



Fundação

CECIERJ

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Caderno de Coordenação da Disciplina
Cálculo II
Volume 1

Cruz Sonia Quiroga de Caldas



GOVERNO DO
Rio de Janeiro

**SECRETARIA DE CIÊNCIA,
TECNOLOGIA E INOVAÇÃO**

UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério da
Educação

GOVERNO FEDERAL
BRASIL
PÁTRIA EDUCADORA

Apoio:



Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro



Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua da Ajuda, 5 – Centro – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20040-000

Tel.: (21) 2333-1112 Fax: (21) 2333-1116

Presidente

Carlos Eduardo Bielschowsky

Vice-presidente

Masako Oya Masuda

Coordenação do Curso de Matemática

Matemática (UFF) - Marcelo da Silva Corrêa

Matemática (UNIRIO) - Luiz Pedro San Gil Jutuca. Vice: Marcelo Rainha

Material Didático

Elaboração de Conteúdo

Cruz Sonia Quiroga de Caldas

Biblioteca

Raquel Cristina da Silva Tiellet

Simone da Cruz Correa de Souza

Vera Vani Alves de Pinho

Coordenação de Equipe

Marcelo Freitas

Revisão Linguística e Tipográfica

Patrícia Paula

Ilustração

Ronaldo d'Aguiar Silva

Programação Visual

Aline da S. Madeira Brondani

Coordenação de Produção

Fábio Rapello Alencar

Assistente de Produção

Bianca Giacomelli

Capa

Eduardo Bordoni

Fábio Muniz

Produção Gráfica

Patrícia Esteves

Ulisses Schnaider

Copyright © 2015, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

C145

Caldas, Cruz Sonia Quiroga de.

Caderno de Coordenação da Disciplina Cálculo 2 : volume 1 / Cruz Sonia Quiroga de Caldas. - Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2015.
324p.; 19 x 26,5 cm.

ISBN: 978-85-458-0054-5

1. Cálculo. I. Título.

CDD: 515

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador

Luiz Fernando de Souza Pezão

Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia

Gustavo Tutuca

Instituições Consorciadas

CEFET/RJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca

Diretor-geral: Carlos Henrique Figueiredo Alves

UENF - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro

Reitor: Silvério de Paiva Freitas

UERJ - Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Ricardo Vieiralves de Castro

UFF - Universidade Federal Fluminense

Reitor: Sidney Luiz de Matos Mello

UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro

Reitor: Roberto Leher

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Reitora: Ana Maria Dantas Soares

UNIRIO - Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Reitor: Luiz Pedro San Gil Jutuca

Sumário

Semana 1 • A integral definida	7
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	
Semana 2 • O teorema fundamental do cálculo	51
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	
Semana 3 • Área entre curvas - o teorema do valor médio para integrais.....	83
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	
Semana 4 • Resumo: função logaritmo natural, exponencial e hiperbólica	121
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	
Semana 5 • Integral indefinida. Técnicas de integração: método de substituição	151
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	
Semana 6 • Integral indefinida. Técnicas de integração: integração por partes	171
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	
Semana 7 • Integração de potências e produtos de funções trigonométricas.....	191
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	
Semana 8 • Simulados da AP1	221
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	
Apêndice 1 • Recordação de pré-cálculo. Transformações de funções (simulados e passo a passo)	239
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	
Apêndice 2 • AD1 (simulados e passo a passo).....	239
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	
Apêndice 3 • Gabaritos dos simulados da AP1	255
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	
Apêndice 4 • Passo a passo dos exercícios suplementares e outros propostos no caderno didático.....	269
<i>Cruz Sonia Quiroga de Caldas</i>	

Semana 1

A INTEGRAL DEFINIDA



Nesta semana, sairemos brevemente do tema principal e introduziremos uma notação, a qual pode ser usada para escrever longas somas de forma compacta. Este material será necessário nos assuntos posteriores.


A NOTAÇÃO SIGMA

Começaremos introduzindo uma notação concisa para somas. Esta notação é chamada de “notação sigma” porque usa a letra grega maiúscula sigma, denotada por Σ . A notação sigma permite expressar uma grande soma em forma compacta.

A soma de n termos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ é escrita como

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

A letra grega maiúscula Σ significa “soma”. O índice k é o índice somatório, a_k é o k -ésimo termo da soma, e os limites inferior e superior para a somatória neste caso são 1 e n . O limite inferior diz onde começa a soma (no número sob o Σ) e o limite superior diz onde ela termina (no número acima do Σ). Quando o símbolo ∞ aparece acima do Σ , ele indica que os termos continuam indefinidamente.

 Os limites superiores e inferiores devem ser constantes com relação ao índice da somatória. Entretanto, o limite inferior não precisa ser 1. Qualquer inteiro menor ou igual ao limite superior é válido.

Exemplo 1.1.

Notação Sigma

A soma em notação Sigma	A soma escrita; um termo para cada valor de k	O valor da soma
1. $\sum_{k=1}^4 k$	$= 1 + 2 + 3 + 4$	$= 10$
2. $\sum_{k=1}^3 (-1)^k k$	$= (-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3) = -1 + 2 - 3$	$= -2$
3. $\sum_{k=0}^3 (k+1)$	$= 1 + 2 + 3 + 4$	$= 10$
4. $\sum_{k=2}^4 k^2$	$= 2^2 + 3^2 + 4^2$	$= 29$

Vemos, nos números 1 e 3, que a mesma soma pode ser representada de formas diferentes usando a notação sigma. Embora qualquer variável possa ser usada como índice da somatória, i , j e k são usadas frequentemente.

PROPRIEDADES DA SOMATÓRIA

1. $\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k$ onde c é uma constante.
2. $\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$

FÓRMULAS DE SOMATÓRIAS

1. $\sum_{k=1}^n c = c n$ c constante. (Propriedade da constante)
2. $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ (Soma dos naturais sucessivos)
3. $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (Soma dos quadrados sucessivos)
4. $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (Soma dos cubos sucessivos)

As provas das fórmulas são feitas usando o princípio da indução finita. Veja, por exemplo, a prova da fórmula 3 nas páginas 13 e 14 do seu caderno didático.

Exemplo 1.2.

Aplicação

Calcule $\sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{n^2} \right)$

Solução:
$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{n^2} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 1$$

Usando, nas duas últimas somatórias da direita, as fórmulas 2 e 1, respectivamente, temos

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{n^2} \right) = \frac{1}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + \frac{1}{n^2} n = \frac{n+1}{2n} + \frac{2}{2n} = \frac{n+3}{2n}$$

Portanto,
$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{n^2} \right) = \frac{n+3}{2n}.$$

Observe que se queremos agora calcular a soma dada para $n = 50$, temos em particular
$$\sum_{k=1}^{50} \left(\frac{k+1}{(50)^2} \right) = \frac{50+3}{2(50)} = \frac{53}{100} = 0,53$$

A INTEGRAL DEFINIDA

Como motivação, e apenas como motivação, vamos começar com a ideia de área.

Consideremos o problema de definir a área da figura \mathcal{R} , delimitada pelo gráfico da função positiva $f(x) = x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

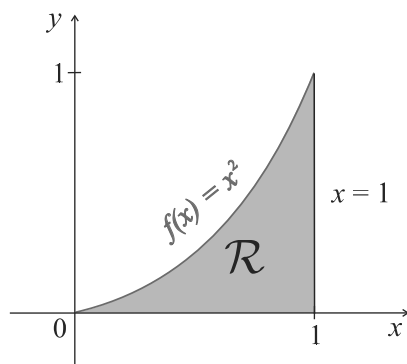


Figura 1.1

Observe que não há na geometria plana uma fórmula ou método que nos permita calcular a área de \mathcal{R} . Por outro lado, note que a área da região \mathcal{R} pode ser aproximada por vários conjuntos de retângulos. Inicialmente, vamos dividir o intervalo $[0, 1]$ em 5 subintervalos, cada um com largura: $\frac{b-a}{5} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5}$. Visto que **a função f é crescente no intervalo $[0, 1]$** , o valor mínimo de f em cada subintervalo ocorre na extremidade esquerda, e o valor máximo de f ocorre na extremidade direita.

1. Vamos escolher em primeiro lugar, para facilitar as ideias, dois conjuntos de 5 retângulos: um conjunto circunscrito à região \mathcal{R} e o outro inscrito na região \mathcal{R} como visto nas **Figuras 1.2 e 1.3** respectivamente. Encontre a soma das áreas de cada conjunto de retângulos.

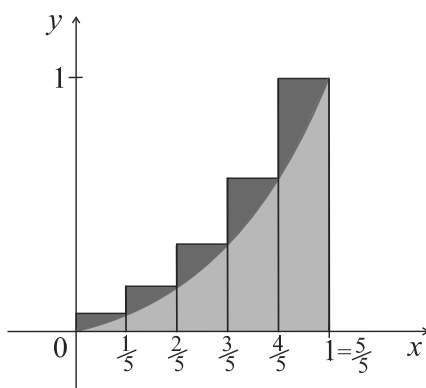


Figura 1.2

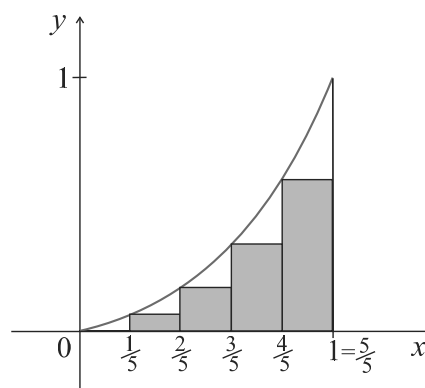


Figura 1.3

Solução: Observe que os pontos $0 < \frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{5}{5} = 1$ subdividem o intervalo $[0, 1]$ em cinco intervalos a saber: $\left[0, \frac{1}{5}\right]$, $\left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$, $\left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$, $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$, $\left[\frac{4}{5}, 1\right]$.

- a. Na **Figura 1.2**, as extremidades à direita nos cinco intervalos são da forma: $\frac{k}{5}$, onde $k = 1, 2, 3, 4, 5$. A largura de cada retângulo é $\frac{b-a}{5} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5}$ e a altura de cada retângulo pode ser obtida calculando f na extremidade direita de cada intervalo:

$$\left[0, \frac{1}{5}\right], \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right], \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right], \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{5}\right)^2, \quad f\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^2, \quad f\left(\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^2, \quad f\left(\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^2, \quad f(1)=1^2$$

Seja U_5 a soma das áreas dos cinco retângulos circunscritos a \mathcal{R} , isto é

$$U_5 = f\left(\frac{1}{5}\right) \frac{1}{5} + f\left(\frac{2}{5}\right) \frac{1}{5} + f\left(\frac{3}{5}\right) \frac{1}{5} + f\left(\frac{4}{5}\right) \frac{1}{5} + f(1) \frac{1}{5}.$$

É claro que podemos calcular essa soma diretamente, porém a título de exercício, faremos uso da notação sigma

$$U_5 = \sum_{k=1}^5 \underbrace{f\left(\frac{k}{5}\right)}_{\text{altura}} \underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)}_{\text{largura}} = \sum_{k=1}^5 \left(\frac{k}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) \sum_{k=1}^5 \left(\frac{k}{5}\right)^2 = \frac{1}{5^3} \sum_{k=1}^5 k^2.$$

Usando a fórmula da soma dos quadrados sucessivos para $n = 5$ temos

$$U_5 = \frac{1}{5^3} \left[\frac{5(5+1)(2(5)+1)}{6} \right] = \frac{11}{25}.$$

Já que a região \mathcal{R} dada está dentro da união dos cinco retângulos circunscritos, podemos concluir que a área da região \mathcal{R} é menor do que $U_5 = \frac{11}{25}$.

- b. Na **Figura 1.3**, as extremidades à esquerda nos 5 intervalos são da forma: $\frac{k-1}{5}$, onde $k = 1, 2, 3, 4, 5$. A largura de cada retângulo é $\frac{1}{5}$ e a altura de cada retângulo pode ser obtida calculando f na extremidade esquerda de cada intervalo:

$$\left[\underbrace{0}_{f(0)=0}, \frac{1}{5} \right], \left[\underbrace{\frac{1}{5}}, \frac{2}{5} \right], \left[\underbrace{\frac{2}{5}}, \frac{3}{5} \right], \left[\underbrace{\frac{3}{5}}, \frac{4}{5} \right], \left[\underbrace{\frac{4}{5}}, 1 \right].$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{5}\right)^2, \quad f\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)^2, \quad f\left(\frac{3}{5}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^2, \quad f\left(\frac{4}{5}\right)=\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

Seja T_5 a soma das áreas dos cinco retângulos inscritos em \mathcal{R} ,

$$T_5 = f(0) \frac{1}{5} + f\left(\frac{1}{5}\right) \frac{1}{5} + f\left(\frac{2}{5}\right) \frac{1}{5} + f\left(\frac{3}{5}\right) \frac{1}{5} + f\left(\frac{4}{5}\right) \frac{1}{5}.$$

Novamente é claro que podemos calcular essa soma diretamente, porém a título de exercício, faremos uso da notação sigma

$$T_5 = \sum_{k=1}^5 \underbrace{f\left(\frac{k-1}{5}\right)}_{\text{altura}} \underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)}_{\text{largura}} = \sum_{k=1}^5 \left(\frac{k-1}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right) \sum_{k=1}^5 \left(\frac{k-1}{5}\right)^2$$

$$= \frac{1}{5^3} \sum_{k=1}^5 (k-1)^2 = \frac{1}{5^3} (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = \frac{1}{5^3} \sum_{k=1}^4 k^2.$$

Usando a fórmula da soma dos quadrados sucessivos para $n = 4$, temos

$$T_5 = \frac{1}{5^3} \left[\frac{4(4+1)(2(4)+1)}{6} \right] = \frac{6}{25}.$$

Já que cada um dos retângulos fica dentro da região dada, podemos concluir que a área da região dada é maior do que $T_5 = \frac{6}{25}$.

Combinando os resultados nas partes a e b, podemos afirmar que: $0,24 = \frac{6}{25} < \text{Área da região } \mathcal{R} < \frac{11}{25} = 0,44$.

Aumentando o número de retângulos no exemplo anterior, podemos obter aproximações mais precisas da área da região \mathcal{R} . Generalizemos, então, o procedimento:

2. Divida o intervalo $[0, 1]$ em n subintervalos, cada um, com largura $\Delta x = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$. As extremidades dos intervalos são as seguintes:

$$\underbrace{0 + 0(\Delta x)}_0 < \underbrace{0 + 1(\Delta x)}_{\frac{1}{n}} < \underbrace{0 + 2(\Delta x)}_{\frac{2}{n}} < \dots < \underbrace{0 + (k-1)(\Delta x)}_{\frac{k-1}{n}} < \underbrace{0 + k(\Delta x)}_{\frac{k}{n}} < \dots < \underbrace{0 + n(\Delta x)}_{\frac{n}{n}=1}$$

Temos, então, os subintervalos:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \dots, \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

As extremidades à direita dos n intervalos são da forma $\frac{k}{n}$, onde $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

As extremidades à esquerda dos n intervalos são da forma $\frac{k-1}{n}$, onde $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

As **Figuras 1.4** e **1.5** mostram a função crescente $f(x) = x^2$, a região \mathcal{R} , as extremidades dos intervalos e os retângulos inscritos e circunscritos, respectivamente.

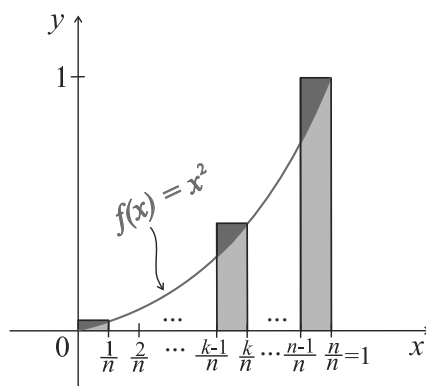


Figura 1.4

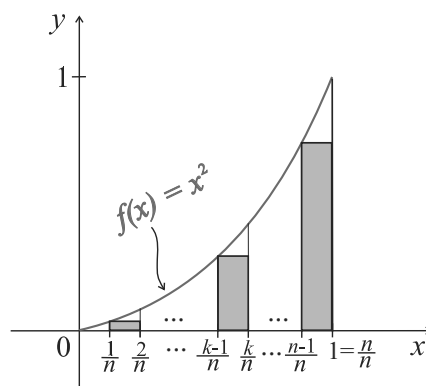


Figura 1.5

- a. Na **Figura 1.4**, observe que a largura de cada retângulo é $\frac{1}{n}$ e a altura de cada retângulo pode ser obtida calculando f na extremidade direita de cada intervalo. Assim, a soma das áreas dos n retângulos que chamaremos U_n é dada pela fórmula:

$$U_n = \sum_{k=1}^n \underbrace{f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\text{altura}} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{largura}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$$

Usando a fórmula para soma de quadrados sucessivos, temos

$$U_n = \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

- b. Na **Figura 1.5**, observe que a largura de cada retângulo é $\frac{1}{n}$ e a altura de cada retângulo pode ser obtida calculando f na extremidade esquerda de cada intervalo. Assim, a soma das áreas dos n retângulos que chamaremos T_n é dada pela fórmula:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \underbrace{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}_{\text{altura}} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{largura}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \\ T_n &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1) \right) = \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right). \end{aligned}$$

Usando as fórmulas para a soma de quadrados sucessivos, de naturais sucessivos e a propriedade da constante, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} + n \right) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} - \frac{(n+1)}{n^2} + \\ &\frac{1}{n^2} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } T_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}.$$

3. Generalizemos ainda mais o caso 2. Considere novamente os subintervalos

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \dots, \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \dots, \left[\frac{(n-1)}{n}, 1\right].$$

Agora escolha arbitrariamente um ponto $t_1 \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ e forme

o produto $\underbrace{f(t_1)}_{\text{altura}} \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{largura}}$. É claro que esse produto representa

a área do retângulo de base $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ e altura $f(t_1)$. Escolha

arbitrariamente um ponto $t_2 \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ e forme o produto

$f(t_2)\frac{1}{n}$; prossiga desta maneira até que você tenha formado os produtos

$$f(t_1)\frac{1}{n}, f(t_2)\frac{1}{n}, \dots, f(t_{k-1})\frac{1}{n}, f(t_k)\frac{1}{n}, \dots, f(t_{n-1})\frac{1}{n}, f(t_n)\frac{1}{n}.$$

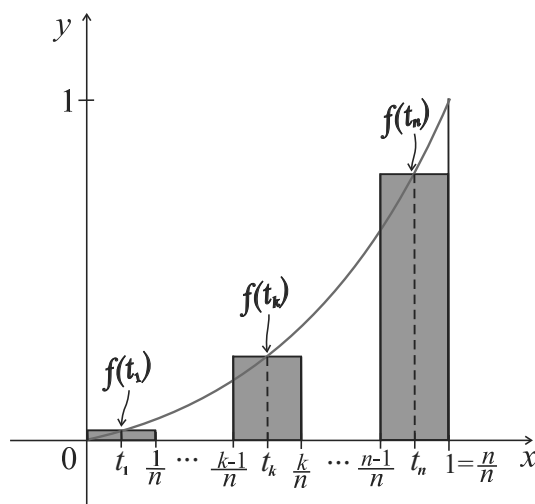



Figura 1.6

Assim a soma V_n das áreas dos n retângulos, mostrados na **Figura 1.6** é dada pela fórmula:

$$V_n = \frac{f(t_1)}{n} + \frac{f(t_2)}{n} + \dots + \frac{f(t_{k-1})}{n} + \frac{f(t_k)}{n} + \dots + \frac{f(t_{n-1})}{n} + \frac{f(t_n)}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{f(t_i)}{n}.$$

 i. $T_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} = U_n$

ii. $t_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \Leftrightarrow \frac{k-1}{n} \leq t_k \leq \frac{k}{n}$ e como $f(x) = x^2$ é uma função crescente para todo $x \geq 0$, então $f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq$

$f(t_k) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) \log \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n f(t_k) \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$,
 assim obtemos que $T_n \leq V_n \leq U_n$ para todo $n \geq 1$.

iii. $T_n < \text{Área da região } \mathcal{R} < U_n$.

iv. $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

v. Da observação ii, temos que $T_n \leq V_n \leq U_n$ para todo $n \geq 1$, e da observação iii temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \frac{1}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$. Essas hipóteses e o Teorema do Sanduíche implicam que $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{1}{3}$.

Lembre-se de que neste caso uma versão do Teorema do Sanduíche ou Teorema do Confronto diz o seguinte: “Sejam f , g e h funções que satisfazem $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x \rightarrow \infty$. Se $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$.”

SOMAS DE RIEMANN

O procedimento usado no exemplo anterior pode ser generalizado ainda mais. Suponha $a < b$, considere agora uma função real $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, não necessariamente positiva em todo o intervalo, tal que $f([a, b])$ é um conjunto limitado, como mostra a **Figura 1.7**.

