importância das frutas na saúde e conscientizar os alunos sobre seu consumo. Em paralelo, você resolveu trabalhar a Matemática com os alunos pedindo a eles que organizassem as frutas de diferentes maneiras.

Descreva duas situações nesse contexto.

COMENTÁRIO

As frutas são um tipo de material não-estruturado. Outra situação é trabalhar o peso das frutas, de forma intuitiva, ou com o auxílio de uma balança. Outros tipos de classificação podem ser: pela cor das frutas ou pela letra inicial do nome da fruta. Na Aula 8, foram dados outros exemplos de materiais não-estruturados: o crachá e as tiras com palavras.

MATERIAIS QUE CONTRIBUEM PARA A COMPREENSÃO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E AS OPERAÇÕES

Material Dourado

O Material Dourado Montessori destina-se a atividades que auxiliam o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal, e dos métodos para efetuar as operações fundamentais (ou seja, os algoritmos). Ele foi apresentado a você na Aula 9.

No ensino dito tradicional, as crianças acabam "dominando" os algoritmos a partir de treinos cansativos, mas sem conseguirem compreender o que fazem. Com o Material Dourado a situação é outra: as relações numéricas abstratas passam a ter uma imagem concreta, facilitando a compreensão. Obtém-se, então, além da compreensão dos algoritmos, um notável desenvolvimento do raciocínio e um aprendizado bem mais agradável.

O Material Dourado faz parte de um conjunto de materiais idealizados pela médica e educadora italiana Maria Montessori.

O professor pode trabalhar situações de:

• Reconhecimento do material.

Pedir aos alunos que separem o material. Veja:

Pegue uma barra e cubinhos. Quantos cubinhos são necessários para formar uma barra de mesmo tamanho que a que você pegou?

Pegue uma placa e barras. Quantas barras são necessárias para formar uma placa de mesmo tamanho que a que você pegou?

Faça a mesma coisa, agora pegando um cubo e placas. Quantas placas são necessárias para formar um cubo de mesmo tamanho que o que você pegou?

É possível formar uma barra (do mesmo comprimento que a do material) com 12 cubinhos? Vai sobrar algum cubinho?

• Nunca 10.

Usando dois dados, cada um na sua vez joga os dois dados e soma os pontos obtidos. Esse total determina a quantidade de cubinhos que o jogador vai ganhar. Quando o jogador juntar 10 cubinhos deverá, na sua vez, realizar a troca, isto é, juntar dez cubinhos e trocar por uma barra. Caso ele esqueça de realizar a troca, perderá os dez cubinhos. Ganha quem atingir um determinado total de barras combinado pelo grupo.

Pedir que os alunos respondam perguntas do tipo:

1 barra tem o mesmo tamanho (comprimento) que ____ cubinhos juntos.

10 barras juntas formam 1 ________

1 placa tem _____ cubinhos.

• Representação no sistema decimal.

Pedir para que os alunos representem diferentes números com o Material Dourado.

Separar peças citadas do material e descobrir qual é o número que elas representam em cada um dos casos, por exemplo, 3 placas, 2 barras e 5 cubinhos.

• Decomposição.

Fazer perguntas como:

Se vocês têm 1 placa, 2 barras e 2 cubinhos, quantos cubinhos precisam pegar para ficar com 1 placa e 3 barras?

Se vocês têm 1 placa, 3 barras e 4 cubinhos, quais e quantas são as peças que precisam pegar para ficar com 2 placas?

• Operações.

Na adição e na subtração, podemos pedir que os alunos separem dois números, façam a conta com o material e registrem o resultado em uma tabela como a que você vê a seguir, com o cuidado de que na subtração eles escolham o segundo número maior que o primeiro. É importante que o professor trabalhe em conjunto com o material a conta feita no papel (algoritmo) e identifique no material o passo-a-passo do algoritmo. Uma tabela pode ajudar nessa tarefa.

	Placa	Barra	Cubinho
Representar a 1ª parcela			
Representar a 2ª parcela			
Representar o resultado			

Registro da Adição

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

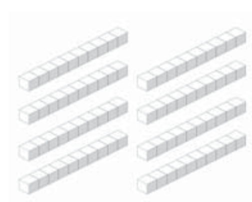
3. Com o auxílio do Material Dourado, explique:

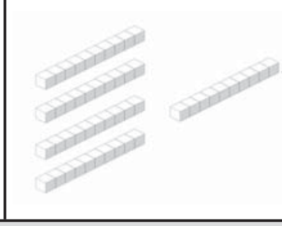
a. O "vai um" na conta 37 + 46.

b. O "pedir emprestado" na conta 82 – 25.

RESPOSTA COMENTADA

a. Primeiro representamos os números, depois fazemos as transformações.

	Barra	Cubinho
Representar a 1ª parcela		
Representar a 2ª parcela		

Representar o resultado		

Quando armamos a conta e fazemos a adição das unidades, 7 + 6, encontramos 13 unidades e transformamos esse número em 1 dezena e 3 cubinhos. A seguir, essa dezena transformada é agrupada com as dezenas 3 e 4, e temos 1 + 3 + 4 = 8.

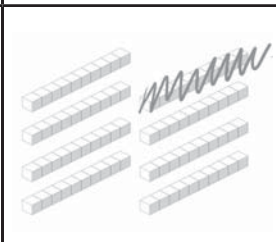
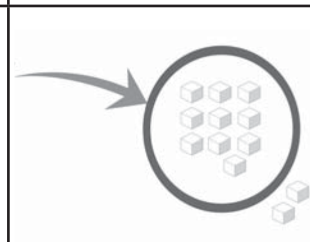
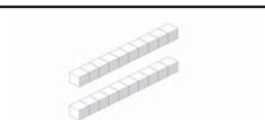
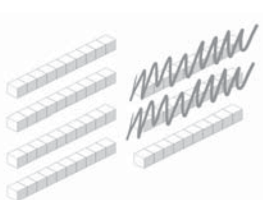
$$\begin{array}{r} 37 \\ +\;46 \\ \hline 3 \end{array}$$

O resultado é 13 unidades. O 3 é colocado nas unidades e 10 unidades são transformadas em 1 dezena

$$\begin{array}{r} 1\;\, \\ 37 \\ +\;46 \\ \hline 83 \end{array}$$

A expressão amplamente difundida "vai um" significa a transformação de 10 unidades em 1 dezena. Ela não é adequada, pois dá a sensação de que o número ganhou alguma coisa que não tem, mas é muito difundida. Utilizando ou não essa expressão, é preciso que o aluno compreenda as trocas ou transformações.

b. Primeiro representamos os números.

	Barra	**Cubinho**
Representar a 1ª parcela		
Representar a 2ª parcela		
Representar o resultado		

Quando armamos a conta e tentamos fazer a subtração das unidades, deparamo-nos com o fato de que, nos números naturais, não podemos retirar 5 unidades de 2 unidades. Precisamos fazer agora a transformação contrária a da adição: transformamos 1 dezena em 10 unidades. Após a transformação, retiramos 5 de 12, encontrando 7 unidades. Como 1 das 8 dezenas do 82 foi transformada em 10 unidades, temos agora 7 dezenas, de onde temos que retirar 2, restando 5 dezenas. Assim, temos o resultado 57.

$$\begin{array}{r} \overset{7}{\cancel{8}}2 \\ -\ 25 \\ \hline \end{array}$$

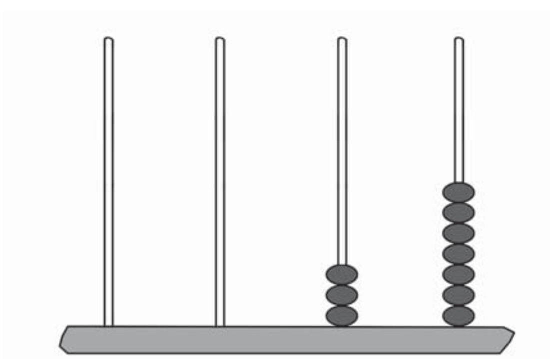
Transformamos uma dezena do número 82 em 10 unidades. Ficaram 7 dezenas.

Retiramos agora 5 de 12 unidades
e 2 de 7 dezenas

$$\begin{array}{r} \overset{7}{\cancel{8}}2 \\ -\ 25 \\ \hline 57 \end{array}$$

Ábaco

Como vimos na Aula 9, os ábacos são conhecidos desde a Antiguidade pelos egípcios, chineses e etruscos. Consistiam em estacas fixas verticalmente no solo ou numa base de madeira na qual se podiam enfiar folhas, conchas, pedras, pedaços de osso ou de metal que representavam números, cujo valor dependia da estaca onde eram colocados. Os ábacos de arame devem ter surgido no Oriente, supondo-se que foram os mongóis os responsáveis pela sua introdução na Europa. Nos ábacos chinês e japonês (soroban), os cálculos podem ser efetuados na base dez. Os arames representam, da direita para a esquerda, as unidades, as dezenas, as centenas etc. As contas situadas por cima da barra horizontal valem 5 (unidades, dezenas, centenas...) as de baixo valem 1.



Todas as atividades com o ábaco são organizadas para levar o aluno a refletir sobre o valor posicional, as regras de representação de quantidades no sistema de numeração decimal e suas operações.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

4. Agora utilizando o ábaco, explique a ação do material nas contas:

c. 37 + 46.

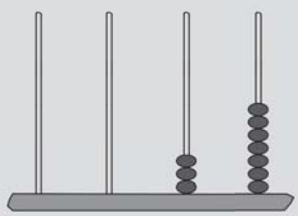
d. 82 – 25.

RESPOSTA COMENTADA

A ação da conta no ábaco é diferente da do Material Dourado. Na haste do ábaco, nunca podemos ter mais de 10 peças.

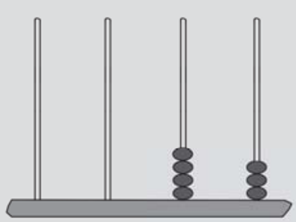
a.

Representamos o número 37 no ábaco.

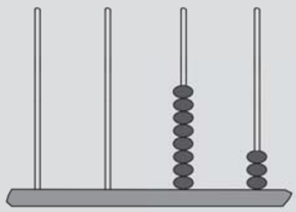


Temos que colocar 6 unidades na haste das unidades, mas, quando colocamos 3 unidades, encontramos 10 peças e temos que fazer a transformação.

Agora podemos colocar as outras 3 peças nas unidades.

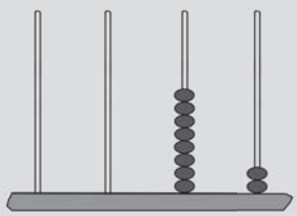


Por fim, colocamos as 4 peças nas dezenas.

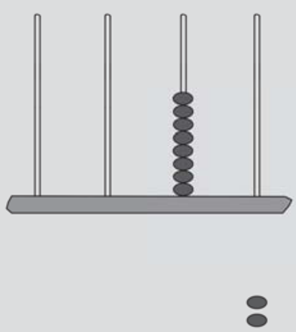


Encontrando o número 83.

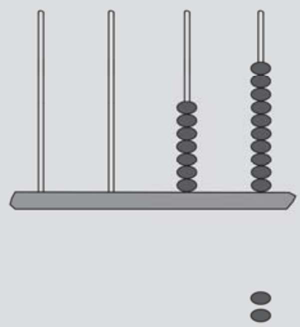
b.
Representamos o número 82 no ábaco.



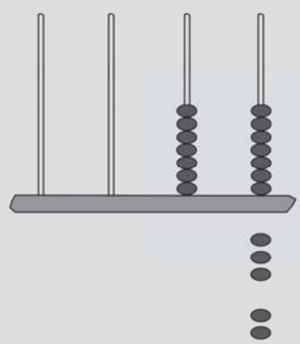
Temos que retirar 5 unidades das 2. Não podemos transformar ainda porque no ábaco não podemos ter mais de 10 peças em cada haste. Assim, em vez de retirar 5 unidades de uma vez, temos que retirar primeiro 2 unidades.



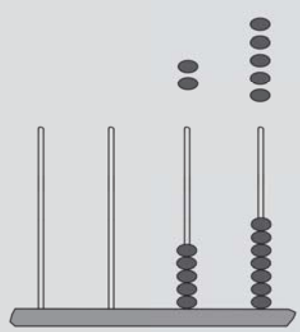
Agora transformamos uma peça das dezenas em 10 peças na haste das unidades.



Podemos retirar as 3 peças restantes das unidades.



Resta apenas retirar duas peças da haste das unidades.



E encontramos o número 57.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

5. Para trabalhar com a sua turma, um professor levou canudos, copos plásticos e dados.

Dividiu a turma em grupos e pediu aos alunos a seguinte atividade:

- Primeiro jogariam um dado e pegariam o número de copos de acordo com o resultado do dado;
- Depois jogariam novamente o dado e colocariam o número de canudos que depositariam em cada copo.
- O total de canudos é registrado no quadro-negro, e ganha a brincadeira o grupo que em 5 rodadas pegar mais canudos.

Assim, por exemplo, jogando o dado e saindo o número 4, o grupo pega 4 copos. Jogando novamente o dado e saindo o número 2, o grupo coloca 2 canudos em cada copo. O total de canudos desse grupo é 8.

a. Que idéias matemáticas o professor está trabalhando nessa atividade?

b. Pense em duas perguntas que o professor poderia fazer à turma após a brincadeira.

RESPOSTA COMENTADA

a. O professor está trabalhando o cálculo mental, a adição, a ação da multiplicação como adição de parcelas iguais.
b. Muitas explorações podem ser feitas a partir dessa atividade. Veja alguns questionamentos que o professor pode fazer:
• Em uma rodada o grupo pegou 5 copos e colocou 3 canudos em cada copo. Como podemos escrever essa conta com uma expressão matemática?
• Qual é o maior número de pontos que um grupo pode fazer em uma rodada? E o menor?
• Um grupo teve um total de 10 canudos em uma rodada. Quais são as possibilidades de que isso ocorra?

Material Cuisenaire ou Réguas de Cuisenaire ou Escala Cuisenaire

Mais uma vez resgatamos um material utilizado na Aula 17, o material didático denominado de Réguas de Cuisenaire ou ainda Escala de Cuisinaire. Esse material é composto por “réguas” (em forma de paralelepípedos) de tamanho crescente de 1 a 10, em que cada tamanho está associado a uma cor. Ele é encontrado comercialmente em madeira ou em borracha. Sua forma é tridimensional, mas pode ser confeccionado em cartolina ou qualquer outro material resistente. Normalmente, a composição do material obedece ao seguinte padrão:

Tabela 23.1: Padrão das Barras de Cuisenaire

Tamanho	Cor	Letra que representa cada cor	Relacionando com a branca
1	branco	b	b = b
2	vermelho	v	v = 2b = b + b
3	verde-claro	c	c = 3b = v + b
4	roxo	r	r = 4b = c + b
5	amarelo	a	a = 5b = r + b
6	verde-escuro	e	e = 6b = a + b
7	preto	p	p = 7b = e + b
8	marrom	m	m = 8b = p + b
9	azul	z	z = 9b = m + b
10	laranja	l	l = 10b = z + b

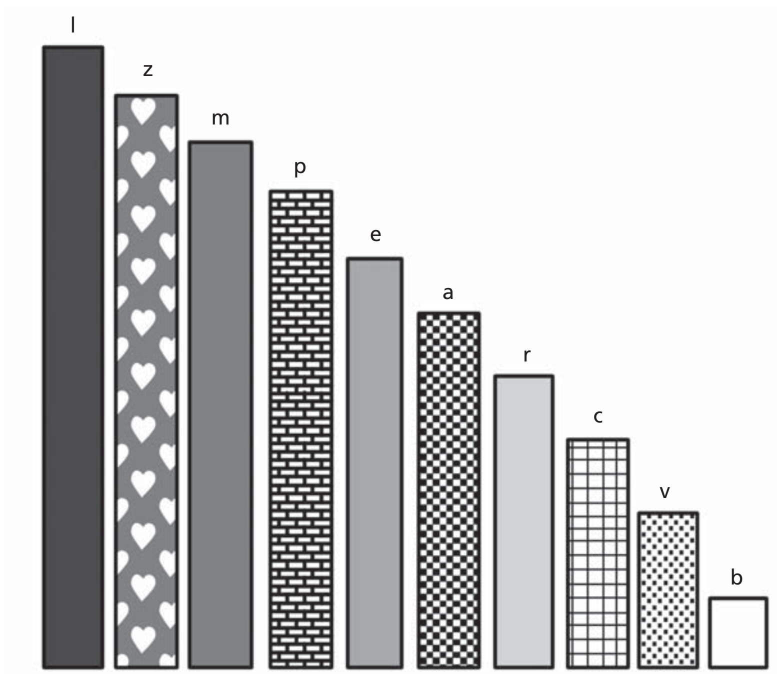


Figura 23.1: Material de Cuisenaire.

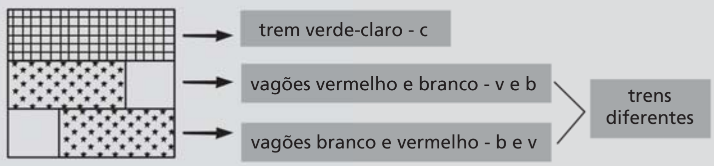
Por sua composição, esse material pode ser usado para explorar adição e subtração, considerando que cada uma corresponda aos números naturais de 1 a 10 (vimos isso na Aula 17). Nesta aula, vamos explorar um outro potencial do material: o trabalho com trens e vagões.

Com as Réguas de Cuisinaire, podemos elaborar atividades sobre a construção do conceito de número, comparação, operações e relações entre números e medidas.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

6. Imagine que cada "régua" do material é um trem ou vagões de um trem. Assim, pegue a régua r (roxa) e forme todos os trens possíveis do tamanho dessa peça. Mas atenção para a seguinte regra: ao combinarmos vagões (réguas) em ordens diferentes, formamos trens diferentes. Assim, por exemplo, o trem c (verde-claro) tem o mesmo tamanho do trem formado pelos vagões b e v e também por v e b. Observe a ilustração a seguir, para entender melhor.



a. Quantos trens do tamanho do trem r, incluindo o próprio trem r, tem no total?

b. Encontre todos os trens do tamanho do trem a, incluindo o trem a.

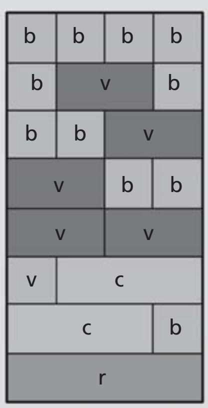
c. Encontre todos os trens do tamanho do trem c, incluindo o trem c.

d. Encontre todos os trens do tamanho do trem v, incluindo o v.

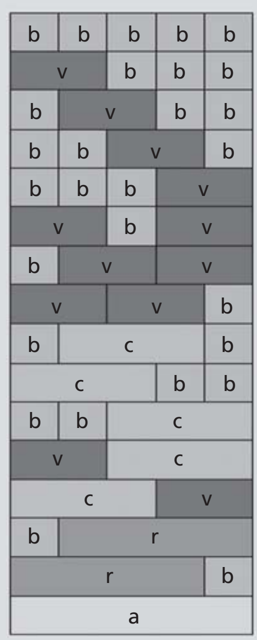
e. Encontre todos os trens do tamanho do trem b, incluindo o trem b.

RESPOSTAS

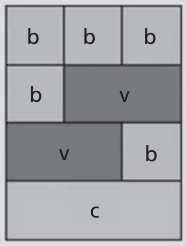
a. 8.



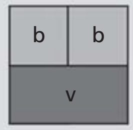
b. 16.



c. 4.



d. 2.



e. 1.

Com as informações que você obteve na Atividade 6, monte uma tabela para explorar regularidades numéricas.

Tabela 23.2: Regularidades numéricas com a régua de Cuisenaire

Cor	Tamanho	Quantidade de trens	
branco	1	1	
vermelho	2	2	× 2
verde-claro	3	4	× 2
roxo	4	8	× 2
amarelo	5	16	× 2

Observe que, à medida que aumentamos o tamanho do trem de uma unidade, a quantidade de trens que podem ser construídos dobra, ou seja, é a quantidade anterior multiplicada por 2.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

7. Usando essa regularidade, preencha o restante da tabela

Cor	Tamanho (m)	Quantidade de trens (t)
branco	1	1
vermelho	2	2
verde-claro	3	4
roxo	4	8
amarelo	5	16
verde-escuro	6	
preto	7	
marrom	8	
azul	9	
laranja	10	

RESPOSTA COMENTADA

Cor	Tamanho (m)	Quantidade de trens (t)
branco	1	1
vermelho	2	2
verde-claro	3	4
roxo	4	8
amarelo	5	16
verde-escuro	6	32
preto	7	64
marrom	8	128
azul	9	256
laranja	10	512

Podemos expressar essa regularidade de maneira geral, escrevendo a seguinte relação: $t = 2^{m-1}$*, em que m representa o tamanho do trem e t a quantidade total de trens.*

Sua resposta termina aqui, a atividade dos trens já foi trabalhada com alunos de 2ª série do Ensino Fundamental em diante. Numa série do programa Salto para o Futuro *da TV-Escola, exibido originalmente em maio de 2003, você poderá ver como essa atividade foi explorada com as crianças. Se houver um teleposto em sua cidade, não deixe de checar se há gravações desse programa.*

Jogos com operações

As atividades lúdicas favorecem o desenvolvimento de habilidades tais como a capacidade de pensar, raciocinar e resolver situações-problemas, levando o aluno a construir o conhecimento matemático e a desenvolver sua concentração, curiosidade, companheirismo e autoconfiança. Os jogos podem trabalhar na construção de um conceito, mas a maioria atua na sistematização de determinado conteúdo.

Para o trabalho com o sistema de numeração, temos muitas possibilidades, podemos criar situações adaptando jogos que já existem, como o jogo da memória e os dominós. Como exemplo, veja o jogo do zigue-zague.

Para esse jogo, os alunos devem jogar em grupos de 2 a 4 pessoas. O jogo é constituído de um tabuleiro com 99 números, tendo um ponto de partida e um ponto de chegada.

CHEGADA

2	9	7	4	6	8	7	5	9
5	4	3	8	9	1	2	5	4
8	7	6	3	5	4	9	2	7
6	2	5	7	8	7	6	4	3
8	7	3	6	4	1	2	5	1
2	4	8	5	9	7	6	8	5
7	3	2	1	5	4	5	7	3
5	8	7	2	8	7	6	9	8
8	4	5	6	7	3	6	5	3
2	8	1	8	10	7	9	4	5
7	5	6	9	4	2	8	1	3

PARTIDA

Figura 23.2: Tabuleiro do zigue-zague.

Usa ainda 3 dados e um pião para cada jogador. Os piões são colocados na linha de partida, sendo que o objetivo do jogo é ser o primeiro a alcançar a linha de chegada. Os jogadores se revezam lançando os 3 dados juntos.

Após ser escolhida a ordem da jogada, cada participante escolhe na primeira linha acima da partida onde deseja colocar o seu pião. Os jogadores não podem ocupar o mesmo lugar.

7	5	6	9	4	2	8	1	3

Figura 23.3: Primeira linha do jogo zigue-zague.

Após escolher a posição e a ordem dos jogadores, devemos jogar os três dados juntos. O jogador poderá subir verticalmente, ou em diagonal. Escolhendo, por exemplo, o número 6, o jogador tem as seguintes opções:

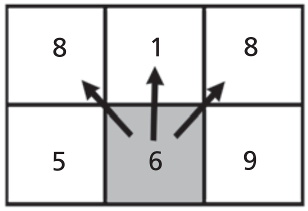


Figura 23.4: Exemplo de possibilidade de jogada.

Suponha que os dados marquem 6, 3 e 1.

O jogador deve então fazer uma conta, usando a adição ou a subtração, em qualquer ordem, e seu objetivo é encontrar 1 ou 8. Nesse caso, ele pode fazer 6 + 3 – 1 (os números e os sinais podem ser usados em qualquer posição e você pode usar só +, ou só – também).

Como o resultado é 8, o jogador sobe com o pião para uma das casas com o número 8 e dá os dados para o próximo participante.

Mas suponha que você, ainda na casa 6, jogou o dado e eles marcaram 2, 2 e 2.

É! Você não teve sorte. Não há como fazer uma conta usando "+" e "–" e três vezes o 2 que dê 1 ou 8 como resultado. Aí você passa a vez ao próximo jogador e fica no mesmo lugar, até que seja sua vez de novo.

Ganha o jogo quem chegar em qualquer número da fileira superior primeiro.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

8. Mãos à obra! Reproduza o tabuleiro e jogue com outras pessoas. Relate as situações ocorridas e os aspectos que você considera positivos ou negativos. Entregue e discuta com seu tutor.

RESPOSTA COMENTADA

A resposta é pessoal, mas procure ter a vivência do jogo e basear seus registros nessa experiência. Observe o que acontece quando você vai parar no canto, verifique o quanto a sorte é importante e também reflita sobre a diferença entre selecionar operações e simplesmente fazer uma conta.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

9. Jogo da casinha equilibrada – Este jogo é constituído por quatro casas, cada uma com um fator multiplicador. Quando se escreve um algarismo na casa, a quantidade de pontos é obtida pelo produto desse algarismo pelo fator multiplicador da casa. A soma de todos os pontos das casas dá o total de pontos do jogador.

×4	×3	×2	×1

Considere o exemplo a seguir.

O desafiante coloca um algarismo em cada casa:

×4	×3	×2	×1
3	0	0	2

Então, o número de pontos obtidos pelo desafiante é:

$3\times4 + 0\times3 + 0\times2 + 2\times1 = 12 + 0 + 0 + 2 = 14$

Para que a pessoa desafiada vença o jogo, ela precisa fazer exatamente o mesmo número de pontos do desafiante, mas sem repetir o mesmo jogo. Caso contrário, o desafiante vence. Assim, se ela colocar

×4	×3	×2	×1
2	0	2	2

o número de seus pontos será:

$2\times4 + 0\times3 + 2\times2 + 2\times1 = 8 + 0 + 4 + 2 = 14$,

e ela vencerá a rodada.

!

Você pode fazer esse jogo em folha de papel A4, e os alunos podem completar os tabuleiros com lápis.

a. Imagine que uma rodada tenha sido assim:

Desafiante

Pessoa desafiada

Quem ganhou essa rodada? Por quê?

b. Na rodada a seguir, qual deve ser o valor de N para que a pessoa desafiada ganhe o jogo?

Desafiante

Pessoa desafiada

RESPOSTA COMENTADA

a. O desafiante, pois a pessoa desafiada não conseguiu encontrar a mesma soma.

b. A soma do desafiante é $5 \times 4 + 4 \times 3 + 0 \times 2 + 5 \times 1 = 37$.

Assim, temos que $6N + 7$ tem que dar 37.

O que significa que 6N resulta em 30 e que N vale 5.