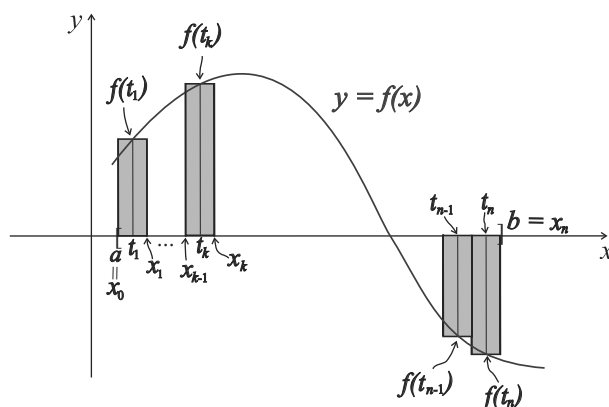


Figura 1.7

Inicialmente, subdividimos o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos, cada um de largura $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. As extremidades dos intervalos são as seguintes:

$$\underbrace{a + 0(\Delta x)}_{a=x_0} < \underbrace{a + 1(\Delta x)}_{x_1} < \underbrace{a + 2(\Delta x)}_{x_2} < \dots < \underbrace{a + (k-1)(\Delta x)}_{x_{k-1}} \\ < \underbrace{a + k(\Delta x)}_{x_k} < \dots < \underbrace{a + n(\Delta x)}_{x_n=b}.$$

Temos, então, os subintervalos:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{k-1}, x_k], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

Note que o comprimento dos intervalos é dado por

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Agora escolha arbitrariamente um ponto $t_1 \in [x_0, x_1]$ e forme o produto $f(t_1)\Delta x_1$; escolha arbitrariamente um ponto $t_2 \in [x_1, x_2]$ e forme o produto $f(t_2)\Delta x_2$; prossiga desta maneira até que você tenha formado os produtos

$$f(t_1)\Delta x_1, f(t_2)\Delta x_2, \dots, f(t_{k-1})\Delta x_{k-1}, f(t_k)\Delta x_k, \dots, f(t_{n-1})\Delta x_{n-1}, \\ f(t_n)\Delta x_n.$$

A soma desses produtos é usualmente conhecida como uma *soma de Riemann de f* em $[a, b]$ e denotada por S_n , assim

$$S_n = f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \dots + f(t_{k-1})\Delta x_{k-1} + f(t_k)\Delta x_k + \dots + \\ + f(t_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(t_n)\Delta x_n.$$

Isto é,

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(t_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(t_k) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^n f(t_k) \right).$$



Se existir um número real S , tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, para toda sequência assim construída, diremos que a função f é integrável em $[a, b]$ e escrevemos $S = \int_a^b f(x)dx$, isto é, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$. O número S é chamado de integral definida (ou integral de Riemann) de f em $[a, b]$.

- O símbolo \int foi introduzido por Leibniz e é chamado de *sinale de integral*. Na notação $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)$ é chamado de *integrando*, a e b são chamados de *limites de integração*, a é o *limite inferior*, b é o *limite superior*, e o símbolo dx , por si só, não tem um significado oficial; $\int_a^b f(x)dx$ é todo um símbolo.
- A integral definida $\int_a^b f(x)dx$ é um número; depende da função f e não depende da letra que escolhemos para representar a variável independente x . De fato, em vez de x podemos usar qualquer outra letra sem que isso signifique mudar o valor da integral;

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(r)dr.$$



- Se o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existe, ele é único. Independente da Soma de Riemann assim construída.
- O aluno deve notar que esta definição de integral é puramente numérica, não depende da noção de área, a qual aparece aí apenas como elemento motivador.
- A definição de integral de Riemann pode ser enunciada em forma mais geral, já que os intervalos Δx_k não necessariamente tem que ser todos iguais, eles podem ser diferentes, desde que sejam construídos de forma que $\Delta x_k \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, porém deixaremos essa generalização para a disciplina de Análise.

Definição 1.1.

1. Se f está definida em $x = a$, definimos $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. Se f é integrável em $[a, b]$, então definimos

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

3. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é uma função integrável em $[a, b]$, tal que $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$ como mostra a **Figura 1.8**. Definimos a área da região \mathcal{R} limitada superiormente pelo gráfico de f , por baixo pelo eixo x , e as fronteiras da região à esquerda e à direita são as retas verticais $x = a$ e $x = b$, como sendo o número $\int_a^b f(x)dx$. Assim, Área de $\mathcal{R} = \int_a^b f(x)dx$.

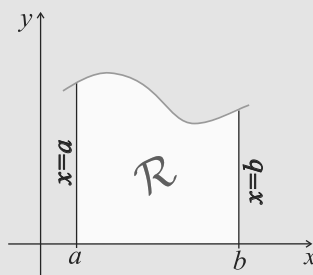


Figura 1.8

4. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que f é uma função integrável em $[a, b]$, tal que $f(x) \leq 0$ em $[a, b]$ como mostra a **Figura 1.9**. Definimos a área da região \mathcal{R}_1 limitada inferiormente pelo gráfico de f , superiormente pelo eixo x , e as fronteiras da região à esquerda e à direita são as retas verticais $x = a$ e $x = b$ como sendo o número $-\left(\int_a^b f(x)dx\right)$. Assim,

$$\text{Área de } \mathcal{R}_1 = - \left(\int_a^b f(x)dx \right).$$

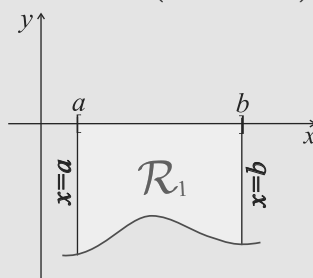


Figura 1.9

CONTINUIDADE IMPLICA INTEGRABILIDADE

Teorema 1.1.

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b] \Rightarrow f$ é uma função integrável em $[a, b]$.

PROPRIEDADES BÁSICAS DA INTEGRAL DEFINIDA

1. $\int_a^b c dx = c(b - a)$, onde c é uma constante.
2. Sejam f e g duas funções integráveis em $[a, b]$ e c um número real, então as funções cf e $f \pm g$ são integráveis em $[a, b]$ e valem as seguintes propriedades:

$$\text{a. } \int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{b. } \int_a^b (f \pm g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx. \text{ Note que esta propriedade pode ser estendida para qualquer número finito de funções.}$$

3. Seja $a < c < b$, e suponhamos que a função f é uma função integrável em $[a, c]$, bem como no intervalo $[c, b]$.

Então f é uma função integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$. (Propriedade aditiva da integral definida).

4. Se f é uma função integrável em $[a, b]$ e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

5. Sejam f e g duas funções integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

6. f é uma função integrável em $[a, b]$ então $|f|$ também o será, e

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$



Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, b]$, suponha $a < c < b$ e $f(x) \geq 0$ em $[a, c]$ e $f(x) \leq 0$ em $[c, b]$, veja a **Figura 1.10**.

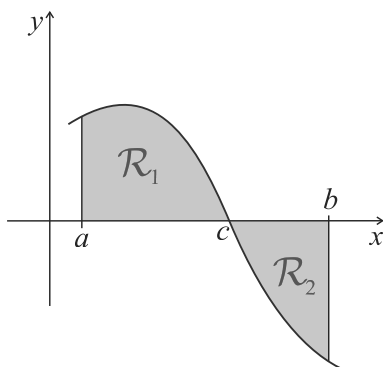


Figura 1.10

Podemos dizer que

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = A(\mathcal{R}_1) - A(\mathcal{R}_2).$$

Assim, a integral definida será positiva se $A(\mathcal{R}_1) > A(\mathcal{R}_2)$; será negativa se $A(\mathcal{R}_1) < A(\mathcal{R}_2)$ e será nula se $A(\mathcal{R}_1) = A(\mathcal{R}_2)$. Daqui podemos notar que $\int_a^b f(x)dx = 0$ não implica necessariamente que $f(x) = 0$.



Note que em geral:

$$\begin{aligned} \text{a. } & \int_a^b f(x)g(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx \\ \text{b. } & \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}. \end{aligned}$$

Dê um exemplo específico para mostrar que realmente a igualdade não é válida em a e b acima.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

USANDO A NOTAÇÃO SIGMA

Exercício 1.1.

Usando as fórmulas de somatórias dadas nas notas de aula sobre a integral definida e/ou seu caderno didático, calcule:

a. $\sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{2}{n}$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{2}{n}$

Solução:

a. Considerando as propriedades de somatórias, temos

$$\sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{2}{n} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{n} + \frac{2k}{n^2}\right) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

Usando as fórmulas de somatórias de uma constante e dos naturais sucessivos nas duas últimas somatórias à direita, temos

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n 1 + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{2}{n} \cdot n + \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 2 + \frac{(n+1)}{n} = 3 + \frac{1}{n}.$$

Logo, $\sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{2}{n} = 3 + \frac{1}{n}.$

b. Usando o resultado obtido em (a), temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3.$$

APROXIMANDO A ÁREA DE UMA REGIÃO PLANA

Exercício 1.2.

Considere a região \mathcal{R} que fica entre o gráfico de $f(x) = 9 - x^2$ e o eixo x , entre as retas verticais $x = 0$ e $x = 3$. Inicialmente, vamos dividir o intervalo $[0, 3]$ em 5 subintervalos, cada um com largura $\frac{b-a}{5} = \frac{3-0}{5} = \frac{3}{5}$. Visto que a função f dada é **decrecente no intervalo** $[0, 3]$, o valor mínimo de f em cada subintervalo ocorre na extremidade direita, e o valor máximo de f ocorre na extremidade esquerda.

- a. Use os cinco retângulos nas **Figuras 1.11 e 1.12** para encontrar duas aproximações para a área da região \mathcal{R} .

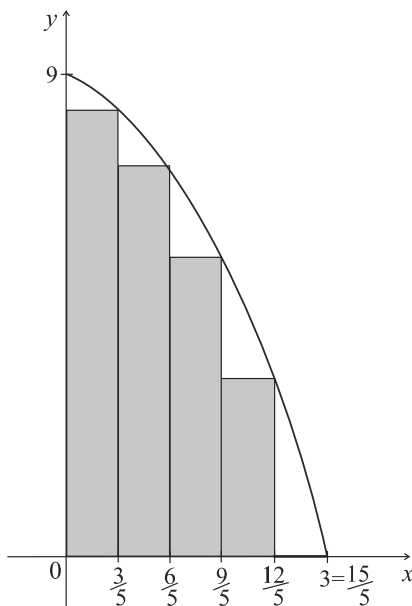


Figura 1.11

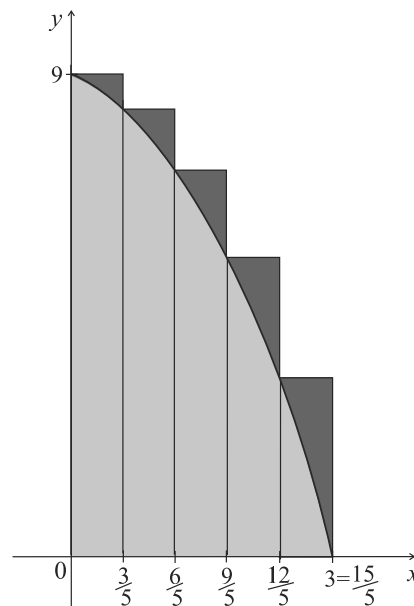


Figura 1.12

Solução: Observe que os pontos $0 < \frac{3}{5} < \frac{6}{5} < \frac{9}{5} < \frac{12}{5} < \frac{15}{5} = 3$ subdividem o intervalo $[0, 3]$ em cinco intervalos a saber: $\left[0, \frac{3}{5}\right]$, $\left[\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right]$, $\left[\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right]$, $\left[\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right]$, $\left[\frac{12}{5}, \frac{15}{5}\right]$.

- i. Na **Figura 1.11**, as extremidades à direita nos cinco intervalos são da forma: $\frac{3k}{5}$, onde $k = 1, 2, 3, 4, 5$. A largura de cada retângulo é $\frac{b-a}{5} = \frac{3-0}{5} = \frac{3}{5}$ e a altura de cada retângulo pode ser obtida calculando f na extremidade direita de cada intervalo.

$$\left[0, \frac{3}{5}\right], \left[\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right], \left[\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right], \left[\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right], \left[\frac{12}{5}, \frac{15}{5}\right] \quad \left[\frac{12}{5}, \underbrace{3}_{f(3)=9-(3)^2=0}\right]$$

$$f\left(\frac{3}{5}\right)=9-\left(\frac{3}{5}\right)^2, f\left(\frac{6}{5}\right)=9-\left(\frac{6}{5}\right)^2, f\left(\frac{9}{5}\right)=9-\left(\frac{9}{5}\right)^2, f\left(\frac{12}{5}\right)=9-\left(\frac{12}{5}\right)^2, f(3)=9-(3)^2=0$$

Seja T_5 a soma das áreas dos cinco retângulos dados, isto é

$$T_5 = f\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} + f\left(\frac{6}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} + f\left(\frac{9}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} + f\left(\frac{12}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} + \underbrace{f(3)}_0 \cdot \frac{3}{5}$$

É claro que neste caso podemos calcular essa soma diretamente, porém a título de exercício, faremos uso da notação sigma:

$$T_5 = \sum_{k=1}^5 \underbrace{f\left(\frac{3k}{5}\right)}_{\text{altura}} \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)}_{\text{largura}} = \sum_{k=1}^4 \left[9 - \left(\frac{3k}{5}\right)^2 \right] \left(\frac{3}{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right) \sum_{k=1}^4 9 - \left(\frac{3k}{5}\right)^2 = \frac{27}{5} \sum_{k=1}^4 1 - \frac{27}{5^3} \sum_{k=1}^4 k^2$$

Usando as fórmulas de somatórias de constantes e de quadrados sucessivos, temos

$$T_5 = \frac{27}{5} \cdot 4 - \frac{27}{5^3} \left[\frac{4(4+1)(2(4)+1)}{6} \right] = \frac{27 \cdot 4}{5} - \frac{27 \cdot 6}{25} =$$

$$= 27 \left(\frac{20}{25} - \frac{6}{25} \right) = \frac{(27)(14)}{25} = \frac{378}{25} = 15,12.$$

Já que a região \mathcal{R} é maior que a união dos cinco retângulos dados, podemos concluir que a área da região \mathcal{R} é maior do que $T_5 = 15,12$.

- ii. Na **Figura 1.12**, as extremidades à esquerda nos 5 intervalos são da forma: $3\left(\frac{k-1}{5}\right)$, onde $k = 1, 2, 3, 4, 5$. A largura de cada retângulo é $\frac{3}{5}$ e a altura de cada retângulo pode ser obtida calculando f na extremidade esquerda de cada intervalo.

$$\left[\underbrace{0}_{f(0)=9-0^2}, \frac{3}{5} \right], \left[\underbrace{\frac{3}{5}}_{f(\frac{3}{5})=9-(\frac{3}{5})^2}, \frac{6}{5} \right], \left[\underbrace{\frac{6}{5}}_{f(\frac{6}{5})=9-(\frac{6}{5})^2}, \frac{9}{5} \right], \left[\underbrace{\frac{9}{5}}_{f(\frac{9}{5})=9-(\frac{9}{5})^2}, \frac{12}{5} \right], \left[\underbrace{\frac{12}{5}}_{f(\frac{12}{5})=9-(\frac{12}{5})^2}, 3 \right].$$

Seja U_5 a soma das áreas dos cinco retângulos dados, isto é

$$U_5 = f(0) \cdot \frac{3}{5} + f\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} + f\left(\frac{6}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} + f\left(\frac{9}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} + f\left(\frac{12}{5}\right) \cdot \frac{3}{5}$$

Novamente é claro que neste caso podemos calcular essa soma diretamente, porém a título de exercício, faremos uso da notação sigma:

$$U_5 = \sum_{k=1}^5 \underbrace{f\left(3\frac{(k-1)}{5}\right)}_{\text{altura}} \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)}_{\text{largura}} = \sum_{k=1}^5 \left(9 - \left(3\frac{k-1}{5}\right)^2 \right) \left(\frac{3}{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{3}{5}\right) \sum_{k=1}^5 9 - \left(3\frac{k-1}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \sum_{k=1}^5 9 - \left(\frac{27}{5^3}\right) \sum_{k=1}^5 (k-1)^2 =$$

$$= \frac{3}{5} 9 \cdot 5 - \frac{27}{5^3} \sum_{k=1}^5 (k-1)^2 = 27 - \frac{27}{5^3} (0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2).$$

$$\begin{aligned}
 \text{Note que: } U_5 &= 27 - \frac{27}{5^3}(0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = \\
 &= 27 - \frac{27}{5^3} \sum_{k=1}^4 k^2 = 27 - \frac{27}{5^3} \left[\frac{4(4+1)(2(4)+1)}{6} \right] = \\
 &= 27 - \frac{27}{25}(6) = 27 \left(\frac{19}{25} \right) = \frac{513}{25} = 20,52.
 \end{aligned}$$

Já que a união dos cinco retângulos dados é maior do que a região dada, podemos concluir que a área da região dada é menor do que $U_5 = 20,52$.

Combinando os resultados nas partes i e ii, podemos afirmar que:

$$15,12 = \frac{378}{25} < \text{Área da região } \mathcal{R} < \frac{513}{25} = 20,52.$$

Temos, assim, duas aproximações para a área da região \mathcal{R} .

- b. Use os n retângulos das **Figuras 1.13 e 1.14** para encontrar as áreas das regiões hachuradas. Note que essas áreas são melhores aproximações para a área da região \mathcal{R} .

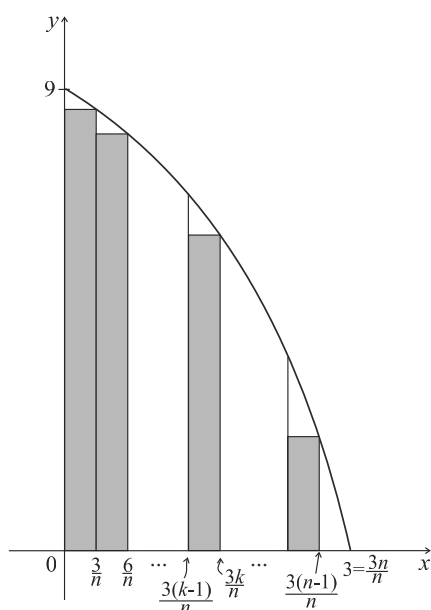


Figura 1.13

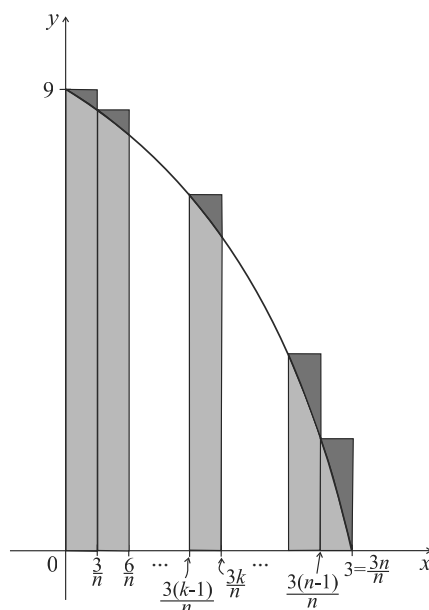


Figura 1.14

Solução: Divida o intervalo $[0, 3]$ em n subintervalos, cada um com largura $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$. As extremidades dos intervalos são as seguintes:

$$\underbrace{0+0(\Delta x)}_0 < \underbrace{0+1(\Delta x)}_{\frac{3}{n}} < \underbrace{0+2(\Delta x)}_{\frac{6}{n}} < \dots < \underbrace{0+(k-1)(\Delta x)}_{\frac{3(k-1)}{n}} < \underbrace{0+k(\Delta x)}_{\frac{3k}{n}} < \dots < \underbrace{0+n(\Delta x)}_{\frac{3n}{n}=3}$$

Temos então os subintervalos:

$$\left[0, \frac{3}{n}\right], \left[\frac{3}{n}, \frac{6}{n}\right], \left[\frac{6}{n}, \frac{9}{n}\right], \dots, \left[\frac{3(k-1)}{n}, \frac{3k}{n}\right], \dots, \left[\frac{3(n-1)}{n}, 3\right].$$

As extremidades à direita dos n intervalos são da forma $\frac{3k}{n}$, onde $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

As extremidades à esquerda dos n intervalos são da forma $\frac{3(k-1)}{n}$, onde $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

As **Figuras 1.13** e **1.14** mostram a região \mathcal{R} , as extremidades dos intervalos, e os retângulos inscritos e circunscritos respectivamente.

Na **Figura 1.13**, observe que a largura de cada retângulo é $\frac{3}{n}$ e a altura de cada retângulo pode ser obtida calculando f na extremidade direita de cada intervalo. Assim, a soma das áreas dos n retângulos que chamaremos T_n é dada pela fórmula:

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n \underbrace{f\left(\frac{3k}{n}\right)}_{\text{altura}} \underbrace{\left(\frac{3}{n}\right)}_{\text{largura}} = \sum_{k=1}^n \left(9 - \left(\frac{3k}{n}\right)^2\right) \left(\frac{3}{n}\right) = \\ &= \left(\frac{3}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left(9 - \left(\frac{3k}{n}\right)^2\right) = \left(\frac{27}{n}\right) \sum_{k=1}^n 1 - \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2. \end{aligned}$$

Usando as fórmulas para somatórias de constantes e de quadrados sucessivos, temos

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{27}{n}n - \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = 27 - \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = 27 - \frac{27}{n^3} \frac{n(n+1)n(2n+1)}{6} = \\ &= 27 - \frac{9}{n^2} \frac{(n+1)(2n+1)}{2} = 27 - \frac{9}{2n^2} (2n^2 + 3n + 1) = \\ &= 27 - 9 - \frac{27}{2n} - \frac{9}{2n^2} = 18 - \frac{27}{2n} - \frac{9}{2n^2}. \end{aligned}$$

Na **Figura 1.14**, observe que a largura de cada retângulo é $\frac{3}{n}$ e a altura de cada retângulo pode ser obtida calculando f na extremidade esquerda de cada intervalo. Assim, a soma das áreas dos n retângulos que chamaremos U_n é dada pela fórmula:

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^n \underbrace{f\left(3\frac{(k-1)}{n}\right)}_{\text{altura}} \underbrace{\left(\frac{3}{n}\right)}_{\text{largura}} = \sum_{k=1}^n \left(9 - \left(\frac{3(k-1)}{n}\right)^2\right) \left(\frac{3}{n}\right) = \\ &= \left(\frac{3}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left(9 - \left(\frac{3(k-1)}{n}\right)^2\right) = \left(\frac{27}{n}\right) \sum_{k=1}^n 1 - \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \\ U_n &= 27 - \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 = 27 - \frac{27}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1)\right) = \\ &= 27 - \frac{27}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1\right). \end{aligned}$$

Usando as fórmulas para soma de quadrados sucessivos, de naturais sucessivos e a propriedade da constante, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned} U_n &= 27 - \frac{27}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n(n+1)}{2} + n\right) = \\ &= 27 - \frac{9}{n^2} \frac{(n+1)(2n+1)}{2} + 27\frac{(n+1)}{n^2} - \frac{27}{n^2} = \\ &= 27 - \frac{9}{2} \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}\right) + \frac{27}{n} + \frac{27}{n^2} - \frac{27}{n^2} = \\ &= 27 - \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{27}{n} = 18 - \frac{27}{2n} - \frac{9}{2n^2} + \frac{27}{n}. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } U_n = 18 + \frac{27}{n} - \frac{9}{2n^2}.$$

É claro, neste caso, que $T_n \leq U_n$ para todo $n \geq 1$ e que $T_n \leq \text{Área da região } \mathcal{R} \leq U_n$.