MATERIAIS QUE CONTRIBUEM PARA DESENVOLVER A VISÃO GEOMÉTRICA

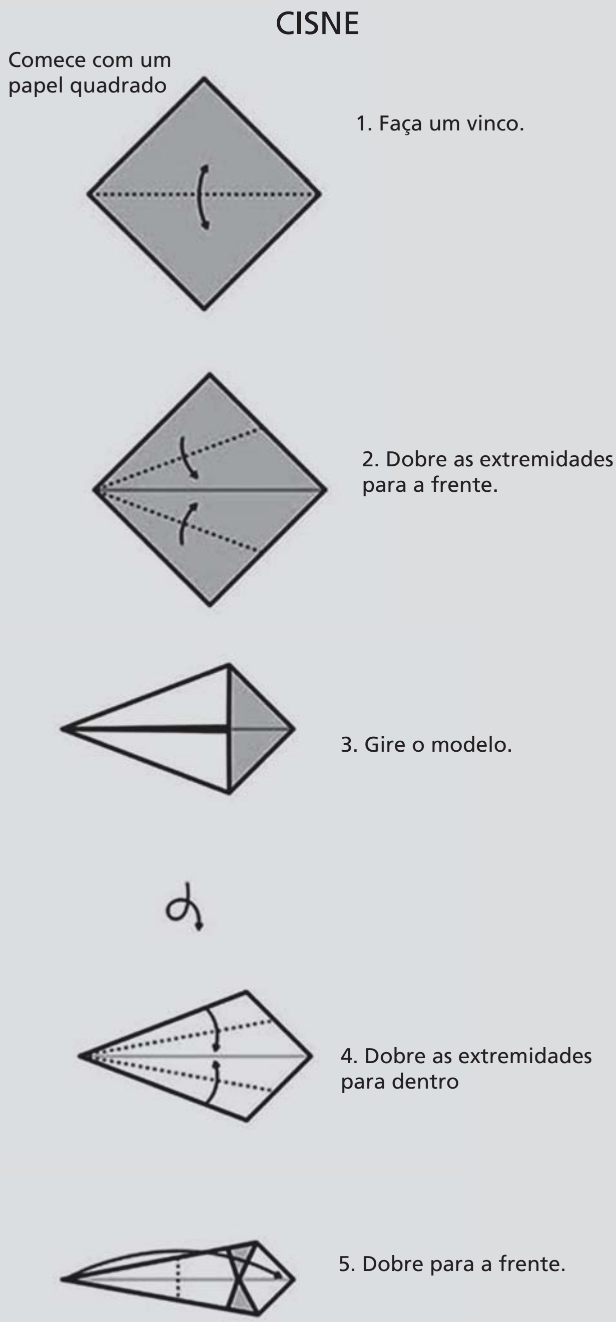
Desenvolver a visualização é fundamental. É considerado um primeiro nível de desenvolvimento do pensamento geométrico. Existem diferentes materiais em que podemos explorar essas características. Nesta aula, vamos dar alguns exemplos que envolvem recortes de papel, colagem e dobraduras ou origamis.

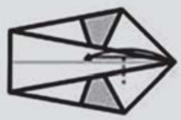
Origami é a arte de dobrar papéis da cultura japonesa.

ATIVIDADE

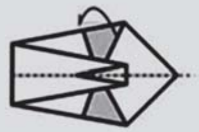
Atende ao Objetivo 1

10. Veja passo a passo o origami de um cisne. Pegue um papel quadrado e faça você também. Observe as figuras geométricas e propriedades de que você se recorda.



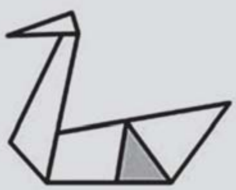


6. Dobre a ponta para trás.



7. Dobre no meio.

8. Puxe para a frente
e ajeite o bico.



O cisne está pronto!

Fonte: http://www.comofazerorigami.com.br/
origami-de-cisne/

RESPOSTA COMENTADA

Durante a construção, o professor aproveita para destacar as formas geométricas e suas propriedades. Por exemplo, a figura inicial é um quadrado, que é dobrado ao meio, pela diagonal, ligando dois vértices opostos, e fica dividida em dois triângulos retângulos. Pontos médios, segmentos paralelos e perpendiculares, novos triângulos e quadriláteros são algumas das muitas explorações que podem ser feitas no processo de construção do cisne.

Tangram

O Tangram é um jogo, de origem chinesa que existe há aproximadamente 4.000 anos. O Tangram funciona como um quebra-cabeça que se tornou bastante popular no final do século XVIII e no início do século XX.

Observe, no roteiro a seguir, as etapas da construção de um Tangram. Para isso, você pode partir de um quadrado. Veja e construa um, para trabalharmos as atividades.

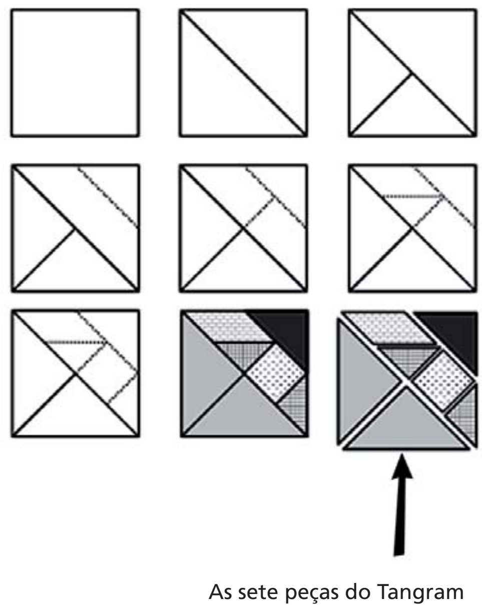


Figura 23.5: As sete peças do Tangram.

Das 7 peças, temos 5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo. Vamos nomeá-las: TG (triângulo grande), TM (triângulo médio), TP (triângulo pequeno), Q (quadrado) e P (paralelogramo).

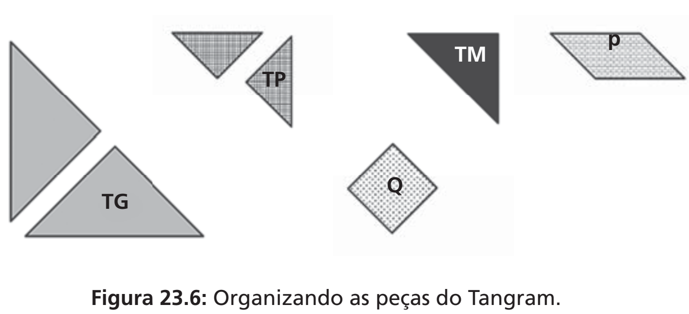


Figura 23.6: Organizando as peças do Tangram.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

11. Com duas peças, construa:

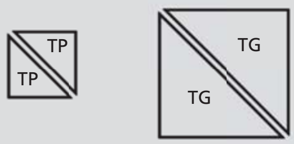
a. um quadrado.

b. um triângulo.

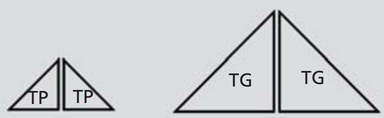
c. um trapézio.

RESPOSTA

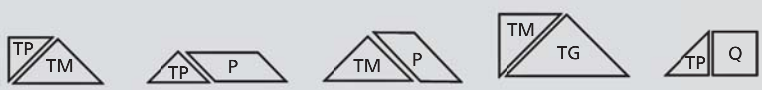
a.



b.



c.



ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 1 e 2

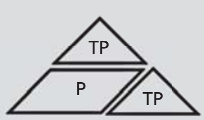
12. Com três peças, construa:

a. um triângulo.

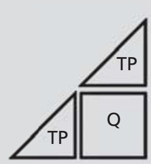
b. um retângulo.

RESPOSTA

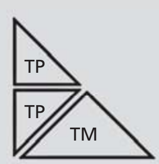
a.



ou



ou



b.

CONCLUSÃO

Existe uma diversidade de materiais, estruturados ou não, para o trabalho em sala de aula. Cabe ao professor selecionar, elaborar, pesquisar sobre as possibilidades de cada material. O valor está nas tarefas que o aluno desenvolve, e o material contribui para que ele crie ações mentais relevantes.

É importante também que você perceba que a perspectiva do trabalho no concreto não garante a aprendizagem. Para que o aprendizado ocorra, o aluno precisa transpor os limites do objeto e estabelecer relações. O material deve ser visto como mais um dentre os outros recursos que podem ser utilizados para contribuir com uma aprendizagem significativa.

ATIVIDADE FINAL

Atende ao Objetivo 3

Imagine que você irá confeccionar um material com a mesma estrutura dos Blocos Lógicos para trabalhar com seus alunos. Idealize-o, identificando quais serão os atributos e valores desse material. Minha proposta é que ele possua 60 peças no total.

RESPOSTA COMENTADA

Um exemplo é aproveitar para explorar a geometria espacial relacionada com agrupamentos e classificações.
Uma possibilidade é ter 4 atributos com os valores 5, 3, 2 e 2, porque o número de peças é 5×3×2×2 = 60.
Veja os atributos e valores considerados:

- *5 formas: pirâmide, cone, cubo, cilindro e esfera;*
- *3 cores: amarelo, vermelho e azul;*
- *2 tamanhos: pequeno e grande;*
- *2 texturas: liso e áspero.*

RESUMO

Materiais concretos são materiais que podemos tocar, sentir ou olhar. Seu uso está muito difundido pelas práticas baseadas no construtivismo, em que se valorizam as relações sujeito e objeto para que o aprendizado ocorra. Entretanto, para que haja aprendizagem, é preciso que o aluno compreenda e relacione, ou seja, manipule o material e descubra suas características e potencialidades, e isso só é possível por meio de atividades que o orientem nesse caminho.

Há pessoas que defendem e outras que não gostam da utilização do material. É importante que você os conheça, veja suas potencialidades e tome suas decisões. O material é mais um recurso disponível no trabalho de sala de aula, e a decisão sobre sua utilização deve ser sempre do professor.

Os materiais podem ser estruturados (quando foram idealizados para o trabalho com os conteúdos matemáticos) ou não-estruturados (quando têm outro uso e são adaptados para a sala de aula).

Dentre os materiais estruturados, para trabalhar classificação e agrupamentos dispomos dos Blocos Lógicos e das Barras de Cuisenaire. Já para o sistema de numeração e suas operações dispomos, além desses, do Material Dourado e do ábaco. Cada material proporciona uma ação diferente por meio da manipulação. Quando se trata de materiais não-estruturados, o limite é sua criatividade, canudos, palitos, grãos, sucatas, elásticos e copos, e você pode criar jogos e brincadeiras nessa direção.

As atividades feitas com situações que envolvem jogos também podem ser bons recursos para o professor. No jogo do zigue-zague, podemos trabalhar o cálculo mental e na casinha equilibrada, as diversas possibilidades de se atingir o mesmo resultado.

Nos caminhos da geometria, atividades com dobraduras em um quadrado, origamis, são excelentes para destacar formas e propriedades geométricas. O Tangram, um quebra-cabeça formado a partir de dobraduras de um quadrado, é formado por sete peças, e além de possibilitar a formação de diferentes figuras, é excelente para trabalhar as formas, a decomposição de figuras e suas propriedades.

Conhecendo esses materiais, você já pode formar sua opinião acerca do uso de materiais concretos e decidir quando e como utilizá-los.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

O que você pensa sobre treinamentos? Vamos falar sobre isso na próxima aula.

AULA 24

Formando e formalizando conceitos

Meta da aula

Apresentar a importância dos elementos essenciais à formalização de conceitos ligados a cada um dos quatro blocos de conteúdos matemáticos sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

- reconhecer a importância da formalização de conceitos matemáticos durante o processo de ensino-aprendizagem;
- identificar ideias essenciais para a formalização de conceitos ligados ao bloco *números e sistemas de numeração*;
- identificar ideias essenciais para a formalização de conceitos ligados ao bloco *espaço e forma*;
- identificar ideias essenciais para a formalização de conceitos ligados ao bloco *grandezas e medidas*;
- identificar ideias essenciais para a formalização de conceitos ligados ao bloco *tratamento da informação*;
- promover reflexões sobre a importância da formalização de conceitos matemáticos em cursos de formação de professores para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Pré-requisito

Para um bom aproveitamento desta aula, é necessário que você tenha conhecimento dos conceitos matemáticos ligados a cada bloco de conteúdos sugerido pelos PCN de Matemática para o 1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental.

INTRODUÇÃO

Atualmente, muitas pesquisas em Educação Matemática buscam compreender como se dá o processo de formação de conceitos matemáticos por alunos de todos os níveis de ensino. É consenso que o aluno deve ter oportunidade de construir esses conceitos. É consenso também que, na medida do possível, os conceitos devem ser organizados e formalizados pelos próprios alunos. Compete ao professor criar condições para que isso ocorra. Por meio da análise das situações que o aluno vivencia, inicia-se o processo de formação e formalização dos conceitos. Nesta aula, vamos apresentar aspectos conceituais ligados a cada bloco de conteúdos matemáticos que devem ser priorizados pelo professor na análise das situações com os alunos.

FORMALIZANDO CONCEITOS

Quando ouvimos falar em formalização de conceitos matemáticos, pensamos logo num texto escrito com símbolos matemáticos cujo entendimento é restrito aos especialistas no assunto. É verdade que a pessoa que produziu aquele texto já passou por um longo processo de formação e formalização de conceitos matemáticos. Porém, não é verdade que os alunos dos anos iniciais, que ainda não são capazes de produzir essas escritas, não formalizem conceitos matemáticos. Na Atividade 1, vamos refletir um pouco sobre o que é formalizar um conceito.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

1. Vamos começar aprofundando as ideias sobre a formalização de conceitos. Pesquise no dicionário o significado da palavra *formalização*. Em seguida, escreva seu entendimento sobre a *formalização de conceitos matemáticos* e tente explicar por que o professor deve se preocupar com a *formalização* de conceitos matemáticos ao longo do processo de ensino-aprendizagem.

____

____

____

COMENTÁRIO

Sintetizando as definições apresentadas em vários dicionários, formalização é o ato ou efeito de formalizar, e formalizar, por sua vez, pode *significar realizar ou executar segundo formas, regras ou formalidades. Há, ainda, dois últimos significados, que não se adequam ao uso que faremos nesta aula, que são dar-se por ofendido, melindrar-se. Ao integrar a definição do dicionário com as reflexões sobre o ensino de Matemática estabelecidas neste e em outros módulos, você poderá concluir que formalizar conceitos matemáticos é dar aos conhecimentos matemáticos produzidos pelas crianças em atividades realizadas nas situações escolares ou não escolares um tratamento que se utiliza das regras e formalidades da Matemática, como, por exemplo, uso de uma simbologia específica e emprego rigoroso de raciocínios indutivos e dedutivos. É importante que o professor tenha em vista a formalização dos conceitos, pois é por meio dela que conseguimos extrair os componentes essenciais de um conceito e empregá-lo ou reconhecê-lo em outras situações diferentes daquela em que nos confrontamos com ele inicialmente.*

É importante, entretanto, mencionar que há etapas na formalização de um conceito matemático. Não é das primeiras experiências que envolvem o conceito que obteremos elementos suficientes para formalizá-lo com todo o rigor matemático que, encontramos no meio acadêmico. É preciso tê-lo bem formado. Um conceito está associado a muitos outros, a várias representações e a situações diversas. Vergnaud (1990), psicólogo francês, criador de uma **TEORIA COGNITIVISTA** muito empregada em pesquisas sobre a compreensão de conceitos matemáticos, defende ainda que, devido a isso, um conceito não pode ser estudado isoladamente, é mais correto estudarmos o campo conceitual associado a ele, que corresponde a todas as situações, representações e outros conceitos que lhe conferem significado.

As **TEORIAS COGNITIVISTAS** buscam explicar como se dá a aquisição ou a compreensão de um conhecimento. A teoria cognitivista de Vergnaud é a Teoria dos Campos Conceituais.

Consequentemente, podemos afirmar que a formação é um processo longo que se estabelece por vários anos de estudo, e é necessário retomar-se o conceito em diferentes momentos da vida escolar. Como a formação e a formalização se influenciam, pois não é possível formalizar um conceito que não está minimamente formado nem é possível avançar na formação de um conceito sem tê-lo, de algum modo, formalizado, podemos dizer que a formalização também é um processo longo que deve ser iniciado desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. É evidente que dificilmente um aluno desse nível de ensino conseguirá formalizar conceitos rigorosamente. Na maioria das vezes, qualquer afirmação mais geral sobre um conhecimento ainda é feita tendo como referência a situação em que foi vivenciado e suas representações envolvem desenhos, palavras da língua materna e até gestos. Entretanto, cabe ao professor, ao final de cada atividade, incentivar a análise das situações, a observação de regularidades, o levantamento e o teste de hipóteses e o registro das ideias construídas. Assim, estará criando condições para que seus alunos iniciem os processos de formação e formalização de conceitos. Procuramos nas atividades a seguir apontar questões imprescindíveis na análise de situações relacionadas a cada bloco de conteúdos matemáticos, cujo ensino no 1º e 2º ciclos é sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. Inicialmente, propomos que você vivencie a situação, que pode ser um jogo ou outra atividade lúdica qualquer. Posteriormente propomos a reflexão sobre os conhecimentos nela envolvidos.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

2. Vamos jogar dez não pode. Se você não tiver um adversário, jogue só, assumindo as duas posições (a sua e a de seu adversário). O importante é que você compreenda o jogo. Depois de jogar, analise os conhecimentos que podem ser construídos pelos alunos enquanto jogam. Sugira variações nas regras que favoreçam a construção de novos conceitos.

Dez não pode
Número de participantes: 2 a 5.
Material: Material Dourado e um dado.
Regras:
1ª) Cada aluno, na sua vez, joga o dado e pega tantos cubinhos (unidade) quantos forem os pontos do dado.
2ª) Quando alguém juntar dez elementos iguais, deverá trocá-los por um elemento que tenha o valor equivalente ao dez. Assim, dez cubinhos serão trocados por uma barra; dez barras, por uma placa; dez placas, por um cubão.
3ª) Vence quem chegar primeiro a um número combinado antecipadamente ou, então, quem tiver mais pontos depois de um tempo também combinado previamente.

COMENTÁRIO

No jogo estão envolvidos os conceitos de unidade, dezena, centena e unidade de milhar. Nos critérios para a troca, está implícita uma característica do nosso sistema de numeração: a contagem é feita por meio de agrupamentos de base 10. Além disso, durante o jogo, o aluno efetua cálculos e executa um recurso muito útil no algoritmo da adição: o "vai um". É possível alterarmos as regras, por exemplo, cada jogador pode lançar dois dados em vez de apenas um. Nesse caso, pode-se considerar a soma, a subtração ou o produto dos pontos. Há, ainda, uma alteração mais ampla no significado das peças do Material Dourado gerando o dez não pode decimal. A diferença fundamental é que, na nova versão, a unidade corresponde ao cubão; cada placa corresponde ao décimo; cada barra corresponde ao centésimo e cada cubinho corresponde ao milésimo.

Percebemos uma série de conceitos envolvidos no jogo. Contudo, não adianta apenas jogar. É preciso refletir sobre o jogo: as estratégias empregadas, possíveis mudanças nas regras e suas consequências. Identificar, por exemplo, ideias relativas aos números que são válidas em outros contextos. Registrar de várias maneiras os números envolvidos. Em outras palavras, iniciar o processo de formalização dos conceitos. Não se deve desconsiderar o fato de que a formalização, quando paralela à construção do conhecimento, pode organizá-lo melhor, complementando-o ou até reformulando-o.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

3. Na atividade anterior, você identificou os aspectos conceituais envolvidos no jogo dez não pode. Pense num material que possa substituir o Material Dourado. Formule questões a serem propostas aos alunos que poderão favorecer a formalização do sistema de numeração decimal.

____

____

____

____

____

COMENTÁRIO

O Material Dourado pode ser substituído por notas (de brinquedo) de R$ 1,00, R$ 10,00 e R$ 100,00, ou, ainda, por fichas de diferentes cores às quais o grupo atribui valores. Por exemplo, a ficha amarela corresponde à unidade; dez fichas amarelas correspondem a uma ficha vermelha; dez vermelhas correspondem a uma azul, e assim por diante.

São questões que o professor pode propor aos alunos para que eles construam os conceitos identificados na atividade anterior:

- *Quais são as peças correspondentes em cada material? Que nota ou ficha é equivalente a um cubinho? Que nota ou ficha é equivalente a uma barra? Que nota ou ficha é equivalente a uma placa?*
- *Em cada material, que peças correspondem à unidade? E à dezena? E à centena?*
- *Quantas vezes a peça que corresponde a uma unidade cabe na peça que corresponde a uma dezena?*
- *Quantas vezes a peça que corresponde a uma unidade cabe na peça que corresponde a uma centena?*
- *Quantas vezes a peça que corresponde a uma dezena cabe na peça que corresponde a uma centena?*
- *Quantas vezes a peça que corresponde a uma unidade cabe na peça que corresponde a dez unidades?*
- *Como podemos registrar os pontos usando o desenho do material? Como podemos registrar os pontos usando algarismos?*
- *Há vantagens quando registramos com algarismos? Quais?*
- *Se registramos usando o desenho do material, a ordem dos desenhos das peças pode interferir na informação sobre o número de pontos?*
- *Se registramos usando algarismos, a ordem dos desenhos das peças pode interferir na informação sobre o número de pontos?*

Na verdade, para formar e formalizar os conceitos associados ao sistema de numeração decimal, é recomendável que os alunos tenham a experiência de troca com vários materiais. O professor, por sua vez, deve propor questões que lhes permitam perceber o que não muda de uma situação vivida com um tipo de material para outra, com material diferente, o que chamamos de invariantes das situações. Assim, é importante que observem que uma dezena corresponde a dez unidades, uma centena corresponde a cem unidades ou a dez dezenas etc. É fundamental também que o professor incentive o registro das situações com várias linguagens, entre elas, a linguagem matemática. O Quadro Valor de Lugar (Q. V. L.) é um recurso muito útil para isso.

> Os símbolos que compõem a linguagem matemática, assim como os símbolos que compõem qualquer linguagem, precisam ter seus significados *negociados* pelos indivíduos que irão usá-los. A *negociação* dos significados dos símbolos deve ser feita em meio às atividades e ao registro de cada etapa que as compõe, recorrendo-se, sempre que necessário, aos elementos do contexto que estão sendo representados. O uso da linguagem matemática é um dos principais aspectos que favorecem a formalização de conceitos.

Cabe ressaltar apenas que o levantamento dos *invariantes* das situações e o registro das ideias vivenciadas em cada uma em diferentes linguagens são estratégias para a formação e formalização de outros conceitos, não somente daqueles associados diretamente ao sistema de numeração decimal. Na próxima atividade, destacaremos a relevância dessas ações na construção dos conceitos sugeridos no bloco *grandezas e medidas*.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 3

4. Frequentemente, quando desejam trabalhar medidas de comprimento, muitos professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental propõem a seus alunos que meçam as dimensões de objetos ou distâncias dentro do espaço escolar. Para medir, as crianças utilizam unidades padronizadas como o metro e o centímetro ou unidades não padronizadas, como o próprio pé ou palmo. Pensando sobre essas ações em sala de aula, responda:

a) Apenas elas asseguram a compreensão do conceito de medir?

____

b) O que o professor pode fazer depois que seus alunos medirem os comprimentos para que eles avancem na construção dos conceitos associados à medição de comprimento e iniciem a formalização do mesmo?

____

____

____

RESPOSTAS COMENTADAS

a) Como vimos nas atividades anteriores, apenas a atividade lúdica não é suficiente para que o aluno construa conceitos. Elas são, na verdade, o primeiro passo. Depois delas, é necessário que os alunos reflitam sobre fatos vividos e observados enquanto as realizavam, que comparem suas observações com outras que possam fazer sobre as demais situações que envolvem conceitos ligados à ideia de medir e, com a ajuda do professor, identifiquem os invariantes dessas situações.

b) Para que os alunos avancem na construção dos conceitos, o professor pode comparar as medidas obtidas por diferentes alunos para um mesmo objeto. Pode também comparar as diferentes medidas obtidas por um mesmo aluno para um mesmo objeto quando utilizou diferentes instrumentos e unidades de medida.

É importante que se estabeleça uma discussão sobre as causas dessas diferenças. Por fim, pode pedir que descrevam suas ações enquanto mediam e que registrem, usando palavras da língua materna e símbolos matemáticos, os dados que coletaram.

Mas não medimos apenas comprimentos. No bloco *grandezas e medidas* é sugerido que os alunos aprendam a medir outras grandezas como a massa de um corpo, sua temperatura, o tempo, o volume de um sólido ou uma superfície. Embora sejam medidas de grandezas distintas, há aspectos conceituais sobre a ação de medir que não variam de uma para outra. Na atividade a seguir, propomos o levantamento desses aspectos.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 3

5. Identifique alguns aspectos conceituais envolvidos na ação de medir qualquer grandeza. Procure identificar também alguns aspectos que são específicos dos tipos de grandeza que estão sendo medidas e que não podem ser observados na medição de todas as grandezas.

____

____

____

RESPOSTA COMENTADA

Entre os aspectos facilmente observáveis no estudo de qualquer sistema de medida estão a necessidade de uma unidade de medida padronizada, as relações entre o tamanho da unidade de medida escolhida e as medições obtidas, o uso de instrumentos etc. Porém, de acordo com a grandeza, podemos ou não verificar outros aspectos. A medida de tempo é um bom exemplo. Há grandezas – como distância, massa, superfície –, que podem ser tocadas ou vistas, o que não acontece com o tempo. Ele é uma grandeza cuja existência pode ser verificada por meio da observação de fatos, como o crescimento das plantas ou o envelhecimento das pessoas, mas não pode ser tocado ou visto.

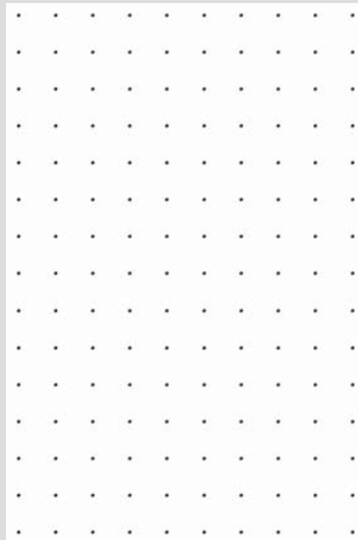
Como é possível perceber, a formação e a formalização dos conceitos sugeridos em cada bloco não ocorrem de forma independente. O estudo de conceitos do bloco *grandezas e medidas* complementa a construção do conceito de número, conceito sugerido no bloco *números e sistemas de numeração*, afinal, as medidas são expressas por números. Do mesmo modo, conhecimentos geométricos, específicos do bloco *espaço e forma*, integram-se àqueles sobre *grandezas e medidas*. A observação e a comparação das formas, por exemplo, favorecem a necessidade de medi-las. A descrição de localizações e deslocamentos no espaço também suscita medições. Por outro lado, podemos fazer representações geométricas de certos conceitos matemáticos que não constam no bloco *espaço e forma*, o que é, na maioria das vezes, indispensável à sua formação e formalização. Na próxima atividade, voltaremos nossas atenções para os conceitos geométricos.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 4

6. Vamos jogar e, em seguida, identificar os conceitos geométricos envolvidos no jogo dos segmentos de reta.

Número de participantes: 2.
Material: duas canetas ou lápis de cores diferentes (uma cor para cada adversário) e uma malha pontilhada como a que segue.



Regras:

1ª) Cada jogador, na sua vez, traça um segmento de reta ligando dois pontos consecutivos. Esse segmento pode ser traçado na horizontal, na vertical ou na diagonal.

2ª) O objetivo desse jogo é formar os menores triângulos possíveis. Cada vez que um jogador "fechar" o triângulo com um segmento de reta, colocará sua inicial dentro dele.

Se o jogador "fechar" dois triângulos com um único segmento, escreverá sua inicial dentro dos dois.

3ª) Ganha o jogo quem tiver "fechado" mais triângulos.

COMENTÁRIO

Nesse jogo, os alunos podem construir as primeiras noções de ponto, segmento de reta, ângulos, linhas abertas e linhas fechadas, região interna e região externa de uma linha fechada, triângulos, quadriláteros e outros polígonos. Além disso, eles têm oportunidade de observar, na prática, algumas propriedades geométricas como "dados dois pontos, existe apenas um segmento que os une" ou "a diagonal do quadrado divide-o em dois triângulos congruentes".

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 4

7. Pensando na formação e na formalização dos conceitos vivenciados no jogo dos segmentos de reta, elabore questões que podem ser discutidas com os alunos depois do jogo e contribuem para esses processos.

____
____
____

COMENTÁRIO

Esta é uma questão aberta. De acordo com os conceitos geométricos que pretende trabalhar na aula, o professor irá formular suas questões e, durante as discussões com os alunos, poderá, ainda, formular questões que não previu no seu planejamento. Colocamos alguns exemplos a seguir, usando nomes da Matemática formal, entretanto, dependendo do ano em que está lecionando, o professor pode usar uma nomenclatura menos formal: em vez de vértices, bicos, em vez de consecutivos, seguidos, em vez de região interna, parte de dentro etc.
Quanto às questões, seguem algumas sugestões:

- *Que objetos tem a forma semelhante à de um triangulo? E à de um quadrado? E à da linha que você desenhou para unir dois pontos?*
- *Quantos pontos, no mínimo, devemos ligar para formar um triângulo?*
- *Sempre que ligarmos três pontos obteremos um triângulo?*
- *Dois triângulos podem ter um vértice em comum? E dois vértices? E três vértices?*
- *Unindo dois vértices não consecutivos de um quadrado, conseguimos dividi-lo em quantos triângulos?*
- *Todas as figuras com quatro lados são quadrados? Desenhe uma figura de quatro lados que não seja um quadrado.*
- *Quando fechava um triângulo, você colocava sua identificação na região interna ou externa dele?*

Integrando-se aos outros blocos, o *tratamento da informação* envolve o levantamento, a organização e a representação de dados. Para organizar dados, em muitos casos precisamos contá-los, compará-los ou ordená-los, e, nesse sentido, os conceitos do bloco *números e sistemas de numeração* são fundamentais. A representação pode ser feita por meio de quadros, tabelas, gráficos de diferentes tipos que se utilizam em suas construções, de conhecimentos geométricos. A construção de gráficos de setores, por exemplo, requer a medição de ângulos. Os gráficos de linha envolvem segmentos de reta ou curvas. Na próxima atividade visaremos à formação e à formalização dos conceitos sugeridos neste bloco.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 5

8. Para iniciar os conceitos enfocados no bloco *tratamento da informação*, muitos livros didáticos sugerem que o professor realize com a turma pesquisas de opinião ou levantamento de dados numéricos como idade, número de irmãos e outros. Depois de coletarem os dados, todos juntos ou em pequenos grupos passam a organizá-los para, em seguida, representá-los e analisá-los. Durante esse processo, o professor interage com a turma, provocando reflexões que conduzam à formação e à formalização dos conceitos. Quais aspectos conceituais o professor deve priorizar numa atividade como esta?

COMENTÁRIO

São muitos aspectos conceituais envolvidos nesse tipo de atividade. Vamos aqui comentar alguns deles. Você pode identificar outros diferentes dos nossos que, na verdade, os complementem. Na realização de uma pesquisa, é preciso cuidar para que não se entreviste a mesma pessoa mais de uma vez, ou seja, para que não se colete o dado mais de uma vez. Além disso, quaisquer que sejam os dados coletados:

- *É necessário contá-los. Se forem muitos, pode-se usar diferentes estratégias de contagem, sendo a principal delas o agrupamento.*
- *É necessário também classificá-los. Para isso, deve-se estabelecer critérios bem definidos. A finalidade da pesquisa serve como referência para a definição dos critérios.*
- *De acordo com o tipo de dado, escolhe-se o tipo de representação gráfica. Nem toda representação gráfica é apropriada para certos dados.*

ATIVIDADE FINAL

Atende ao Objetivo 6

Vimos ao longo desta aula que a preocupação com a formação e a formalização de conceitos deve estar presente no trabalho do professor desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Entretanto, o professor precisa estar consciente disso. Para finalizar, elabore uma atividade que tenha como público-alvo alunos de cursos de formação de professores para os anos iniciais e que crie condições para que eles desenvolvam essa consciência.

____

____

____

____

COMENTÁRIO

Esta resposta é pessoal, mas sugerimos que seja feito um debate no qual os alunos devem refletir sobre como ocorre a formação de um conceito. O professor deve incentivá-los a pensar na sua vida escolar desde os anos iniciais e na maneira como construíram certos conceitos matemáticos. Que dúvidas tiveram? Que erros cometeram? Como as dúvidas foram sanadas? O que o professor poderia ter feito para impedir o surgimento de algumas dúvidas? Que material poderia ter usado? Que tipos de representação? Respondendo a essas questões, eles começarão a atentar para o fato de que a formação de um conceito é demorada, ocorre em várias etapas e que o professor tem um papel decisivo nela, pois pode criar situações e oferecer recursos favoráveis a esse processo.

CONCLUSÃO

A cada atividade que o professor realiza com sua turma, ele deve ter em mente a formação e a formalização dos conceitos matemáticos em questão. Entretanto, para atuar de maneira favorável a esses processos, o professor precisa ser formado e ter consciência da importância deles na formação de cidadãos críticos e participativos. Repensar as próprias experiências na formação de conceitos matemáticos é um caminho para que os professores adquiram essa consciência.

RESUMO

Nesta aula, apresentamos alguns pontos importantes sobre a formação e a formalização de conceitos matemáticos durante o processo de ensino-aprendizagem. Formação e formalização devem caminhar juntas e devem estar entre as principais preocupações do professor desde os anos iniciais. A formação e a formalização de um conceito são processos longos, e, assim, muitos conceitos precisam ser retomados ao longo da vida escolar.

Para formar e formalizar conceitos, o aluno precisa ter acesso a um número variado de situações e de representações dos mesmos. A solicitação do registro oral ou escrito dos procedimentos empregados em situação-problema é uma maneira de o professor incentivar a formação e a formalização dos conceitos. Nenhum conceito pode ser construído isoladamente. Todo conceito está associado a muitos outros. Mesmo conceitos sugeridos em diferentes blocos de conteúdos dos PCN integram-se e complementam-se.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você terá oportunidade de estudar artefatos tecnológicos como recursos didáticos. Reflita sobre a formação e a formalização de conceitos nesse contexto.

AULA 25

Tecnologias

Meta da aula

Apresentar pontos fundamentais sobre o uso das tecnologias, presentes no espaço escolar.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. comparar diferentes posições em relação à adoção de tecnologias no processo de aprendizagem;
2. elaborar situações de aprendizagem que incluam oportunamente *softwares* educativos ou não.

INTRODUÇÃO

A tecnologia, principalmente a eletrônica, está tão presente em nosso cotidiano que muitas vezes não nos damos conta disso! Para muitos, objetos que até pouco tempo não existiam tornam-se essenciais; algumas pessoas fazem questão de ter o que há de mais atual, embora nem sempre saibam como utilizá-lo da melhor forma. Existem também aqueles que abominam a tecnologia e a consideram responsável por diversos problemas nos dias de hoje.

Esses extremos são responsáveis, cada um a seu modo, pelo mau uso da tecnologia. Podemos e devemos, através de uma postura crítico-reflexiva, avaliar a necessidade e o uso das tecnologias, especialmente no que tange à educação.

Mas lembre-se: não há verdades absolutas. Como e quando utilizar vídeo, DVD, TV, computadores ou qualquer outra tecnologia é uma decisão que cabe ao corpo de professores e à equipe pedagógica como um todo. Por isso, é essencial que cada um tenha os conhecimentos necessários, daí a importância de se investir sempre na formação dos profissionais da Educação.

COMO E QUANDO UTILIZAR AS NOVAS TECNOLOGIAS DE INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO

Para a Educação, uma das maiores contribuições das *Tecnologias de Informação e Comunicação* – as TIC – é o suporte que proporcionam para o desenvolvimento de diferentes habilidades. Além da análise, a comunicação, o uso da informação e a colaboração contribuem para a resolução de problemas – uma atividade fundamental para o processo de aprendizagem da Matemática.

Antes do advento das TIC, o acesso às informações era muito mais restrito. Hoje as informações são transmitidas por diferentes tecnologias e estão por toda parte.

A tecnologia provoca mudanças, como afirma Moran (2000, p. 47):

> A tecnologia muda patamares de interação com a realidade. Cada inovação tecnológica bem sucedida modifica os padrões de lidar com a realidade anterior, muda o patamar de exigências do uso (...). A tecnologia de redes eletrônicas modifica profundamente o conceito de tempo e espaço. Posso morar em um lugar isolado e estar sempre ligado aos grandes centros de pesquisa, às grandes bibliotecas, aos colegas de profissão, a inúmeros serviços.

Porém, a simples presença da tecnologia não garante qualquer resultado em sala de aula. Para isso, é necessária uma proposta pedagógica que possa ser efetivamente aplicada.

A utilização das tecnologias na sala de aula só auxiliará o desenvolvimento de uma educação transformadora se for baseada em um conhecimento que permita ao professor interpretar, refletir e dominar criticamente a tecnologia (SAMPAIO, 1996).

Quando surgiram, as máquinas de calcular causaram um grande impacto e trouxeram polêmica. Para alguns, a calculadora obstruiria o desenvolvimento do raciocínio; para outros, contribuiria para a compreensão dos conteúdos, à medida que liberaria o usuário do tédio dos cálculos.

Aos poucos, foi sendo definido o lugar das calculadoras no ensino da Matemática: utilizá-las é uma habilidade desejável e importante, sendo, para isso, essencial compreender o significado lógico de cada operação e avaliar a ordem de grandeza de seus resultados.

Se tivermos um problema, precisamos compreendê-lo para definir as operações necessárias para sua resolução, isso a máquina não faz. Passando aos cálculos, avaliar a ordem de grandeza do resultado permite que se identifiquem, rapidamente, alguns erros de digitação.

Por exemplo: se ao multiplicarmos 327 por 53 obtivermos 1.961 e fizermos uma avaliação da ordem de grandeza, poderemos facilmente observar que o resultado não estará correto. Se temos 3 centenas no multiplicador e 5 dezenas no multiplicando, podemos rapidamente concluir que a ordem de grandeza do resultado não será inferior a 15.000 (observe: 300 x 50 = 15.000). Neste exemplo, o que ocorreu foi um erro de digitação, tendo sido teclado 37 x 53 em vez de 327 x 53.

Alguns equívocos não são tão evidentes, mas uma atenta observação pode contribuir para indicá-los.

Assim como as calculadoras, os computadores também entraram na pautas das discussões sobre a sua validade como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem. Seu lugar vem sendo definido e modificado em função do avanço tecnológico. Se antes era uma ferramenta isolada em que a utilização de *softwares* era seu maior valor, hoje, com as conexões por banda larga, ele vem tendo seu alcance multiplicado.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

1. Entreviste dois professores a partir de um roteiro com as questões que você considere mais pertinentes sobre quando e como utilizar as TIC. Peça-lhes que apontem e justifiquem pontos positivos e negativos do uso dessas tecnologias na educação. Compare as respostas.
Você pode elaborar o roteiro juntamente com outros colegas e fazer uma comparação em conjunto das respostas de todos os professores que vocês entrevistaram.

COMENTÁRIO

Possivelmente, vocês observaram que existem pessoas com grande aversão às TIC e outras que as consideram a solução para todas as questões da Educação. Mas lembre-se de que sua resposta é pessoal. De toda forma, discuta com tutores e colegas sobre os pontos abordados nas entrevistas.

MATEMÁTICA E ALGORITMOS

ALGORITMOS

Seqüência de procedimentos que devem ser realizados para obter um determinado resultado.

Os **ALGORITMOS** já existiam entre babilônios e gregos. As idéias de manuseio mecânico dos cálculos e desenvolvimentos lógicos são um sonho antigo e bastante perseguido; ele se tornou possível, entretanto, a partir de desenvolvimentos importantes da eletrônica, mas antes ainda do trabalho de matemáticos, como Von Neumann e Turing. Eles projetaram o computador matemática e logicamente, antes que houvesse tecnologia desenvolvida para construí-lo; mas isso é uma outra história... Saber manejar algoritmos é hoje um conhecimento imprescindível. Não podemos deixar ao acaso o desenvolvimento de habilidades que já são claramente um fator de diferenciação cultural entre as classes sociais (como citamos antes) e que pode significar a diferença entre sociedades desenvolvidas e dependentes.

Formar cidadãos aptos a viver num mundo em que a cultura dos procedimentos seqüenciais se torna rapidamente um padrão é fundamental. Basta pensar em um caixa eletrônico, em aparelhos de fax, vídeo, DVD e assim por diante. Até máquinas de lavar usam procedimentos seqüenciais... Pedir a nossos alunos que mostrem como se resolvem os problemas – e não apenas a resposta certa – favorece uma atitude que leva a reconhecer que a solução de um problema pode até ser um número, contudo, para chegar a ele, dependemos de procedimentos. Por isso, conhecer tais procedimentos é importante.

JOGOS ELETRÔNICOS

Os jogos eletrônicos já fazem parte da nossa vida há muito tempo. No princípio, eram aparelhos simples, mas foram se modificando, utilizando componentes eletrônicos cada vez mais potentes. É fácil compreender como eles conseguem atrair a atenção dos jovens, e das crianças em particular. Afinal, sentado em uma cadeira, dominando uns poucos controles, qualquer um pode tornar-se um *guerreiro*, um *piloto*, um *craque do futebol*, um *detetive*... Mas será que isso é ruim?

As habilidades desenvolvidas pelos usuários são motivadas, sobretudo, por apelos sensoriais e estão, portanto, muito mais ligadas à capacidade de treinamento do que ao desenvolvimento de conhecimentos. Isso não é necessariamente ruim. Destreza, adaptação a sistemas, interação com equipamentos que trabalham com algoritmos, tudo isso são habilidades requeridas em nossa época.

Observe que muitos jogos desenvolvem as etapas básicas para a resolução de problemas que consistem, segundo Polya (1978), em:

1ª etapa: compreender o problema – estudar os dados do problema;

2ª etapa: elaborar um plano – planejar a execução do problema;

3ª etapa: executar o plano – colocar o planejamento em ação;

4ª etapa: fazer a retrospectiva ou verificação – examinar a solução obtida.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

2. Faça um levantamento de jogos eletrônicos e identifique um que possa contribuir no aprendizado da Matemática. Justifique sua escolha.

COMENTÁRIO

Debata sua resposta com seus colegas e tutores.
Como exemplo, escolhemos o Tetris, um jogo criado em 1986 pelos russos Alexey Pajitnov, Dmitry Pavlovsky e Vadim Gerasimov.
No jogo, as peças surgem na parte superior e, utilizando o teclado do computador, o jogador deve movimentá-las de modo a encaixá-las sem deixar espaços para formar linhas completas. As peças caem cada vez mais rápido.

VÍDEOS, DVDS E TELEVISÃO

O vídeo, o DVD e a TV já estão incorporados ao cotidiano. Se vamos utilizá-los em nossas aulas, teremos de pensar com cuidado em que tipo de atividades eles podem contribuir.

Atualmente, o acesso a vídeos em geral é bastante fácil, e a escolha de títulos que possam se integrar na maneira como estamos trabalhando dependerá não só de nosso conhecimento pessoal, mas também da indicação de colegas.

No caso do vídeo voltado para a Educação, uma primeira referência é o material do Telecurso, da Fundação Roberto Marinho, que pode ser comprado ou, eventualmente, encontrado em videotecas do Sesi, Senac ou Senai. Outra fonte inestimável de vídeos (e não só para a Matemática) é o acervo da TV Escola. Todas as escolas do Brasil têm, há muito tempo, acesso ao sistema da TV Escola, da Secretaria de Educação a Distância do MEC.

Figura 25.1: Logo da TV Escola.
Fonte: http://portal.mec.gov.br/tvescola/index.php?option=com_jfilter&Itemid=164&params[search_relevance]=TV%20Escola&params[tipobusca]=null

A transmissão do canal da TV Escola é feita por meio de sinal de satélite; a TV Brasil, da Associação de Comunicação e Educação Roquette Pinto, é que emite o sinal para todo o país. Para que as escolas de todo o território nacional consigam sintonizar o canal da Educação do MEC, é necessário o *kit* tecnológico, que inclui um televisor, um aparelho de videocassete, uma antena parabólica, um receptor de satélite e dez fitas. A programação da TV Escola pode ser consultada no portal do MEC.

O vídeo faz parte da escola já há muito tempo, enquanto que o DVD mais recentemente chegou à sala de aula. Entretanto, já existem projetos relevantes, voltados ao uso do DVD. Destaca-se o Projeto DVD Escola do Ministério da Educação, que amplia o alcance da TV Escola. Vale a pena conhecer o *Guia de Programas do DVD Escola*. Ele pode ser encontrado no portal do MEC.

Figura 25.2: Logo do DVD Escola.

Fonte: www.educacao.al.gov.br/img/tvEscola2.JPG

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

3. Da programação habitual da TV, que programas você julga que poderia utilizar nas aulas de Matemática?

COMENTÁRIO

Sua resposta é pessoal. Sugerimos que converse a respeito com seus tutores e colegas.

O COMPUTADOR

O computador é uma máquina que opera com informações. Necessariamente, o usuário precisa estabelecer uma forma de comunicação com o computador e para isto deve seguir regras específicas.

Na Educação, são inúmeros os benefícios que podem ser proporcionados pelos computadores, tais como:

- auxiliar no processo de construção do conhecimento (uso de *softwares* e aplicativos);
- desenvolver a autonomia do aluno, pois permite pensar, organizar, refletir, decidir e criar;
- reduzir o tempo necessário para realizar determinadas atividades;
- ser utilizado como fonte de informação e meio de comunicação potencializado pela internet.

!

Um dos objetivos gerais para o Ensino Fundamental é "saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos."

O papel do professor é mais do que oferecer um computador ao aluno. Seu principal papel é o de elaborar atividades bem planejadas e acompanhar o aluno durante a realização destas, mediando o processo. O ambiente de aprendizagem deve ser construído de forma que o significado da atividade para o aluno seja resultado de um processo em que o professor seja um organizador, um consultor e principalmente um pesquisador.

> Outra de suas funções é como mediador, ao promover a confrontação das propostas dos alunos, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar. Nesse papel, o professor é responsável por arrolar os procedimentos empregados e as diferenças encontradas, promover o debate sobre resultados e métodos, orientar as reformulações e valorizar as soluções mais adequadas (BRASIL, 1997).

Os computadores são indicados nos PCN como um possível aliado no processo de ensino e aprendizagem da Matemática:

> Tudo indica que seu caráter lógico-matemático pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que ele permite um trabalho que obedece a distintos ritmos de aprendizagem (BRASIL, 1997).

O computador pode ser usado na realização de atividades que permitam ao aluno experiências muito abrangentes. Com o uso do computador, podemos promover situações em que o aluno classifique, induza, analise, sintetize e abstraia. Adequadamente utilizado, o computador é, sem dúvida, uma importante ferramenta para o aprendizado significativo da Matemática.

O trabalho com o computador pode contribuir para que os alunos lidem melhor com a linguagem matemática, interpretando códigos, gráficos, lendo tabelas, entre outros. Essa linguagem específica pode ser comparada à forma de escrita abreviada e aos símbolos utilizados nas comunicações com o uso da internet.

O COMPUTADOR E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR

A expansão e o barateamento da utilização da internet contribuiram para que hoje seja mais usual o acesso aos diferentes *sites* disponibilizados na rede.

Isso permite o acesso a uma imensa "biblioteca" de dimensões inestimáveis. Essa biblioteca pode contribuir, e muito, na formação inicial e continuada do professor. Mas são fundamentais alguns cuidados na utilização deste material. Da mesma forma que os livros, temos de analisar a credibilidade do material disponibilizado ou corremos o risco de utilizar conceitos errados. Por isso, sempre é fundamental avaliar a procedência do material pesquisado. Em *sites* de universidades e de outras instituições idôneas, encontramos artigos e trabalhos cujo conteúdo geralmente é confiável.

Com auxilio dos *sites* de busca, você poderá realizar inúmeras pesquisas na internet e, além de textos, também poderá encontrar *sites* que poderão contribuir para o ensino da Matemática.

No *site* da revista *Nova Escola online*, você pode encontrar interessantes reportagens e sugestões para planos de aula.
Um dos planos disponibilizados apresenta um detalhado plano de aula para se trabalhar a adição, utilizando o Material Dourado. Nele constam o autor, a duração, o tempo necessário para realização, os objetivos e o desenvolvimento detalhado da atividade. Além disso, há sugestões para avaliação e trabalhos interdisciplinares. É uma sessão muito interessante para que o professor possa inspirar-se quando for planejar suas próprias aulas.
O endereço do *site* é: http://novaescola.abril.com.br

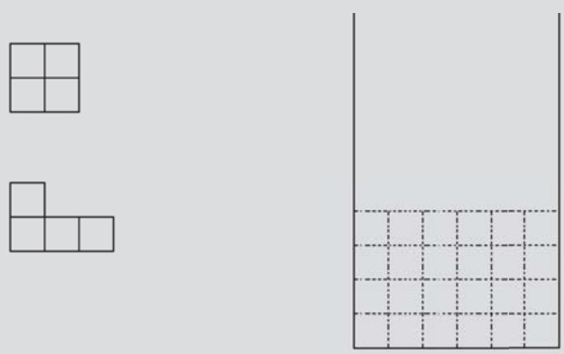
ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

4. Elabore uma atividade para ser realizada com apoio do computador. Justifique.
Dê asas à imaginação!

COMENTÁRIO

A resposta é pessoal, mas lembre-se de que a utilização do computador no processo de aprendizagem da Matemática é considerada como um campo privilegiado para o desenvolvimento de capacidades e de atitudes positivas em relação à Matemática. Mas, para privilegiar essa perspectiva de utilização, as atividades voltadas à aprendizagem da Matemática devem, sempre que possível, partir de situações-problema e os conceitos devem ser investigados e descobertos para depois serem generalizados.
A utilização do computador no ensino da Matemática é indicada para atividades de investigação e descoberta de conceitos e, também, de apoio à resolução de problemas.
Um exemplo: a partir do jogo Tetris, você pode apresentar algumas atividades, tais como:
Para completar quatro linhas (sem espaços), de quantas peças você precisará?



CONCLUSÃO

Há vinte ou trinta anos, discutíamos se a TV era um avanço para a Educação ou um perigo para a formação dos jovens. Depois discutimos o uso de computadores e a influência dos jogos eletrônicos.

Contudo, para que a utilização de qualquer um deles traga resultados efetivos, o professor precisa preparar-se sempre, não apenas para que esse uso seja significativo, isto é, adequado ao contexto da disciplina e do estágio dos alunos, mas também para manter-se atualizado, dada a velocidade do avanço tecnológico.

Invariavelmente nos encaminhamos para a constatação de que "os meios tecnológicos vieram para ficar, mas devemos evitar os excessos". Esta é uma expressão de bom-senso, mas será suficiente?

A discussão renderá mais frutos se soubermos o que esperar das novas tecnologias. Afinal, não queremos apenas "evitar os excessos", queremos estar aptos a utilizar todos os meios possíveis para enfrentar os desafios que o ensino nos apresenta.

ATIVIDADE FINAL

Atende ao Objetivo 1

Esta aula tem características diferentes das outras. Apresentamos alguns argumentos que nos ajudarão a pensar o uso das TIC nas aulas de Matemática.

Procure saber como as escolas da sua cidade estão utilizando as TIC nas aulas de Matemática. Você concorda com a utilização? De que você discorda?

____
____
____
____
____
____
____
____

COMENTÁRIO

A resposta é pessoal. Entretanto, esperamos que você tenha observado se os objetivos para o uso das TIC ficaram claros, se houve um planejamento para a sua utilização, se elas foram utilizadas apenas como uma forma de ocupar o tempo da aula etc. Como sempre, sugerimos que converse com seus colegas e tutores a respeito de suas observações.

RESUMO

A facilidade que nossos alunos, de fato, encontram ao lidar com as TIC está ligada, principalmente, às habilidades desenvolvidas com o seu uso e que são imprescindíveis para a correta operação dos dispositivos que as utilizam – jogos eletrônicos, computadores etc. O uso pleno das TIC dependerá, em última análise, da compreensão que os alunos tenham dos conteúdos e das funções que os dispositivos estão desempenhando.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você estudará os polígonos e poliedros. Poderá ser, também, um boa oportunidade para pensar em possíveis aplicações da tecnologia. Aproveite!

AULA 26

A Geometria e seu ensino

Meta da aula

Apresentar os principais conceitos geométricos sugeridos para serem abordados nos anos iniciais do Ensino Fundamental e algumas diretrizes para o seu ensino.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. listar aspectos gerais da História da Geometria;
2. reconhecer as aplicações dos conhecimentos geométricos às questões do cotidiano doméstico;
3. reconhecer as aplicações dos conhecimentos geométricos às profissões;
4. empregar representações geométricas a outros ramos da Matemática;
5. identificar aplicações da Geometria à Física;
6. listar os conteúdos de Geometria a serem ensinados no 1º e no 2º ciclo do Ensino Fundamental;
7. reconhecer os entes geométricos;
8. identificar formas geométricas no dia-a-dia;
9. reconhecer semelhanças e propriedades dos sólidos geométricos;
10. desenhar um sólido geométrico;
11. planificar sólidos geométricos;
12. relacionar sólidos geométricos e figuras planas;
13. reconhecer os elementos de um polígono;
14. ler e interpretar plantas;
15. calcular áreas e perímetros;
16. utilizar adequadamente as unidades m, m^2, m^3;
17. listar ações e recursos para o ensino de Geometria.

Pré-requisito

Se, enquanto estuda, você tiver por perto algumas sucatas como caixas e embalagens vazias, sua aprendizagem será mais significativa.

INTRODUÇÃO

Nesta aula, vamos estudar Geometria e discutir como deve ser o seu ensino. Iniciamos apresentando uma síntese dos aspectos históricos e mostramos suas aplicações a situações do cotidiano e às outras ciências. Em seguida, abordamos os principais conceitos: os entes geométricos, a distinção entre sólidos e figuras planas, algumas propriedades das formas geométricas. Para finalizar, apontamos alguns caminhos para o ensino. É importante sinalizar que, embora nosso estudo parta de experiências com o mundo real, procuramos avançar no reconhecimento de propriedades e, conseqüentemente, na abstração dos conceitos.

UM POUCO DE HISTÓRIA

Os conhecimentos geométricos estão entre os conhecimentos humanos mais antigos. Segundo fontes históricas, os babilônios, por volta de 2000 a.C., já os desenvolviam. Os caldeus, provenientes da Mesopotâmia, empregavam fórmulas geométricas no cálculo de áreas e volumes, e, no Egito Antigo, a Geometria era utilizada não só na medição de terrenos como também para fazer edificações.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

1. Vamos fazer uma breve pesquisa da História da Geometria. Para essa pesquisa, você pode consultar *sites* da internet, livros de História e livros de História da Matemática. Procure responder:
a) Por que os egípcios precisavam medir terras?
b) Quais são as edificações mais famosas construídas no Egito Antigo?
c) As fórmulas que empregavam forneciam medidas exatas?
d) O conhecimento geométrico estava organizado formalmente?