CÁLCULO DAS INTEGRAIS DEFINIDAS PELO USO DIRETO DA DEFINIÇÃO POR LIMITE

Antes de calcular as integrais definidas pelo uso da definição por limite (o que às vezes é uma tarefa tediosa), queremos enfatizar que existe uma forma mais prática e rápida de calcular essas integrais, usando um teorema tão básico e tão importante que é chamado Teorema Fundamental do Cálculo, porém isso será feito a partir da próxima semana.

Exercício 1.3.

Usando somas de Riemann, calcule: $\int_0^3 (9 - x^2) dx$.

Solução: Observe que a função $f(x) = 9 - x^2$ é contínua em $[0, 3]$ e portanto integrável em $[0, 3]$. Assim, $\int_0^3 (9 - x^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, para qualquer sequência (S_n) de somas de Riemann de f em $[0, 3]$.

Em particular, note que U_n e T_n achadas em (b) são somas de Riemann de f em $[0, 3]$. Assim, podemos escolher qualquer uma delas para calcular o limite. Temos, então,

$$\int_0^3 (9 - x^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 18.$$

Exercício 1.4.

Usando somas de Riemann, calcule $\int_1^3 (2 - x^2) dx$.

Solução: Observe que a função $f(x) = 2 - x^2$ é contínua em $[1, 3]$ e portanto integrável em $[1, 3]$. Além disso, $\int_1^3 (2 - x^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, para qualquer sequência (S_n) de somas de Riemann de f em $[1, 3]$.

Assim, considerando $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$, para $b = 3$, $a = 1$ e $k = 1, \dots, n$. Observe que, $a = 1 = x_0$, $x_1 = 1 + \frac{2}{n}$, $x_2 = 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right)$, \dots , $x_k = 1 + k\left(\frac{2}{n}\right)$, \dots , $x_n = 1 + n\left(\frac{2}{n}\right) = 3$.

Como $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, pode-se escolher, em particular, a extremidade direita do intervalo, isto é, $t_k = x_k = 1 + k\left(\frac{2}{n}\right)$. Logo,

$$f(t_k) = f\left(1 + k\left(\frac{2}{n}\right)\right) = 2 - \left(1 + k\left(\frac{2}{n}\right)\right)^2.$$

Assim, a Soma de Riemann de $f(x) = 2 - x^2$ sobre $[1, 3]$ será :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left[2 - \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 \right] \left(\frac{2}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{4}{n} - \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 \left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{4k}{n} + \frac{4k^2}{n^2} \right) \left(\frac{2}{n} \right) \\
 &= \frac{4}{n} n - \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{n} + \frac{8k}{n^2} + \frac{8k^2}{n^3} \right) \\
 S_n &= 4 - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{8}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2
 \end{aligned}$$

Usando as fórmulas de somatórias correspondentes, obtemos

$$\begin{aligned}
 S_n &= 4 - \frac{2}{n} n - \frac{8}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 S_n &= 2 - 4 \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_1^3 (2 - x^2) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2 - 4 - \frac{4}{3}(2) = -2 - \frac{8}{3} = \frac{-6 - 8}{3} = -\frac{14}{3}.$$

CÁLCULO DA ÁREA PELA DEFINIÇÃO POR LIMITE

Exercício 1.5.

Usando somas de Riemann, calcule a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = x^2 + x + 1$, o eixo das abscissas, e as retas $x = -1$ e $x = 2$.

Solução: $f(x) = x^2 + x + 1$ é contínua em $[-1, 2]$ e, portanto, integrável em $[-1, 2]$.

Completando quadrados em $y = f(x) = x^2 + x + 1$, temos $y = \left(x^2 + x + \frac{1}{4} \right) + 1 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, para quaisquer $x \in \mathbb{R}$.

Assim, em particular $f(x) > 0$ para $x \in [-1, 2]$ e usando a Definição 2.2 do caderno didático (ou a Definição 1.13 destas notas), obtemos que

$$\text{Área de } \mathcal{R} = \int_{-1}^2 (x^2 + x + 1) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Para qualquer sequência (S_n) de Somas de Riemann de f em $[-1, 2]$.

Assim, seja $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(-1)}{n} = \frac{3}{n}$, para $b = 2$, $a = -1$ e $k = 1, \dots, n$.

Observe que: $a = -1 = x_0$, $x_1 = -1 + \frac{3}{n}$, $x_2 = -1 + 2\left(\frac{3}{n}\right)$, \dots ,
 $x_k = -1 + k\left(\frac{3}{n}\right)$, \dots , $x_n = -1 + n\left(\frac{3}{n}\right) = 2$.

Como $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, podemos escolher, em particular, a extremidade direita do intervalo, isto é, $t_k = x_k = -1 + k\left(\frac{3}{n}\right)$. Logo,

$$\begin{aligned} f(t_k) &= f\left(-1 + \frac{3k}{n}\right) = \left(-1 + \frac{3k}{n}\right)^2 + \left(-1 + \frac{3k}{n}\right) + 1 \\ &= 1 - \frac{6k}{n} + \frac{9k^2}{n^2} - 1 + \frac{3k}{n} + 1 = 1 - \frac{3k}{n} + \frac{9k^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Assim, a Soma de Riemann de $f(x) = x^2 + x + 1$ sobre $[-1, 2]$ será:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(t_k) \left(\frac{3}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{3k}{n} + \frac{9k^2}{n^2}\right) \left(\frac{3}{n}\right).$$

Usando as propriedades e fórmulas de somatórias correspondentes, obtemos:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{3}{n} - \frac{9k}{n^2} + \frac{27k^2}{n^3}\right) = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n 1 - \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k + \frac{27}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{3}{n}n - \frac{9}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{27}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ S_n &= 3 - \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Assim, Área de $\mathcal{R} = \int_{-1}^2 (x^2 + x + 1)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 - \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] = \\ &= 3 - \frac{9}{2} + \frac{9}{2}(1)(2) = \frac{6 - 9 + 18}{2} = \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

CÁLCULO DA ÁREA DE UMA REGIÃO PLANA LIMITADA PELO EIXO y , PELAS RETAS $y = a$, $y = b$ E POR UMA FUNÇÃO CONTÍNUA NÃO NEGATIVA DE y

Exercício 1.6.

Usando somas de Riemann e os n retângulos dados, encontre a área da região \mathcal{R} limitada pelo gráfico de $f(y) = y^2$ e pelo eixo y , para $1 \leq y \leq 3$ como mostra a **Figura 1.15**.

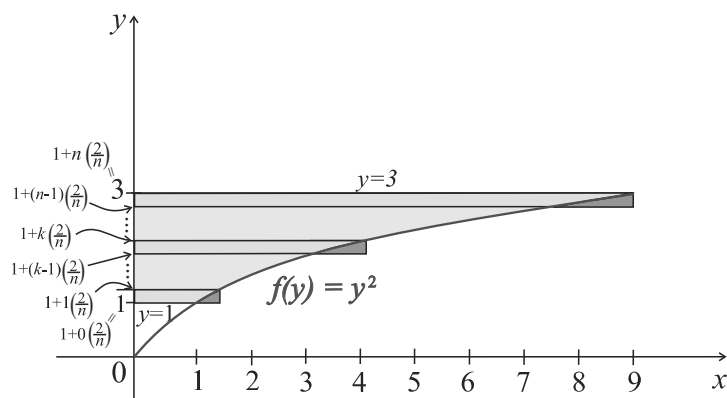


Figura 1.15

Solução: Observe que a função $f(y) = y^2$ é contínua em $[1, 3]$ e portanto integrável em $[1, 3]$. Assim, $\int_1^3 y^2 dy = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ para qualquer sequência (S_n) de somas de Riemann de f em $[1, 3]$.

Na **Figura 1.15**, observamos que o intervalo $[1, 3]$ está dividido em n subintervalos, cada um, com largura $\Delta y = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$. As extremidades dos subintervalos são as seguintes:

$$1 = 1 + 0\left(\frac{2}{n}\right) < 1 + \left(\frac{2}{n}\right) < 1 + 2\left(\frac{2}{n}\right) < \dots < 1 + (k-1)\left(\frac{2}{n}\right) < 1 + k\left(\frac{2}{n}\right) < \dots < 1 + (n-1)\left(\frac{2}{n}\right) < 1 + n\left(\frac{2}{n}\right) = 3.$$

Os subintervalos são: $\left[1, 1 + \frac{2}{n}\right], \dots, \left[1 + (k-1)\frac{2}{n}, 1 + k\frac{2}{n}\right], \dots, \left[1 + (n-1)\frac{2}{n}, 3\right]$.

Observamos também na **Figura 1.15** que as extremidades superiores dos n intervalos são da forma: $y_k = 1 + k\frac{2}{n}$, $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

Assim, podemos formar a soma de Riemann U_n :

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^n \underbrace{f\left(1 + k\frac{2}{n}\right)}_{\text{altura}} \underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)}_{\text{largura}} = \sum_{k=1}^n \left(1 + k\frac{2}{n}\right)^2 \left(\frac{2}{n}\right) = \\ &= \left(\frac{2}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left(1 + k\frac{2}{n}\right)^2 = \left(\frac{2}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{4k}{n} + \frac{4}{n^2}k^2\right). \end{aligned}$$

Isto é,

$$U_n = \left(\frac{2}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{4k}{n} + \frac{4}{n^2} k^2\right) = 2 + \left(\frac{8}{n^2}\right) \sum_{k=1}^n k + \left(\frac{8}{n^3}\right) \sum_{k=1}^n k^2.$$

Usando as fórmulas de somatórias, temos que

$$\begin{aligned} U_n &= 2 + \left(\frac{8}{n^2}\right) \frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{8}{n^3}\right) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \\ &= 2 + \frac{4(n+1)}{n} + \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} = 6 + \frac{4}{n} + \frac{4(2n^2 + 3n + 1)}{3n^2} \\ U_n &= 6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}. \end{aligned}$$

Portanto, Área de $\mathcal{R} = \int_1^3 y^2 dy = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(6 + \frac{4}{n} + \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = 6 + \frac{8}{3} = \frac{26}{3} \text{ unidades de área.}$$

USO DAS DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES BÁSICAS DA INTEGRAL DEFINIDA

Exercício 1.7.

Se f é uma função contínua sobre o intervalo $[0, 5]$ que satisfaz $\int_0^1 f(x)dx = 6$, $\int_0^2 f(x)dx = 4$, $\int_2^5 f(x)dx = 1$, use as propriedades básicas da integral definida para encontrar cada uma das seguintes integrais definidas.

a. $\int_0^5 f(x)dx$

d. $\int_0^0 f(x)dx$

b. $\int_1^2 f(x)dx$

e. $\int_2^0 f(x)dx$

c. $\int_1^5 f(x)dx$

f. $\int_5^1 f(x)dx$

Solução:

- a. Como f é contínua em $[0,5]$ e, portanto, integrável em $[0,5]$, pela propriedade aditiva da integral definida, tem-se que:

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx = 4 + 1 = 5.$$

- b. De forma análoga ao item a:

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx.$$

Logo, $4 = 6 + \int_1^2 f(x)dx.$

Portanto, $\int_1^2 f(x)dx = -2.$

- c. Analogamente, pela propriedade aditiva da integral definida, temos:

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$$

Usando o resultado obtido em a e os valores dados, temos:

$$5 = 6 + \int_1^5 f(x)dx.$$

Logo, $\int_1^5 f(x)dx = -1.$

- d. Da Definição 2.1, do caderno didático, segue que:

$$\int_0^0 f(x)dx = 0.$$

- e. Da Definição 2.1, do caderno didático, também tem-se que:

$$\int_0^2 f(x)dx = - \int_2^0 f(x)dx.$$

Assim, $4 = - \int_0^2 f(x)dx,$ logo, $\int_2^0 f(x)dx = -4.$

- f. De forma análoga ao item e, usando c, tem-se que:

$$\int_5^1 f(x)dx = - \int_1^5 f(x)dx = -(-1).$$

Logo, $\int_5^1 f(x)dx = 1.$

USO DA ÁREA PARA CALCULAR INTEGRAIS

Exercício 1.8.

O gráfico de f consiste de segmentos de reta e de um semicírculo de raio 2, como mostra a **Figura 1.16**. Calcule cada integral definida, usando fórmulas geométricas.

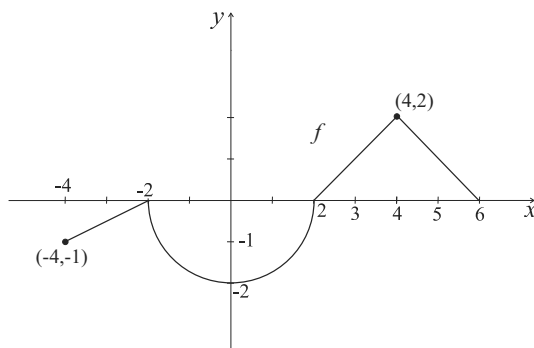


Figura 1.16

- | | |
|---|---------------------------|
| a. $\int_0^2 f(x)dx$ | d. $\int_{-4}^2 f(x)dx$ |
| b. $\int_0^2 f(x)dx - \int_{-2}^0 f(x)dx$ | e. $\int_{-4}^6 3f(x)dx$ |
| c. $\int_2^6 f(x)dx$ | f. $\int_{-4}^6 f(x) dx$ |

Solução:

- a. Observando a função f , podemos afirmar que

$$\int_0^2 f(x)dx = -\text{Área de um quarto de círculo de raio 2} = -\pi \frac{2^2}{4} = -\pi.$$

- b. $\int_{-2}^0 f(x)dx = -\text{Área de um quarto de círculo de raio 2} = -\pi \frac{2^2}{4} = -\pi$, assim usando (a), obtemos

$$\int_0^2 f(x)dx - \int_{-2}^0 f(x)dx = -\pi - (-\pi) = -\pi + \pi = 0.$$

c. $\int_2^6 f(x)dx = \text{Área do triângulo de base 4 e altura 2} = \left(\frac{4 \cdot 2}{2}\right) = 4.$

d. $\int_{-4}^2 f(x)dx = \int_{-4}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^2 f(x)dx = -(\text{Área do triângulo de base 2 e altura 1}) + (-\text{Área do semicírculo de raio 2}) =$
 $= \left(-\frac{2 \cdot 1}{2}\right) + \left(-\frac{\pi 2^2}{2}\right) = -1 - 2\pi.$

e. $\int_{-4}^6 3f(x)dx = 3 \int_{-4}^6 f(x)dx = 3 \left(\int_{-4}^2 f(x)dx + \int_2^6 f(x)dx \right) =$
 $3(-1 - 2\pi + 4) = 3(3 - 2\pi) = 9 - 6\pi.$

Note que estamos usando os resultados obtidos em d e c.

f. Observe que o gráfico de $|f|$ é dado pela **Figura 1.17**

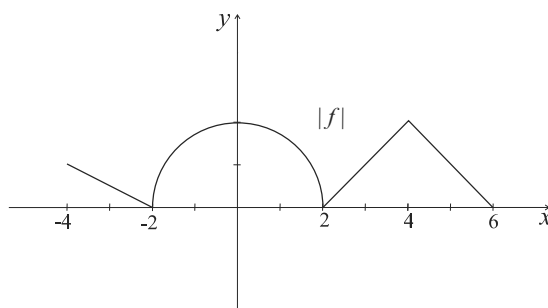


Figura 1.17

Assim, $\int_{-4}^6 |f(x)|dx = \int_{-4}^{-2} |f(x)|dx + \int_{-2}^2 |f(x)|dx + \int_2^6 |f(x)|dx =$
 $= (\text{Área do triângulo de base 2 e altura 1}) + (\text{área do semicírculo de raio 2}) + (\text{área do triângulo de base 4 e altura 2}).$

Logo, $\int_{-4}^6 |f(x)|dx = 1 + 2\pi + 4 = 5 + 2\pi.$

Exercício 1.9.

Calcule cada integral, usando as propriedades básicas da integral definida junto com a Definição 1.1 e fórmulas apropriadas da Geometria.

a. $\int_{-1}^2 (x - 2|x|)dx$

b. $\int_0^2 (x - |x - 1|)dx$

Solução:

a. Observe que $(x - 2|x|) = \begin{cases} x - 2x, & x \geq 0 \\ x + 2x, & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -x, & x \geq 0 \\ 3x, & x < 0 \end{cases}.$

No intervalo $[-1, 2]$ então, temos

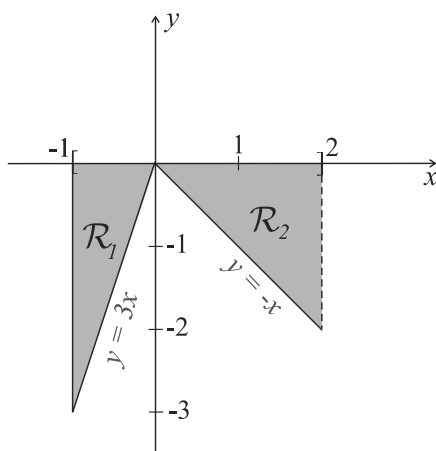


Figura 1.18

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \int_{-1}^2 (x - 2|x|) dx &= \int_{-1}^0 (x - 2|x|) dx + \int_0^2 (x - 2|x|) dx = \\ &= \int_{-1}^0 3x dx + \int_0^2 (-x) dx = (-\text{Área do triângulo de base 1 e} \\ &\text{altura 3}) + (-\text{Área do triângulo de base 2 e altura 2}) = \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = -\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

b. Observe que $x - |x - 1| = \begin{cases} x - (x - 1), & x - 1 \geq 0 \\ x + (x - 1), & x - 1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}.$

No intervalo $[0, 2]$ temos

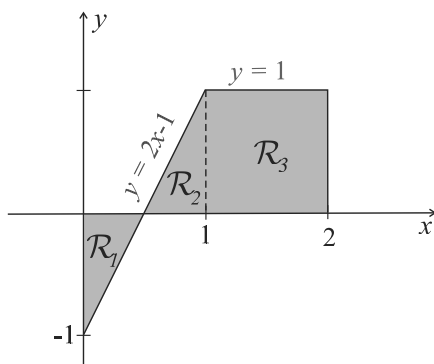


Figura 1.19

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x - |x - 1|) dx &= \int_0^1 (x - |x - 1|) dx + \int_1^2 (x - |x - 1|) dx = \\ &= \int_0^1 (2x - 1) dx + \int_1^2 1 dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1) dx \\ &+ \int_1^2 1 dx = -\text{Área}(\mathcal{R}_1) + \text{Área}(\mathcal{R}_2) + \text{Área}(\mathcal{R}_3) = \\ &= -\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1}{2}\right) + \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1}{2}\right) + (1 \cdot 1) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = 1.\end{aligned}$$

Exercício 1.10.

Calcule cada integral, usando as propriedades básicas da integral definida junto com a Definição 1.1 e fórmulas apropriadas da Geometria.

- $\int_{-2}^2 (1 - |x|) dx$
- $\int_{-3}^0 \left(1 + \sqrt{9 - x^2}\right) dx$
- $\int_0^3 |3x - 5| dx$

Solução:

- Observe que, neste caso, $f(x) = 1 - |x|$ para $x \in [-2, 2]$, onde:
 $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ então $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } x \geq 0 \\ 1 + x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$.

Como $x \in [-2, 2]$, então a restrição de f a $[-2, 2]$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 + x, & \text{se } -2 \leq x < 0 \end{cases}$$

Onde o gráfico de f está dado na **Figura 1.20**:

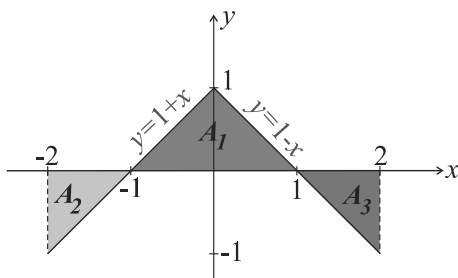


Figura 1.20

Observando o gráfico de f e calculando a integral como diferença das áreas dos triângulos, tem-se que:

$$\int_{-2}^2 (1 - |x|) dx = -A_2 + A_1 - A_3.$$

Isto é,

$$\int_{-2}^2 (1 - |x|) dx = -\frac{1}{2}(1)(1) + \frac{1}{2}(2)(1) - \frac{1}{2}(1)(1) = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0.$$

Lembre que a integral definida é a soma orientada das áreas das regiões determinadas pelo gráfico da função f , o eixo x e as retas $x = -2$ e $x = 2$. Neste caso, esse “balanço” de áreas é nulo, indicando que a soma das áreas no semiplano superior é igual à soma das áreas no semiplano inferior.

- b. Uma vez que $f(x) = 1 + \sqrt{9 - x^2} > 0$, podemos interpretar essa integral como a área sob a curva $y = 1 + \sqrt{9 - x^2}$ de -3 até 0 . Por outro lado de $y - 1 = \sqrt{9 - x^2}$, temos que $(y - 1)^2 + x^2 = 9$, o que mostra que para $x \in [-3, 0]$, o gráfico de f é um quarto da circunferência de centro em $(0, 1)$ e raio 3. Ver **Figura 1.21**.