____
____
____
____
____
____
____
____
____
____

RESPOSTAS COMENTADAS

Fazendo um levantamento histórico, você descobrirá muitos pontos interessantes da Geometria produzida pelos egípcios. Entre eles, destacamos:

a) Os agricultores das margens do rio Nilo (rio que banha o Egito) tinham de pagar ao faraó impostos pelo uso da terra. Os valores dos impostos eram proporcionais às medidas das superfícies cultivadas. Além disso, após as inundações periódicas consequentes das cheias do rio, novas repartições e novas medições das terras eram necessárias. Assim, os egípcios desenvolviam técnicas e mediam terras.

b) Das edificações construídas no Egito Antigo, as pirâmides são as mais famosas.

c) Nem sempre as fórmulas permitiam obter resultados exatos.

d) Na verdade, a Geometria era ainda uma ciência empírica. Suas regras, na maioria das vezes, não eram explícitas e permitiam obter resultados aproximados.

Sua resposta termina aqui na disciplina Matemática na Educação 1. Estes dados históricos serão mais detalhados e você terá oportunidade de analisar exemplos em que as medidas obtidas são aproximadas, só ocorrendo a exatidão para uma classe particular de figuras geométricas.

Da Atividade 1, podemos ainda concluir que os egípcios obtinham muitas medidas por meio de comparações entre figuras geométricas e, dessa forma, não são conhecidos teoremas e demonstrações da Geometria egípcia, mas sim suas aplicações.

Os matemáticos gregos conheceram tais aplicações e foram muito influenciados por elas. Porém, além de aplicar, começaram a sistematizar os conhecimentos geométricos que foram adquirindo. Esse fato teve início por volta de 600 a.C. e fez com que a Geometria deixasse de ser puramente experimental. A organização lógica dos conhecimentos foi feita principalmente pelo matemático grego Euclides, e resultou na obra *Os elementos*, por volta de 300 a.C. Trata-se de uma das obras mais lidas até os dias atuais, traduzida para várias línguas, e a Geometria que ensinamos hoje é praticamente a mesma que Euclides escreveu.

POR QUE ENSINAR GEOMETRIA?

Depois de conhecermos alguns dados históricos relativos à construção dos conhecimentos geométricos, vamos tentar responder essa questão. No Módulo 1, quando discutimos o ensino de Matemática na Educação Infantil, destacamos o caráter utilitário dos conhecimentos geométricos. Nesta aula, vamos resgatá-lo e, complementando-o, vamos discutir também os aspectos mais formativos desses conhecimentos.

As noções geométricas são indispensáveis para um bom convívio social. Elas são úteis na resolução de problemas do cotidiano doméstico e das profissões. Relembrando a utilidade dessas noções, realize as Atividades 2 e 3.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

2. Imagine um dia de folga que você vai passar em casa resolvendo pequenos problemas domésticos: arrumação de armários e gavetas, limpeza dos cômodos, compras, conserto de roupas etc. Descreva algumas dessas ações e explique como os conhecimentos geométricos podem ser utilizados nelas.

COMENTÁRIO

Sua resposta depende exclusivamente das ações que você escolher, portanto, não há uma resposta padrão. Mas, citando alguns exemplos, podemos dizer que, ao arrumar roupas num armário ou alimentos numa despensa, o conhecimento das formas dos elementos envolvidos (objetos, gavetas, prateleiras) permitirá que você aproveite melhor o espaço, guardando um maior número de coisas da melhor maneira possível, evitando que roupas sejam amassadas ou que alimentos sejam misturados. Para cortar uma calça e fazer bainha, conhecimentos de simetria diminuirão as chances de uma perna da calça ficar mais curta que a outra; ao fazer compras, a comparação entre as várias embalagens de um mesmo produto favorecerá a escolha daquele que for mais lucrativa.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 3

3. Faça uma lista das profissões em cujo exercício são necessários conhecimentos geométricos.

COMENTÁRIO

Ao pensarmos nas profissões, apontamos imediatamente aquelas ligadas às Ciências Exatas, às Engenharias. É comum pensarmos também em Arquitetura e Astronomia. Mas não podemos nos esquecer do vendedor, da costureira, do mestre-de-obras, do coreógrafo, do desportista, entre tantos outros. Vale notar que, em todos os casos, são necessários conhecimentos geométricos formais na formação profissional, variando apenas a seleção dos assuntos mais importantes e o nível de formalismo.

Acrescentamos ainda que as aplicações dos conhecimentos geométricos não se restringem ao que acabamos de mencionar. Eles também são necessários para a compreensão das notícias apresentadas nos vários cadernos que compõem um jornal. A interpretação das plantas de apartamentos à venda nos classificados requer, na maioria das vezes, conhecimentos sobre polígonos e estratégias para o cálculo de suas áreas. Na análise dos diversos gráficos (setores, barras e linha), muito comuns para comunicar informações sobre a economia, precisamos das noções de ângulo e curvas, entre outras.

Com isso, percebemos que a Geometria é útil no dia-a-dia e nas profissões, oferecendo possibilidades de organização e representação do conhecimento e sua comunicação, o que seria suficiente para justificar seu ensino desde as séries iniciais. Entretanto, ela também é útil para a compreensão de outros conceitos matemáticos. Ao longo de nossa vida escolar, nos ensinos Fundamental e Médio ou equivalentes, certamente tivemos oportunidade de construir noções alicerçados numa "visão" geométrica ou resolvemos algum problema fazendo uma representação geométrica da situação em questão. Na atividade a seguir, teremos oportunidade de fazer uma representação geométrica.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

4. Qual é o décimo quinto termo da sequência (3, 7, 11, 15, 19...)? Como o desenho de uma reta pode contribuir para a solução deste problema?

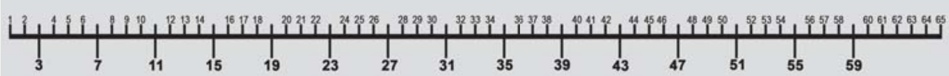
____

____

____

RESPOSTA COMENTADA

O décimo quinto termo da seqüência é 59. Esse é um problema clássico de Progressão Aritmética (P.A.), que pode ser resolvido pela fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)\, r$*, em que* a_1 *é o primeiro termo,* a_n *é o termo da posição n, n é o número de termos, e r é a diferença entre dois termos consecutivos. Entretanto, podemos desenhar uma reta numérica, localizar nela cada termo da seqüência, percebendo que a distância entre eles é sempre a mesma. Se prosseguirmos o preenchimento da reta até o décimo quinto termo, encontraremos 59.*



Como vimos anteriormente, o tratamento da informação e a análise de gráficos estatísticos também são um bom exemplo da utilização da Geometria na compreensão de outros conceitos matemáticos. Além disso, a comparação, a representação e as operações com frações se desenvolvem em estreita relação com as idéias sobre área e equivalência de área. Os conceitos de número quadrado e raiz quadrada, por exemplo, ganham significado quando associados à área de quadrados cujo lado é um número inteiro positivo. Retornaremos a essas idéias ainda neste módulo, após o estudo de áreas das figuras planas.

Finalmente, os conceitos geométricos também são úteis na compreensão de outros conceitos científicos, como os da Física, da Química, da Astronomia e da Geografia.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 5

5. Pesquisar num livro de Física do Ensino Médio conceitos cuja compreensão está associada a noções geométricas.

COMENTÁRIO

São inúmeros os conceitos da Física que podem ser representados geometricamente. No estudo dos movimentos, as idéias de ponto, reta, semi-reta, segmento de reta, orientação, curvas, circunferência e seus elementos são fundamentais na compreensão dos conceitos, de espaço, distância, velocidade, aceleração. Na distinção das grandezas escalares das grandezas vetoriais, essas idéias são novamente importantes. Além disso, em todo ramo da Física, é comum representarmos as relações entre as grandezas por meio de gráficos de linhas.

É preciso, entretanto, esclarecer que a importância do ensino da Geometria ultrapassa seus usos para associar-se a aspectos mais formativos. Estudando Geometria, o aluno pode desenvolver sua percepção espacial e sua capacidade de resolver problemas não necessariamente escolares. Por meio da observação e comparação das formas, ele pode fazer generalizações e abstrações, adquirindo valores culturais para melhor compreensão da natureza e das construções humanas.

O QUE ENSINAR DE GEOMETRIA?

Uma questão, então, se coloca: o que ensinar de Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental? Respondê-la é essencial tanto para a definição do currículo de Matemática desses anos quanto para a orientação do trabalho dos professores que vão lecionar disciplinas pedagógicas em cursos de formação para o magistério.

Os PCN para a área de Matemática no Ensino Fundamental (1º e 2º ciclos) propõem o ensino de quatro blocos de conteúdos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. Os principais conceitos geométricos encontram-se no bloco Espaço e Forma. É importante esclarecer, entretanto, que o estudo desses conceitos pode favorecer a compreensão de idéias presentes em outros blocos e vice-versa. A observação de semelhanças e regularidades, por exemplo, favorece o entendimento da ideia de número. A comparação das formas geométricas contribui para o desenvolvimento de sistemas de medida. Os gráficos usados na organização de informações assemelham-se a certas formas geométricas.

Com relação à Geometria, os PCN apontam como objetivos no 1º ciclo:

• Estabelecer pontos de referência para situar-se, posicionar-se e deslocar-se no espaço, bem como para identificar relações de posição entre objetos no espaço; interpretar e fornecer instruções, usando terminologia adequada.

• Perceber semelhanças e diferenças entre objetos no espaço, identificando formas tridimensionais ou bidimensionais, em situações que envolvam descrições orais, construções e representações (p. 65-66).

E listam os seguintes conteúdos:

• Localização de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de posição.

• Movimentação de pessoas ou objetos no espaço, com base em diferentes pontos de referência e algumas indicações de direção e sentido.

• Descrição da localização e movimentação de pessoas ou objetos no espaço, usando sua própria terminologia.

• Dimensionamento de espaços, percebendo relações de tamanho e forma.

• Interpretação e representação de posição e de movimentação no espaço a partir da análise de maquetes, esboços, croquis e itinerários.

• Observação de formas geométricas presentes em elementos naturais e nos objetos criados pelo homem e de suas características: arredondadas ou não, simétricas ou não, etc.

• Estabelecimento de comparações entre objetos do espaço físico e objetos geométricos – esféricos, cilíndricos, cônicos, cúbicos, piramidais, prismáticos – sem uso obrigatório de nomenclatura.

• Percepção de semelhanças e diferenças entre cubos e quadrados, paralelepípedos e retângulos, pirâmides e triângulos, esferas e círculos.

• Construção e representação de formas geométricas (p. 72-73).

Já no 2º ciclo, os objetivos são:

• Estabelecer pontos de referência para interpretar e representar a localização e movimentação de pessoas ou objetos, utilizando terminologia adequada para descrever posições.

• Identificar características das figuras geométricas, percebendo semelhanças e diferenças entre elas, por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções (p. 81).

E os conteúdos:

• Descrição, interpretação e representação da posição de uma pessoa ou objeto no espaço, de diferentes pontos de vista.

• Utilização de malhas ou redes para representar, no plano, a posição de uma pessoa ou objeto.

• Descrição, interpretação e representação da movimentação de uma pessoa ou objeto no espaço e construção de itinerários.

• Representação do espaço por meio de maquetes.

• Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre corpos redondos, como a esfera, o cone, o cilindro e outros.

• Reconhecimento de semelhanças e diferenças entre poliedros (como os prismas, as pirâmides e outros) e identificação de elementos como faces, vértices e arestas.

• Composição e decomposição de figuras tridimensionais, identificando diferentes possibilidades.

• Identificação da simetria em figuras tridimensionais.

• Exploração das planificações de algumas figuras tridimensionais.

• Identificação de figuras poligonais e circulares nas superfícies planas das figuras tridimensionais.

• Identificação de semelhanças e diferenças entre polígonos, usando critérios como número de lados, número de ângulos, eixos de simetria etc.

• Exploração de características de algumas figuras planas, tais como: rigidez triangular, paralelismo e perpendicularismo de lados etc.

• Composição e decomposição de figuras planas e identificação de que qualquer polígono pode ser composto a partir de figuras triangulares.

• Ampliação e redução de figuras planas pelo uso de malhas.

• Percepção de elementos geométricos nas formas da natureza e nas criações artísticas.

• Representação de figuras geométricas (p. 88-89).

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 6

6. Observe e compare os conteúdos de Geometria propostos nos PCN para o 1º e para o 2º ciclos. O que muda do 1º para o 2º ciclo?

RESPOSTA COMENTADA

Podemos perceber que os conteúdos dos dois ciclos são bastante semelhantes. Porém, no 2º ciclo procura-se avançar na formalização dos conceitos, o que não significa o abandono da observação do real. Nesse ciclo, enfatiza-se cada vez mais a identificação e a exploração de propriedades das formas observadas.

Para compreendermos as propriedades das formas e, conseqüentemente, adquirirmos argumentos que favoreçam uma leitura mais crítica dos objetivos e conteúdos apresentados neste item, passamos a seguir ao estudo das principais noções geométricas.

ENTES GEOMÉTRICOS

Quando estudamos Geometria, aprendemos as figuras geométricas e suas propriedades. As figuras geométricas só existem em nossa imaginação. Apesar disso, podemos ter uma boa idéia delas, observando objetos reais.

Em Geometria, há três idéias intuitivas ou figuras geométricas básicas, que denominamos entes geométricos: o ponto, a reta e o plano. Os pontos formam todas as outras figuras. Retas e planos, por exemplo, são conjuntos de pontos. Um ponto não possui dimensões e, para representá-los, fazemos a menor marca possível no papel.

Para que você tenha uma idéia de reta, imagine um fio de linha bem esticado, sem começo, sem fim e sem largura, e, para ter uma noção de plano, basta que você imagine uma parede bem lisa que se estende em todas as direções. Além disso, o plano não tem espessura. O quadro de escrever na sala de aula é um bom exemplo de parte de um plano.

É impossível representar retas e planos num papel ou no quadro da sala de aula. Por esse motivo, quaisquer representações que fizermos num papel de uma reta ou de um plano corresponderão apenas a partes deles. Como eles crescem infinitamente, é impossível representá-los inteiramente.

A identificação de pontos, retas e planos é feita usando-se, respectivamente, letras maiúsculas do nosso alfabeto, letras minúsculas do nosso alfabeto e letras minúsculas do alfabeto grego.

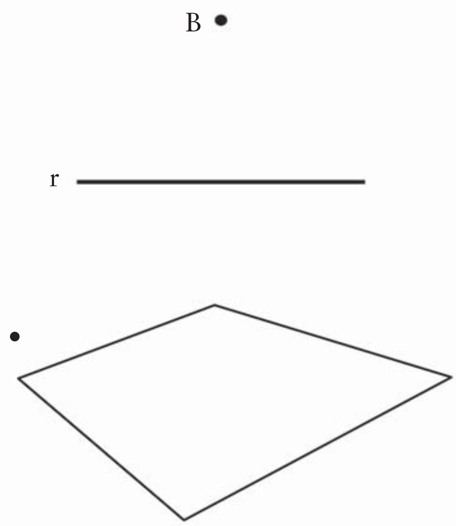


Figura 26.1: Ponto, reta e plano.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 7 e 8

7. Identifique elementos do mundo real que se assemelham aos entes geométricos.

____

____

____

COMENTÁRIO

As estrelas no céu ou os grãos de areia se assemelham a pontos. Uma folha de papel ou um chão lisos se assemelham a planos. Já uma estrada sem curvas ou um barbante esticado se assemelham a retas.

Cabe aqui uma breve explicação sobre o uso repetido da expressão "se assemelham" em vez de "são". Ponto, reta e plano são elementos abstratos criados para representar objetos do mundo real. Entretanto, nenhum objeto do mundo real é um ponto ou uma reta ou um plano; afinal todos os objetos do mundo real possuem três dimensões. Tratar objetos do mundo real como se fossem objetos abstratos desde os anos iniciais pode causar obstáculos para um processo de abstração e formalização futuros.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 7 e 8

8. Você observa o mapa de um quarteirão de um bairro. Com base nele, responda as perguntas subsequentes.

a) A que ente geométrico a representação das ruas se assemelha?
b) Identifique quatro pares de ruas paralelas.
c) Identifique duas ruas transversais à rua A.
d) Identifique duas ruas perpendiculares à rua D.

___

___

___

___

RESPOSTAS

a) A representação das ruas se assemelha à reta.

b) São pares de ruas paralelas: A e B, A e C, B e C, D e E.

c) As ruas D e E são transversais à rua A.

d) As ruas A, B e C são perpendiculares à rua D.

Numa atividade como a anterior, podemos constatar a existência de um vocabulário geométrico para lidar com situações comuns da vida diária. Não houve uma definição formal dos termos "paralela", "transversal" e "perpendicular". Entretanto, a maioria dos alunos não enfrenta dificuldades para responder as questões, pois há um vocabulário que utilizamos regularmente para comunicar localizações, tamanhos ou formas de objetos. Esse vocabulário, quando explorado pelo professor, pode ser um facilitador do processo de construção de conceitos geométricos.

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

As figuras geométricas que estão contidas em um plano, isto é, que têm todos os seus pontos em um mesmo plano, são chamadas figuras geométricas planas.

As figuras geométricas que não estão contidas em um mesmo plano, isto é, aquelas que nem todos os pontos estão em um mesmo plano, são chamadas figuras geométricas espaciais.

A maioria dos objetos e das construções que nos cercam são figuras geométricas espaciais. Elas possuem três dimensões: largura, altura e comprimento. Consideremos, por exemplo, a figura:

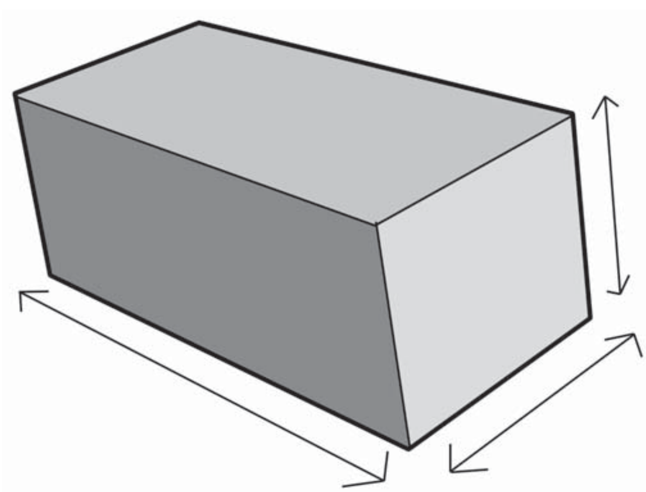


Figura 26.2: Objeto tridimensional.

Trata-se de uma forma muito conhecida em nosso dia-a-dia. Objetos sólidos como os que têm formato semelhante ao dessa figura são chamados **PARALELEPÍPEDOS** ou prismas de base retangular.

Com três pares de retângulos iguais, formamos um **PARALELEPÍPEDO**. Quando as três dimensões de um paralelepípedo forem iguais, teremos seis quadrados e o chamaremos de cubo. A maioria dos dados que as crianças usam em seus jogos de passatempo tem a forma de um cubo.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 8

9. Como você deve saber, as embalagens de muitos produtos que consumimos diariamente têm o formato de um paralelepípedo. Faça uma lista com pelo menos cinco desses produtos. Além disso, aponte uma possível explicação para o uso do formato de paralelepípedo na maioria das embalagens.

COMENTÁRIO

As embalagens de cremes dentais, sapatos, sabão em pó, cereais e remédios têm, na maioria das vezes, o formato de um paralelepípedo. Uma possível explicação para o uso frequente desse formato nas embalagens é a facilidade de estocagem dos produtos. O formato de paralelepípedo favorece o empilhamento e o empacotamento de muitas unidades do produto.

Além do paralelepípedo, há outras figuras espaciais muito comuns no nosso cotidiano. Os paralelepípedos são, na verdade, um caso particular de um tipo de figuras espaciais chamadas prismas. Vejamos:

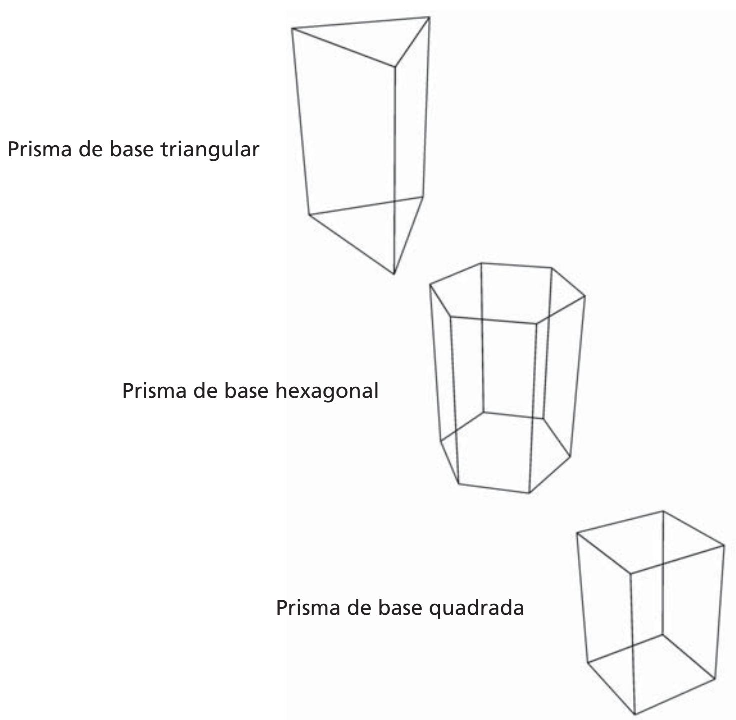
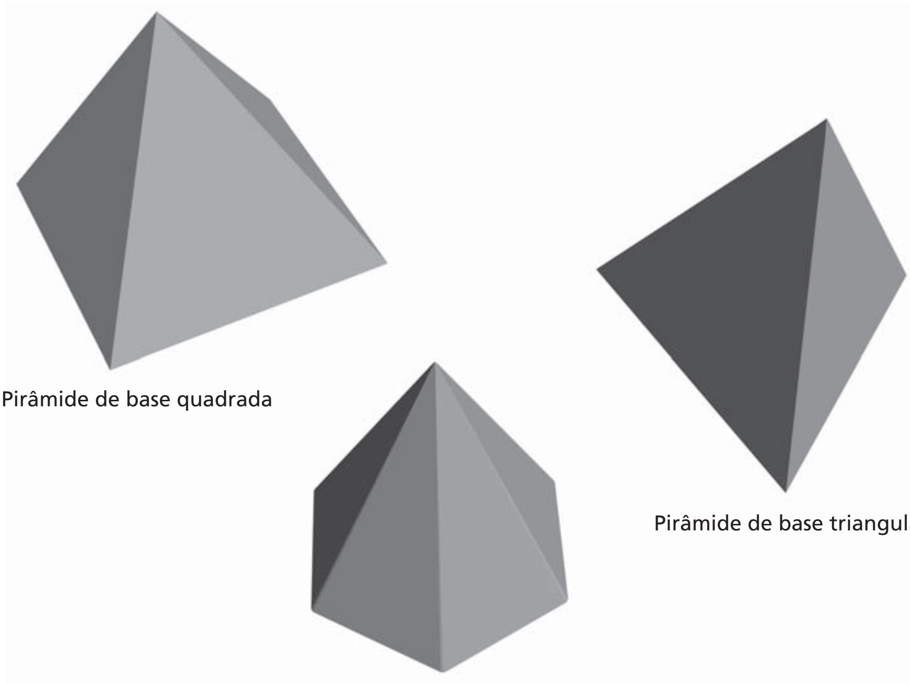


Figura 26.3: Prismas.

Há ainda as pirâmides:



Pirâmide de base quadrada

Pirâmide de base triangular

Pirâmide de base hexagonal

Figura 26.4: Pirâmides.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 9

10. Apresentamos anteriormente figuras de prismas e de pirâmides. Analisando essas figuras, tente responder:

a) O que os prismas têm em comum?

____

b) O que as pirâmides têm em comum?

____

c) O que difere um prisma de base triangular de uma pirâmide de base triangular? E um prisma de base hexagonal de uma pirâmide de base hexagonal? E um prisma de base quadrada de uma pirâmide de base quadrada?

____

RESPOSTAS COMENTADAS

Uma observação mais atenta das figuras nos permite verificar, a princípio, que prismas e pirâmides são formados por superfícies que são partes de planos, ou seja, regiões planas, a que podemos designar faces. Comparando prismas e pirâmides, podemos concluir também:

a) Os prismas sempre são formados por duas faces planas do mesmo formato e do mesmo tamanho chamadas bases, e por retângulos nas outras faces.

b) As pirâmides sempre são formadas por uma face plana qualquer na base e por triângulos nas outras faces.

c) Os prismas possuem duas bases, ao passo que as pirâmides, apenas uma base. Prismas e pirâmides diferem também pelas outras faces que, no caso dos primeiros, são retângulos, e, no caso das últimas, triângulos.

Realizando a atividade anterior, você deve ter percebido que os sólidos geométricos em questão possuem faces. As faces são as regiões planas que limitam o sólido. O encontro de duas faces é um segmento de reta. Chamamos esse segmento de aresta do sólido. O encontro de três ou mais arestas resulta em um ponto que denominamos vértice.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 9

11. Observando novamente os prismas e pirâmides das **Figuras 26.3** e **26.4**, complete a tabela a seguir e, em seguida, verifique se há alguma relação entre o número de vértices, de faces e de arestas de um mesmo sólido.

Sólido	Número de vértices	Número de faces	Número de arestas
Paralelepípedo			
Prisma de base triangular			
Prisma de base hexagonal			
Prisma de base quadrada			

Pirâmide de base triangular			
Pirâmide de base quadrada			
Pirâmide de base hexago-nal			

RESPOSTA COMENTADA

A tabela preenchida corretamente fica da seguinte maneira:

Sólido	***Número de vértices***	***Número de faces***	***Número de arestas***
Paralelepípedo	*8*	*6*	*12*
Prisma de base triangular	*6*	*5*	*9*
Prisma de base hexagonal	*12*	*8*	*18*
Prisma de base quadrada	*8*	*6*	*12*
Pirâmide de base triangular	*4*	*4*	*6*
Pirâmide de base quadrada	*5*	*5*	*8*
Pirâmide de base hexagonal	*7*	*7*	*12*

Depois de preencher essa tabela, é fácil verificar que a soma do número de vértices com o número de faces excede o número de arestas em duas unidades.

Por fim, também existem sólidos geométricos formados por superfícies não-planas. O cilindro, o cone e a esfera são os mais conhecidos.

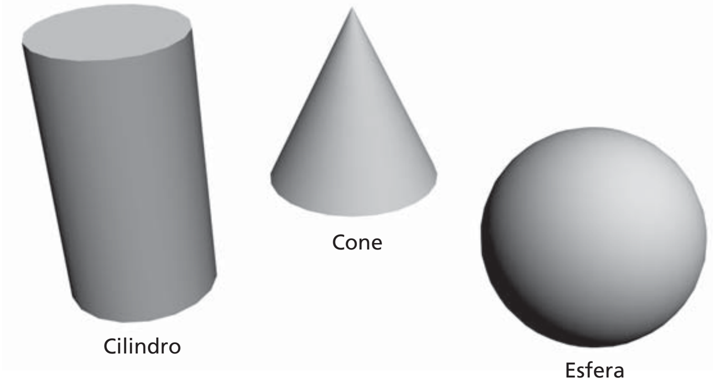


Figura 26.5: Sólidos formados por superfícies não-planas.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivos 8 e 9

12. Identifique um elemento presente em nosso dia-a-dia cuja forma se assemelha a um cone, a um cilindro e a uma esfera. Em seguida, aponte uma propriedade que esses sólidos possuem e que prismas e pirâmides não possuem.

____

____

____

COMENTÁRIO

Os chapeuzinhos de festa de aniversário, as casquinhas de sorvete e os cones muito usados como sinalizadores no trânsito se assemelham ao cone. As latas de óleo, de refrigerante, de achocolatado ou de leite em pó se assemelham ao cilindro. As bolas de diversos tamanhos utilizadas em esportes variados se assemelham à esfera. Uma propriedade específica desses três tipos de sólido é a capacidade de rolar.

Assim, vamos percebendo que as formas geométricas podem ser caracterizadas não só pelos elementos da vida real a que se assemelham, mas também pelas propriedades a que satisfazem: presença ou não de regiões planas, presença ou não de regiões não-planas, tipos de faces que possuem (triangulares, retangulares etc.), número de arestas que partem de cada vértice.

Outro aspecto que também pode ser levado em consideração para a caracterização dos sólidos geométricos são as várias perpectivas que podemos obter deles.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 10

13. Pegue uma embalagem cuja forma se assemelha a um paralelepípedo e coloque-a sobre uma mesa. Posicione-se de duas maneiras diferentes em relação a essa mesa e, em cada caso, tente desenhar o que você vê da embalagem. Em seguida, compare seus desenhos.

COMENTÁRIO

Esta é uma questão pessoal, pois cada aluno escolherá uma embalagem e irá se posicionar de maneiras distintas em relação à mesa em que a apoiar. Todavia, é importante destacar que o posicionamento escolhido acarretará a visão de uma, duas ou três faces da embalagem.

A análise e o desenho das várias vistas de um objeto, entre elas as **VISTAS LATERAIS**, **FRONTAIS** ou **SUPERIOR**, conduzem-nos à apreensão de novas propriedades e, ao mesmo tempo, favorecem o desenvolvimento de nossa visão espacial como um todo.

Quando observamos um objeto de cima temos a **VISTA SUPERIOR** desse objeto. Quando observamos um objeto pelo seu lado direito ou pelo esquerdo, temos as suas **VISTAS LATERAIS**. Quando nos posicionamos de frente para um objeto, temos a sua **VISTA FRONTAL**.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 10

14. Relacione cada objeto a sua vista superior:

Em muitos dicionários da Língua Portuguesa, planificar significa apresentar em planta. Assim, seguindo essa idéia, a **PLANIFICAÇÃO** de um sólido é a figura que obtemos quando "abrimos" o sólido e colocamos todas as suas faces num mesmo plano.

COMENTÁRIO

A observação de um sólido sob diferentes pontos de vista nos permite ainda ter uma idéia de como construir um "molde" para a fabricação desse sólido. Por exemplo, a partir da observação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo, temos noção de como deveríamos recortar um pedaço de papelão para que, quando ele fosse dobrado corretamente, obtivéssemos uma caixa semelhante à observada. Nesse sentido, as atividades de planificação completam o desenvolvimento de tal noção.

ATIVIDADE

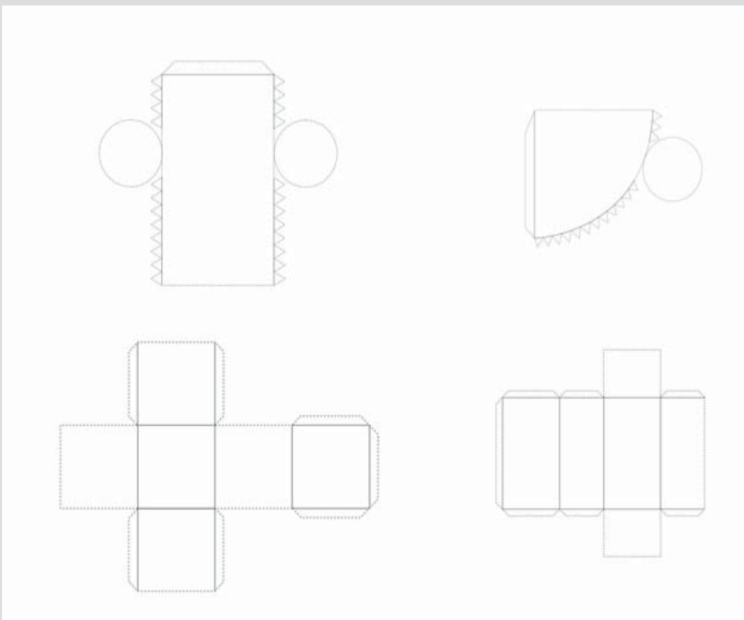
Atende ao Objetivo 11

15. Vamos "abrir", ou seja, planificar os seguintes objetos:

Analisando as planificações, pinte com as mesmas cores as faces opostas do dado e da caixa e ainda reflita sobre a questão: se a lata de leite em pó é feita de alumínio, que é um material resistente, que dificilmente poderíamos "abrir" ou cortar para planificar, como é possível visualizarmos sua planificação?

RESPOSTA COMENTADA

As planificações ficam assim:



Voltando-nos para a reflexão proposta, um caminho possível para visualizarmos a planificação da lata é recortarmos e esticarmos o seu rótulo sobre uma superfície plana. Vale destacar, porém, que esse procedimento não nos permite visualizar que é necessário acrescentar à planificação o desenho das bases da lata.

Observando a planificação dos objetos, encontramos quadrados, retângulos, círculos e outras formas que, de acordo com a definição que apresentamos no início desse item, são figuras geométricas planas. Com isso, esperamos que você perceba que as atividades de planificação nos conduzem inevitavelmente para o estudo das figuras planas.

FIGURAS PLANAS

Quando desenhamos a planificação de sólidos geométricos, desenhamos figuras planas. Outra maneira de fazer isso é apoiar os sólidos num papel e passar o lápis contornando sua base. Na atividade a seguir, você terá oportunidade de contornar com o lápis as bases de alguns sólidos.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 12

16. Apóie uma caixa cuja forma se assemelha a um paralelepípedo sobre uma folha de papel numa superfície plana.

a) Contornando a base da caixa com um lápis, você desenhará no papel uma figura. Que figura é essa?

____

b) Se você repetir esse procedimento com uma lata de leite em pó, que figura desenhará?

____

c) Se você repetir esse procedimento com vários objetos, com quais você fará um desenho semelhante ao que fez com a caixa? E semelhante ao que fez com a lata?

____

d) Para obter desenhos semelhantes, é necessário que os sólidos tenham a mesma forma?

____

RESPOSTA COMENTADA

Certamente, contornando a caixa, item a você desenhou um retângulo e, contornando a lata, no item b você desenhou uma circunferência. No item c, se você repetir esse procedimento com outras caixas que têm a forma de um paralelepípedo, desenhará outros retângulos e, se fizer isso com outros objetos de forma cilíndrica, desenhará outras circunferências. Entretanto, devemos lembrar que pirâmides de base *retangular também nos forneceriam retângulos e cones, circunferências. Assim (item d) para obtermos desenhos semelhantes é necessário apenas que as bases dos sólidos tenham formas semelhantes.*

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 12

17. Selecione alguns objetos cujas formas se assemelham a paralelepípedo, prismas e pirâmides de base triangular, quadrada e hexagonal, cilindro e cone da atividade anterior. Complete o quadro a seguir com o desenho, ainda que reduzido, dos objetos selecionados.

Formas que têm apenas segmentos de reta em seu contorno	Formas que têm linhas curvas em seu contorno

RESPOSTA

Objetos cujas formas se assemelham a prismas, pirâmides e paralelepípedos, devem ser desenhados no quadro da esquerda, e objetos cujas formas se assemelham a cilindros e cores, no quadro da direita.

A distinção entre os tipos de formas proposta nesse quadro é fundamental para a compreensão da idéia de polígono. As figuras que têm apenas segmentos de reta são polígonos. Por isso, para desenharmos **POLÍGONOS** é comum usarmos réguas ou esquadro.

POLÍGONOS

Figuras planas limitadas exteriormente por três ou mais segmentos de reta.

Para desenharmos **CIRCUNFERÊNCIAS**, usamos compassos. Observe, entretanto, que nem toda linha curva pode ser desenhada com o compasso. Ele é útil para traçarmos circunferências ou partes delas.

A **CIRCUNFERÊNCIA** é uma linha curva simples e fechada formada por pontos que têm a seguinte propriedade: todos estão à mesma distância de um certo ponto que nomeamos centro. Essa distância é conhecida como o raio da circunferência. Para desenhá-la, colocamos a ponta-seca do compasso no ponto em que desejamos que seja seu centro e abrimos o compasso na distância que desejarmos que seja o raio. O círculo é a junção da circunferência com seu interior.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 8

18. Vamos agora pensar em objetos do nosso dia-a-dia que se assemelham a círculos, circunferências e polígonos. Faça uma lista desses objetos e, em seguida, analise se eles possuem duas ou três dimensões.

COMENTÁRIO

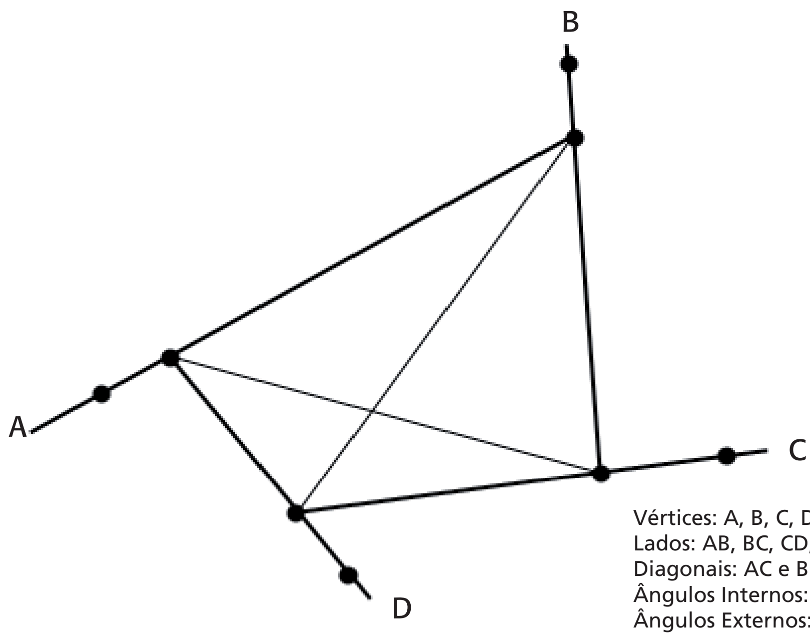
Os quadros-de-giz de uma sala de aula, as portas e janelas e uma folha de papel são objetos que se assemelham aos retângulos, que, como vimos, são um tipo de polígono. Já um CD, a tampa de uma lata cilíndrica ou de uma panela se assemelham ao círculo. Uma aliança ou um bambolê se assemelham a uma circunferência. Entretanto, é importante destacar que, embora os objetos se assemelhem a figuras planas, todos possuem três dimensões, com duas se sobressaindo sobre uma terceira. Uma evidência disso são as folhas de papel A4 muito úteis no trabalho escolar tanto de secretaria quanto de sala de aula. Uma folha desse tipo possui três dimensões, sendo que sua espessura é quase insignificante em comparação ao comprimento e à largura. A espessura de uma folha só pode ser percebida, quando vemos muitas delas empilhadas e empacotadas. Se as folhas não tivessem espessura, poderíamos empilhar quantas quiséssemos que as pilhas teriam sempre a mesma espessura, o que não acontece.

A palavra polígono vem do grego: *poli* significa *muitos*, e *gono* significa **ÂNGULO**. Isso nos sugere que há outros elementos a serem observados num polígono, além dos segmentos de reta que o contornam, ou seja, seus lados.

Ângulo

Região do plano limitada por duas semiretas que têm a mesma origem. No caso dos polígonos, podemos pensar em ângulos formados por dois lados que têm a mesma origem, se admitirmos que cada lado está contido em uma semi-reta.

Um polígono também possui vértices, ângulos internos e externos e diagonais. O encontro de dois lados ocorre num ponto que nomeamos vértice. O segmento de reta que une dois vértices não consecutivos é chamado de diagonal. Os ângulos internos são os ângulos formados por dois lados consecutivos. Os ângulos externos são os ângulos formados por um lado do polígono e o prolongamento do lado a ele consecutivo.



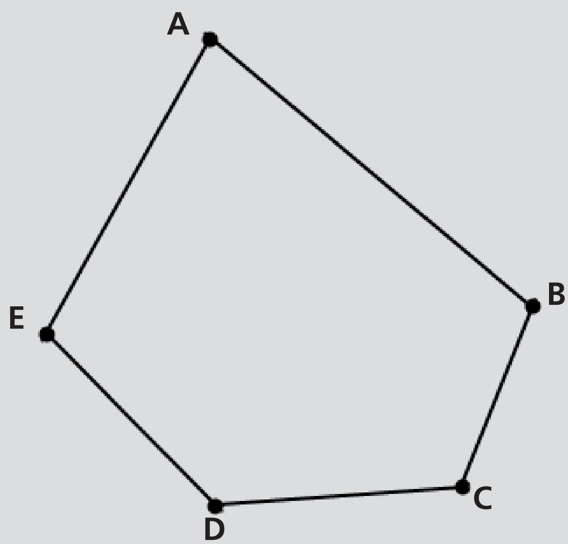
Vértices: A, B, C, D.
Lados: AB, BC, CD, DA.
Diagonais: AC e BD.
Ângulos Internos: ADC, DCB, CBA, BAD.
Ângulos Externos: D'DC, C'CB, B'BA, A'AD.

Figura 26.6: Elementos de um quadrilátero.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 13

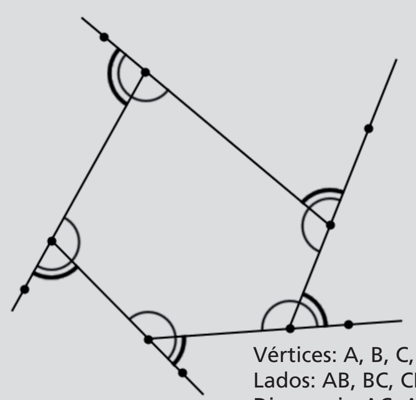
19. Observe o polígono a seguir:



a) Identifique seus vértices.
b) Trace todas as suas diagonais.
c) Marque seus ângulos internos e externos.

RESPOSTAS

a) Os vértices desse polígono são os pontos A, B, C, D e E.
b) As diagonais são os segmentos que unem os pontos A e C, A e D, B e D, B e E, C e E.
c) Marcando os ângulos internos com um traço e os ângulos externos com dois traços, temos:



Vértices: A, B, C, D, E.
Lados: AB, BC, CD, DE, EA.
Diagonais: AC, AD, BC, BE, CE.
Ângulos Internos: ABC, BCD, CDE, DEA, EAB.
Ângulos Externos: A'AB, B'BC, C'CD, D'DE, E'EA.

Os polígonos são nomeados de acordo com o número de lados:

Tabela 26.1: Os tipos de polígono

Número de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 13

20. Voltando ao polígono da atividade anterior e consultando a **Tabela 26.1**, escreva o seu nome. ____

RESPOSTA

O nome do polígono é pentágono.

VOLUMES, ÁREAS, PERÍMETROS E ÂNGULOS

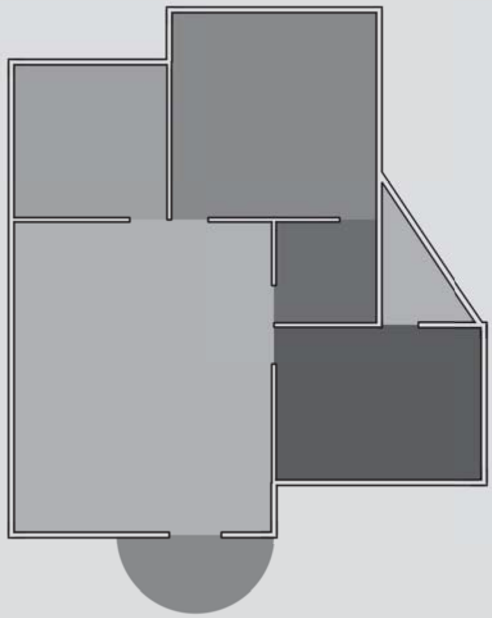
Conforme avançamos na compreensão do espaço que nos cerca, novas necessidades vão surgindo. Uma delas é a necessidade de medi-lo ou medir alguns de seus elementos: superfícies, distâncias, ângulos, capacidade de armazenamento etc. Vamos dedicar este item ao estudo dessas medidas.

Como vimos, certas figuras planas podem representar as faces dos sólidos geométricos ou ainda suas planificações. Além disso, é comum usarmos figuras planas para representarmos os espaços propriamente. É o caso das plantas e mapas.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 14

21. Observe a planta de um apartamento desenhada a seguir:



a) Que polígonos foram usados na planta do apartamento?

b) Considerando que cada centímetro do desenho corresponde a um metro da realidade, quais são as dimensões dos quartos, da sala e da cozinha?

RESPOSTAS

a) Os polígonos usados na planta do apartamento foram quadrado, retângulo, triângulo. Além disso, usamos parte de uma circunferência.
b) Considerando que cada centímetro corresponde a um metro, as dimensões desejadas são:

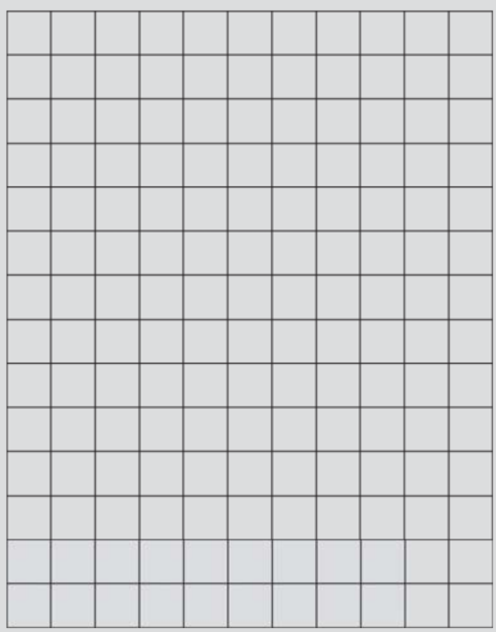
Cômodo	*Comprimento*	*Largura*
Quarto maior	*4m*	*4m*
Quarto menor	*3m*	*3m*
Sala	*5m*	*6m*
Cozinha	*3m*	*4m*

Na maioria das vezes, entretanto, não estamos interessados apenas na medida das dimensões de uma figura ou de um ambiente. No caso deste último, por exemplo, podemos precisar da medida da superfície do chão para cobri-la com lajotas ou tapetes. Podemos ainda precisar da medida do seu contorno para colocarmos rodapé. Trata-se de medidas diferentes, obtidas com unidades de medidas e ações distintas. A medida da superfície é a área do chão e a medida de seu contorno é o perímetro. Uma unidade de medida adequada para a obtenção do perímetro é o metro, e uma unidade de medida adequada para a obtenção da área é o metro quadrado (m^2), que corresponde à superfície de um quadrado de um metro de lado.

ATIVIDADE

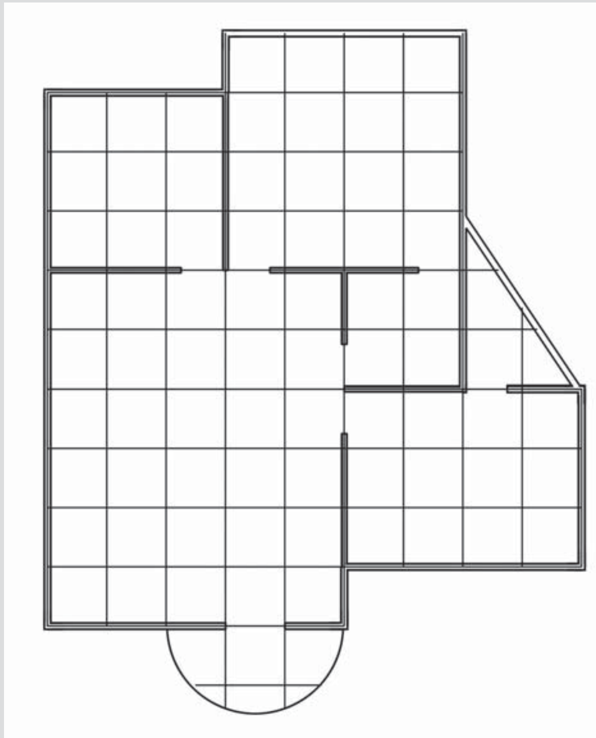
Atende ao Objetivos 14 e 15

22. A seguir você encontrará uma malha quadriculada. Cada quadradinho tem 1cm de lado. Considerando novamente que o cm corresponde a um metro, desenhe cada cômodo na malha. Em seguida, conte quantas vezes o quadrado de 1cm de lado coube no desenho de cada cômodo e meça o contorno de cada cômodo. Fazendo isso, você estará medindo, respectivamente, a área e o perímetro de cada cômodo.



RESPOSTA COMENTADA

Os desenhos na malha quadriculada ficam assim:



As medidas obtidas são as seguintes:

Cômodo	***Área***	***Perímetro***
Quarto maior	*16m²*	*16m*
Quarto menor	*9m²*	*12m*
Sala	*30m²*	*22m*
Cozinha	*12m²*	*7m*

Atente apenas à unidade de medida que empregamos nesta solução. Como cada centímetro correspondeu a 1m, cada quadrado com 1 cm de lado correspondeu a 1m². Por isso, indicamos a área em m² e o perímetro em metros.

Voltando nossa atenção para os sólidos geométricos, percebemos que é possível medir ainda o espaço que ele ocupa, ou seja, o seu volume. Para tanto, assim como fizemos no cálculo de perímetros e áreas, também é necessário estabelecermos uma unidade de medida padrão e verificarmos quantas vezes ela cabe no sólido cujo volume desejamos medir.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 16

23. Pesquise unidades de medida para medir o volume de sólidos geométricos. Descreva situações do dia-a-dia em que elas são empregadas.

COMENTÁRIO

O metro cúbico (m^3) e o centímetro cúbico (cm^3) são unidades de medida muito utilizadas na obtenção do volume dos sólidos. Elas correspondem ao volume de uma caixa cúbica com, respectivamente, 1m e 1cm de aresta. O metro cúbico tem sido utilizado para indicar o volume de caixas-d'água, o volume das carrocerias de caminhão ou o volume dos cilindros que armazenam gás em automóveis.

É importante salientar que o m, o m^2 e o m^3 não são as únicas unidades de medida de perímetro, área e volume. Existem muitas outras. Os **MÚLTIPLOS** e submúltiplos deles são algumas. Se descontextualizarmos as figuras desenhadas na Atividade 21 e pensarmos apenas nos polígonos, poderemos pensar em obter a área dos polígonos usando o quadrado com um centímetro de lado como unidade de medida e assim, estaremos usando o centímetro quadrado como unidade de medida. A discussão sobre perímetros, áreas e volumes não se encerra aqui. Esse assunto será retomado no próximo módulo e em outros módulos de Matemática na Educação 2.

Os **MÚLTIPLOS** do m são km, hm, dam, e os seus submúltiplos são dm, cm e mm. Os múltiplos do m^2 são km^2, hm^2, dam^2, e os seus submúltiplos são dm^2, cm^2 e mm^2. Os múltiplos do m^3 são km^3, hm^3, dam^3, e os seus submúltiplos são dm^3, cm^3 e mm^3.

COMO ENSINAR?

Para ensinar um assunto de Matemática, o professor precisa ter à sua disposição uma variedade de materiais que favoreçam a observação pelos alunos das regularidades e propriedades a ele relacionadas. Precisa também fazer um levantamento do vocabulário e dos conhecimentos prévios que os alunos possuem. No caso dos conceitos geométricos, tais necessidades não são diferentes. Na atividade a seguir, você poderá fazer um levantamento sobre materiais favoráveis ao ensino de Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 17

24. Vamos supor que brevemente você trabalhará conceitos geométricos com alunos do 1º ciclo do Ensino Fundamental. Como bom profissional, além de pesquisar atividades interessantes para realizar com as crianças, você irá compor o seu *kit* de Geometria, com materiais que não poderão faltar em suas aulas. Que objetos você incluirá no seu *kit*?
____
____
____

RESPOSTA COMENTADA

Além dos instrumentos de construção mais conhecidos (par de esquadros, régua e compasso), incluir sucatas como as embalagens mencionadas nas atividades anteriores, brinquedos, papel quadriculado, planificações dos sólidos etc.

Não basta, entretanto, dispormos de um vasto *kit* de Geometria, se não criarmos condições para que as crianças os utilizem. Elas precisam vê-los, mas também precisam agir com eles.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 17

25. Analisando as atividades propostas neste módulo, identifique ações em que o professor deve criar condições que as crianças realizem para que se apropriem de conceitos geométricos.

RESPOSTA COMENTADA

Podemos identificar ações fundamentais a serem realizadas pelos alunos numa aula sobre conceitos geométricos:

(a) a confecção e manipulação de materiais concretos;

(b) a observação das formas presentes no meio que nos cerca;

(c) o desenho das formas e de suas várias vistas;

(d) a observação das propriedades das formas;

(e) a classificação de figuras;

COMO AVALIAR?

A avaliação da aprendizagem de conceitos geométricos, assim como a avaliação da aprendizagem de qualquer assunto, deve ser processual, não pode ser feita em apenas um dia com hora marcada. Para avaliar, o professor deve dispor de recursos variados que lhe permitam perceber se os seus objetivos, claramente definidos, estão sendo atingidos.

O modelo de Van Hiele para o pensamento em Geometria é um recurso muito útil para a avaliação tanto dos conhecimentos adquiridos pelo aluno quanto do trabalho realizado pelo professor. De acordo com o modelo, "os alunos progridem segundo uma seqüência de níveis de compreensão, enquanto eles aprendem Geometria" (NASSER e LOPES, 1996, p. 11).

Nasser e Lopes (1996, p. 12) apresentaram o quadro a seguir com os níveis de Van Hiele e exemplos de atividades em cada um deles.

Quadro 26.1: Níveis de Van Hiele.

Nível de Van Hiele	Características	Exemplos
Básico: Reconhecimento	Identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas, com base em sua aparência global	Classificação de quadriláteros (recortes) em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapésios
Nível 1: Análise	Análise de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades: quatro lados, quatro ângulos retos, lados iguais, lados opostos paralelos.
Nível 2: Síntese	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de quadrado pelas propriedades mínimas: quatro lados iguais e quatro ângulos retos. O retângulo é um paralelogramo, pois também possui os lados opostos paralelos.
Nível 3: Dedução	Domínio do processo dedutivo e de demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
Nível 4: Rigor	Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

Uma maneira interessante de aplicar essa teoria é realizar avaliações diárias formais ou informais e verificar a ocorrência ou não de mudança de nível dos alunos ao longo do processo de ensino. Para que um aluno chegue ao último nível, são necessários anos de escolaridade, entretanto a mudança de nível pode significar a eficácia das atividades que o professor lhe propõe.