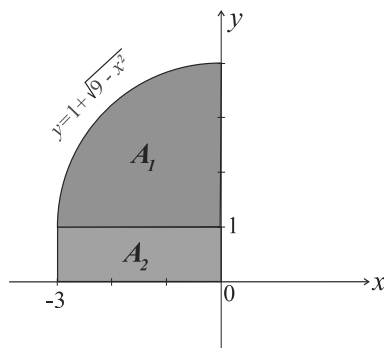


Figura 1.21

Observe que neste caso a área sob a curva $y - 1 = \sqrt{9 - x^2}$ é a soma das áreas A_1 do quarto do círculo de raio 3 e do retângulo A_2 de base 3 e altura 1. Logo:

$$\int_{-3}^0 (1 + \sqrt{9 - x^2}) dx = A_1 + A_2 = \frac{1}{4}(\pi)(3)^2 + 3(1) = \frac{9\pi}{4} + 3.$$

- c. Uma vez que também $f(x) = |3x - 5| \geq 0$, pode-se interpretar essa integral como a área sob a função $f(x) = |3x - 5|$. Por outro lado, da definição do valor absoluto, temos que:

$$f(x) = |3x - 5| = \begin{cases} 3x - 5, & \text{se } 3x - 5 \geq 0 \\ -(3x - 5), & \text{se } 3x - 5 < 0 \end{cases}$$

Isto é,

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{se } x \geq \frac{5}{3} \\ 5 - 3x, & \text{se } x < \frac{5}{3} \end{cases}$$

Como $x \in [0, 3]$, então a restrição de f a $[0, 3]$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{se } \frac{5}{3} \leq x \leq 3 \\ 5 - 3x, & \text{se } 0 < x < \frac{5}{3} \end{cases}$$

O gráfico de f é dado na **Figura 1.22**:

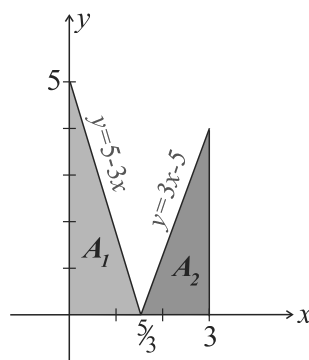


Figura 1.22

Assim, calculando a integral como a soma das áreas dos dois triângulos A_1 e A_2 , tem-se:

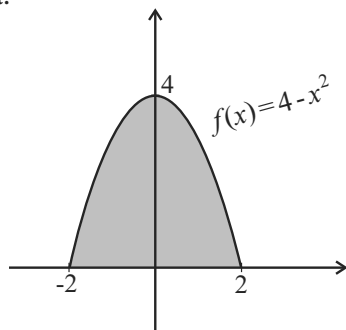
$$\begin{aligned} \int_0^3 |3x - 5| dx &= \int_0^{\frac{5}{3}} |3x - 5| dx + \int_{\frac{5}{3}}^3 |3x - 5| dx = \int_0^{\frac{5}{3}} (5 - 3x) dx + \\ &\int_{\frac{5}{3}}^3 (3x - 5) dx = A_1 + A_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ou seja, } \int_0^3 |3x - 5| dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} \right) (5) + \frac{1}{2} \left(3 - \frac{5}{3} \right) (4) = \\ &= \frac{25}{6} + 2 \left(\frac{9 - 5}{3} \right) = \frac{25}{6} + \frac{8}{3} = \frac{25 + 16}{6} = \frac{41}{6}. \end{aligned}$$

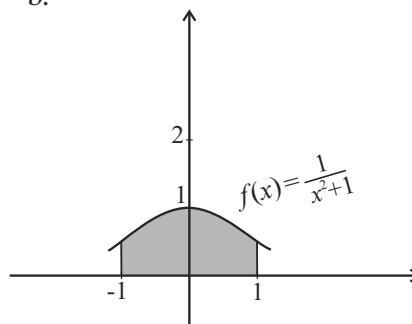
Exercício 1.11.

Para cada uma das regiões mostradas a seguir, escreva uma integral definida que dê a área da região. (**Não calcule a integral.**)

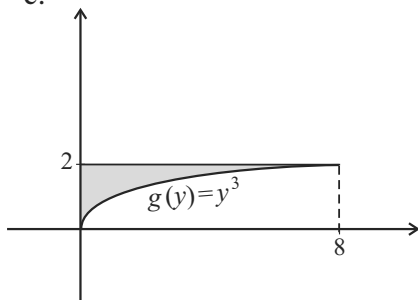
a.



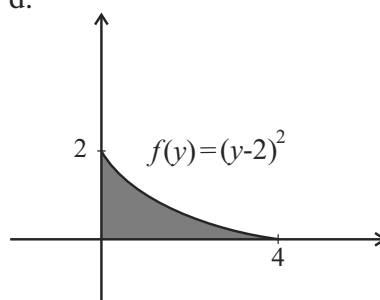
b.



c.



d.



Solução:

a. $\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$

b. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$

c. $\int_0^2 y^3 dy$

d. $\int_0^2 (y - 2)^2 dy$

USO DE PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA PARA VERIFICAR DESIGUALDADES

Exercício 1.12.

Use as propriedades das integrais para verificar cada desigualdade, sem calcular as integrais.

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sen^3 x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sen^2 x dx$

b. $2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2} dx \leq 2\sqrt{2}$

Solução:

- a. Observe que $0 \leq \sin x < 1$ sobre $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Assim, multiplicando ambos os membros por $\sin^2 x \geq 0$, temos $\sin^3 x \leq \sin^2 x$ sobre $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Considere $f(x) = \sin^2 x$ e $g(x) = \sin^3 x$ definidas em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. f e g são contínuas em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, logo f e g são integráveis em $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Como $f(x) \geq g(x)$ sobre $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, usando a Proposição 2.1 e o Exemplo 2.5 do caderno didático, obtemos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x) dx.$$

Isto é,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx.$$

Ou seja,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx.$$

- b. Observe que se $-1 \leq x \leq 1$, então $0 \leq x^2 \leq 1$. Assim, $1 \leq 1 + x^2 \leq 2$, e como a função raiz quadrada é uma função crescente em $[0, +\infty)$ tem-se que $1 = \sqrt{1} \leq \sqrt{1 + x^2} \leq \sqrt{2}$. Usando agora o resultado do exercício 7 ([Aula 2](#)) do caderno didático, temos que: $1(1 - (-1)) \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2} dx \leq \sqrt{2}(1 - (-1))$, para todo $x \in [-1, 1]$. Isto é,

$$2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2} dx \leq 2\sqrt{2}.$$

PASSO A PASSO DA MAIORIA DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CADERNO DIDÁTICO

Exercício 1.13.

Seja $f(x) = x^3$ para todo $x \in [0, 1]$ e considerando as sequências (T_n) , (U_n) e (V_n) , onde

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n}, U_n = \sum_{k=1}^n \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} \text{ e } V_n = \sum_{k=1}^n \frac{f\left(\frac{t_k}{n}\right)}{n}$$

$$t_1 \in \left[0, \frac{1}{n}\right], t_2 \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \dots, t_{n-1} \in \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right] \text{ e } t_n \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right].$$

Mostre que: $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{1}{4}.$

Sugestão: Raciocine como foi feito no caderno didático para a função $f(x) = x^2$. Lembre-se de que também conhecemos a fórmula $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (Soma dos cubos sucessivos).

(Aula 1 do caderno didático, exercício proposto nº 2)

Solução: Observe que (T_n) é a soma das áreas dos retângulos mostrados na **Figura 1.23** e que (U_n) é a soma das áreas dos retângulos mostrados na **Figura 1.24**. Para cada inteiro $n \geq 1$.

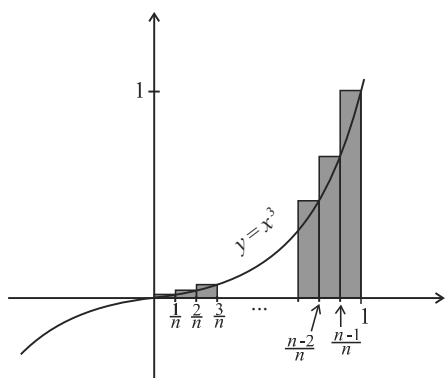


Figura 1.23

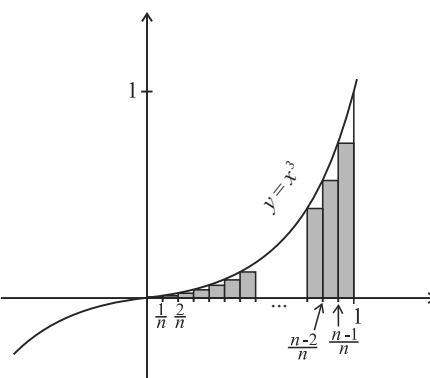


Figura 1.24

Notemos que $t_k \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ para $k = 1, 2, \dots, n$, isto é, $\frac{k-1}{n} \leq t_k \leq \frac{k}{n}$ e como f é crescente, então $f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq f(t_k) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$ para $k = 1, 2, \dots, n$. Consequentemente, $\sum_{k=1}^n \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{f(t_k)}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n}$, isto é, $T_n \leq V_n \leq U_n$.

Notemos ainda que, para cada inteiro $n \geq 1$, $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)}{n} =$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^3}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3, \text{ porém } \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Logo, substituindo a fórmula de somatória na expressão anterior, resulta

$$U_n = \frac{1}{n^4} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right) = \frac{(n+1)^2}{4n^2} = \left(\frac{n+1}{2n} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)^2.$$

Logo,
$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Analogamente,

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k-1}{n}\right)^3}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n (k-1)^3.$$

Por outro lado, temos que:

$$\sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \sum_{k=1}^n (k^3 - 3k^2 + 3k - 1) = \sum_{k=1}^n k^3 - 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 3 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1$$

e usando as seguintes fórmulas de somatórias:

$$\sum_{k=1}^n c = cn, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

resulta

$$\sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \frac{n(n+1)}{2} - n.$$

Assim,

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{n^4} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} - 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \frac{n(n+1)}{2} - n \right) = \\ &= \frac{(n+1)^2}{4n^2} - \frac{1}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} + \frac{3}{2} \frac{(n+1)}{n^3} - \frac{1}{n^3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)^2}{4n^2} - \frac{1}{2} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^3} + \frac{3}{2} \frac{(n+1)}{n^3} - \frac{1}{n^3} \right] = \frac{1}{4}.$$

Provamos até agora que $T_n \leq V_n \leq U_n$ para todo $n \geq 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{1}{4}$. Assim, pelo teorema do sanduíche ou do confronto, podemos afirmar que $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{1}{4}$.

Em resumo, acabamos de mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{1}{4}.$$

Exercício 1.14.

Calcule $\int_{-1}^1 |x| dx$ usando propriedades da integral definida e fórmulas geométricas.

(Aula 2 do caderno didático, exercício proposto nº 1)

Solução: Observe que $f(x) = |x|$ é contínua em $[-1, 1]$, então f é integrável em $[-1, 1]$. Além disso, pela Proposição 2.2 do caderno didático, temos que

$$\int_{-1}^1 |x| dx = \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^1 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^1 x dx.$$

Observando o gráfico de $f(x)$ na **Figura 1.25**, temos que $\int_{-1}^0 -x dx$ é igual à área da região R_1 e $\int_0^1 x dx$ é igual à área da região R_2 .

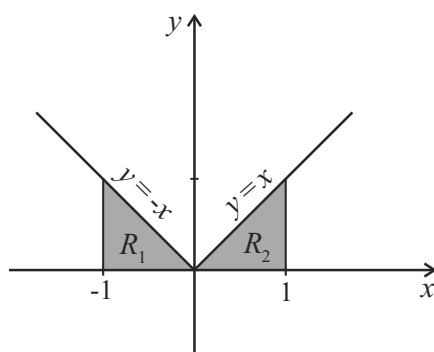


Figura 1.25

Note que R_1 é um triângulo retângulo, assim, $A(R_1) = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$, pela simetria de f em relação ao eixo y , temos que $A(R_2) = A(R_1)$ e assim, $A(R_2) = \frac{1}{2}$, logo $\int_{-1}^1 |x| dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Exercício 1.15.

Seja $f(x) = -x^2$ para todo $x \in [0, 1]$. Calcule a área da região compreendida entre o gráfico de f , o eixo das abscissas e a reta $x = 1$.

Sugestão: Use as propriedades da integral definida e o Exemplo 2.1 do caderno didático.

(Aula 2 do caderno didático, exercício proposto nº 2)

Solução: A região R pedida é mostrada na **Figura 1.26**.

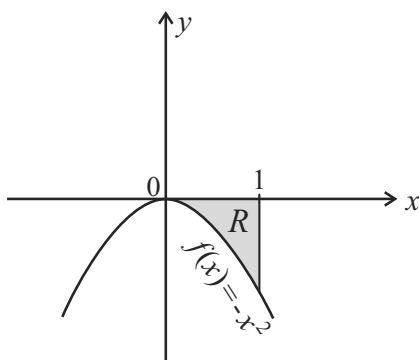



Figura 1.26

Como $f(x) = -x^2$ é contínua no intervalo $[0, 1]$, então f é integrável em $[0, 1]$. Observe que $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [0, 1]$, então por definição

$$A(R) = - \left(\int_0^1 f(x) dx \right) = - \left(\int_0^1 -x^2 dx \right) \underset{\text{Prop. 2.1(b)}}{=} \int_0^1 x^2 dx \underset{\text{Exemplo 2.2}}{=} \frac{1}{3}$$

unidades de área.

 A Proposição 2.1-b e o Exemplo 2.2 referem-se à numeração do caderno didático.

Exercício 1.16.

Usando somas de Riemann, mostre que $\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

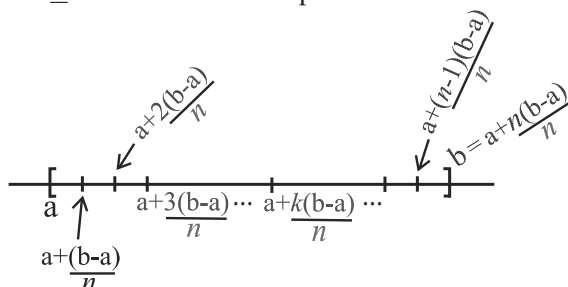
Sugestão: Você já sabe que a função $f(x) = x$ é integrável em $[a, b]$, pois ela é contínua em $[a, b]$. Para cada inteiro $n \geq 1$, considere a soma de Riemann $S_n = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^n f \left(a + \frac{k(b-a)}{n} \right) \right)$

e mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$.

(Aula 2 do caderno didático, exercício proposto nº 3-b)

Solução: Nós sabemos que a função $f(x) = x$ é integrável em $[a, b]$, pois ela é contínua em $[a, b]$. Além disso, $\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ para qualquer sequência (S_n) de somas de Riemann de f em $[a, b]$.

Assim, considerando $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Observe que para cada inteiro $n \geq 1$ consideramos os pontos:



Como $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (pode-se escolher, por exemplo, os extremos superiores dos subintervalos) $t_k = x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

Logo, $f(t_k) = f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right) = a + k \frac{(b-a)}{n}$.

Assim, a Soma de Riemann de $f(x) = x$ sobre $[a, b]$ será:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n a + \frac{(b-a)^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k. \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^n a = an$ e $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ temos

$$S_n = \frac{b-a}{n} (an) + \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = (b-a) \left[a + \frac{(b-a)}{2} \right] = \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$

Exercício 1.17.

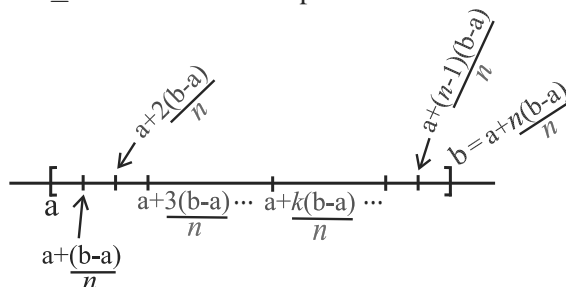
Use somas de Riemann para mostrar que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

(Aula 2 do caderno didático, exercício proposto nº 4)

Solução: Nós sabemos que a função $f(x) = x^2$ é integrável em $[a, b]$, pois ela é contínua em $[a, b]$. Além disso, $\int_a^b x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ para qualquer sequência (S_n) de somas de Riemann de f em $[a, b]$.

Assim, considerando $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Observe que para cada inteiro $n \geq 1$ consideramos os pontos:



Como $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (pode-se escolher, por exemplo, os extremos superiores dos subintervalos) $t_k = x_k = a + k \frac{b-a}{n}$.

$$\text{Logo, } f(t_k) = f\left(a + k \frac{(b-a)}{n}\right)^2 = a^2 + 2ak \frac{(b-a)}{n} + k^2 \frac{(b-a)^2}{n^2}.$$

Assim, a Soma de Riemann de $f(x) = x^2$ sobre $[a, b]$ será:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) \right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)^2 = \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a^2 + 2ak \frac{(b-a)}{n} + k^2 \frac{(b-a)^2}{n^2}\right) = \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n a^2 + \frac{(b-a)^2}{n^2} 2a \sum_{k=1}^n k + \frac{(b-a)^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2. \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^n a^2 = a^2 n$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ temos

$$S_n = \frac{b-a}{n} (a^2 n) + \frac{(b-a)^2}{n^2} 2a \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(b-a)^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ou seja,

$$S_n = (b-a)a^2 + a(b-a)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[(b-a)a^2 + a(b-a)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right],$$

isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (b-a)a^2 + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = (b-a) \left[a^2 + a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{3} \right]$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= (b-a) \left[a^2 + ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{3} \right] = (b-a) \left[\frac{3ab + b^2 - 2ab + a^2}{3} \right] = \\ &= \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3} = \frac{b^3 - a^3}{3}. \end{aligned}$$

Portanto,
$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Exercício 1.18.

Calcule

$$\int_a^b (x^2 + x + 1) dx.$$


Sugestão: Use os resultados dos Exercícios 1.16, 1.15 e propriedades da integral definida.

Solução:

$$\begin{aligned} \int_a^b (x^2 + x + 1) dx &= \int_a^b x^2 dx + \int_a^b x dx + \int_a^b 1 dx = \\ &= \underbrace{\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}}_{\text{Exercício 1.16}} + \underbrace{\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}}_{\text{Exercício 1.15}} + \underbrace{1(b-a)}_{\text{Exemplo 2.2}}. \end{aligned}$$

Ou também

$$\int_a^b (x^2 + x + 1) dx = (b-a) \left[\frac{b^2 + ab + b^2}{3} + \frac{b+a}{2} + 1 \right].$$

 O Exemplo 2.2 refere-se à numeração do caderno didático.

Exercício 1.19.

Seja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x^2$ se $x \in [-1, 0]$ e $f(x) = x^2$ se $x \in [0, 1]$. Mostre que

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$

(Aula 2 do caderno didático, exercício proposto nº 6)

Solução: Observe que f é uma função contínua no intervalo $[-1, 1]$, logo f é uma função integrável no intervalo $[-1, 1]$. Por outro lado, pela Proposição 2.2 do caderno didático temos que a restrição de f a $[-1, 0]$ é integrável em $[-1, 0]$, a restrição de f a $[0, 1]$ é integrável em $[0, 1]$ e

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

Assim, substituindo os valores de f em cada subintervalo resulta

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 -x^2 dx + \int_0^1 x^2 dx = - \underbrace{\int_{-1}^0 x^2 dx}_{(1)} + \underbrace{\int_0^1 x^2 dx}_{(2)} \quad (1.1)$$

Para calcular (1) e (2) usaremos o exercício 5, assim

$$\int_{-1}^0 x^2 dx = \frac{0^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \int_0^1 x^2 dx = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Substituindo estes últimos valores em 1.1 resulta

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.$$

Exercício 1.20.

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável tal que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Mostre que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

(Aula 2 do caderno didático, exercício proposto nº 7)

Solução: Das hipóteses do exercício dado e utilizando o Exemplo 2.5 do caderno didático, podemos afirmar que

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \quad (1.2)$$

Por outro lado, note que m e M são constantes em $[a, b]$. Assim, do Exemplo 2.2 do caderno didático, podemos afirmar que

$$\int_a^b m dx = m(b-a) \text{ e que } \int_a^b M dx = M(b-a)$$

Substituindo esses últimos valores em 1.2 resulta que

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Veja no Apêndice 4, no final deste caderno, o passo a passo de exercícios adicionais correspondentes a esta semana.

Semana 2

O TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO



O Teorema Fundamental do Cálculo estabelece uma conexão entre os dois ramos do Cálculo: o Cálculo Diferencial (introduzido com o problema da reta tangente) e o Cálculo Integral (introduzido com o problema da área). Esses dois problemas aparentemente não estão relacionados, porém, na verdade, existe uma conexão muito estreita. A conexão foi descoberta de forma independente por Isaac Newton e Gottfried Leibniz, e está enunciada no Teorema Fundamental do Cálculo. Esse teorema demonstra a precisa relação inversa entre a derivada e a integral. Eles exploraram essa relação e a usaram para desenvolver o cálculo como um método matemático sistemático. Eles perceberam que o Teorema Fundamental lhes permitiu computar áreas e integrais mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas, como fizemos na semana anterior.

Teorema 2.1 (1ª Forma do Teorema Fundamental do Cálculo).

Sejam $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Para cada $x \in [a, b]$ definamos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, então F é derivável em $[a, b]$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração

Ver a prova do Teorema 3.1 do caderno didático.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Exemplo 2.1.

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em \mathbb{R} e seja a um número real arbitrário. Definamos $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Afirmamos que F é derivável em \mathbb{R} e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Veja a demonstração (Exemplo 3.2) nas páginas 30-31 do seu caderno didático.

Exemplo 2.2.

Nos exercícios seguintes, considere a função F definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que F é derivável em \mathbb{R} e calcule $F'(x)$.


$$\text{a. } F(x) = \int_0^{x^3} t \cos t \, dt \qquad \text{b. } F(x) = \int_{-\sin^2 x}^{x^2} \sqrt{1+t^4} \, dt$$

Solução:

- a. Podemos escrever $F(x) = (H \circ G)(x)$, onde $H(x) = \int_0^x t \cos t \, dt$ e $G(x) = x^3$.

Pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo, $H(x)$ é derivável em \mathbb{R} e $H'(x) = x \cos x$. Também $G(x)$ é derivável em \mathbb{R} e $G'(x) = 3x^2$. Logo, pela regra da cadeia, $F = H \circ G$ é derivável em \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} F'(x) &= (H \circ G)'(x) = H'(G(x))G'(x) = \\ &= x^3 \cos(x^3)3x^2 = 3x^5 \cos(x^3). \end{aligned}$$

 Note que neste caso usar o citado teorema é a melhor opção, pois não temos ainda ferramentas para calcular diretamente a integral definida e, mesmo tendo-as, o procedimento sem usar o teorema é muito penoso.

$$\begin{aligned} \text{b. } F(x) &= \int_{-\sin^2 x}^{x^2} \sqrt{1+t^4} \, dt = \int_{-\sin^2 x}^0 \sqrt{1+t^4} \, dt + \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4} \, dt = \\ &= - \int_0^{-\sin^2 x} \sqrt{1+t^4} \, dt + \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^4} \, dt \end{aligned}$$

Podemos escrever $F(x) = -(H \circ G)(x) + (H \circ L)(x)$, onde $H(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt$, $G(x) = -\sin^2 x$ e $L(x) = x^2$.

Pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo, $H(x)$ é derivável em \mathbb{R} e $H'(x) = \sqrt{1+x^4}$, também $G(x)$ é derivável em \mathbb{R} e $G'(x) = -2\sin x \cos x$. Logo, pela regra da cadeia, $(H \circ G)$ é derivável em \mathbb{R} e,

$$\begin{aligned}(H \circ G)'(x) &= H'(G(x)) G'(x) \\ &= \sqrt{1 + (-\sin^2 x)^4} \cdot (-2\sin x \cos x) = -2\sin x \cos x \sqrt{1 + \sin^8 x}.\end{aligned}$$

Analogamente, $L(x)$ é derivável e $L'(x) = 2x$, logo, pela regra da cadeia, $(H \circ L)$ é derivável em \mathbb{R} e,

$$\begin{aligned}(H \circ L)'(x) &= H'(L(x)) L'(x) \\ &= \sqrt{1 + (x^2)^4} \cdot (2x) = 2x\sqrt{1 + x^8}.\end{aligned}$$

Assim, $F(x)$ é derivável em \mathbb{R} e,

$$F'(x) = -(H \circ G)'(x) + (H \circ L)'(x).$$

Portanto, $F'(x) = 2\sin x \cos x \sqrt{1 + \sin^8 x} + 2x\sqrt{1 + x^8}$.

Exemplo 2.3.

Considere a função $G(x) = 2x + \int_0^{x^2} \frac{\sin 2t}{1+t^2} dt$. Mostre que G é derivável em \mathbb{R} e determine: a. $G(0)$ b. $G'(x)$

Solução:

a. É claro que $G(0) = 2(0) + \int_0^0 \frac{\sin 2t}{1+t^2} dt = 0$. Vamos mostrar que G é derivável em \mathbb{R} .

Podemos escrever $G(x) = 2x + (H \circ L)(x)$, onde $H(x) = \int_0^x \frac{\sin 2t}{1+t^2} dt$ e $L(x) = x^2$. Pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo, $H(x)$ é derivável em \mathbb{R} e $H'(x) = \frac{\sin 2x}{1+x^2}$. Também $L(x)$ é derivável em \mathbb{R} e $L'(x) = 2x$. Logo, pela regra da cadeia, $(H \circ L)$ é derivável em \mathbb{R} e,

$$\begin{aligned}(H \circ L)'(x) &= H'(L(x)) L'(x) \\ &= \frac{\sin(2(x^2))}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x = 2x \left[\frac{\sin(2x^2)}{1 + x^4} \right].\end{aligned}$$

Assim, G é derivável em \mathbb{R} , pois é soma de funções deriváveis em \mathbb{R} e $G'(x) = 2 + (H \circ L)'(x)$. Logo $G'(x) = 2 + 2x \left[\frac{\sin(2x^2)}{1+x^4} \right]$, que é a resposta para o item b.

Exemplo 2.4.

Assuma que f seja uma função contínua em \mathbb{R} e que $\int_0^x f(t) dt = \frac{2x}{4+x^2}$. Determine $f(0)$.


Solução: Seja $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ como f é contínua em \mathbb{R} . Então, pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo, F é derivável em \mathbb{R} e $F'(x) = f(x)$. Como $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \frac{2x}{4+x^2}$, então $F'(x) = \left(\frac{2x}{4+x^2} \right)'$, e desde que $f(x) = F'(x)$, temos

$$f(x) = \frac{(4+x^2)2 - 2x(2x)}{(4+x^2)^2} = \frac{8+2x^2-4x^2}{(4+x^2)^2} = \frac{8-2x^2}{(4+x^2)^2}.$$

Assim, $f(0) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$.

Definição 2.1.

Sejam $a < b$ e $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Uma função $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de uma primitiva de f ou uma antiderivada para f em $[a, b]$ se: $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$.

 É claro que se G é uma primitiva ou antiderivada para f em $[a, b]$ e C é um número real arbitrário, então $G + C$ também é uma primitiva ou antiderivada para f em $[a, b]$.

EXEMPLOS DE PRIMITIVAS ELEMENTARES

Desde que:	Podemos concluir que:
$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n \quad (n \neq -1)$	$G(x) = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), (n \neq -1)$ é uma primitiva de $f(x) = x^n$
$(-\cos x)' = \sin x$	$G(x) = -\cos x$ é uma primitiva de $f(x) = \sin x$
$(\sin x)' = \cos x$	$G(x) = \sin x$ é uma primitiva de $f(x) = \cos x$
$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$	$G(x) = \operatorname{tg} x$ é uma primitiva de $f(x) = \sec^2 x$
$(-\operatorname{cotg} x)' = \operatorname{cosec}^2 x$	$G(x) = -\operatorname{cotg} x$ é uma primitiva de $f(x) = \operatorname{cosec}^2 x$
$(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$	$G(x) = \sec x$ é uma primitiva de $f(x) = \sec x \operatorname{tg} x$
$(-\operatorname{cosec} x)' = \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$	$G(x) = -\operatorname{cosec} x$ é uma primitiva de $f(x) = \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$
$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$G(x) = \arcsen x$ é uma primitiva de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$G(x) = \operatorname{arctg} x$ é uma primitiva de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$G(x) = \operatorname{arcsec} x $ é uma primitiva de $f(x) = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$

Teorema 2.2 (2ª Forma do Teorema Fundamental do Cálculo).

Sejam $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$. Se G é qualquer primitiva de f em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a).$$

Notação. Expressões do tipo $G(b) - G(a)$ são convenientemente escritas $G(x) \Big|_a^b$.

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

CALCULANDO UMA INTEGRAL DEFINIDA USANDO A SEGUNDA FORMA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Exemplo 2.5.

Calcule $\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2} dy.$

Solução: Note que o integrando é uma função contínua em $[1, 4]$. Aplicando as propriedades da integral definida, temos

$$\int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2} dy = \int_1^4 \left(\frac{1}{y^2} + \frac{\sqrt{y}}{y^2} \right) dy = \int_1^4 y^{-2} dy + \int_1^4 y^{-\frac{3}{2}} dy.$$

Podemos usar a 2ª forma do teorema fundamental do cálculo. Usando a tabela de primitivas podemos concluir que $\frac{y^{-2+1}}{-2+1}$ é uma primitiva de y^{-2} e que $\frac{y^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1}$ é uma primitiva de $y^{-\frac{3}{2}}$.

Aplicando a 2ª forma do teorema fundamental do cálculo a cada uma das últimas integrais do lado direito, temos

$$= \left[\frac{y^{-1}}{-1} \right]_1^4 + \left[\frac{2y^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_1^4 = -\left[\frac{1}{y} \right]_1^4 - \left[\frac{2}{y^{\frac{1}{2}}} \right]_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 - \frac{2}{2} + 2 = \frac{7}{4}.$$

Exemplo 2.6.

Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\pi}x - 2\sec^2 x \right) dx.$

Solução: Note que o integrando é uma função contínua no intervalo dado, logo é integrável nesse intervalo. Então estamos em condições de utilizar as propriedades da integral definida

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\pi}x - 2\sec^2 x \right) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x dx$$

Usando a tabela de primitivas elementares e a 2ª forma do teorema fundamental do cálculo, obtemos

$$= \left[\frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - 2 \left[\operatorname{tg} x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 - 2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{9} - 2\sqrt{3}.$$

USANDO A SEGUNDA FORMA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO PARA ENCONTRAR A ÁREA DE UMA REGIÃO

Exemplo 2.7.

Encontre a área da região \mathcal{R} limitada pelo gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$, pelo eixo x e pelas retas verticais $x = 1$ e $x = 2$.

Solução: A região \mathcal{R} está dada na **Figura 2.1**.

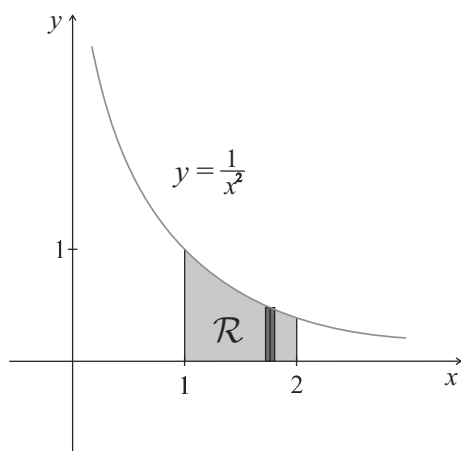


Figura 2.1

Observe que, neste caso, $y > 0$ para todo x diferente de zero, em particular para $1 \leq x \leq 2$. Assim,

$$\begin{aligned}\text{Área de } \mathcal{R} &= \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \int_1^2 x^{-2} dx = \left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1} \right]_1^2 = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \text{ unidades de área.}\end{aligned}$$

Exemplo 2.8.

Encontre a área da região \mathcal{R} no primeiro quadrante, limitada pelo gráfico de $x = y - y^2$ e pelo eixo y .

Solução: A região \mathcal{R} está dada na seguinte figura:

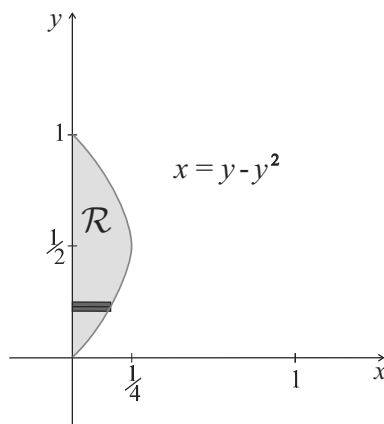


Figura 2.2

Na **Figura 2.2**, observamos que, se girarmos a cabeça no sentido horário, podemos imaginar a região \mathcal{R} estando abaixo da curva $x = y - y^2$, de $y = 0$ até $y = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} \text{Área de } \mathcal{R} &= \int_0^1 (y - y^2) dy = \int_0^1 y dy - \int_0^1 y^2 dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

📌 Note que esta é a maneira mais simples de calcular a área da **Figura 2.2**. Se quisermos calcular a área fazendo a integração sobre o eixo x , como no Exemplo 2.7, o trabalho que iremos ter será muito maior (verifique!). Assim, nós tentaremos sempre seguir a “lei do menor esforço.”

CALCULANDO UMA INTEGRAL DEFINIDA ENVOLVENDO VALOR ABSOLUTO

Exemplo 2.9.

Calcule $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x| dx$

Solução: $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x| dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x| dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x| dx$, onde

$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{se } \cos x \geq 0 \\ -\cos x & \text{se } \cos x < 0 \end{cases}.$$

No intervalo $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, sabemos que:

Para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos x \geq 0$ e para $\frac{\pi}{2} < x \leq 3\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $\cos x < 0$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x| dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos x dx \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 1 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Exemplo 2.10.

Calcule $\int_0^3 |x^2 - 4| dx$

Solução: Observe que a função valor absoluto está definida por

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x^2 - 4 \geq 0 \\ -x^2 + 4 & \text{se } x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

Por outro lado $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ ou $x \leq -2$ e

$$x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Assim, no intervalo de integração $[0, 3]$, temos

$$|x^2 - 4| \Big|_{[0,3]} = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ -x^2 + 4 & \text{se } 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x^2 - 4| dx &= \int_0^2 |x^2 - 4| dx + \int_2^3 |x^2 - 4| dx = \\ &= \int_0^2 (-x^2 + 4) dx + \int_2^3 (x^2 - 4) dx\end{aligned}$$

Utilizando a tabela de primitivas e a segunda forma do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\begin{aligned}& \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^3 = -\frac{2^3}{3} + 4(2) + \frac{3^3}{3} - 4(3) - \frac{2^3}{3} + 4(2) \\ &= 16 + 9 - 12 - \frac{16}{3} = 13 - \frac{16}{3} = \frac{23}{3}.\end{aligned}$$

Só como informação, na **Figura 2.3**, mostramos o gráfico da função $y = x^2 - 4$ e, na **Figura 2.4**, mostramos o gráfico de $y = |x^2 - 4|$.

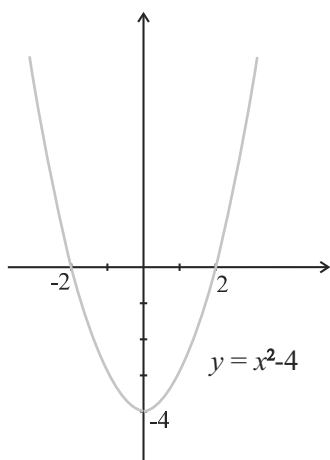


Figura 2.3

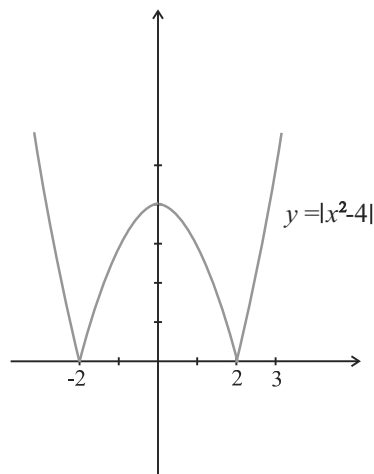


Figura 2.4

OUTROS EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício 2.1.

Embora a fórmula da forma $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ possa ser vista como uma maneira estranha de definir uma função, livros de física, química e estatística estão repletos de tais funções. Por exemplo, a função de Fresnel $S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$ é assim chamada em homenagem ao físico francês Augustin Fresnel (1788-1827), famoso por seus trabalhos de ótica. Essa função apareceu pela primeira vez na teoria de difração das ondas de luz de Fresnel, porém, mais recentemente, foi aplicada no planejamento de autoestradas.

Considere a função de Fresnel S definida acima para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que S é derivável em \mathbb{R} e calcule $S'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução: Observe que $f(t) = \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)$ é contínua $\forall t \in \mathbb{R}$, pois é a composição das funções contínuas $g(t) = \sin t$ e $h(t) = \frac{\pi t^2}{2}$. Note que $(g \circ h)(t) = g(h(t)) = \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) = f(t)$.

Temos, então, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em \mathbb{R} . Seja 0 um número real arbitrário. Definimos $S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Então, a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e o Exemplo 3.2 do caderno didático nos permitem afirmar que S é derivável em \mathbb{R} e $S'(x) = \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.2.

Defina $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t} \sin t \, dt$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Mostre que F é derivável em $x \in (0, +\infty)$ e calcule $F'(x)$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

Solução: Usando as propriedades da integral definida, obtemos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t} \sin t \, dt = \int_{\sqrt{x}}^0 \sqrt{t} \sin t \, dt + \int_0^{x^3} \sqrt{t} \sin t \, dt \\ &= - \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{t} \sin t \, dt + \int_0^{x^3} \sqrt{t} \sin t \, dt. \end{aligned}$$

Então, podemos escrever:

$$F(x) = -(H \circ g)(x) + (H \circ h)(x) = (H \circ h)(x) - (H \circ g)(x), \text{ onde}$$

$$H(x) = \int_0^x \sqrt{t} \sin t \, dt, \quad g(x) = \sqrt{x} \text{ e } h(x) = x^3.$$

É claro que $f(t) = \sqrt{t} \sin t$ é uma função contínua $\forall t \in [0, +\infty)$, pois é o produto das funções contínuas \sqrt{t} , definida $\forall t \in [0, +\infty)$ e $\sin t$, definida $\forall t \in \mathbb{R}$. Assim, pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo, podemos afirmar que H é derivável em $[0, +\infty)$ e $H'(x) = \sqrt{x} \sin x$. Por outro lado, a função $g(x) = \sqrt{x}$ é derivável $\forall x \in (0, +\infty)$ e $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, logo pela regra da cadeia, $H \circ g$ é derivável em $(0, +\infty)$ e $(H \circ g)'(x) = H'(g(x))g'(x) = \sqrt{g(x)}(\sin(g(x))g'(x)$

$$= \sqrt{\sqrt{x}}(\sin(\sqrt{x}))\frac{1}{2\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}(\sin(\sqrt{x}))\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin(\sqrt{x})}{2x^{\frac{1}{4}}}. \quad (2.1)$$

Analogamente, $h(x) = x^3$ é derivável $\forall x \in \mathbb{R}$ e $h'(x) = 3x^2$, logo pela regra da cadeia, $H \circ h$ é derivável em $[0, +\infty)$ e $(H \circ h)'(x) = H'(h(x))h'(x) = \sqrt{h(x)}(\sin(h(x))h'(x)$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{x^3}(\sin(x^3))3x^2 = x^{\frac{3}{2}}(\sin(x^3))3x^2 \\ &= 3x^{\frac{7}{2}}\sin(x^3). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Assim, $F(x) = (H \circ h)(x) - (H \circ g)(x)$ será derivável em $(0, +\infty)$, pois é a diferença das funções $(H \circ h)(x)$ e $(H \circ g)(x)$, ambas deriváveis em $(0, +\infty)$ e

$$F'(x) = (H \circ h)'(x) - (H \circ g)'(x). \quad (2.3)$$

Finalmente, substituindo 2.1 e 2.2 em 2.3, temos

$$F'(x) = 3x^{\frac{7}{2}} \sin(x^3) - \frac{\sin(\sqrt{x})}{2x^{\frac{1}{4}}}.$$

Exercício 2.3.

Seja $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq 1 \\ 4-2x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ e seja $G(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$.

- Faça a integração e ache uma expressão para $G(x)$ similar àquela para $f(x)$.
- Esboce os gráficos de f e G .
- Onde f é contínua? Onde f é derivável? Onde G é derivável?

Solução:

- Calculemos $G(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ para $-2 \leq x \leq 0$.

Na **Figura 2.5**, podemos observar o gráfico de f e o fato que $G(x)$ é a região hachurada.

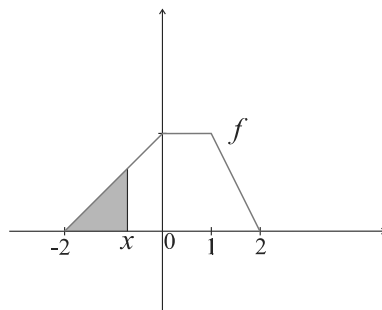


Figura 2.5

$$\begin{aligned} \text{Assim, } G(x) &= \int_{-2}^x (t+2) dt = \left[\frac{t^2}{2} + 2t \right]_{-2}^x = \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) - (2 - 4) = \frac{x^2}{2} + 2x + 2. \end{aligned}$$

- Calculemos $G(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ para $0 < x \leq 1$.

Na **Figura 2.6**, podemos observar o gráfico de f e o fato que $G(x)$ é a região hachurada.

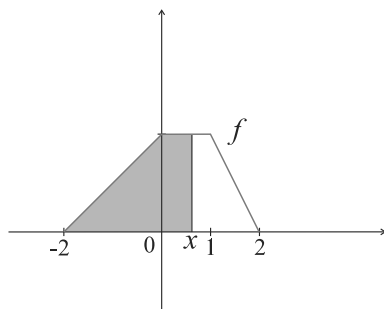


Figura 2.6

$$\begin{aligned} \text{Logo, } G(x) &= \int_{-2}^x f(t) dt = \int_{-2}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \\ &= \int_{-2}^0 (t+2) dt + \int_0^x 2 dt = \left[\frac{t^2}{2} + 2t \right]_{-2}^0 + 2t \Big|_0^x = \\ &= -(2-4) + 2x = 2x + 2. \end{aligned}$$

- Calculemos $G(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$ para $1 < x \leq 2$.

Na **Figura 2.7**, podemos observar o gráfico de f e o fato que $G(x)$ é a região hachurada.

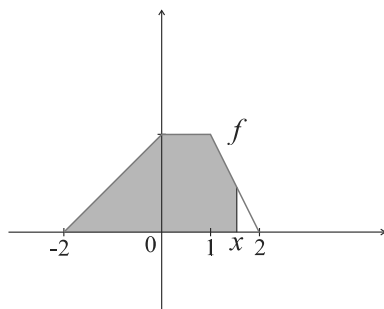


Figura 2.7

Portanto,

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-2}^x f(t) dt = \int_{-2}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &= \int_{-2}^0 (t+2) dt + \int_0^1 2 dt + \int_1^x (4-2t) dt = \\ &= 2 + 2 + 4t - 2 \frac{t^2}{2} \Big|_1^x = 4 + (4x - x^2) - (4 - 1) = \\ &= 4 + (4x - x^2) - 3 = -x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

$$\text{Assim resulta que } G(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2, & -2 \leq x \leq 0 \\ 2x + 2, & 0 < x \leq 1 \\ -x^2 + 4x + 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

b. Esboço dos gráficos de f e G .

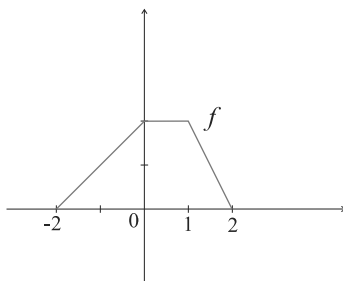


Figura 2.8

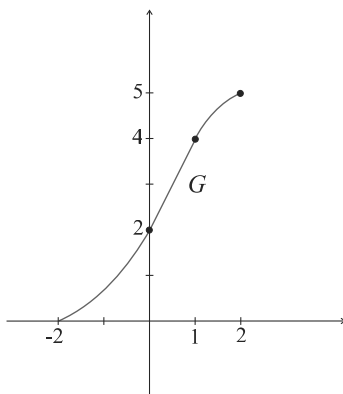


Figura 2.9

- c. É claro que f é contínua no intervalo $[-2, 2]$ e que f é derivável nos intervalos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 2)$. Note que $f'_-(0) = 1$ e $f'_+(0) = 0$, assim f não é derivável em $x = 0$ e, analogamente, $f'_-(1) = 0$ e $f'_+(1) = -2$, logo f não é derivável em $x = 1$.