CONCLUSÃO

Durante muitos anos, o ensino de Geometria tinha início com o estudo das figuras planas. Somente depois disso os sólidos geométricos eram enfatizados. Podemos concluir, com esta aula, que a ordem de apresentação desses assuntos pode ser alterada. Na verdade, se desejamos realizar um ensino que valoriza a experiência do aluno e leva em consideração seus conhecimentos prévios, é necessário iniciar o estudo pela abordagem dos sólidos. Afinal, o mundo que nos cerca está repleto de objetos tridimensionais.

ATIVIDADE FINAL

Atende ao Objetivo 17

Para finalizar, suponha que você realizará uma oficina sobre o ensino de Geometria para alunos de um curso de formação de professores para os ciclos iniciais do Ensino Fundamental. Liste, pelo menos, três questões, que devem nortear o planejamento da sua oficina.

___

___

___

___

___

COMENTÁRIO

Entre outras, são questões que você deve levar em consideração ao elaborar uma oficina para o público-alvo:
– Que conhecimentos de Geometria os alunos possuem?
– O que deve ser ensinado?
– Que recursos podem ser utilizados?
– Como podemos avaliar a construção de conceitos geométricos?
– Por que é importante ensinar Geometria?

RESUMO

Por volta de 2000 a.C., o ser humano já se utilizava de conhecimentos geométricos. A Geometria se desenvolveu ainda mais ao longo dos anos, e seus usos vão além de nossas necessidades diárias: muitos conhecimentos geométricos são aplicados a outras ciências como a Física, a Engenharia e a Astronomia. As figuras geométricas são objetos abstratos, que não existem materialmente. Os objetos do mundo real apenas se assemelham às figuras geométricas e vice-versa. Os entes geométricos são o ponto, a reta e o plano. Eles não são definidos. Os sólidos geométricos são tridimensionais e as figuras planas são bidimensionais. As faces de um sólido geométrico são figuras planas. A observação e a exploração das propriedades das figuras geométricas nos conduzem à necessidade de medir comprimentos, superfícies e volumes. As unidades de medida dessas grandezas são, respectivamente, o metro, o metro quadrado e o metro cúbico.

Para ensinar Geometria, o professor deve levar para a sala materiais como sucatas, papel quadriculado, instrumentos de medida e de construção geométrica. Além disso, ele deve criar condições para que os alunos, após a observação e manipulação de objetos, identifiquem as propriedades das figuras geométricas. A teoria de Van Hiele é um recurso para que o professor avalie o processo de construção de conceitos geométricos.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Dando prosseguimento às reflexões sobre a Geometria e seu ensino, na próxima aula você conhecerá alguns jogos que contribuem para o desenvolvimento de noções geométricas.

AULA 27

Brincando com polígonos e poliedros

Meta da aula

Apresentar materiais lúdicos que podem ser relacionados à Geometria.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. elaborar atividades, envolvendo conceitos da Geometria, que requeiram o uso do tangram e do pentaminó;
2. construir um tangram e um pentaminó e utilizá-los para formar figuras diversas;
3. reconhecer o valor pedagógico dos materiais lúdicos.

INTRODUÇÃO

A utilização de um material lúdico nas aulas deve estar vinculada aos objetivos do ensino, devendo-se ter clareza dos objetivos que se deseja alcançar. Utilizá-lo não garante a aprendizagem. Por isso, é fundamental que as atividades que envolvam jogos sejam orientadas pelo professor com base em critérios que favoreçam a tentativa e o resgate do "erro" durante a ação. Na busca de soluções, os jogos permitem ao aluno enfrentar desafios, desenvolver o pensamento crítico, criar estratégias e alterá-las sempre que necessário. Desta forma, contribui-se para a organização do pensamento e a construção de uma atitude positiva frente à matemática. Este conjunto de atitudes é extremamente importante para a aprendizagem da Matemática. Sem dúvida, a utilização do jogo como recurso pedagógico deve merecer atenção especial na formação dos professores (KISHIMOTO, 1999; KAMII, 1991; MACEDO, 1995).

Nesta aula, apresentaremos, dentre inúmeros outros existentes, alguns materiais lúdicos que podem ser relacionados à Geometria. Cada um deles pode ser trabalhado de diferentes formas, e não poderíamos nesta aula esgotar todas as possibilidades. Por isso, consideramos esse estudo como introdutório ao tema, como a base mínima necessária para que você prossiga seus estudos, aplique estes materiais de diferentes maneiras e descubra, por si, inúmeras outras formas de utilização.

Consideramos que esses materiais podem ser classificados como jogos matemáticos e podem ser utilizados como estratégia para a introdução de um novo conteúdo, para a compreensão de um tema ou para a aplicação do que foi estudado. Seja no início, durante ou ao término do estudo de um tema, sempre é importante que o professor conheça o jogo profundamente e que esteja ciente do seu valor pedagógico.

Esperamos que esta aula contribua para ajudá-lo na utilização de técnicas lúdicas que, além de contribuírem para a construção do pensamento lógico-matemático, tornarão as aulas mais interessantes.

JOGOS MATEMÁTICOS

Muitos jogos podem ser usados como recurso didático. Mesmo que seus utilizadores possam não perceber, os diversos jogos exigem a utilização de conhecimentos matemáticos, sendo, por isso, importantes recursos pedagógicos.

Kishimoto ressalta:

> O jogo, como promotor de aprendizagem e do desenvolvimento, passa a ser considerado nas práticas escolares como importante aliado para o ensino, já que colocar o aluno diante de situações de jogo pode ser uma boa estratégia para aproximá-lo dos conteúdos culturais a serem veiculados na escola, além de poder estar promovendo o desenvolvimento de novas estruturas cognitivas (2005, p. 80).

Um cuidado metodológico fundamental que você deve ter previamente ao uso de qualquer jogo ou material pedagógico é estudá-lo e utilizá-lo antes de trabalhar com ele em sala de aula. Uma análise cuidadosa permitirá que você reflita sobre a sua utilização e as eventuais dificuldades que poderá representar para seus alunos. Também é fundamental verificar se ele está de acordo com o conteúdo em estudo e com o estágio da turma. Se for muito difícil ou fácil demais, não despertará o interesse dos alunos.

> O professor não pode subjugar sua metodologia de ensino a algum tipo de material porque ele é atraente ou lúdico. Nenhum material é válido por si só. Os materiais e seu emprego sempre devem estar em segundo plano. A simples introdução de jogos ou atividades no ensino da matemática não garante uma melhor aprendizagem desta disciplina (FIORENTINI; MIORIM, 1996, p. 9).

Os jogos matemáticos permitem a compreensão de conceitos matemáticos e a elaboração, sob uma forma atraente, de estratégias de resolução de problemas. Além disso, rompem com a rotina das aulas, o que, em geral, contribui para o envolvimento dos alunos na atividade. Mas, para não romper o encantamento, é bom permitir que eles possam ser desfrutados por seus alunos.

1º jogo: Tangram

Lembre-se de que o tangram é formado por sete peças, cuja base é um quadrado. O desafio deste quebra-cabeça é compor diferentes figuras, utilizando todas as peças, sem sobrepô-las. Observe que cada uma das peças que compõem o tangram é um polígono.

Figura 27.1: Peças que compõem o tangram.

São cinco triângulos retângulos isósceles (dois pequenos, um médio e dois grandes), um quadrado e um paralelogramo.

O tangram permite a representação de incontáveis figuras e objetos. A familiaridade com o material contribui para a resolução das muitas propostas que o jogo oferece.

Diversos tipos de materiais são utilizados para a confecção do tangram: madeira, papel, cartolina, papelão, borracha, feltro, metal etc.

A base do tangram é um quadrado. Não existe uma medida padrão para o lado do quadrado, mas é essencial observar que a relação entre as peças que o formam seja proporcional.

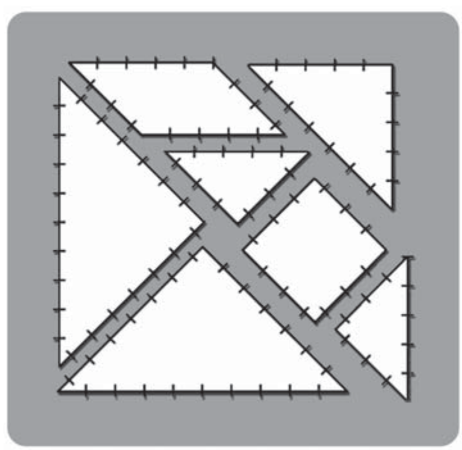


Figura 27.2: A relação entre as peças do tangram é proporcional.

Nas escolas, é muito utilizado, podendo subsidiar a formação e a compreensão das relações geométricas pela realização de atividades que explorem formas e conceitos. Aos poucos, enquanto manuseiam as peças, os alunos começam a perceber as relações existentes entre elas. Em outro momento, você pode levantar questionamentos que explorem conceitos geométricos.

As formas geométricas que compõem o tangram permitem inúmeras possibilidades de exploração do material, dentre as quais atividades voltadas à concentração e ao desenvolvimento da criatividade, a visualização e o reconhecimento de diferentes polígonos e de suas propriedades, da equivalência entre as figuras geométricas e de sua representação. O tangram também contribui para o desenvolvimento da observação, da organização espacial, do raciocínio e da persistência. Além disso, permite o trabalho cooperativo.

SETE PASSOS PARA A CONSTRUÇÃO DE UM TANGRAM

As figuras a seguir demonstram a construção de um tangram:

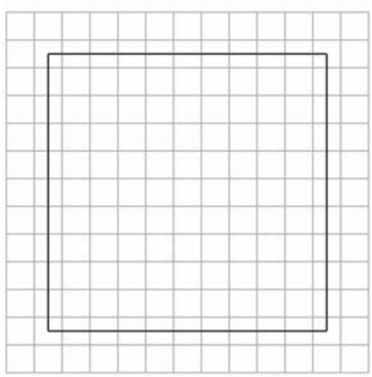


Figura 27.3: Desenhamos um quadrado.

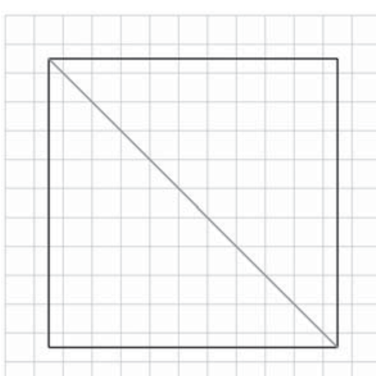


Figura 27.4: Traçamos uma das diagonais do quadrado.

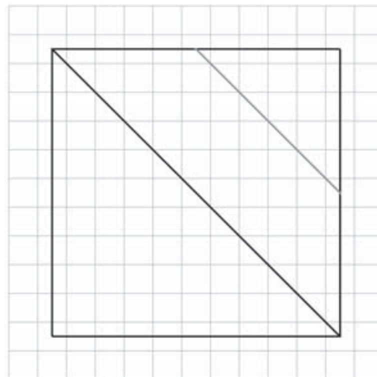


Figura 27.5: Traçamos uma reta paralela à diagonal unindo os pontos médios de dois lados consecutivos do quadrado.

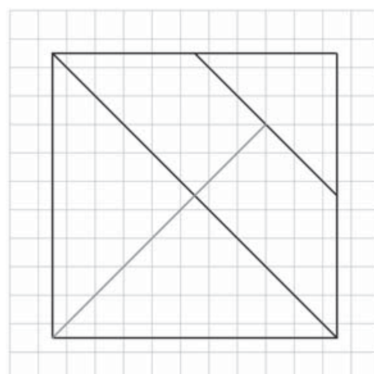


Figura 27.6: Desenhamos a outra diagonal do quadrado, interrompendo-a quando encontrar a reta que une os pontos médios dos lados consecutivos.

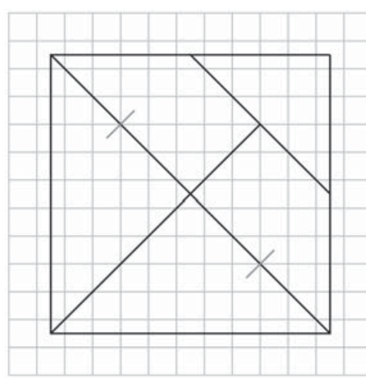


Figura 27.7: Dividimos a diagonal que traçamos completamente em quatro partes iguais.

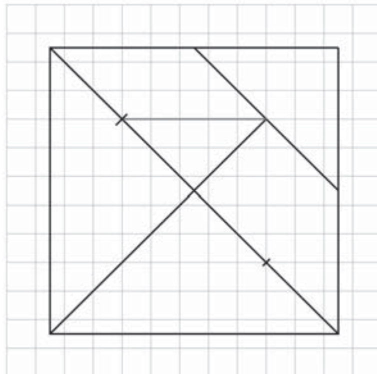


Figura 27.8: Traçamos uma reta unindo o ponto que marca um quarto da diagonal com o que divide a segunda reta traçada em duas partes iguais.

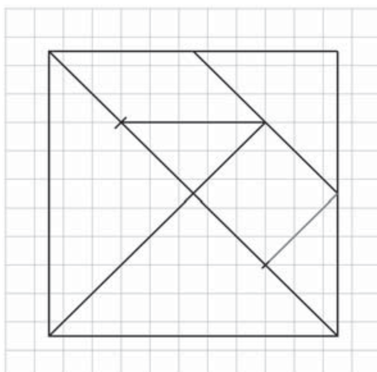


Figura 27.9: Traçamos uma reta unindo o outro ponto que marca um quarto da diagonal com uma das extremidades da segunda reta traçada.

Isso feito, recorta a figura e temos em mãos um tangram. Não é fácil?

Uma versão para o significado e a origem da palavra tangram é a de que *tan* significaria "chinês" e *gram*, "algo escrito ou desenhado como um diagrama". Portanto, tangram significaria "quebra-cabeça chinês".

De fato, o tangram é um quebra-cabeça de origem chinesa que foi introduzido no Ocidente nos meados do século XIX. Na China, é conhecido como Tch'i Tch'iao Pan, o que significa "as sete tábuas da argúcia", ou seja, da habilidade, da destreza.

Uma das histórias que envolvem a origem do tangram conta que ele surgiu quando um azulejo quadrado de porcelana caiu ao chão e partiu-se em sete pedaços. Nas muitas tentativas de recompor a figura original, várias outras foram formadas.

Embora existam modalidades competitivas de tangram, esse jogo é tradicionalmente utilizado individualmente ou em colaboração. Consideramos que essas são as melhores formas de praticá-lo em sala de aula.

Antes de trabalhá-lo com seus alunos, é importante que pratique, por isso propomos algumas atividades para você.

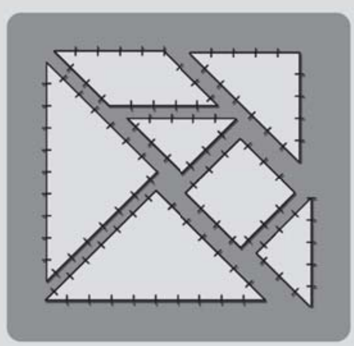
ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

1. Construa um tangram utilizando um material resistente (de sua livre escolha). Crie diferentes arranjos utilizando todas as peças.

COMENTÁRIO

Você deve ter seguido os sete passos apresentados para a construção de um tangram. As peças do tangram devem ser proporcionais ao modelo oferecido. Isso é fundamental para o desenvolvimento das atividades.



Os arranjos são livres, não há certo ou errado. O importante é que todas as peças sejam utilizadas sem que sejam sobrepostas.

Também seus alunos poderão utilizar o tangram para criar diversas formas livremente. De acordo com a faixa etária e o estágio de desenvolvimento, cada um poderá preparar seu próprio tangram.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

2. Utilizando todas as peças do tangram, justapondo-as, sem sobrepô-las em nenhum ponto, construa a seguinte figura, que representa um gato:

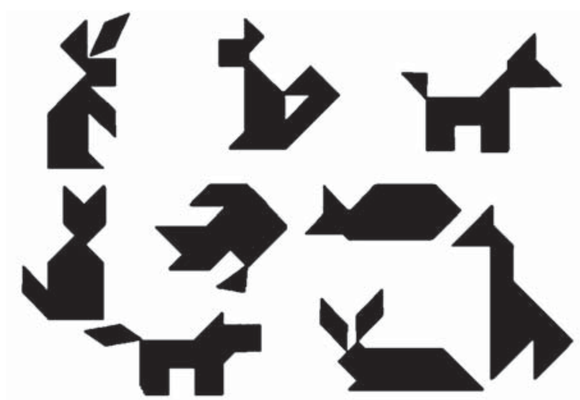
RESPOSTA COMENTADA

Se você reproduziu o gato corretamente, o arranjo das peças ficou assim:

Esse é um exemplo de criação a partir de um modelo. Você pode apresentar diversas figuras e solicitar a seus alunos que as reproduzam.

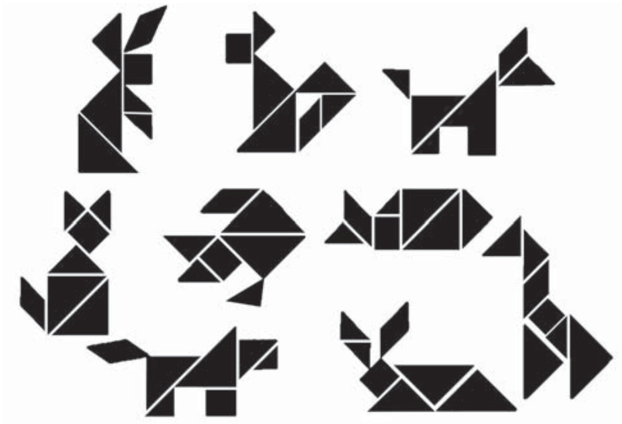
Veja alguns exemplos a seguir. Procure resolvê-los para conhecer o grau de dificuldade de cada um.

Série 1



Série 2

Solução da Série 1



Solução da Série 2

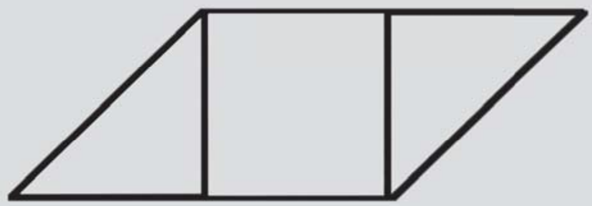
ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

3. Componha a forma apresentada utilizando peças do tangram. Nesta atividade, não é preciso utilizar todas as peças.

RESPOSTA COMENTADA

Este é um exemplo de composição de formas, a partir de outras. Você pode solicitar a seus alunos que construam, livremente, diferentes polígonos. Oportunamente, você também poderá utilizar o tangram para o estudo de áreas.



ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

4. Utilizando as peças do tangram, represente os polígonos solicitados. Em alguns casos, não haverá necessidade da utilização de todas as peças.
a) um quadrado;

b) um retângulo;

c) um triângulo;

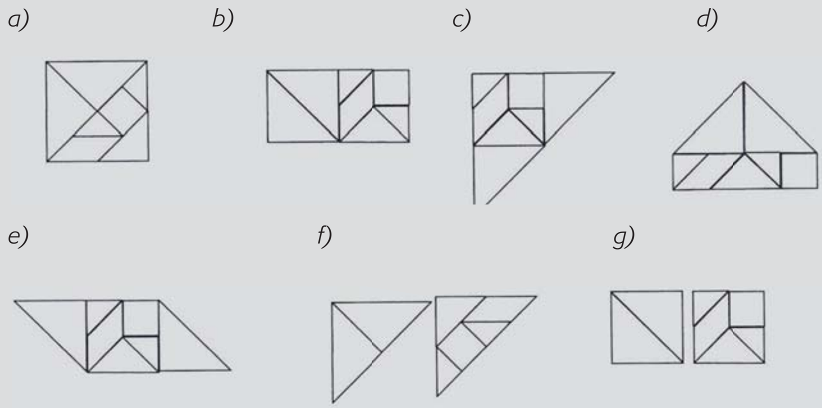
d) um pentágono;

e) um paralelogramo;

f) dois triângulos geometricamente iguais;

g) dois quadrados geometricamente iguais.

RESPOSTAS



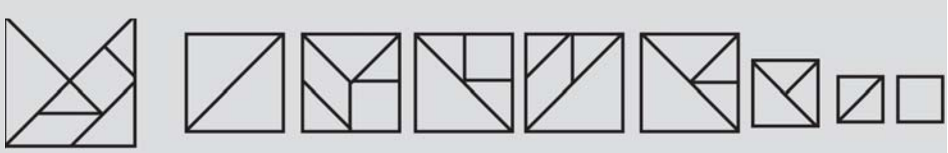
ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

5. Com as peças desse jogo, podemos representar nove quadrados diferentes. Esquematize cada possibilidade. Atenção: nesta atividade, você não precisa utilizar todas as peças em cada quadrado.

RESPOSTA COMENTADA

Observe que são formados quadrados utilizando diferentes número de peças, desde o que utiliza todas, e caracteriza o próprio tangram, ao quadrado representado por uma única peça.



OUTRAS UTILIZAÇÕES DO TANGRAM

O tangram também é um excelente material para o estudo de áreas. Os casos apresentados a seguir exemplificam essa utilização.

Considerando o triângulo menor como unidade de área, podemos determinar a área das outras peças. Por exemplo:

- A área do triângulo médio equivale à área de dois triângulos pequenos.
- A área do quadrado também equivale à de dois triângulos pequenos.
- A área do paralelogramo também é equivalente à de dois triângulos pequenos.
- Podemos concluir que as áreas dessas três figuras são equivalentes.

Para ajudar na visualização dessas afirmativas, sobreponha as peças.

Considerando como unidade de área o triângulo médio, podemos determinar a área das outras peças do tangram. Por exemplo:

- A área do quadrado equivale à área de um triângulo médio.
- A área do paralelogramo equivale à área de um triângulo médio.
- A área do triângulo grande equivale à área de dois triângulos médios.
- A área do triângulo pequeno equivale à área de meio triângulo médio.

Descubra outras aplicações do tangram na Matemática. Registre e divulgue para seus colegas e tutores.

2º jogo: os "Minós"

Certamente você conhece o dominó. Talvez conheça algumas formas diferentes para jogar com eles, mas o tema de que trataremos agora está relacionado com suas peças.

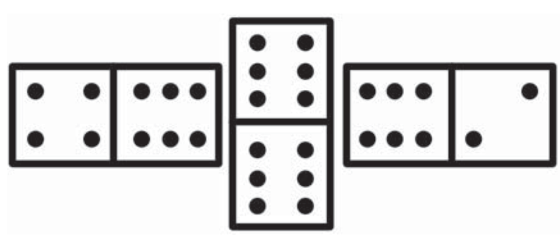


Figura 27.10: Peças de dominó.

Observe que, qualquer que seja a posição em que se encontre, é possível notar um retângulo formado por dois quadrados equivalentes.

Agora, suponhamos que, em vez de dois quadrados, tenhamos três. Nesse caso, teremos os triminós:

Figura 27.11: Peças de triminó.

Agora, observe as diferentes possibilidades que temos para unir quatro quadrados e formar tetraminós.

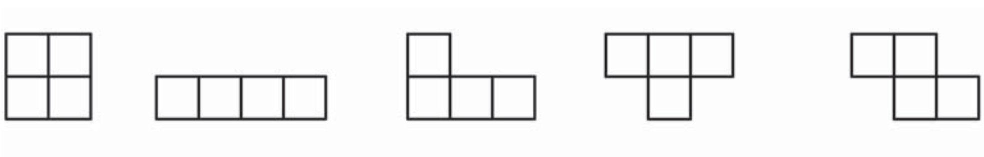


Figura 27.12: Peças de tetraminó.

Todas as peças das **Figuras 27.10, 27.11, 27.12** são denominadas *poliminós*. A palavra *poliminó* nos faz lembrar de dominós e, também, de *polígonos*. Essa palavra não é tão comum quanto dominó, por isso vale a pena saber mais um pouco sobre ela.

Um poliminó é uma figura geométrica formada por um determinado número de quadrados adjacentes. A ordem do poliminó corresponde ao número de quadrados que o compõem: se for formado por um único quadrado, é um monominó; se for formado por dois quadrados, é um dominó; por três quadrados, é um triminó; por quatro quadrados, um tetraminó; por cinco quadrados, um pentaminó...

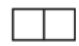
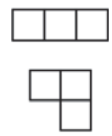
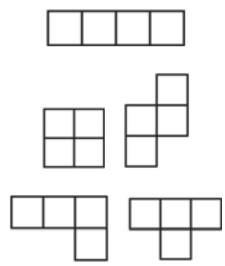
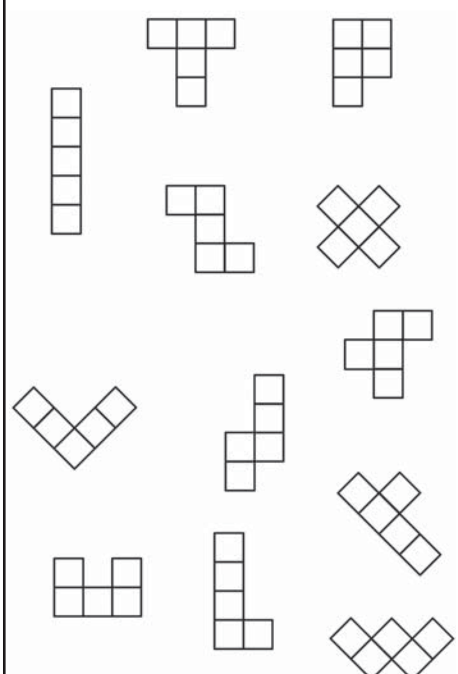
O termo poliminó foi criado em 1954 por Solomon Golomb, então um estudante da Universidade de Harvard. Ele definiu um poliminó como "um conjunto de quadrados em ligação simples", ou seja, um conjunto de figuras formadas por quadrados justapostos, sem formar "buracos".

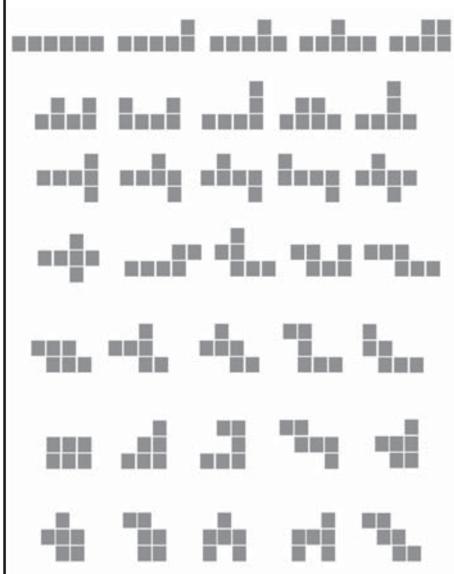
Observe que os formatos do tetraminó são muito utilizados em jogos eletrônicos, entre os quais destacamos o Tetris como o mais popular.

O hexaminó é composto por um número muito grande de peças diferentes, o que dificulta a sua utilização em sala de aula.

O pentaminó é constituído por um número razoável de peças e, por isso, é o mais adequado para a utilização em sala de aula. O quadro a seguir apresenta alguns tipos de poliminós.