Por outro lado, pela definição da função G , é claro que G é contínua nos intervalos $[-2, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 2]$, resta verificar se G é contínua em $x = 0$ e $x = 1$. De fato,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = 2 = G(0)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} G(x) = 4 = G(1).$$

Portanto, G é contínua no intervalo $[-2, 2]$. Por outro lado, pela definição de G , verifica-se que G é derivável nos intervalos $(-2, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 2)$. Resta verificar a derivabilidade de G em $x = 0$ e $x = 1$.

De fato, $G'_-(0) = 2 = G'_+(0)$ e $G'_-(1) = 2 = G'_+(1)$, portanto existem $G'(0)$ e $G'(1)$, assim G é derivável no intervalo $(-2, 2)$.

Exercício 2.4.

Seja $G(x) = \int_0^x f(t) dt$, onde f é a função cujo gráfico é mostrado na figura seguinte:

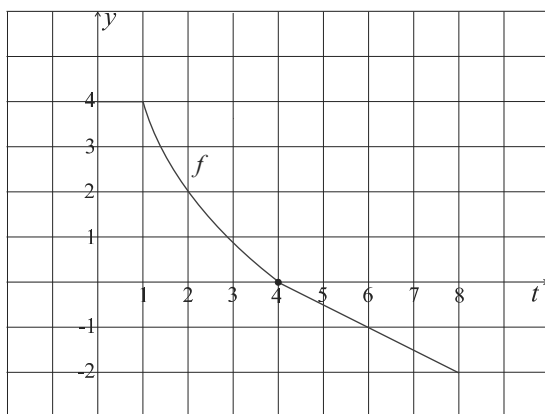


Figura 2.10

- a. Calcule $G(0)$. Como não conhecemos o valor exato de f em cada ponto, interprete as integrais definidas $G(2)$, $G(4)$, $G(6)$ e $G(8)$, aproximadamente em termos de áreas de figuras geométricas elementares e calcule esses valores.

- Encontre o maior intervalo aberto onde G é crescente.
- Encontre o maior intervalo aberto onde G é decrescente.
- Identifique todos os extremos de G .
- Esboce o gráfico de G .

Solução:

$$a. \quad G(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$$

$$G(2) = \int_0^2 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^2 f(t) dt.$$

Como não temos a definição formal da função f na igualdade anterior, interpretaremos as integrais do lado direito em termos de áreas de figuras geométricas elementares. Assim, olhando a **Figura 2.10** e tendo em conta que para $t \in [0, 4]$ a função f é maior ou igual a zero podemos dizer que

$G(2) \approx (\text{área do retângulo de lados 4 e 1}) + (\text{área do trapézio de bases 4 e 2 e altura 1}).$

$$\text{Logo,} \quad G(2) \approx (4)(1) + \frac{(4+2)1}{2} = 4 + 3 = 7.$$

Analogamente,

$$G(4) = \int_0^4 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt = G(2) + \int_2^4 f(t) dt.$$

Assim, olhando a **Figura 2.10** e tendo em conta que $G(2) \approx 7$, obtemos

$$G(4) \approx 7 + (\text{área do triângulo de base 2 e altura 2}) = 7 + \frac{(2)(2)}{2} = 9.$$

$$G(6) = \int_0^6 f(t) dt = \int_0^4 f(t) dt + \int_4^6 f(t) dt = G(4) + \int_4^6 f(t) dt$$

Assim, olhando a **Figura 2.10** e tendo em conta que $G(4) \approx 9$ e, notando que para $t \in [4, 6]$ a função f torna valores menores ou iguais a zero, obtemos

$$G(6) \approx 9 + (-\text{área do triângulo de base 2 e altura 1}) = 9 - \frac{(2)(1)}{2} = 8.$$

Analogamente,

$$G(8) = \int_0^8 f(t) dt = \int_0^6 f(t) dt + \int_6^8 f(t) dt = G(6) + \int_6^8 f(t) dt$$

Assim, olhando a **Figura 2.10** e tendo em conta que $G(6) \approx 8$ e, notando que para $t \in [6, 8]$ a função f torna valores negativos, obtemos

$$\begin{aligned} G(8) &\approx 8 + (-\text{área do trapézio de bases 2 e 1 e altura 2}) = \\ &= 8 + \left(-\frac{(2+1)2}{2} \right) = 8 - 3 = 5. \end{aligned}$$

- b. O maior intervalo aberto onde G é crescente é o intervalo $(0, 4)$.

Realmente, note que sendo f contínua, pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo podemos afirmar que

$$G \text{ é derivável e } G'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in [0, 8]. \quad (2.4)$$

Do Cálculo I, sabemos que G é crescente onde $G'(x) > 0$, isto é, onde $f > 0$. Por outro lado, na **Figura 2.10** vemos que $f > 0$ no intervalo $(0, 4)$, assim podemos dizer que G é crescente no intervalo aberto $(0, 4)$.

- c. O maior intervalo aberto onde G é decrescente é o intervalo $(4, 8)$.

Realmente, note que $G'(x) = f(x)$ e, assim, do Cálculo I sabemos que G é decrescente onde $G'(x) < 0$, isto é, onde $f < 0$. Como na **Figura 2.10** vemos que $f < 0$ no intervalo $(4, 8)$, podemos concluir que G é decrescente no intervalo aberto $(4, 8)$.

- d. A função G cresce no intervalo $(0, 4)$ e decresce no intervalo $(4, 8)$, assim, pelo teste da derivada primeira dado no Cálculo I, podemos afirmar que existe um máximo relativo em $x = 4$.

Por outro lado de 2.4, podemos concluir que G é *contínua no intervalo limitado e fechado* $[0, 8]$. Assim, pelo Teorema de Weierstrass (ou também chamado Teorema do valor extremo), podemos afirmar que existe um máximo absoluto e um mínimo absoluto da função G nesse intervalo. Como $G(0) = 0$, $G(8) \approx 5$ e, por outro lado, $G(4) \approx 9$ é um valor máximo relativo de G , podemos afirmar dos nossos conhecimentos de Cálculo I que em $x = 4$ existe um máximo absoluto de G e esse valor máximo absoluto é aproximadamente 9, por outro lado em $x = 0$, existe um mínimo absoluto de G e esse valor máximo absoluto é 4.

e. Esboço de G :

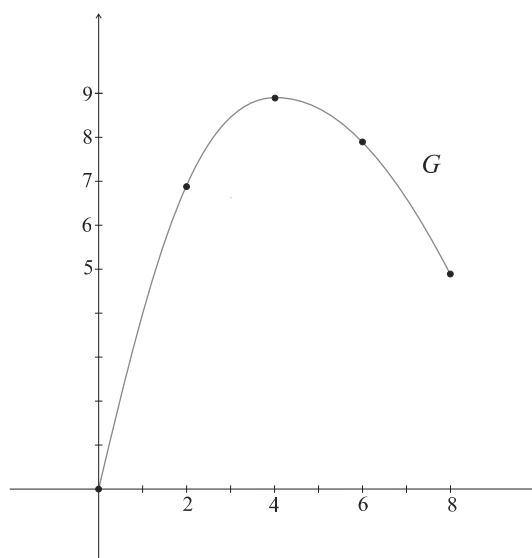


Figura 2.11

Exercício 2.5.

Seja $G(x) = \int_0^x f(t) dt$, onde f é a função cujo gráfico é mostrado na figura seguinte:

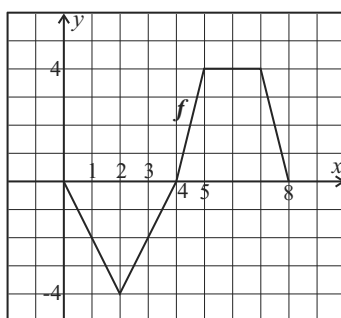


Figura 2.12

- Calcule $G(0)$, $G(2)$, $G(4)$, $G(5)$, $G(6)$, $G(7)$ e $G(8)$.
- Usando a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e observando o gráfico de f , encontre o maior intervalo aberto onde G é crescente.

- c. Usando a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e observando o gráfico de f , encontre o maior intervalo aberto onde G é decrescente.
- d. Identifique todos os extremos de G .
- e. Encontre os intervalos onde o gráfico de G é côncavo para cima e os intervalos onde o gráfico de G é côncavo para baixo.
- f. Identifique o(s) ponto(s) de inflexão.
- g. Esboce o gráfico de G .

Solução:

$$a. G(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$$

Olhando o gráfico de f na **Figura 2.12** vemos que

$$G(2) = \int_0^2 f(t) dt = -\text{Área do triângulo retângulo de base 2}$$

$$\text{e altura } 4 = -\frac{4 \times 2}{2} = -4.$$

Como conhecemos o valor de $G(2)$, podemos calcular $G(4)$ usando esse valor, isto é:

$$G(4) = \int_0^4 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt = G(2) + \int_2^4 f(t) dt$$

$$G(4) = -4 + \int_2^4 f(t) dt = -4 + (-\text{Área do triângulo retângulo de base 2 e altura 4}) = -4 + (-4) = -8.$$

Analogamente,

$$G(5) = \int_0^5 f(t) dt = \int_0^4 f(t) dt + \int_4^5 f(t) dt = G(4) + \int_4^5 f(t) dt$$

$$G(5) = -8 + \int_4^5 f(t) dt = -8 + (\text{Área do triângulo retângulo de base 1 e altura 4}) = -8 + \left(\frac{1 \times 4}{2}\right) = -8 + 2 = -6.$$

Analogamente,

$$G(6) = \int_0^6 f(t) dt = \int_0^5 f(t) dt + \int_5^6 f(t) dt = G(5) + \int_5^6 f(t) dt$$

$$G(6) = -6 + \int_5^6 f(t) dt = -6 + (\text{Área do retângulo de base 1 e altura 4}) = -6 + (1 \times 4) = -6 + 4 = -2.$$

Analogamente,

$$G(7) = \int_0^7 f(t) dt = \int_0^6 f(t) dt + \int_6^7 f(t) dt = G(6) + \int_6^7 f(t) dt$$

$$G(7) = -2 + \int_6^7 f(t) dt = -2 + (\text{Área do retângulo de base 1 e altura 4}) = -2 + (1 \times 4) = -2 + 4 = 2.$$

Analogamente,

$$G(8) = \int_0^8 f(t) dt = \int_0^7 f(t) dt + \int_7^8 f(t) dt = G(7) + \int_7^8 f(t) dt$$

$$G(8) = 2 + \int_7^8 f(t) dt = 2 + (\text{Área do triângulo retângulo de base 1 e altura 4}) = 2 + \left(\frac{1 \times 4}{2}\right) = 2 + 2 = 4.$$

- b. Realmente, note que f só está definida e é contínua para $x \in [0, 8]$, assim, pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo podemos afirmar que

$$G \text{ é derivável e } G'(x) = f(x) \text{ em } [0, 8] \quad (2.5)$$

Do Cálculo I sabemos que G é crescente onde $G'(x) > 0$, isto é, onde $f(x) > 0$. Por outro lado, na **Figura 2.12**, vemos que $f > 0$ no intervalo $(4, 8)$, assim podemos dizer que G é crescente no intervalo aberto $(4, 8)$.

- c. Novamente do Cálculo I, sabemos que G é decrescente onde $G'(x) < 0$, isto é, onde $f(x) < 0$. Na **Figura 2.12**, vemos que $f < 0$ no intervalo $(0, 4)$, portanto podemos concluir que G é decrescente no intervalo aberto $(0, 4)$.
- d. Identifique todos os extremos de G .

A função G decresce no intervalo $(0, 4)$ e cresce no intervalo $(4, 8)$, assim, pelo teste da derivada primeira estudado no cálculo I, podemos afirmar que existe um mínimo relativo em $x = 4$ e $G(4) = -8$ é o valor mínimo relativo.

Por outro lado de 2.5, podemos concluir que G é contínua no intervalo limitado e fechado $[0, 8]$. Assim, pelo Teorema de Weierstrass (ou também chamado Teorema do valor extremo), podemos afirmar que existe um máximo absoluto e um mínimo absoluto da função G nesse intervalo. Como $G(0) = 0$, $G(8) = 4$ e, por outro lado, $G(4) = -8$ é um valor mínimo relativo de G , podemos afirmar dos nossos conhecimentos de Cálculo I, que em $x = 4$ existe um mínimo absoluto de G e esse valor mínimo absoluto é -8 e em $x = 8$, existe um máximo absoluto de G e esse valor máximo absoluto é 4 .

- e. Os intervalos onde o gráfico de G é côncavo para cima e os intervalos onde o gráfico de G é côncavo para baixo.

Observemos, na **Figura 2.12**, que o gráfico da função f é formado por segmentos de retas, assim f é definida por funções lineares:

Se $x \in (0, 2)$, notamos que pelo fato de f ser uma função linear nesse intervalo, $f'(x)$ coincide com a inclinação de f . Observamos também no gráfico de f , que a inclinação desse segmento de reta é negativa (se você quiser poderá conferir analiticamente esse fato também), assim $G''(x) = f'(x) < 0$, logo, o gráfico de G é côncavo para baixo em $(0, 2)$.

Analogamente, se $x \in (2, 4)$, notamos que pelo fato de f ser outra função linear nesse intervalo, $f'(x)$ coincide com a inclinação de f . Observamos também no gráfico de f , que a inclinação desse segmento de reta é positiva, assim $G''(x) = f'(x) > 0$, logo, o gráfico de G é côncavo para cima em $(2, 4)$.

Analogamente, se $x \in (4, 5)$, notamos que pelo fato de f ser outra função linear nesse intervalo, $f'(x)$ coincide com a inclinação de f . Observamos também no gráfico de f , que a inclinação desse segmento de reta é positiva, assim $G''(x) = f'(x) > 0$, logo, o gráfico de G é côncavo para cima em $(4, 5)$.

Analogamente, se $x \in (5, 7)$, notamos que pelo fato de f ser a função linear constante igual a 4, então $f'(x) = 0$. Por outro lado, $f'(x)$ coincide com a inclinação de f nesse segmento, assim $G''(x) = f'(x) = 0$, então $G'(x) = \text{constante}$, assim G é também uma função linear nesse intervalo. Logo, o gráfico de G no intervalo $(5, 7)$ é o segmento de reta que passa pelos pontos $(5, G(5))$ e $(7, G(7))$.

Finalmente, se $x \in (7, 8)$, notamos que pelo fato de f ser outra função linear, $f'(x)$ coincide com a inclinação de f nesse intervalo. Observamos também no gráfico de f que a inclinação desse segmento de reta é negativa, assim $G''(x) = f'(x) < 0$. Logo, o gráfico de G é côncavo para baixo em $(7, 8)$.

- f. De (e) podemos concluir ainda que existe um ponto de inflexão no ponto $(2, G(2)) = (2, -4)$, pois existe mudança de concavidade no ponto $(2, -4)$ e sabemos que existe $G'(x)$ em $[0, 8]$. Assim, em particular existe $G'(2)$, logo existe a reta tangente no ponto $(2, -4)$.

g. Esboço de G :

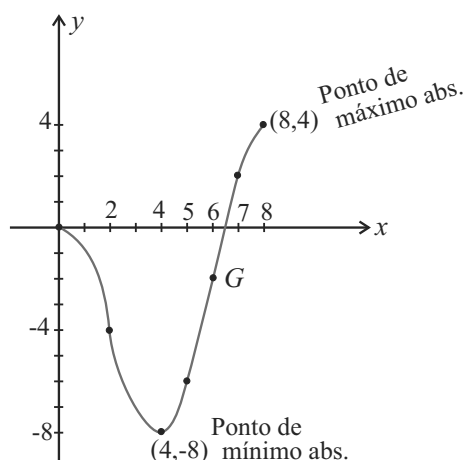


Figura 2.13

Exercício 2.6.

Calcule as seguintes integrais definidas:

a. $\int_{-8}^{-1} \frac{x - x^2}{2\sqrt[3]{x}} dx$

b. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \operatorname{cosec}^2 x) dx$

c. $\int_0^3 \left[\frac{d}{dx} \left(\sqrt{4 + x^2} \right) \right] dx$

Solução:

a. $\int_{-8}^{-1} \frac{x - x^2}{2\sqrt[3]{x}} dx = \int_{-8}^{-1} \frac{x}{2\sqrt[3]{x}} dx - \int_{-8}^{-1} \frac{x^2}{2\sqrt[3]{x}} dx = \frac{1}{2} \int_{-8}^{-1} x^{\frac{2}{3}} dx - \frac{1}{2} \int_{-8}^{-1} x^{\frac{5}{3}} dx$

Utilizando a tabela de primitivas e a segunda forma do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{1}{2} x^{\frac{5}{3}} \right]_{-8}^{-1} - \left[\frac{1}{2} x^{\frac{8}{3}} \right]_{-8}^{-1} = \frac{3}{10} \left((-1)^{\frac{5}{3}} - (-8)^{\frac{5}{3}} \right) - \frac{3}{16} \left((-1)^{\frac{8}{3}} - (-8)^{\frac{8}{3}} \right) \\ &= \frac{3}{10}(-1) + \frac{3}{10}(2^3)^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{16} - \frac{3}{16}(2^3)^{\frac{8}{3}} = -\frac{3}{10} + \frac{3(32)}{10} + \frac{3}{16} - \frac{3(256)}{16} \\ &= \frac{-24 + 768 + 15 - 3840}{80} = \frac{-3081}{80} \end{aligned}$$

$$b. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2 - \operatorname{cosec}^2 x) dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^2 x dx$$

Utilizando a tabela de primitivas e a segunda forma do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\begin{aligned} &= 2x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - (-\cotg x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 2 \left(\frac{\pi}{4} \right) + \cotg \frac{\pi}{2} - \cotg \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Na igualdade anterior, estamos usando o fato que, $\cotg \frac{\pi}{2} = 0$ e $\cotg \frac{\pi}{4} = 1$.

$$c. \int_0^3 \left[\frac{d}{dx} \left(\sqrt{4+x^2} \right) \right] dx$$

Observe que $f(x) = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{4+x^2} \right) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ é uma função contínua em \mathbb{R} .

A função $G(x) = \sqrt{4+x^2}$ é uma função contínua em \mathbb{R} e $G'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{4+x^2} \right) = f(x)$ em \mathbb{R} .

Assim, é claro que G é uma primitiva ou antiderivada de f em \mathbb{R} .

Em particular, no intervalo $[0, 3]$ podemos aplicar a segunda forma do Teorema Fundamental do Cálculo, e temos

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left[\frac{d}{dx} \left(\sqrt{4+x^2} \right) \right] dx &= \left[\sqrt{4+x^2} \right]_0^3 = \sqrt{4+3^2} - \sqrt{4+0^2} = \\ &= \sqrt{13} - 2 \end{aligned}$$

Exercício 2.7.

Calcule $\int_{-1}^0 6t^2(t^3+1)^{19} dt$

Solução: Note-se que o integrando é uma função contínua no intervalo dado. Para calcular esta integral, usaremos o Exemplo 4.8 do caderno didático. Escrevendo $p(t) = t^3 + 1$, temos que $p'(t) = 3t^2$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 6t^2(t^3+1)^{19} dt &= 2 \int_{-1}^0 p'(t)(p(t))^{19} dt = 2 \left[\frac{(p(t))^{19+1}}{19+1} \right]_{-1}^0 = \\ &= \frac{1}{10} p(t)^{20} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{10} [(p(0))^{20} - (p(-1))^{20}] = \frac{1}{10} [1 - 0] = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Exercício 2.8.

Calcule $\int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 3} dx$

Solução: Seguindo o procedimento do Exemplo 4.8 do caderno didático, pode ser provado que:

“Se p é um polinômio arbitrário e a, b números reais, tais que $a < b$ e $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b p'(x) \sqrt[n]{p(x)} dx = \frac{n}{n+1} (p(x))^{\frac{n+1}{n}} \Big|_a^b = \frac{n}{n+1} \left[(p(b))^{\frac{n+1}{n}} - (p(a))^{\frac{n+1}{n}} \right],$$

para todo n inteiro, $n \geq 2$.”

Observe que a condição $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ só precisa ser imposta no caso em que n é par. (Para a demonstração desta afirmação ver: Aula 14 - Exercícios Resolvidos (Exercício 3) do caderno didático)

Seja $p(x) = x^3 + 3$, então temos que $p'(x) = 3x^2$. Assim, usando a afirmação dada acima, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 3} dx &= \int_0^1 \frac{p'(x)}{3} \sqrt{p(x)} dx = \frac{1}{3} \frac{2(p(x))^{\frac{2+1}{2}}}{2+1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left[(p(1))^{\frac{3}{2}} - (p(0))^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{9} \left[(4)^{\frac{3}{2}} - (3)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2}{9} [8 - 3\sqrt{3}]. \end{aligned}$$

Exercício 2.9.

Calcule $\int_0^4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{\frac{1}{2}} \cos(3t) dt \right) dx$

Solução: Na integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{\frac{1}{2}} \cos(3t) dt$, a variável de integração é t . Assim, como $x^{\frac{1}{2}}$ não depende de t , segue que:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{\frac{1}{2}} \cos(3t) dt = x^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3t) dt$$

Fazendo $p(t) = 3t$, temos que $p'(t) = 3$ e usando o Exemplo 4.9 que diz:

$$\left[\int_a^b p'(x) \cos(p(x)) dx = \sin(p(x)) \right]_a^b = [\sin(p(b)) - \sin(p(a))].”$$

Obtemos que:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{\frac{1}{2}} \cos(3t) dt &= x^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3t) dt = x^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{p'(t)}{3} \cos(p(t)) dt \\ &= x^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \left[\sin(p(t)) \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = (x^{\frac{1}{2}}) \frac{1}{3} \left[\sin\left(p\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - \sin(p(0)) \right] \\ &= (x^{\frac{1}{2}}) \frac{1}{3} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right] = \frac{1}{3} (x^{\frac{1}{2}}).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^4 \left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} x^{\frac{1}{2}} \cos(3t) dt \right) dx &= \int_0^4 \frac{1}{3} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3} \left(\frac{x^{\left(\frac{1}{2}\right)+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)+1} \right) \Bigg|_0^4 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right) x^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^4 = \frac{2}{9} \left[4^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{16}{9}.\end{aligned}$$

PASSO A PASSO DE ALGUNS EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CADERNO DIDÁTICO

Exercício 2.10.