Quadro 27.1: Tipos de poliminós

Monominó	
Dominó	
Triminó	
Tetraminó	
Pentaminó	

Hexaminó	

OS PENTAMINÓS

Como vimos, os pentaminós são compostos por peças distintas, formadas por cinco quadrados justapostos, de tal modo que cada quadrado tem pelo menos um dos lados adjacente a outro quadrado.

Os pentaminós podem ser utilizados em diferentes estágios. As crianças menores, ao brincar com eles, desenvolvem os processos de classificação, ordenação e descoberta de padrões. Sua utilização contribui para o senso estético e a criatividade. Os pentaminós também permitem desenvolver a percepção espacial e o raciocínio lógico. São indicados para auxiliarem na compreensão e exploração de semelhanças, simetrias, perímetros e áreas.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

6. Construindo um pentaminó:

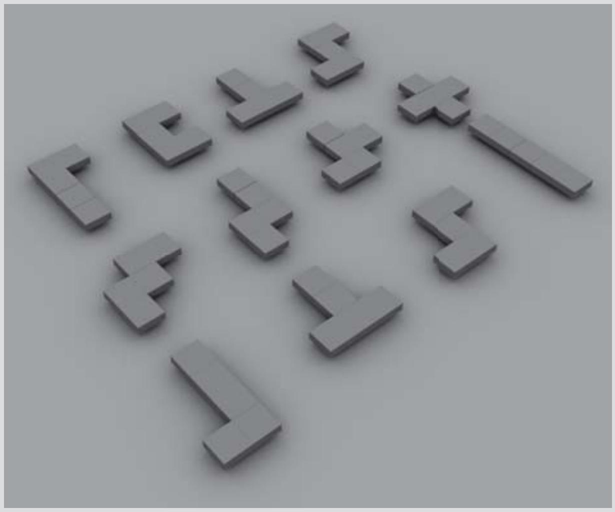


Figura 27.13: Peças de pentaminó.

Em um papel quadriculado, desenhe as figuras conforme o esquema a seguir.

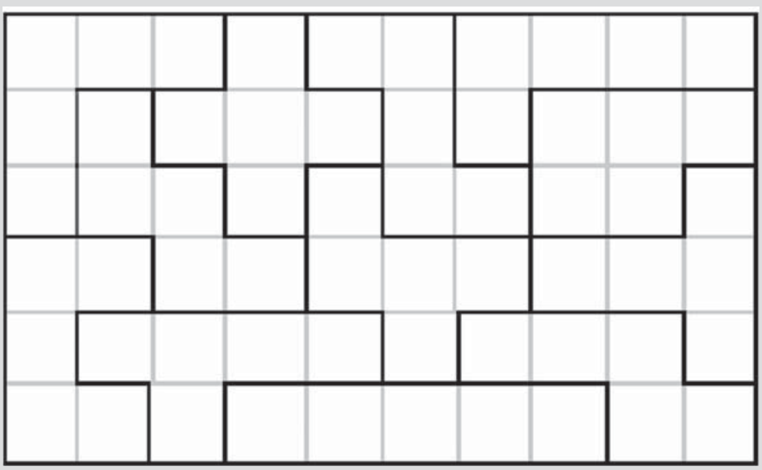
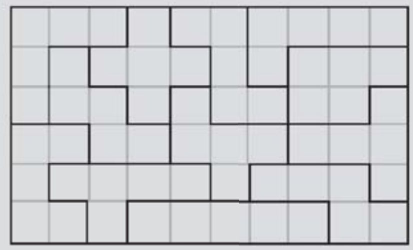


Figura 27.14: Molde de pentaminó.

Reproduza este molde em um material a sua escolha.
Atenção: o encaixe precisa ser exato para que as peças possam ser trabalhadas adequadamente.

Construa peças de pentaminó utilizando um material resistente (de sua livre escolha). Crie diferentes arranjos com elas.

COMENTÁRIO



Você deve ter seguido as orientações que apresentamos anteriormente. Lembre-se de que as peças precisam ser exatas para permitir o encaixe entre elas. Isso é fundamental para o desenvolvimento das atividades.

Os arranjos são livres, pois nesse momento o fundamental é que você explore suas formas.

Sua resposta termina aqui, mas lembre-se de que, dependendo da faixa etária de seus alunos, eles também poderão construir pentaminós.

Para isso, cada um deverá ter em mãos os materiais necessários: papel quadriculado (ou outro suporte), régua, tesoura e lápis. Se todos utilizarem as mesmas medidas como padrão, cada um pode fazer suas peças em uma só cor e trocar algumas posteriormente com seus colegas. Assim, cada aluno terá uma coleção de peças coloridas, o que facilita a sua utilização.

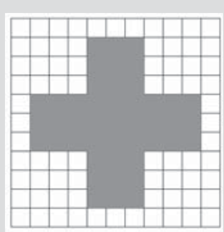
Eles também deverão manipular os pentaminós livremente. Em geral, eles montam figuras do universo infantil. Permita que deem asas à imaginação. Essa exploração é muito importante para a observação das diferenças entre as peças e das possibilidades de encaixe.

ATIVIDADE

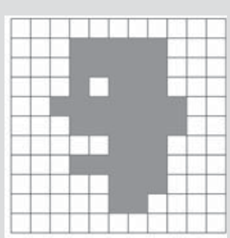
Atende ao Objetivo 2

7. Reproduza, utilizando os pentaminós, os desenhos a seguir.

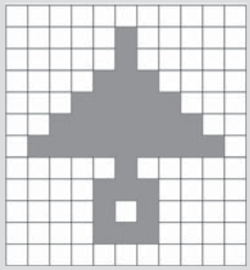
a)



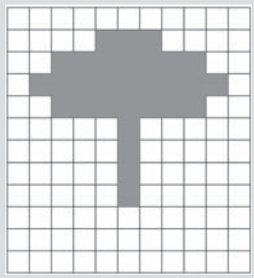
b)



c)



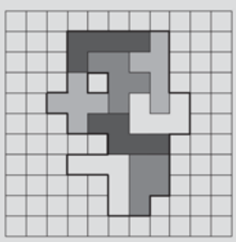
d)



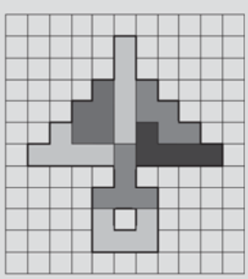
RESPOSTAS

a)

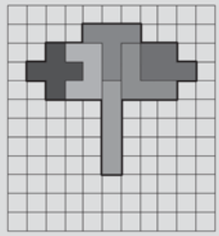
b)



c)



d)



Além de atividades como essas que você realizou, uma outra atividade interessante é que os alunos elaborem e registrem diferentes composições tomando os pentaminós como modelo.
Posteriormente, eles poderão trocar os modelos entre si, propondo desafios uns aos outros.

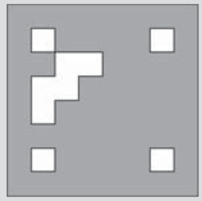
ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

8. Monte, sem deixar buracos, um retângulo utilizando as peças do pentaminó.
Existem diferentes possibilidades. Que tal tentar descobrir mais de uma delas?

COMENTÁRIO

Observe que são doze as peças do pentaminó. Isso significa que se cada uma das peças é formada por cinco quadrados, o total de quadrados é sessenta. Portanto, existem diferentes possibilidades para a montagem de um retângulo, mas lembre-se de que algumas vezes teremos espaços vazios entre as peças. Verifique.
Essa é uma questão interessante. Dependendo do estágio da turma, você poderá informar algumas possibilidades ou deixar que descubram por si próprios.
Existem inúmeros problemas possíveis que podem ser propostos. Como, por exemplo, formar um quadrado com as peças. Nesse caso, poderão ficar espaços vazios.
Para a formação do quadrado, utilizam-se todas as peças, mas ficam quatro "módulos" vazios.



Também é possível, deixando espaços vazios, formar um retângulo 5 x 13.

CONCLUSÃO

É indiscutível o valor educacional dos jogos. Nas aulas de Matemática, eles podem contribuir apoiando os professores nas suas tarefas docentes e facilitando a aprendizagem dos alunos.

Além disso, a Matemática assusta grande número de alunos, acarretando insegurança, medo e ansiedade; assusta professores também! Mas quem ensina por meio de jogos, explorando o lado lúdico da Matemática, não apenas terá melhores resultados junto aos alunos, como maior prazer em suas atividades.

ATIVIDADES FINAIS

Atendem ao Objetivo 1

a) Elabore uma atividade que explore conceitos da Geometria, utilizando o tangram. Seja criativo! Justifique sua proposta.

b) Planeje uma atividade que contribua para a compreensão de algum conceito matemático, utilizando o pentaminó. Justifique sua proposta.

c) Pesquise e relate sobre outros jogos que possam ser utilizados nas aulas de Matemática, especificamente para a compreensão de conceitos de Geometria. Explique a sua utilização.

COMENTÁRIO

A resposta é pessoal. Converse com seus colegas e seus tutores a respeito. Não fique com dúvidas! Que tal utilizar o fórum da plataforma?

RESUMO

O tangram é um jogo versátil, pode ser trabalhado de inúmeras maneiras.
Os poliminós educam os alunos sem perder o apelo lúdico. Especialmente o pentaminó permite uma vasta gama de atividades. O tangram e o pentaminó foram apresentados, e algumas atividades com sua utilização foram propostas.
O foco principal desta aula foi o de destacar o valor educacional dos jogos e orientar o futuro professor para diversas atividades em sala de aula.
É fundamental permitir que seus alunos explorem o material concreto, dando asas à imaginação. Essa exploração contribui para a análise das diferenças existentes entre as peças (tamanho, forma, cor) e das possibilidades de encaixe.
Cabe ao professor orientar seus alunos e, dessa forma, contribuir para a desmitificação das dificuldades atribuídas à Matemática.
Por isso, lembre-se sempre do que aprendeu nesta aula, mas não se limite ao que foi visto. Busque constantemente atividades que tornem suas aulas cada vez mais agradáveis para seus alunos e para você mesmo.

INFORMAÇÃO SOBRE A PRÓXIMA AULA

Na próxima aula, você verá como são avaliados os livros de Matemática e terá a oportunidade de avaliá-los você mesmo.

AULA 28

Alguns livros didáticos têm estrelas. Avalie você mesmo!

Meta da aula

Apresentar os critérios para a seleção de livros didáticos e a importância de o professor realizar tal escolha.

objetivos

Esperamos que, após o estudo do conteúdo desta aula, você seja capaz de:

1. utilizar o livro didático em toda sua potencialidade de ensino e não apenas como um fornecedor de exercícios de fixação;
2. reconhecer a importância do papel do professor na escolha do livro didático;
3. aplicar os critérios de avaliação, definidos pelo PNLD, para avaliar livros didáticos;
4. desenvolver critérios críticos para a escolha do livro didático adequado.

Pré-requisitos

Para um bom aproveitamento desta aula, é necessário que você tenha conhecimento dos conceitos matemáticos a serem ensinados nos anos iniciais do Ensino Fundamental. É importante que você tenha acesso a uma coleção de Matemática de 1º a 5º ano ou a, pelo menos, dois livros, os livros de 3º e 4º anos, pois os exemplos que usaremos nesta aula serão referentes a esses anos.

INTRODUÇÃO

Iniciamos esta aula fornecendo dados históricos relevantes sobre a criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Em seguida, apresentamos os critérios para seleção de livros didáticos estabelecidos nele e discutimos o importante papel do professor na escolha e no uso do livro didático.

Muitos professores utilizam o livro didático na sala de aula como principal condutor do processo de ensino e aprendizagem. Para o professor, o livro é uma importante ferramenta, enquanto que, para o aluno, é um referencial desse processo. Pitombeira levanta essa questão quando diz:

> Mesmo em países com sistemas escolares mais bem estruturados que o nosso, pesquisas indicam que o livro didático é importante, entre outros fatores, porque ele define currículos, prioridades de conteúdos, ordem de apresentação dos mesmos, maneiras de abordá-los. Ou seja, o livro faz política pedagógica (1997, p. 32).

Pela importância que o livro didático tem nas práticas cotidianas das salas de aula, o governo brasileiro criou, em 1996, o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que por meio de *critérios de avaliação* faz a indicação oficial dos livros didáticos para a rede pública de Ensino Fundamental no Brasil. As orientações do PNLD para a avaliação das coleções de Matemática têm como base os PCN e os estudos atuais de Educação Matemática sobre o ensino-aprendizagem dessa disciplina. Esse programa é também responsável pela distribuição dos livros que são escolhidos mediante a realidade de cada escola.

AVALIANDO OS LIVROS DIDÁTICOS

Os critérios de avaliação foram estabelecidos a partir de 1995, quando foi realizada uma mesa-redonda intitulada *Como melhorar a escolha do livro didático*. Desse evento participaram dirigentes e a equipe técnica do Ministério da Educação e Cultura (MEC), várias entidades relacionadas à Educação e à produção de livros didáticos, além de especialistas de diversas áreas do conhecimento. Em outubro de 1995, aconteceu o seminário *Livro didático: conteúdos e processos de avaliação*, com o objetivo de estabelecer esses critérios para a análise de livros didáticos. Tomando como base tais critérios, e definindo a equipe de avaliadores, que são especialistas das áreas de conhecimento indicados pelo MEC, os livros didáticos foram submetidos a uma primeira avaliação no ano de 1996.

Sob esse aspecto, é importante que o PNLD faça uma boa seleção, pois, a partir dela, é feita a escolha dos livros que, posteriormente, serão utilizados pelos alunos das escolas públicas do Ensino Fundamental.

Essa avaliação, a princípio, gerou grande polêmica por parte de pesquisadores, professores e autores de livros didáticos. Os livros eram classificados com estrelas: três estrelas, para os *recomendados com distinção*; duas estrelas, para os *recomendados*; uma estrela, para os *recomendados com ressalvas*. Aqueles que não se enquadravam em nenhuma dessas classificações eram considerados excluídos. No entanto, o recurso das estrelas acabou se transformando num indicador para a escolha mais importante que a própria leitura e análise das resenhas.

Hoje, numa primeira etapa, as coleções são aprovadas ou reprovadas, seguindo os critérios eliminatórios que serão vistos mais adiante. Somente aquelas que atendam aos quesitos mínimos de qualidade serão avaliadas numa segunda etapa, em que as coleções são submetidas aos critérios classificatórios e divididas em categorias conforme indicamos a seguir:

Recomendadas com distinção (RD)

As obras recomendadas com distinção (RD) são consideradas próximas do ideal representado pelos princípios e critérios definidos. São avaliadas como propostas pedagógicas elogiáveis, criativas e instigantes.

Recomendadas (REC)

As obras recomendadas (REC) são aquelas que cumprem plenamente todos os requisitos de qualidade exigidos no processo de avaliação. Segundo os avaliadores, essas obras asseguram ao professor a possibilidade de um trabalho didático correto e eficaz.

Recomendadas com ressalvas (RR)

As obras recomendadas com ressalvas (RR) são avaliadas como isentas de erros conceituais ou preconceitos, obedecendo aos critérios mínimos de qualidade, mas que contêm algumas limitações. Desse modo, podem subsidiar um trabalho adequado, desde que o professor esteja atento às observações, consulte bibliografias para revisão e complemente a proposta.

A partir do processo de avaliação dos livros didáticos, realizado pelo governo, as editoras e os autores passaram a produzir livros de melhor qualidade, evitando erros conceituais no desenvolvimento dos conteúdos e informações preconceituosas.

De modo geral, os atuais livros didáticos de Matemática estão cada vez mais cheios de atrativos, com a intenção de facilitar a prática do professor e de ser um material motivador para o aluno. Eles vêm acompanhados de folhas de atividades, idéias de avaliações, indicações de locais para pesquisa, dicionários, manual do professor e caderno de respostas.

O professor precisa analisar com atenção as coleções, de preferência acompanhado de outros professores.

Devido à avaliação, alguns autores fizeram uma espécie de "maquiagem" nos livros, ou seja, ainda apresentam uma linha bastante tradicional, em que só se mudou, o *layout*, mas a metodologia continua a mesma, sem grandes inovações. Já outros autores apresentam a Matemática de forma realmente inovadora, em que se exige mais estudo e investigação por parte dos professores.

Não podemos negar que a avaliação do livro didático fez com que autores e editoras direcionassem as obras para atender às exigências, pois, com o Programa do Livro Didático, o governo fornece às escolas públicas os livros do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Uma coleção recomendada com distinção tem maior probabilidade de ser comprada em grande quantidade.

A avaliação do livro didático por parte dos professores, além de ser uma importante forma de aperfeiçoamento, também é um ato político. Assim, o grupo precisa estar bem informado antes de optar por essa ou aquela coleção.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 4

1. Converse com alguns professores sobre o processo de escolha do livro didático; tente, por exemplo, descobrir se eles realmente fazem a avaliação, se o processo é democrático, se entendem o critério, se analisam resenhas ou se vão direto para as coleções recomendadas com distinção. Depois, escreva seu ponto de vista sobre esse assunto e entregue-o a seu tutor.

____

____

____

____

COMENTÁRIO

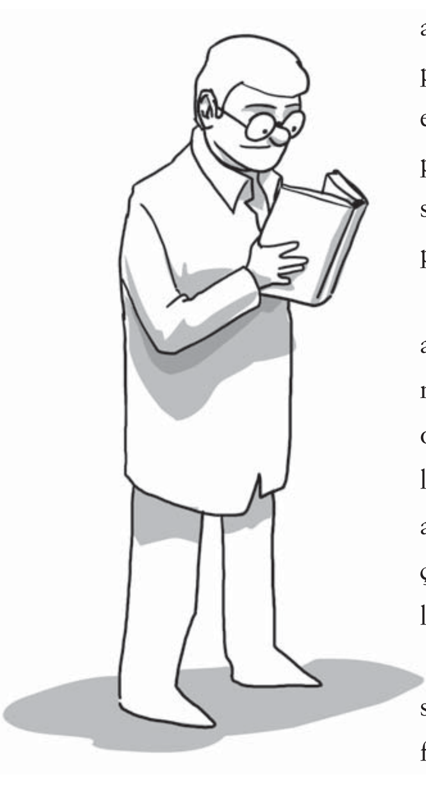
Conversando com professores, você perceberá que os processos de escolha do livro didático podem variar de um grupo para outro. É importante que você atente para os critérios adotados com mais frequência, o que lhe permitirá verificar alguns aspectos que mencionamos anteriormente. Nesta atividade, você também tem oportunidade de estabelecer e descrever a sua opinião sobre critérios para a seleção de livros didáticos e sobre o PNLD. Certamente, cada indivíduo tem a sua opinião, o que não nos permite oferecer uma resposta precisa. Entretanto, qualquer que seja a opinião, é preciso que esteja fundamentada em argumentos coerentes com objetivos de ensino claramente definidos.

A IMPORTÂNCIA DO PROFESSOR NA AVALIAÇÃO E ESCOLHA DO LIVRO DIDÁTICO

É importante lembrar que o professor é o principal condutor do processo de ensino e aprendizagem e que o livro didático não pode ser o único referencial para o desenvolvimento do trabalho pedagógico. O que acontece de maneira geral é que o livro didático cristaliza certos percursos, determinando assim o currículo de Matemática da escola. Sua utilização, na maioria dos casos, ocorre sem grandes alterações ou intervenções, e, dessa forma, o professor se torna um mero coadjuvante na utilização do livro.

Os professores devem ser os agentes na definição do currículo de Matemática e, nas escolas, devem promover debates sobre os recursos pedagógicos que poderão ser utilizados, em complemento ao livro didático. Esses materiais diversificados devem levar em consideração a realidade de cada comunidade, suas características sociais e culturais.

Nesse sentido, o professor deve ser autônomo em relação ao uso apropriado do livro. A metodologia, as prioridades necessárias, a definição do currículo e a forma de apresentá-lo ao aluno devem ser determinadas pela equipe de professores de Matemática de cada escola.



O processo de escolha do livro, que acontece de quatro em quatro anos, é algo muito importante e decisivo para a equipe de professores e, portanto, exige dos educadores envolvidos uma grande responsabilidade e atenção. É mais uma tarefa árdua, que requer tempo e envolvimento profissional, mas que não pode ser feita por outro profissional que não seja o professor, pois é ele quem utiliza o livro e é o principal responsável pelo processo de ensino e aprendizagem.

O livro didático, no Brasil, é o mais importante instrumento de apoio ao trabalho do professor, mas não deve ser o único. Mesmo o melhor dos livros pode ter exercícios e atividades substituídos, alterados ou complementados pelo professor. Além disso, a escolha de um bom livro didático não diminui a necessidade de consultar uma bibliografia adicional, ou seja, sempre que puder e necessitar, o professor deve lançar mão de textos complementares para aprofundar conteúdos, suprir lacunas ou completar e ampliar informações.

A tarefa de avaliar é uma forma de pesquisa e atualização; é necessário que o professor utilize as várias coleções que a escola recebe como fontes de informação. Cabe a ele aproveitar as atividades, os jogos e os fatos históricos trazidos nas coleções. Mesmo decidindo por uma coleção, ele não precisa deixar de usar atividades contidas em outras.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 2

2. Identifique três aspectos que mostrem a importância da avaliação do livro didático pelo professor.

____
____
____
____

RESPOSTA COMENTADA

Identificamos os seguintes aspectos:
O livro será utilizado pelo professor e seus alunos durante quatro anos, e, dessa forma, ele deve ser um instrumento de trabalho com cuja a metodologia o professor tenha identificação.
É uma forma de o professor promover uma atualização de conteúdos, de metodologias de ensino, de atividades motivadoras e de informações da história da Matemática trazidas pelos livros.
Ao avaliar livros didáticos, o professor fica mais fundamentado na elaboração e renovação do currículo da sua escola.
Sua resposta termina aqui. Vale lembrar que, nesta atividade, você pode confrontar o que dissemos no texto com sua prática ou opinião e identificar aspectos diferentes dos que listamos.

IMPORTANTES ASPECTOS DA MATEMÁTICA A SEREM OBSERVADOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

De um modo geral, até bem pouco tempo, a maioria dos livros didáticos de Matemática fundamentava sua proposta pedagógica principalmente na memorização de conteúdos e na manipulação mecânica de algoritmos, não se preocupando em fazer com que o aluno adquirisse os conhecimentos matemáticos de forma autônoma e crítica, permitindo-lhe a resolução de variados problemas, em diferentes contextos.

Os professores, por sua vez, reproduziam a metodologia do livro didático, isto é, aulas totalmente expositivas, com a teoria, os exercícios de fixação e mais exercícios propostos e uma avaliação baseada exatamente na forma trabalhada em sala. O resultado disso é que os alunos, em sua maioria, memorizavam ou aprendiam mecanicamente e, passado algum tempo, não se lembravam mais do que haviam estudado. Infelizmente, essas práticas ainda estão bastante presentes em muitas de nossas escolas.

Concordando ou não com a ação do Governo Federal de avaliar os livros didáticos, houve uma melhora considerável na forma de apresentar os conceitos matemáticos. Atualmente, o professor pode dispor de livros em que as atividades principais nas aulas de Matemática não são as de memorização ou de aplicação mecânica de procedimentos. Está havendo realmente uma pesquisa por parte dos autores, na tentativa de proporcionar ao professor e ao aluno um ensino de Matemática mais motivador, contextualizado e com mais situações significativas para os alunos.

O bloco Tratamento da Informação ganhou força e abordagens diferenciadas, pois novos conteúdos e atividades foram incorporados a esses livros, como a leitura, a interpretação e a elaboração de gráficos e tabelas. Em alguns livros, assuntos referentes a esse bloco, tais como raciocínio combinatório, probabilidade e estatística, vêm em capítulos separados; já em outras obras, esses tópicos aparecem ao longo dos capítulos. É importante que os professores discutam os dois encaminhamentos e decidam qual o mais adequado à sua "realidade". Dessa forma, estarão também discutindo a organização do programa de Matemática; com a reflexão, o grupo cria o hábito de reformular e ajustar o currículo tornando-o cada vez mais dinâmico e atual.

Os avaliadores apontam que, de maneira geral, o Tratamento da Informação fica isolado em capítulos estanques, em vez de permear toda a obra; assim, não há uma articulação e integração entre os quatro blocos da Matemática escolar.

Observe que, apesar da indicação dos avaliadores de que os conteúdos devem permear toda a obra, autores que apresentam em suas coleções a Matemática em blocos separados também possuem suas obras recomendadas com distinção.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 3

3. Leia o sumário de um dos livros de Matemática dos anos iniciais que você possui, destaque alguns tópicos e conclua se os conteúdos estão distribuídos ao longo da obra ou se aparecem em blocos separados.

____

____

____

COMENTÁRIO

A resposta desta questão está relacionada ao livro que você escolheu para analisar, portanto não podemos oferecer uma resposta precisa. Cabe destacar apenas que, ao realizar esta atividade, você perceberá que na análise do sumário do livro é possível encontrar indicativos da metodologia do autor.

Um fato importante que deve ser destacado numa primeira análise superficial dos sumários é a inclusão de todos os blocos de conteúdos de Matemática. Observe também se o autor aborda os quatro blocos de conteúdos: os Números, as Operações, a Geometria (Espaço, Forma e Medida) e o Tratamento da Informação. Esse fato já é considerado um avanço no processo de aprendizagem, visto que, de modo geral, até pouco tempo, os autores davam um enfoque excessivo às quatro operações.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 3

4. Faça uma leitura do sumário dos cinco volumes da coleção que você possui. Em seguida, verifique se os itens que fazem referência ao bloco Espaço e Forma estão agrupados em capítulos ou diluídos ao longo do trabalho.

____

____

____

COMENTÁRIO

Nesta atividade, você realizou novamente uma breve análise de uma coleção, entretanto o foco desta avaliação foram os itens referentes ao bloco Espaço e Forma, isto é, todos os tópicos que fazem referência à geometria das formas. É importante identificar se esse bloco está sendo contemplado ou não ao longo dos capítulos e dos anos, e de que modo sua abordagem varia de um ano para outro.

ATIVIDADE

Atende aos Objetivos 3 e 4

5. Com base na análise feita na Atividade 4 e no que você estudou nas aulas em que enfocamos os conceitos geométricos, responda a seguinte questão: Na sua opinião, os tópicos relacionados à Geometria em cada ano criam condições para que os alunos desenvolvam o raciocínio geométrico?

____

____

____

COMENTÁRIO

A leitura dos objetivos referentes ao ensino de Geometria nos PCN de 1ª a 4ª série pode contribuir para a fundamentação da sua resposta. É importante que você, ao analisar atividades que envolvam Geometria, verifique se são trabalhadas as seguintes ações:

– Montar e desmontar figuras tridimensionais, através de recortes, dobraduras e colagens.

– Utilizar nomenclatura adequada das figuras e dos objetos geométricos.

– Estabelecer relações entre figuras planas e tridimensionais.

– Compor e decompor figuras planas, utilizando quebra-cabeça.

– Identificar propriedades de figuras planas e de sólidos geométricos.

A Geometria é uma parte do programa que deve ser bem analisada pelos professores nos livros didáticos, pois os avaliadores dizem que, no trabalho com Grandezas e Medidas, ainda se privilegia a memorização da nomenclatura das relações entre múltiplos e submúltiplos das unidades padronizadas, sem a preocupação em desenvolver o conceito de grandeza e da operação complexa de medir. Já no bloco Espaço e Formas, nota-se ênfase na identificação e nomenclatura das figuras planas e espaciais, em detrimento de atividades experimentais de manipulação e construção.