Defina $G(x) = \int_0^{\sin x} t^n dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde n é um número positivo. Mostre que G é derivável em \mathbb{R} e $G'(x) = (\cos x)(\sin^n x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(Aula 3 do caderno didático, exercício proposto nº 1)

Solução: Observe que podemos escrever $\int_0^{\sin x} t^n dt = (H \circ g)(x)$, onde $H(x) = \int_0^x t^n dt$ e $g(x) = \sin x$.

É claro que $f(t) = t^n$ é uma função contínua $\forall t \in \mathbb{R}$ e n é um número positivo. Assim, pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo, podemos afirmar que H é derivável em \mathbb{R} e $H'(x) = x^n$. Por outro lado, a função $g(x) = \sin x$ é derivável em \mathbb{R} e $g'(x) = \cos x$, logo, pela regra da cadeia, $H \circ g$ é derivável em \mathbb{R} e

$(H \circ g)'(x) = H'(g(x))g'(x) = (\sin x)^n \cos x = (\cos x)(\sin^n x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.11.

Defina $G(x) = \int_0^{x^3} \sqrt{t} dt$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Mostre que G é derivável em $x \in [0, +\infty)$ e $G'(x) = 3x^2\sqrt{x^3}$ para todo $x \in [0, +\infty)$.

(Aula 3 do caderno didático, exercício proposto nº 2)

Solução: Observe que podemos escrever $G(x) = \int_0^{x^3} \sqrt{t} dt = (H \circ g)(x)$ para todo $x \in [0, +\infty)$, onde $H(x) = \int_0^x \sqrt{t} dt$ para todo $x \in [0, +\infty)$ e $g(x) = x^3$.

É claro que, $f(t) = \sqrt{t}$ é uma função contínua para todo $t \in [0, +\infty)$. Assim, pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo, podemos afirmar que H é derivável para todo $x \in [0, +\infty)$ e $H'(x) = \sqrt{x}$. Por outro lado, a função $g(x) = x^3$ é derivável $\forall x \in \mathbb{R}$ e $g'(x) = 3x^2$, logo, pela regra da cadeia $H \circ g$ é derivável para todo $x \in [0, +\infty)$ e

$$(H \circ g)'(x) = H'(g(x))g'(x) = \sqrt{x^3} 3x^2 = 3x^2\sqrt{x^3} \text{ para todo } x \in [0, +\infty).$$

Exercício 2.12.

Defina $G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos t dt$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que G é derivável em \mathbb{R} e $G'(x) = 3x^2 \cos(x^3) - 2x \cos(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sugestão: Defina $G_1(x) = \int_{x^2}^0 \cos t dt$, $G_2(x) = \int_0^{x^3} \cos t dt$ e note que $G(x) = G_1(x) + G_2(x)$.

(Aula 3 do caderno didático, exercício proposto nº 3)

Solução: Usando as propriedades da integral definida, obtemos

$$G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos t dt = \int_{x^2}^0 \cos t dt + \int_0^{x^3} \cos t dt = G_1(x) + G_2(x)$$

$$G(x) = - \int_0^{x^2} \cos t dt + \int_0^{x^3} \cos t dt.$$

Então, podemos escrever

$$\int_0^{x^2} \cos t dt = (H \circ g)(x) \text{ e } \int_0^{x^3} \cos t dt = (H \circ h)(x), \text{ onde } H(x) = \int_0^x \cos t dt, g(x) = x^2 \text{ e } h(x) = x^3.$$

Isto é,

$$G(x) = -(H \circ g)(x) + (H \circ h)(x) = (H \circ h)(x) - (H \circ g)(x).$$

É claro que $f(t) = \cos t$ é uma função contínua $\forall t \in \mathbb{R}$. Assim, pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo podemos afirmar que H é derivável em \mathbb{R} e $H'(x) = \cos x$. Por outro lado, a função $g(x) = x^2$ é derivável em \mathbb{R} e $g'(x) = 2x$, logo, pela regra da cadeia, $H \circ g$ é derivável em \mathbb{R} e

$$\begin{aligned}(H \circ g)'(x) &= H'(g(x))g'(x) = (\cos(g(x)))g'(x) \\ &= (\cos(x^2))2x = 2x \cos(x^2).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Analogamente, $h(x) = x^3$ é derivável $\forall x \in \mathbb{R}$ e $h'(x) = 3x^2$, logo, pela regra da cadeia $H \circ h$ é derivável em \mathbb{R} e

$$\begin{aligned}(H \circ h)'(x) &= H'(h(x))h'(x) = \cos(h(x))h'(x) \\ &= (\cos(x^3))3x^2 = 3x^2 \cos(x^3)\end{aligned}\quad (2.7)$$

Assim, $G(x) = (H \circ h)(x) - (H \circ g)(x)$ será derivável em \mathbb{R} , pois é a diferença das funções $(H \circ h)(x)$ e $(H \circ g)(x)$, ambas deriváveis em \mathbb{R} e

$$G'(x) = (H \circ h)'(x) - (H \circ g)'(x) \quad (2.8)$$

Finalmente, substituindo 2.6 e 2.7 em 2.8, temos

$$G'(x) = 3x^2 \cos(x^3) - 2x \cos(x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 2.13.

Calcule as seguintes integrais definidas:

- | | |
|--|---|
| a. $\int_{-1}^2 (x^2 + x + 2) dx$ | d. $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + x^2 \right) dx$ |
| b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \sin x - 2 \cos x) dx$ | e. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) dx$ |
| c. $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ | f. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + x^3 + \sin x \right) dx$ |

(Aula 4 do caderno didático, exercício proposto nº 1 a-f)

Solução:

- a. Usando propriedades da integral definida, o fato que $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$, a tabela de primitivas e a segunda forma do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 (x^2 + |x| + 2) dx &= \int_{-1}^2 x^2 dx + \int_{-1}^2 |x| dx + 2 \int_{-1}^2 dx \\ &= \int_{-1}^2 x^2 dx + \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^2 |x| dx + 2 \int_{-1}^2 dx \\ &= \int_{-1}^2 x^2 dx + \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 + 4 + 2 \\ &= 3 + \frac{1}{2} + 8 = 11 + \frac{1}{2} = \frac{23}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5 \sin x - 2 \cos x) dx &= 5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= 5(-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= -5 \cos \frac{\pi}{2} + 5 \cos 0 - 2 \sin \frac{\pi}{2} + 2 \sin 0 = 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{c. } \int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx = 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{d. } \int_{-2}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} + x^2 \right) dx &= \int_{-2}^{-1} (x^{-2} + x^2) dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{-1} \\ &= -\frac{1}{x} \Big|_{-2}^{-1} + \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \frac{-1}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \frac{3+14}{6} = \frac{17}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e. } \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) dx &= \int_1^2 (x^{-2} + x^{-4}) dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-3}}{-3} \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3(2)^3} + \frac{1}{1} + \frac{1}{3(1)^3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{12-1+8}{24} = \frac{19}{24}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f. } \int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + x^3 + \operatorname{sen} x \right) dx &= \int_1^2 (x^{-3} + x^3 + \operatorname{sen} x) dx \\
 &= \left[\frac{x^{-2}}{-2} + \frac{x^4}{4} - \cos x \right]_1^2 = \frac{2^{-2}}{-2} + \frac{2^4}{4} - \cos 2 - \frac{1^{-2}}{-2} - \frac{1^4}{4} + \cos 1 \\
 &= -\frac{1}{8} + 4 - \cos 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cos 1 \\
 &= \frac{-1 + 32 + 4 - 2}{8} \cos 2 + \cos 1 = \frac{33}{8} - \cos 2 + \cos 1.
 \end{aligned}$$

Exercício 2.14.

Sendo $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$, calcule a área da região compreendida entre o gráfico de f , o eixo das abscissas e as retas $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{3}$.

(Aula 4 do caderno didático, exercício proposto nº 2)

Solução: Lembremos que a função $y = \operatorname{sen} x$ é uma função periódica, com período 2π . O gráfico da função $\operatorname{sen} x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é dado na **Figura 2.14**.

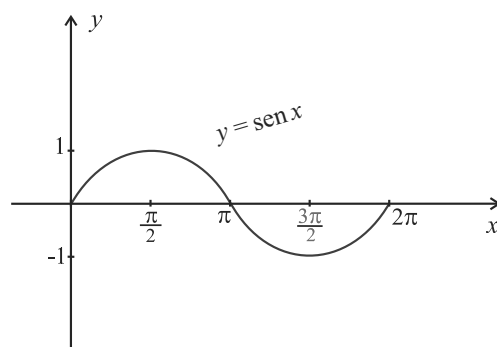


Figura 2.14

Do Pré-cálculo (ver Apêndice 1 deste Caderno para maiores detalhes) sabemos que o gráfico de $y = \operatorname{sen}(3x)$, dado na **Figura 2.15**, é obtido do gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ por compressão horizontal por fator de 3. [Note que o valor de $3x$ muda 3 vezes mais rápido que x . Assim sendo, um ponto movendo-se ao longo do eixo x terá que ir até $\frac{1}{3}$ da distância da origem para que $y = \operatorname{sen}(3x)$ assumo o mesmo valor que $y = \operatorname{sen} x$]. Neste caso, a função $y = \operatorname{sen}(3x)$ é uma função periódica com período $\frac{1}{3}(2\pi) = \frac{2\pi}{3}$.

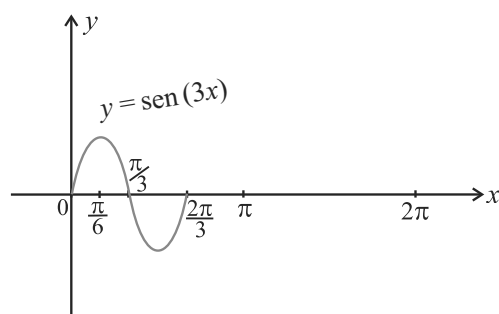


Figura 2.15

Assim, a região pedida é dada na **Figura 2.16**.

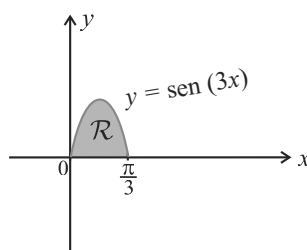


Figura 2.16

Observemos que a área da região pedida é dada pela integral definida

$$A(R) = \int_0^{\pi/3} \text{sen}(3x) dx.$$

Por outro lado, desde que

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{3} \cos(3x) \right) = -\frac{1}{3} (-\text{sen}(3x)) 3 = \text{sen}(3x),$$

podemos concluir que $G(x) = -\frac{1}{3} \cos(3x)$ é uma primitiva de $f(x) = \text{sen}(3x)$.

Assim,

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^{\pi/3} \text{sen}(3x) dx = \left[-\frac{1}{3} \cos(3x) \right]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{3} \cos(\pi) + \frac{1}{3} \cos(0) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Exercício 2.15.

Sendo $f(x) = \sqrt[5]{x}$, calcule a área da região compreendida entre o gráfico de f , o eixo das abscissas e as retas $x = -1$ e $x = 0$.

(Aula 4 do caderno didático, exercício proposto nº 3)

Solução: Na **Figura 2.17**, mostramos o gráfico da função $f(x) = \sqrt[5]{x}$.

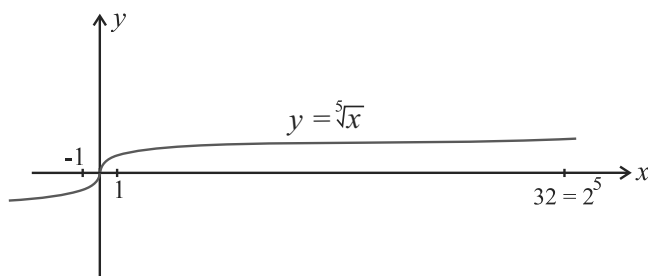


Figura 2.17

Na **Figura 2.18**, mostramos a região pedida

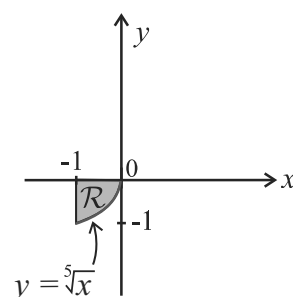


Figura 2.18

Observe que a função $f(x) = \sqrt[5]{x}$ é negativa no intervalo $[-1, 0]$. Assim, a área da região R está dada por

$$A(R) = - \int_{-1}^0 \sqrt[5]{x} dx = - \int_{-1}^0 x^{\frac{1}{5}} dx = -5 \left[\frac{x^{\frac{6}{5}}}{6} \right]_{-1}^0 = \frac{5}{6} \text{ unidades de área.}$$

Veja no Apêndice 4, no final deste caderno, o passo a passo de exercícios adicionais correspondentes a esta semana.

Semana 3

ÁREA ENTRE CURVAS - O TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

ÁREA DA REGIÃO ENTRE DUAS CURVAS

Considere a região R que está entre duas curvas, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, e entre as retas verticais $x = a$ e $x = b$, onde f e g são funções contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo x em $[a, b]$, isto é, podemos expressar a região dada na forma:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x), f \text{ e } g \text{ contínuas em } [a, b]\}$$

Assim como fizemos em áreas sob curvas na Semana 1, dividimos a região R em n retângulos de larguras iguais, de comprimento $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ e altura $f(x_k) - g(x_k)$. Veja um retângulo representativo na **Figura 3.1**.

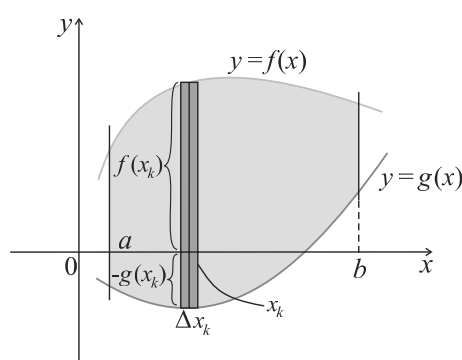


Figura 3.1

A soma de Riemann $\sum_{k=1}^n [f(x_k) - g(x_k)] \Delta x_k$ é, portanto, uma aproximação que nós intuitivamente consideramos como a área de R . Essa aproximação melhora se tomamos o limite quando

$n \rightarrow \infty$. Assim, definimos a área $A(R)$ como:

$$A(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n [f(x_k) - g(x_k)] \Delta x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n [f(x_k) - g(x_k)].$$

O limite existe já que f e g são funções contínuas em $[a, b]$. Assim, $f - g$ é contínua em $[a, b]$. Portanto, $f - g$ é integrável em $[a, b]$ e definimos:

$$A(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

COMO ENCONTRAR A ÁREA ENTRE DUAS CURVAS

- Passo 1: Esboce o gráfico das curvas e desenhe um retângulo típico (ou representativo). Isso revela qual curva é f (curva superior) e qual é g (curva inferior) e também ajuda a determinar os limites de integração, se é que ainda não são conhecidos.
- Passo 2: Determine os limites de integração a e b .
- Passo 3: Escreva uma fórmula para $f(x) - g(x)$. Simplifique-a se puder.
- Passo 4: Integre $[f(x) - g(x)]$ desde a e b . O valor obtido é a área.

CALCULANDO A ÁREA DA REGIÃO ENTRE CURVAS QUE SE INTERCEPTAM

Exemplo 3.1.

Esboce e ache a área da região entre os gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$, sabendo que $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 + x - 1$.

Solução: Note-se que $y = x^3$ é uma função ímpar, e seu gráfico foi visto no Exemplo 16.3, da Aula 16 da disciplina Cálculo I. Por outro lado, completando o quadrado na função $y = x^2 + x - 1$, obtém-se:

$y = x^2 + x - 1 = \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) - 1 - \frac{1}{4}$, logo $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$ é uma parábola de vértice em $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$, que abre para cima.

Para fazer um esboço mais exato da região, é necessário saber onde as curvas dadas se interceptam.

Fazendo a interseção das curvas, tem-se:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = x^2 + x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^3 = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 1) = (x - 1) \Leftrightarrow x^2(x - 1) - (x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Portanto, os pontos de interseção são $(1, 1)$ e $(-1, 1)$.

Observe que para $x \in [-1, 1]$, $f(x) \geq g(x)$. Com efeito,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^3 - (x^2 + x - 1) = x^3 - x^2 - (x - 1) = x^2(x - 1) - (x - 1) \\ &= (x^2 - 1)(x - 1) = (x + 1)(x - 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

A **Figura 3.2** a seguir representa o gráfico das funções, sendo R a região entre ditos gráficos. É mostrado também um retângulo típico, ou representativo, vertical. Observe também em dito retângulo que a curva superior é $y = x^3$ e a curva inferior é $y = x^2 + x - 1$.

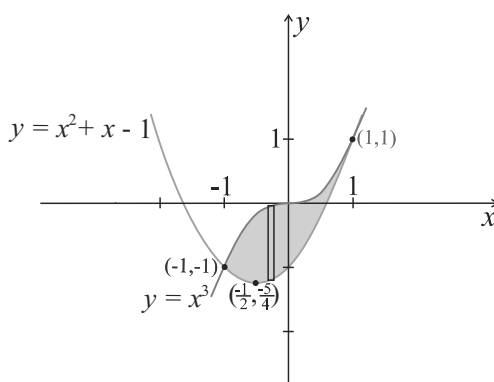


Figura 3.2

Da **Figura 3.2** podemos observar que na região dada $x \in [-1, 1]$, logo, os limites de integração são -1 e 1 . Assim, a área $A(R)$ da região R é:

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \int_{-1}^1 [x^3 - (x^2 + x - 1)] dx = \int_{-1}^1 [x^3 - x^2 - x + 1] dx \\
 &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 \right) \\
 &= -\frac{2}{3} + 2 = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

Portanto, $A(R) = \frac{4}{3}$ unidades de área.

MUDANDO A INTEGRAL PARA COMBINAR COM UMA MUDANÇA DE FRONTEIRA

Se a fórmula para uma curva fronteira muda em um ou mais pontos, dividimos a região em sub-regiões que correspondem às mudanças das fórmulas e aplicamos a fórmula $A(R)$ em cada sub-região.

Exemplo 3.2.

Seja R a região compreendida entre os gráficos de $f(x) = 6 - x^2$ e $g(x) = -|x|$.

- Esboce a região R .
- Ache a área da região R .

Solução:

- Observe que o gráfico de $f(x) = 6 - x^2$ é uma parábola de vértice em $(0, 6)$ que se abre para baixo, já o gráfico de $g(x) = -|x|$ é obtido por reflexão em torno do eixo x da função $y = |x|$, isto é, $g(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \geq 0 \\ x & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Como g é uma função definida por partes, vamos fazer a interseção dos gráficos por partes.

Fazendo-se a interseção dos gráficos para $x \geq 0$, temos que

$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = x \text{ se } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x^2 = -x \\ \text{e } x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ \text{e } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2) = 0 \\ \text{e } x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3; \text{ logo, } y = -3, \text{ e obtemos o ponto } (3, -3).$$

Fazendo-se a interseção dos gráficos para $x < 0$, temos que

$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = x \text{ se } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x^2 = x \\ \text{e } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ \text{e } x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2) = 0 \\ \text{e } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3; \text{ logo, } y = -3, \text{ e obtemos} \\ \text{o ponto } (-3, -3).$$

A **Figura 3.3** a seguir representa o esboço do gráfico das funções f e g e da região $R = R_1 \cup R_2$. Mostramos também um retângulo típico, ou representativo, vertical em cada região.

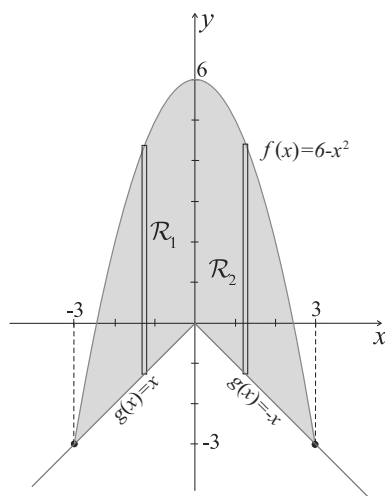


Figura 3.3

- b. Do gráfico observamos também que a região R tem simetria em relação ao eixo y . Seja R_1 a parte da região R onde $x \leq 0$ e R_2 a parte da região R onde $x \geq 0$, temos então

$$\text{Área}(R_1) = \text{Área}(R_2) \quad \text{e,}$$

$$\text{Área}(R) = \text{Área}(R_1) + \text{Área}(R_2) = 2\text{Área}(R_2).$$

Também podemos afirmar (seja do gráfico ou demonstrando diretamente) que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [-3, 3]$, em particular $f(x) \geq g(x)$ para x no intervalo $[0, 3]$.

Assim, a área $A(R_2)$ da região R_2 resulta:

$$\begin{aligned} A(R_2) &= \int_0^3 [6 - x^2 - (-x)] dx = \int_0^3 [6 - x^2 + x] dx \\ &= \left[6x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 18 - 9 + \frac{9}{2} = 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Portanto, a área $A(R)$ da região R é igual a

$$A(R) = 2A(R_2) = 2 \left(\frac{27}{2} \right) = 27 \text{ unidades de área.}$$

Note-se que, sem fazer uso da simetria, também é possível calcular a área $A(R)$ da região R . Neste caso,

$$A(R) = \int_{-3}^0 [(6-x^2) - x] dx + \int_0^3 [6-x^2 + x] dx = 27 \text{ unidades de área.}$$

CÁLCULO DE ÁREAS POR INTEGRAÇÃO EM RELAÇÃO A y . RETÂNGULOS REPRESENTATIVOS HORIZONTAIS

Existem regiões onde suas fronteiras não são funções de x , mas sim de y . Por exemplo: seja R a região que está entre duas curvas $x = f(y)$ e $x = g(y)$, e entre as retas verticais $y = c$ e $y = d$, onde f e g são funções contínuas e $f(y) \geq g(y)$ para todo y em $[c, d]$. Isto é, podemos expressar a região dada na forma:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, g(y) \leq x \leq f(y), f \text{ e } g \text{ contínuas em } [c, d]\}.$$

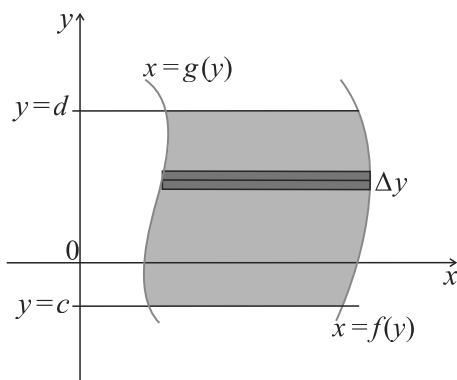


Figura 3.4

Então sua área é definida por

$$A(R) = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy.$$

Exemplo 3.3.