A Geometria, normalmente, se apresentava no final dos livros, e isso era utilizado, muitas vezes, como desculpa para não se falar dela, que acabava ficando para o ano seguinte. Como no ano seguinte o volume era outro, o aluno acabava por não estudá-la. Nas novas coleções, isso não acontece, pois além de a Geometria ser utilizada como contexto do bloco Números e Operações, ela também aparece diluída ao longo do livro.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

6. Um tipo de atividade comumente proposto nas coleções de Matemática do 1º a 5º ano é aquele que oferece algumas grandezas, por exemplo, a altura de uma pessoa, a distância entre duas cidades ou a largura da página do caderno, e solicita aos alunos que indiquem a unidade mais adequada para medi-las. Refletindo sobre esse tipo de atividade, responda às questões:

a) Que conceitos matemáticos são trabalhados?

b) A fim de criar condições para que os alunos construam novos conceitos, que outras ações o professor pode solicitar aos alunos enquanto realizam tal atividade?

COMENTÁRIO

Esperamos que você perceba que os livros oferecem atividades que podem ser exploradas de formas diferentes das que eles apontam. Além disso, procure ter um olhar mais crítico das atividades, sempre buscando ver quais conceitos estão ligados a elas. Assim:

a) Em atividades desse tipo, são enfocados os conceitos associados à noção de unidade de medida, ao metro, seus múltiplos e submúltiplos.

Entretanto:

b) O professor pode propor às crianças que obtenham as medidas de algumas grandezas listadas usando as diferentes unidades de medida estudadas ou mesmo unidades de medida não convencionais. Incorporando novas ações à atividade, o professor favorece a compreensão da idéia de medir e da necessidade de uma unidade de medida padronizada. Além disso, ao se aproximar das grandezas para obter suas medidas, os alunos avançam no reconhecimento de suas propriedades geométricas.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 1

7. As embalagens de produtos consumidos diariamente, como já vimos, são um rico material para o estudo de Geometria. Manipulando-as, os alunos podem estabelecer relações entre os sólidos e as figuras planas e desenvolvem a visão espacial. Escolha um item do livro didático que você analisou na atividade anterior e complemente-o com uma proposta que leve os alunos a manipular embalagens e outras sucatas.

COMENTÁRIO

Atividades que requerem as várias vistas de um sólido (visão lateral, frontal etc.) e atividades que requerem o raciocínio sobre planificações podem ser complementadas com o uso das sucatas. Em muitos casos, o aluno não consegue raciocinar a partir da observação do desenho do sólido, precisando manipulá-lo para tirar suas conclusões. O exercício de desenhar a sucata permite-lhe avançar na compreensão do desenho. A manipulação das sucatas permite-lhe, ainda, experimentar as propriedades das formas geométricas (vértices, faces, arestas, capacidade de rolar e outras).

AS FRAÇÕES NOS LIVROS DIDÁTICOS

Com relação às frações, os avaliadores dizem que a abordagem desse tema é, por vezes, deficiente, com poucas atividades que propiciem a sua compreensão como números, e com a apresentação precoce de tópicos como a divisão de fração por fração.

Normalmente as frações são abordadas nos livros de 5º ano; o trabalho com elas não é feito de forma satisfatória, pois, segundo os professores, não há tempo disponível para um trabalho mais elaborado, de construção de conceitos.

Para dar ao aluno uma boa fundamentação desse tópico, os conceitos devem ser apresentados em contextos variados e as operações, sempre que possível, recorrendo à Geometria, buscando uma visualização do acontecimento. Em outras palavras, a representação geométrica das frações não pode ser apenas um tópico isolado em meio a outros. É importante que ela seja usada para justificar os algoritmos das operações e resolver problemas relacionados a frações. Por exemplo, na solução do problema “Quanto pesam os ¾ de um queijo que pesa 600g?”

a representação do queijo por um círculo, a divisão desse círculo em quatro partes iguais e a identificação das partes que correspondem aos ¾ são ações que facilitam o reconhecimento das operações aritméticas necessárias.

Num dos livros de 5º ano, recomendado no PNLD de 2004 com distinção, o conteúdo frações aparece num único capítulo e distribuído da seguinte forma:

A idéia de fração – Frações de uma figura ou de um objeto – Frações de um conjunto de elementos – Frações de um número – Situações-problema – Frações e divisão – Números mistos – Frações impróprias – Divisão e frações – Frações e medidas – Frações equivalentes – Simplificação de frações – Comparação de frações – Adição e subtração de frações – Situações-problema – Multiplicação com frações – Divisão de fração por um número natural – Revendo as operações com frações: situações-problema – Porcentagem

Figura 28.1: Distribuição dos conceitos associados às frações num livro didático de 5º ano.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 3

8. Agora faça o mesmo que foi feito na **Figura 28.1** com a coleção que você possui. Verifique e identifique, ao longo da obra, todos os tópicos que fazem referência às frações. Em seguida, analise em que contextos elas são apresentadas. Esses contextos são significativos para as crianças?

____

____

COMENTÁRIO

As frações podem ser apresentadas nos mais variados contextos; dentre eles, podemos citar as receitas da culinária, a descrição de materiais de construção e as dosagens de remédio. É importante observar que, nesses contextos, elas estão associadas às medições, portanto podem ser abordadas juntamente com o bloco Grandezas e Medidas. Dependendo do perfil da turma (classe social a que os alunos pertencem, profissão dos pais, hábitos de lazer), esses contextos podem ou não ser significativos para a maioria de seus alunos. O contexto da culinária tem se mostrado significativo para boa parte das turmas das séries iniciais do Ensino Fundamental, e uma atividade realizada pelos professores que complementa as do livro didático é a produção, em sala, de alimentos (biscoitos, salada de fruta ou bolos) seguindo receitas trazidas pelos alunos.

A FORMALIZAÇÃO DE CONCEITOS E OS LIVROS DIDÁTICOS

Outro aspecto levantado pelos avaliadores é a formalização dos conceitos ou algoritmos que, muitas vezes, é prematura e feita com base em poucos exemplos e atividades.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 3

9. Você pode verificar esse aspecto na coleção, na parte em que o autor fala sobre os algoritmos das quatro operações. Veja qual o encaminhamento dado para se chegar ao algoritmo. Esse conteúdo exigiu a interação do aluno para ser construído ou foi apenas “apresentado”? O autor procura fazer referência gráfica à situação proposta e faz perguntas que induzem o aluno a utilizar o conceito ou o autor enfatiza a ação e diz o que se deve fazer?

COMENTÁRIO

Os dois caminhos são abordagens diferentes, ou seja, correspondem a metodologias distintas. É fundamental que o texto do livro didático seja coerente com a metodologia escolhida pelo autor.

Para uma avaliação mais detalhada de como cada bloco de conteúdo é apresentado, é necessário ler com atenção, identificar a metodologia e verificar como se dá todo o desenvolvimento de cada tema. Tirar conclusões somente a partir de recortes seria uma atitude precipitada.

Fique atento para as situações que envolvam material concreto (dinheiro, Material Dourado, balas etc.) e atividades em que se trabalha com estimativas, pois são pontos importantes de serem trabalhados nos livros didáticos.

AS ATIVIDADES LÚDICAS

Na avaliação dos livros didáticos, é preciso levar em conta também como são trabalhadas as atividades lúdicas, principalmente os jogos. É importante observar se o autor, ao desenvolvê-las, transforma a vivência adquirida pelos alunos em conhecimento matemático sistematizado.

ATIVIDADE

Atende ao Objetivo 3

10. Se a coleção de Matemática que você possui propõe jogos, escolha dois deles e verifique se o autor leva o aluno a sistematizar as situações matemáticas exploradas. Caso não possua, escolha um jogo matemático e crie uma atividade que favoreça a sistematização dos conceitos envolvidos nele.

COMENTÁRIO

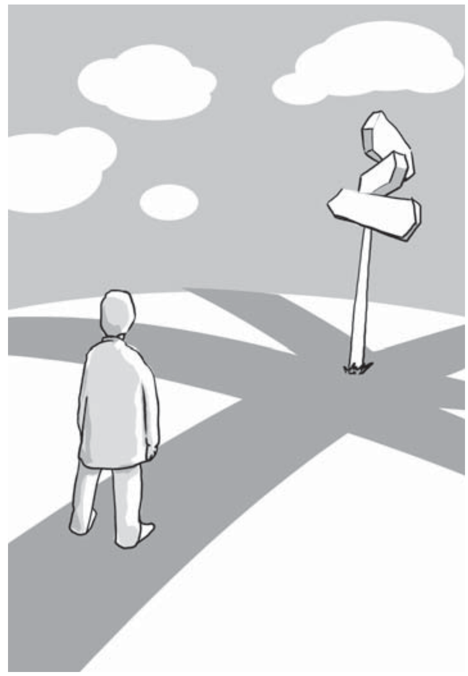
A sistematização das situações matemáticas exploradas nos jogos pode ocorrer, por exemplo, por meio de pequenas questões propostas aos alunos após o jogo, ou, ainda, pode-se solicitar ao aluno que faça uma representação gráfica da situação do jogo.

Vamos agora colocar em itens outros aspectos que também devem ser avaliados em relação ao conteúdo matemático dos livros didáticos de 1º a 5º ano. Verifique se o autor, por meio das atividades, proporciona situações em que o aluno:

- planeje ações e projete soluções para problemas novos, que exigem iniciativa e criatividade;
- compreenda e transmita ideias matemáticas, por escrito ou oralmente, desenvolvendo sua capacidade de argumentação;
- interprete matematicamente situações do dia-a-dia ou a relação com outras ciências;
- avalie e estime se resultados obtidos na solução de situações-problema são ou não razoáveis, fazendo estimativas mentais de resultados ou cálculos aproximados;
- utilize o pensamento aritmético, incluindo a aplicação de técnicas básicas, esquemas de combinação e contagem e regularidade das operações;
- aplique os conceitos fundamentais de medidas em situações concretas;
- reconheça regularidades e propriedades das figuras geométricas planas e sólidas, relacionando-as com os objetos de uso comum, desenvolvendo progressivamente o pensamento geométrico;
- represente e interprete dados em gráficos não cartesianos.

Os gráficos cartesianos são aqueles em que utilizamos dois eixos, comumente nomeados eixo x e eixo y. Esses gráficos são muito usados para representar dependência entre grandezas. Os gráficos não cartesianos correspondem a todos os outros tipos: pictóricos, setores circulares e outros.

Parece impossível para o professor dar conta de tantos aspectos, mas mesmo que todos não sejam observados, é importante conhecê-los até mesmo para se ter um panorama mais próximo do que se deseja para o ensino de Matemática. São muitos os pontos a serem analisados, e o professor deve encontrar, junto com sua equipe, uma forma organizada e simples de fazer a escolha do livro didático que vai ser utilizado pelos professores e alunos da sua escola.



CONHECENDO OS CRITÉRIOS DEFINIDOS PELO PNLD

O PNLD analisa e avalia as coleções produzidas pelas editoras antes de comprá-las, para assim garantir a qualidade dos materiais. Para isso são estabelecidos critérios que se relacionam com as seguintes observações:

- ausência de erros de impressão e de revisão;
- ausência de preconceitos e de erros de conteúdo;
- qualidade e atualidade da proposta pedagógica;
- qualidade do manual do professor;
- contribuição para a construção da cidadania.

Após essa avaliação, é publicado o Guia de Livros Didáticos, distribuído às escolas para servir como instrumento auxiliar na escolha do livro pelo professor.

O Guia de Livros Didáticos é um guia, em forma de revista, distribuído para todas as escolas e Secretarias de Educação do país. Ele contém os resultados das avaliações dos livros didáticos.

O processo de escolha do livro nas escolas envolve todos os professores de 1º a 5º ano do Ensino Fundamental. Por isso, esse guia foi elaborado para o professor, pois ele é a pessoa mais adequada para dizer qual material de apoio didático fará a diferença no processo de ensino-aprendizagem.

Esse guia é a síntese de um criterioso processo de avaliação e assegura a qualidade da escolha das obras que o professor e os alunos irão usar. Depois de a escola selecionar as obras, elas são enviadas e só serão substituídas novamente quatro anos depois. Portanto, para que essa decisão reflita um consenso de toda a equipe escolar, o governo incentiva a realização de amplos debates a partir das informações contidas no Guia de Livros Didáticos.

!

É muito importante que o professor, junto com sua equipe, leia o Guia de Livros Didáticos – PNLD/2004, pois nele constam as justificativas do grupo de avaliadores. Somente assim poderá haver interação do conteúdo e da qualidade de cada uma das obras e dos critérios da avaliação do MEC.

CONHECENDO MELHOR OS CRITÉRIOS

Vamos apresentar a seguir um resumo desses critérios para que você possa ter mais informações e tirar os seus próprios critérios para avaliar um livro didático.

CRITÉRIOS ELIMINATÓRIOS

Um dos principais critérios utilizados pelos avaliadores para excluir um livro é a presença de erros conceituais, de indução ao erro e de confusão conceitual, em que conceitos distintos são relacionados de maneira errada ou confusa. Por exemplo, a confusão entre os conceitos de número e de numeral e a identificação do conjunto com sua cardinalidade.

Segundo os avaliadores, o livro didático deve ter adequação e coerência metodológicas e o desenvolvimento metodológico deve contemplar estratégias que mobilizem e desenvolvam várias competências cognitivas básicas, como observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, planejamento, memorização etc. No caso de o livro didático recorrer a mais de um modelo metodológico ou a uma metodologia desarticulada dos objetivos, ou ainda privilegiar uma única dessas competências, deve ser indicada claramente sua exclusão.

Em relação à contribuição para a construção da cidadania, o livro didático não pode veicular, nos textos e nas ilustrações, preconceitos que levem a discriminações de qualquer tipo, nem ser um instrumento de propaganda e doutrinação religiosa, pois dessa forma desrespeita o caráter leigo do ensino público.

CRITÉRIOS CLASSIFICATÓRIOS

Em relação ao aspecto visual, o texto e as ilustrações devem estar dispostos de forma organizada, com ritmo e continuidade, dentro de uma unidade visual. O livro não deve apresentar erros graves de redação e é desejável que textos mais longos sejam apresentados de forma a não desencorajar a leitura, lançando-se mão de recursos de descanso visual.

Um dos objetivos das ilustrações é despertar no aluno uma ação investigativa, que estimule questionamentos, raciocínios e conjecturas.

É importante a utilização de diferentes códigos, como o verbal, o oral, o gráfico, o de forma, pois dessa maneira ele apresenta uma maior diversidade de situações didáticas.

Os avaliadores consideram fundamental que o livro didático venha acompanhado de orientações ao professor que explicitem os pressupostos teóricos, os quais, por sua vez, deverão ser coerentes com a apresentação dos conteúdos e com as atividades propostas no livro do aluno.

É necessário que mostre como o professor pode articular os conteúdos do livro entre si e com outras áreas do conhecimento, trazendo bibliografia e sugestões de leituras que contribuam para a formação e a atualização do professor.

Segundo eles, o texto não deve subestimar nem superestimar o aluno. Por exemplo, ele subestima quando desconsidera a riqueza e a variedade de experiências e interesses que ele traz para a escola e também quando apresenta situações, problemas e atividades que não exercitam sua imaginação e criatividade; por outro lado, o aluno é superestimado quando o texto o supõe capaz de um raciocínio abstrato plenamente desenvolvido, e apresenta a Matemática de um ponto de vista formal, sem exploração de seus significados, ou quando o texto usa uma linguagem acima da compreensão infantil.

COMO APLICAR ESSES CRITÉRIOS?

Para facilitar a avaliação do livro didático, é interessante que o professor elabore uma ficha em que se possa avaliar os diversos aspectos apontados. Se você desejar conhecer a ficha que é utilizada pelos avaliadores, basta acessar o *site* http://www.fnde.gov.br/guiasvirtuais/pnld2004/pdfs/guia2matematica.pdf.

CONCLUSÃO

Procuramos mostrar a você a importância da avaliação do livro didático por parte dos professores e como essa tarefa pode proporcionar um aprendizado e um aperfeiçoamento na sua formação. Durante as avaliações das coleções, o grupo de professores deve fazer as seguintes perguntas: os livros possuem erros conceituais? O autor está coerente com a metodologia utilizada? As atividades buscam a construção e a consolidação dos conceitos? As atividades que utilizam jogos possuem a sistematização da Matemática utilizada?

O grupo deve ir além dos questionamentos anteriores. Para isso, deve basear-se em um questionário feito pelos próprios professores ou poderá ser o utilizado pelos avaliadores do PNLD. Questões dessa natureza, além de direcionarem a avaliação da coleção, também ajudam a construir idéias de futuras ações pedagógicas que poderão ser também objeto de estudo dos professores no seu desenvolvimento profissional.

Não se esqueça de que a escolha de conteúdos adequados à sociedade atual e que possam prover instrumentos eficazes para a resolução de problemas deve ser valorizada e efetivamente trabalhada pelo livro didático. O livro deve proporcionar ao professor um trabalho que estimule o convívio social e a tolerância, abordando a diversidade da experiência humana com respeito e interesse; e também desenvolvendo a autonomia de pensamento, o raciocínio crítico e a capacidade de argumentar.

ATIVIDADE FINAL

Atende ao Objetivo 3

Pesquise em uma coleção de Ensino Fundamental as operações com números naturais.

a) Na abordagem do livro, as operações são introduzidas por situações-problema ou outro recurso?

b) Existem figuras no texto? Caso existam, qual a função desempenhada por elas?

c) Os conceitos são apresentados de maneira correta?

d) No desenvolvimento do conceito existem situações que podem conduzir o aluno ao erro?

e) Como é a distribuição do tema no livro, compactado ou desfragmentado? Qual é o percentual do livro, em páginas, para esse tema? Você acha suficiente ou excessivo?

f) A linguagem usada no livro é adequada ao aluno?

g) Há alguma tentativa de explorar o conceito em situações cotidianas? Existem outras tentativas nesse sentido?

COMENTÁRIO

Ao realizar esta atividade, você estará fazendo uma análise sobre o tratamento dado às operações num determinado livro didático. Uma sugestão é utilizar uma ficha de avaliação feita por você. Lembre-se do que você estudou nas aulas que abordavam as operações. É importante que o livro didático favoreça a construção de todas as ideias, propriedades e fatos fundamentais associados a cada operação.

RESUMO

Nesta aula, apresentamos alguns pontos importantes sobre a difícil tarefa do professor de avaliar e escolher o livro didático da sua escola.
É muito importante a tarefa do professor nessa escolha, pois o livro será a sua principal ferramenta de trabalho; é uma forma de o professor promover uma atualização de conteúdos, de metodologias, de atividades e de informações.
Ao avaliar livros didáticos, o professor fica mais fundamentado na elaboração e na renovação do currículo da sua escola. Toma conhecimento do PNLD e do Guia de Livros Didáticos. Esta é uma forma de ter contato com os critérios utilizados pelos avaliadores, no que diz respeito aos aspectos importantes da Matemática que devem ser levados em conta na avaliação.

Referências

Aula 15

DANTE, Luiz Roberto. *Didática da resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Ática, 1991.

MAGNO, Beatriz Helena. *Didática da matemática*. Rio de Janeiro: Consultor, 1995.

MENDONÇA, M. C. D. A intensidade dos algoritmos nas séries iniciais: uma imposição sócio-histórica-estrutural ou uma opção valiosa? *Zetetiké*, Campinas, SP, v. 4, n. 5, p. 55-57, jan./jun. 1996.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Inez. *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: ARTMED, 2001.

Aula 16

CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analucia. *A compreensão de conceitos aritméticos*. São Paulo: Papirus, 1998.

KAMII, Constance; HOUSMAN, Leslie Baker. *Crianças pequenas reinventam a aritmética: implicações da teoria de Piaget*. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2002.

KAMII, Constance; JOSEPH, Linda Leslie. *Aritmética*: novas perspectivas. Implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1992.

KAMII, Constance; LIVINGSTON, Sally Jones. *Desvendando a aritmética*: implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1997.

NETO, Ernesto Rosa. *Didática da matemática*. São Paulo: Ática, 1995.

NUNES, Terezinha et al. *Repensando adição e subtração*: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

Aula 17

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. *A compreensão de conceitos aritméticos*. São Paulo: Papirus, 1998.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Conversa de professor:* matemática. Brasília, 1996. 50 p. (Cadernos da TV Escola).

______. *PCN na escola*: matemática. Brasília, 1998. 2 v.

______. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: matemática para o 1º e 2º ciclos. Brasília, 1997.

LINS, R.C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*: perspectiva em educação matemática. Campinas: Papirus, 1997.

NUNES, T. et al. *Repensando adição e subtração*: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM, 2001.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA H. *Investigações matemáticas em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

ROCHA, T.; BORGES, H. *Jogos matemágicos*. Belo Horizonte: Editora do Brasil, 1992.

Aula 18

BRASIL. MEC. *Parâmetros curriculares nacionais de matemática para o 1º e 2º ciclos*. Brasília, DF, 1997.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação a Distância. *PCN na Escola*: Matemática 1 e 2, Brasília, 1998. (Cadernos da TV Escola).

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. *A compreensão de conceitos aritméticos*. São Paulo: Papirus, 1998.

IMENES, L. M. et al. *Conversa de Professor*: matemática. Brasília, DF: ,BRASIL. MEC. Secretaria de Educação a Distância, 1996. (Cadernos da TV Escola).

ROCHA, T.; BORGES, H. *Jogos Matemágicos*. São Paulo: Editora do Brasil, 1992.

Aula 19

BRASI. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 1º e 2º ciclos*. Brasília, DF, 1997.

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação a Distância. *PCN na Escola*: matemática 1 e 2, Brasília, 1998. (Cadernos da TV Escola).

CARRAHER, D.; SCHLIEMANN, A. *A compreensão de conceitos aritméticos*. São Paulo: Papirus, 1998.

IMENES, L. M. et al. *Conversa de Professor*: matemática. Brasília, DF: BRASIL. MEC. Secretaria de Educação a Distância, 1996. (Cadernos da TV Escola).

IMENES, L. M., JAKUBOVIC, J., LELLIS, M. *Ensino Fundamental*: matemática. São Paulo. Scipione, 1999 (Coleção Novo Tempo).

NUNES, T. et al. *Repensando adição e subtração*: contribuições da teoria dos campos conceituais. São Paulo: PROEM Editora, 2001.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA H. *Investigações matemáticas em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PROGRAMA Educar. Disponível em: <http://educar.sc.usp.br>. Acesso em: 26 jan. 2004.

ROCHA, T.; BORGES, H. *Jogos matemágico*. São Paulo: Editora do Brasil, 1992.

SCHLIEMANN, A.; CARRAHER, D. (Org.). *A compreensão de conceitos aritméticos*: ensino e pesquisa. São Paulo: Papirus, 1998.

Aula 20

BRASIL, MEC. *Parâmetros curriculares nacionais de matemática*: 1ª a 4ª série. Brasília, DF, 1997.

COLL, César; TEBEROSKY, Ana. *Aprendendo matemática*: conteúdos essenciais para o ensino fundamental de 1ª a 4ª séries. São Paulo: Ática, 2000.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. *Didática da matemática*: como dois e dois: a construção da matemática. São Paulo: FTD, 1997.

Aula 21

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* matemática. Brasília, 1997.

D'AMBROSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

LIMA, E. L. Deve-se usar máquinas de calcular na escola? *Revista do Professor de Matemática*, n. 7, 1985.

MATHEMA: formação e pesquisa. Disponível em: <http://www.mathema.com.br>. Acesso em: 3 jan. 2009.

TAHAN, M. *O homem que calculava*. Rio de Janeiro: Record, 1984.

Aula 22

BOYER, Carl. *História da matemática*. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher: EDUSP, 1996.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. *O diabo dos números*: um livro de cabeceira para todos aqueles que têm medo de matemática. São Paulo: Cia das Letras, 1997.

MAGNO, Beatriz Helena. *Didática da matemática*. Rio de Janeiro: Consultor, 1995.

Aula 23

BRASIL. MEC. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais:* matemática. Brasília: MEC,1997.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. *Boletim SBEM*, São Paulo, ano 4, n. 7, 1993. disponível em: <http://www.matematicahoje.com.br/telas/educ_mat/artigos/artigos_view.asp?cod=15>. Acesso em 11/1/2009.

Aula 24

BRASIL. MEC. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 1o e 2o Ciclos*. Brasília,DF, 1997.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*. São Paulo: Ática, 2000. v. 1, 2, 3 e 4.

GRASSESCHI, Maria Cecília Castro; ANDRETTA, Maria Capucho; SILVA, Aparecida Borges dos Santos. *Projeto oficina de matemática*. São Paulo: FTD, 1999. v. 5, 6, 7 e 8.

IMENES, Luiz Roberto; LELLIS, Marcelo C.; JAKUBOVIC, José. *Matemática*. São Paulo: Scipione, 1997. (Novo Caminho).

VERGNAUD, Gerard. Didáctica das matemáticas. In: BRUN, J. *Didática das matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 2001.

Aula 25

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais de matemática*. (1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: SEF/MEC,1997.

MORAN, José Manuel. *Mudanças na comunicação pessoal*. São Paulo: Paulinas, 2000.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas:* um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

REVISTA NOVA ESCOLA. São Paulo. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/home/>. Acesso em: 04 ago. 2009.

SAMPAIO, Marisa Narcizo. *A alfabetização tecnológica do professor:* a busca de um conceito. 1996. 161 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 1996.

Aula 26

BRASIL. MEC. *Parâmetros curriculares nacionais de matemática – 1ª a 4ª série*. Brasília, DF, 1997.

FONSECA, M. C. F. R. et al. *O ensino da geometria na escola fundamental*: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

NASSER, L.; LOPES, M. L. M. L. *Geometria na era da imagem e do movimento*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1996.

Aula 27

BORIN, Julia. *Jogos e resolução de problemas*: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: USP, 1995.

FIORENTINI, Dário; MIORIM, Maria A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. *Boletim SBEM*, São Paulo, v. 4, n. 7, p.4-9, 1996.

HUIZINGA, Johan. *Homo Ludens*: o jogo como elemento da cultura. São Paulo: Perspectiva, 1971.

KAMII, C.; DEVRIES, R. *Jogos em grupo*. São Paulo: Trajetória Cultural, 1991.

KAMII, Constance. *Aritmética:* novas perspectivas: implicações da teoria de Piaget. Campinas, SP: Papirus, 1992.

KISHIMOTO, T. M. *Jogos tradicionais infantis*: o jogo, a criança e a educação. Petrópolis: Vozes, 1999.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida (Org). *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação*. São Paulo: Cortez, 2005.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. *4 cores, senha e dominó:* oficinas de jogos em uma perspectiva construtiva. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. *Aprender com jogos e situações problema*. Porto alegre: Artmed, 2000.

Aula 28

BRASIL. MEC. Secretaria de Ensino Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais de matemática para o 1º e 2º ciclos*. Brasília, DF., 1997.

IMENES, Luiz Roberto; LELLIS, Marcelo C.; JAKUBOVIC, José: *Matemática*. São Paulo: Scipione, 1997.

VIEIRA, Edite R.; FRANÇA, Márcia M. G. *Do quanto ao porquê*: matemática. Rio de Janeiro: Access, 2000. 4 v..

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*. São Paulo: Ática, 2000. 4 v.