Esboce o conjunto D e ache a área de D , sendo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y^2 \leq x \leq 3 - 2y^2\}$.

Solução: Observe que $x = y^2$ é uma parábola de vértice em $(0,0)$ que abre para a direita, e $x = 3 - 2y^2$ é uma parábola de vértice em $(3,0)$ que abre para a esquerda. Fazendo a interseção das curvas, tem-se

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 3 - 2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = 3 - 2y^2 \Leftrightarrow 3y^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = 1. \text{ Então, } y = 1 \text{ ou } y = -1.$$

Se $y = 1$, então $x = 1$; Se $y = -1$, então $x = 1$. Assim, os pontos de interseção são $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

A partir das informações obtidas, esboçamos o conjunto solicitado na **Figura 3.5**. Mostramos também um retângulo típico, ou representativo, horizontal. Observemos também que estando o retângulo típico na posição horizontal, a função maior é a que se encontra mais à direita, como verificaremos nas linhas abaixo.

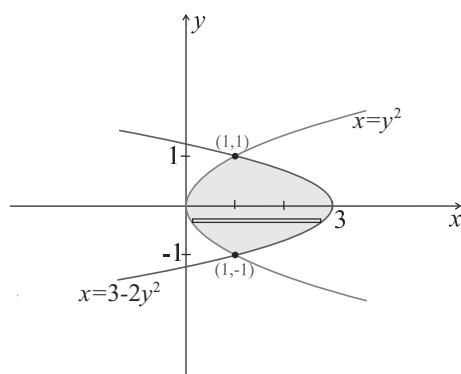


Figura 3.5

Observe que para cada y em $[-1, 1]$, (x, y) pertence ao conjunto D se, e somente se, $y^2 \leq x \leq 3 - 2y^2$. Então para cada $y \in [-1, 1]$, x varia entre as funções $x = y^2$ e $x = 3 - 2y^2$.

Por outro lado, da própria definição de D vemos que nas funções $x = y^2$ e $x = 3 - 2y^2$ estamos considerando x como função de y . Também é claro que para $y \in [-1, 1]$, temos que $(3 - 2y^2) \geq y^2$.

Neste caso, a maneira mais simples de calcular a área de D é trabalhar com as funções da variável y , logo:

$$A(D) = \int_{-1}^1 [(3 - 2y^2) - y^2] dy = \int_{-1}^1 (3 - 3y^2) dy.$$

Note-se que podemos calcular diretamente a integral obtida, ou podemos também observar que a região D é simétrica em relação ao eixo x e podemos considerar $D = D_1 \cup D_2$, onde D_1 é a região de D que

está embaixo do eixo x e D_2 é a região de D acima do eixo x . Então, $A(D_1) = A(D_2)$. Assim,

$$A(D) = A(D_1) + A(D_2) = 2(A(D_2)) = 2 \int_0^1 (3 - 3y^2) dy = 2(3y - y^3) \Big|_0^1 = 4 \text{ unidades de área.}$$

O TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Teorema 3.1.

Se $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$, tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Demonstração

Veja a prova do Teorema 5.1 no seu caderno didático.

A interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio para integrais é que, para $f \geq 0$, existe um número $c \in [a, b]$ tal que o retângulo de base $[a, b]$ e altura $f(c)$ tem a mesma área que a região sob o gráfico de f de a a b . Veja a **Figura 3.6**.

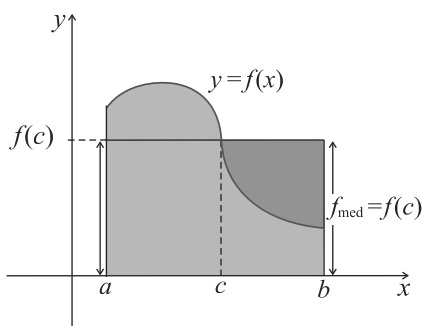


Figura 3.6

VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO

O valor $f(c)$ dado pelo teorema do valor médio para integrais é chamado de valor médio (média) de f no intervalo.

DEFINIÇÃO DO VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO EM UM INTERVALO

Definição 3.1.

Se f é uma função integrável no intervalo fechado $[a, b]$, então o valor médio de f no intervalo é:

$$M(f) = \text{Valor médio} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Exemplo 3.4.

- Use o teorema do valor médio para integrais para provar a desigualdade $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4} dx \leq \frac{1}{2}$.
- Seja $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 4x + 5$. Determine o valor de c que satisfaça o teorema do valor médio para integrais. Encontre o valor médio de f no intervalo $[1, 4]$.

Solução:

- Neste caso, é claro que $0 < 2$ e $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$ é contínua em $[0, 2]$. Logo, pelo teorema do valor médio para integrais, existe $c \in [0, 2]$ tal que

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \frac{2}{c^2+4} \quad (3.1)$$

Por outro lado, $c^2 + 4 \geq 4, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{c^2+4} \leq \frac{1}{4}, \forall c \in \mathbb{R}$.

Assim, $\frac{2}{c^2+4} \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \forall c \in \mathbb{R}$. Em particular, $\frac{2}{c^2+4} \leq \frac{1}{2}$,

$\forall c \in [0, 2]$ e usando 3.1 resulta que $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} \leq \frac{1}{2}$.

- b. Seja $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 4x + 5$. É claro que f é contínua, pois é uma função polinomial, logo satisfaz o Teorema do Valor Médio para Integrais e existe $c \in [1, 4]$ tal que

$$\int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx = f(c) \cdot (4 - 1) = (c^2 + 4c + 5) \cdot (4 - 1) = 3(c^2 + 4c + 5), \text{ para } c \in [1, 4].$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 5x \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{4^3}{3} + 2(4)^2 + 5(4) \right) - \left(\frac{1}{3} + 2(1)^2 + 5(1) \right) \\ &= \frac{64}{3} + 32 + 20 - \frac{1}{3} - 2 - 5 = \frac{64}{3} + 52 - \frac{1}{3} - 7 \\ &= \frac{63}{3} + 45 = 21 + 45 = 66. \end{aligned}$$

Assim, $66 = 3(c^2 + 4c + 5) \Rightarrow 22 = c^2 + 4c + 5$. Logo,

$$\begin{aligned} c^2 + 4c - 17 &= 0 \Rightarrow c = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4(17)}}{2} \\ c &= \frac{-4 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \times 21}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{21}}{2} = -2 \pm \sqrt{21}. \end{aligned}$$

Rejeitamos $c = -2 - \sqrt{21}$, pois não está no intervalo $[1, 4]$, e verificamos que

$$c = -2 + \sqrt{21} \in [1, 4].$$

Logo, podemos afirmar que $c = -2 + \sqrt{21} \in [1, 4]$ satisfaz o Teorema do Valor Médio para Integrais, isto é,

$$\int_1^4 f(x) dx = f(-2 + \sqrt{21}) (4 - 1).$$

O valor médio (média) de f no intervalo $[1, 4]$ é dado por:

$$f_{med} = M(f) = \frac{1}{4 - 1} \int_1^4 (x^2 + 4x + 5) dx = \frac{1}{3}(66) = 22.$$

Exemplo 3.5.

Modelamos a voltagem das instalações elétricas domésticas com a função seno $V = V_{max} \sin(120\pi t)$, que expressa a voltagem V (em volts) em função do tempo t (em segundos). Note-se

que podemos escrever $V = V_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{1/60}t\right)$. A constante positiva V_{\max} (que é a amplitude da função) é chamada pico de voltagem, o período (ou ciclo inteiro) como podemos ver é $\frac{1}{60}$. A função V realiza 60 ciclos a cada segundo e dizemos que sua frequência é 60 hertz ou 60 Hz.

Calcule o valor médio de V_m ao longo de meio ciclo, isto é, de 0 a $\frac{1}{120}$ segundos.

Solução: O valor médio V_m é dado por:

$$V_m = \frac{1}{\frac{1}{120} - 0} \int_0^{\frac{1}{120}} V_{\max} \sin(120\pi t) dt = 120V_{\max} \left[-\frac{1}{120\pi} \cos(120\pi t) \right]_0^{\frac{1}{120}}$$

$$V_m = \frac{V_{\max}}{\pi} [-\cos(\pi) + \cos 0], \text{ logo, } V_m = \frac{2V_{\max}}{\pi}.$$

O valor médio é mostrado na **Figura 3.7**.

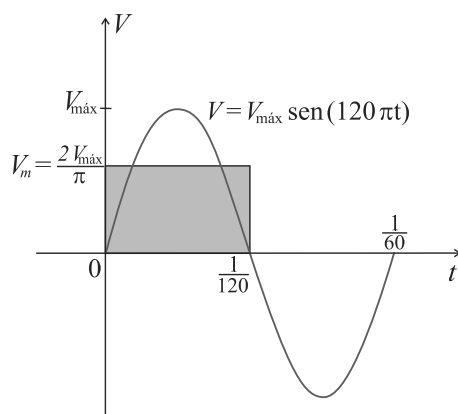


Figura 3.7

Como exercício, verifique que o valor médio da voltagem ao longo de um ciclo inteiro é zero.

Lembre-se de que pelas disciplinas de Pré-Cálculo e/ou Cálculo I sabemos que na função senóide,

$$f(x) = A \sin \left[\frac{2\pi}{B}(x - C) \right] + D$$

$|A|$ é a amplitude, $|B|$ é o período, C é o deslocamento horizontal e D é o deslocamento vertical.

Na **Figura 3.8**, mostramos a função senóide geral para o caso de A, B, C e D positivos.

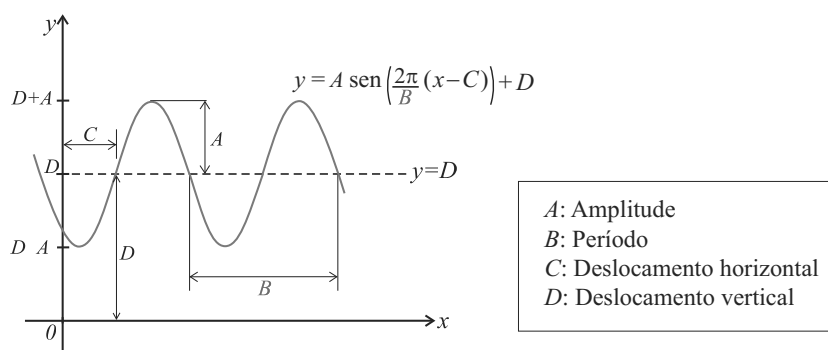


Figura 3.8

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício 3.1.

Determine a área entre o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ e o segmento de reta que liga os pontos $(0,0)$ e $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$, como mostra a **Figura 3.9**.

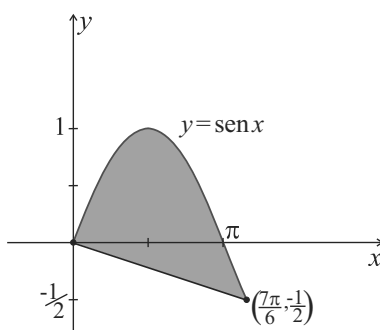


Figura 3.9

Solução: Observe que o segmento que liga os pontos $(0,0)$ e $\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2}\right)$ satisfaz a equação da reta $y - 0 = \frac{-\frac{1}{2} - 0}{\frac{7\pi}{6} - 0}(x - 0)$, isto é, $y = \frac{-3}{7\pi}x$.

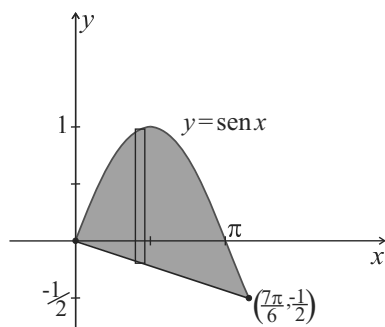


Figura 3.10

Do retângulo representativo vertical na **Figura 3.10**, podemos observar que $f(x) = \text{sen } x \geq \frac{-3}{7\pi}x = g(x)$ para todo $x \in \left[0, \frac{7\pi}{6}\right]$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } A(R) &= \int_0^{\frac{7\pi}{6}} \left[\text{sen } x - \left(\frac{-3}{7\pi}x \right) \right] dx = \int_0^{\frac{7\pi}{6}} \left[\text{sen } x + \frac{3}{7\pi}x \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{7\pi}{6}} \text{sen } x dx + \frac{3}{7\pi} \int_0^{\frac{7\pi}{6}} x dx. \end{aligned}$$

Como $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \text{sen } x$, então $G(x) = -\cos x$ é uma primitiva ou antiderivada de $\text{sen } x$. Portanto,

$$\begin{aligned} A(R) &= -\cos x \Big|_0^{\frac{7\pi}{6}} + \frac{3}{7\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{7\pi}{6}} = -\cos \left(\frac{7\pi}{6} \right) + \cos 0 + \frac{3}{7\pi} \frac{(7\pi)^2}{2(6)^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{7\pi}{24} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{24} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Exercício 3.2.

Determine a área da região R sombreada na **Figura 3.11**.

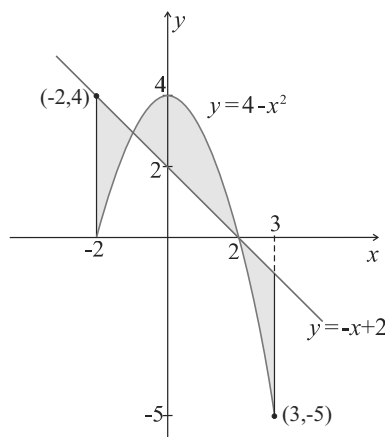


Figura 3.11

Solução: Para calcular a área da região R é preciso dividir a região em 3 sub-regiões numeradas da direita para a esquerda. Digamos R_1 , R_2 e R_3 .

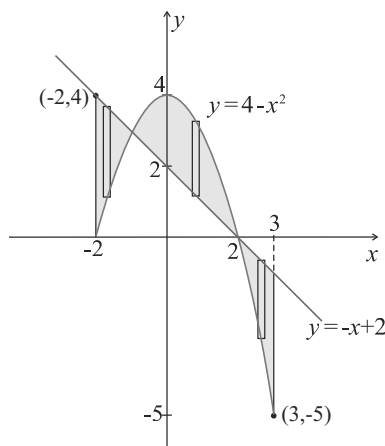


Figura 3.12

Na região R_1 , observe no retângulo representativo vertical, que a fronteira superior é o gráfico de $f(x) = -x + 2$ e a fronteira inferior é $g(x) = 4 - x^2$ e é delimitada à esquerda pela reta $x = -2$. Resta fazer a interseção das curvas para encontrar o limite de integração superior, já que o inferior fica claro na figura que é -2 .

$$\text{Procurando a interseção das curvas} \quad \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$$

$$4 - x^2 = -x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Logo, se $x = -1$, então $y = 3$ e temos o ponto de interseção $(-1, 3)$. Se $x = 2$, então $y = 0$ e temos o ponto de interseção $(2, 0)$. Podemos então calcular

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_{-2}^{-1} [(-x + 2) - (4 - x^2)] dx = \int_{-2}^{-1} [-x - 2 + x^2] dx = \left[-\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{-1} \\ &= \left(-\frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) + \frac{(-1)^3}{3} \right) - \left(-\frac{(-2)^2}{2} - 2(-2) + \frac{(-2)^3}{3} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} + 2 - 4 + \frac{8}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \frac{-3 + 14}{6} = \frac{11}{6} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Na região R_2 , no retângulo representativo vertical, observe que a fronteira superior é o gráfico de $g(x) = 4 - x^2$ e a fronteira inferior é $f(x) = -x + 2$. Os pontos de interseção já foram achados e podemos

afirmar então que $x \in [-1, 2]$. Calculando

$$\begin{aligned} A(R_2) &= \int_{-1}^2 [(4-x^2) - (-x+2)] dx = \int_{-1}^2 [2+x-x^2] dx = 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 \\ &= \left(2(2) + \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - \left(2(-1) + \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3}\right) \\ &= \left(4 + 2 - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = 4 + 2 - \frac{8}{3} + 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= 8 - \frac{1}{2} - 3 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Na região R_3 , no retângulo representativo, observe que a fronteira superior é o gráfico de $f(x) = -x + 2$ e a fronteira inferior é $g(x) = 4 - x^2$ onde $x \in [2, 3]$. Calculando a área da região, temos

$$\begin{aligned} A(R_3) &= \int_2^3 [(-x+2) - (4-x^2)] dx = \int_2^3 [-x-2+x^2] dx = -\frac{x^2}{2} - 2x + \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 \\ &= -\frac{3^2}{2} - 6 + \frac{3^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 4 - \frac{2^3}{3} = -\frac{9}{2} - 6 + 9 + 2 + 4 - \frac{8}{3} \\ &= 9 - \frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{54 - 27 - 16}{6} = \frac{11}{6} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Finalmente, a área da região é $A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3)$

$$= \frac{11}{6} + \frac{9}{2} + \frac{11}{6} = \frac{9}{2} + \frac{22}{6} = \frac{27+22}{6} = \frac{49}{6} \text{ unidades de área.}$$

Exercício 3.3.

Dada $\int_2^3 \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) - \frac{x}{3} \right] dx$, observe que o integrando da integral definida é a diferença de duas funções. Esboce o gráfico de cada uma das funções e sombreie a região cuja área é representada pela integral definida. Calcule a área da região.

Solução: O integrando neste caso é a diferença das funções $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ e $g(x) = \frac{x}{3}$. É claro que o gráfico da função g é uma reta que passa pela origem e pelo ponto $(3, 1)$. Em relação ao gráfico de f , note-se que $f(-x) = -f(x)$, logo, é uma função ímpar, e temos que $f(x) = x \left(\frac{x^2}{3} - 1 \right) = x \left(\frac{x}{\sqrt{3}} - 1 \right) \left(\frac{x}{\sqrt{3}} + 1 \right)$. Assim, as raízes de f são $x = 0$, $x = \sqrt{3}$ e $x = -\sqrt{3}$.

Por outro lado, $f'(x) = x^2 - 1$. Logo, é claro que $f' > 0$ para $x > 1$ ou $x < -1$ e $f' < 0$ para $-1 < x < 1$, de onde podemos concluir que

f é crescente em $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e f é decrescente em $(-1, 1)$. Utilizando o teste da derivada primeira e os dados anteriores, podemos concluir que em $x = -1$ existe um máximo relativo e em $x = 1$ um mínimo relativo.

Temos também que $f'(x) = 2x$, logo $f'' > 0$ se $x > 0$ e $f'' < 0$ se $x < 0$, ou seja, o gráfico de f é côncavo para cima em $(0, +\infty)$ e côncavo para baixo em $(-\infty, 0)$. Os gráficos das funções f , g , a região sombreada e o retângulo representativo vertical estão indicados na **Figura 3.13**

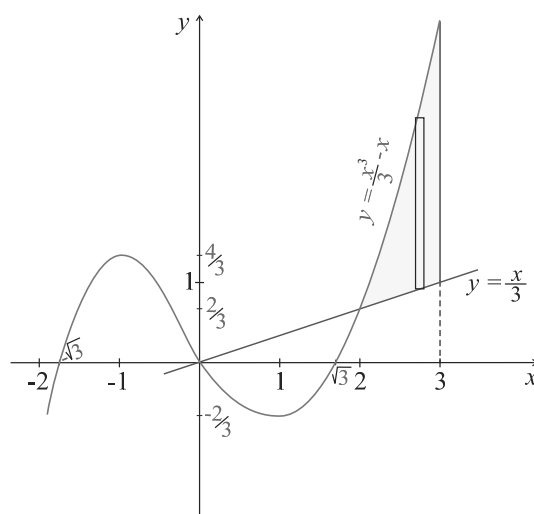


Figura 3.13

Para achar a área da região pedida, calculamos

$$\begin{aligned} \int_2^3 \left[\left(\frac{x^3}{3} - x \right) - \frac{x}{3} \right] dx &= \int_2^3 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x}{3} \right] dx = \left[\frac{x^4}{12} - \frac{4x^2}{6} \right]_2^3 \\ &= \left(\frac{3^4}{12} - \frac{4(3)^2}{6} \right) - \left(\frac{2^4}{12} - \frac{4(2)^2}{6} \right) = \frac{27}{4} - 6 - \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{27}{4} - 6 + \frac{4}{3} \\ &= \frac{27(3) - 6(12) + 16}{12} = \frac{81 - 72 + 16}{12} = \frac{25}{12} \text{ unidades de área} \end{aligned}$$

Exercício 3.4.

Esboce a região limitada pelos gráficos das funções $x = |y^2 - 4|$, $x = \left(\frac{y^2}{2} \right) + 4$ e ache a área da região.

Solução: Observe que $x = \left(\frac{y^2}{2}\right) + 4$, ou equivalentemente, $2(x-4) = (y-0)^2$, é uma parábola simétrica ao eixo x de vértice no ponto $(4,0)$ e que abre à direita. Por outro lado,

$$x = |y^2 - 4| = \begin{cases} y^2 - 4 & \text{se } y^2 - 4 \geq 0 \\ -y^2 + 4 & \text{se } y^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y^2 - 4 & \text{se } y \geq 2 \text{ ou } y \leq -2 \\ 4 - y^2 & \text{se } -2 < y < 2 \end{cases}.$$

Para valores de $y \leq -2$ ou $y \geq 2$, temos que $x = y^2 - 4$, ou seja, $x + 4 = (y - 0)^2$. Esta última equação representa uma parábola simétrica ao eixo x de vértice em $(-4,0)$ que abre à direita.

A função vale $x = 4 - y^2$ no intervalo $(-2, 2)$, isto é, neste intervalo a função coincide com a parábola de vértice em $(4,0)$ que abre para a esquerda. A região limitada pelos gráficos das funções dadas aparece hachurada na **Figura 3.14**.

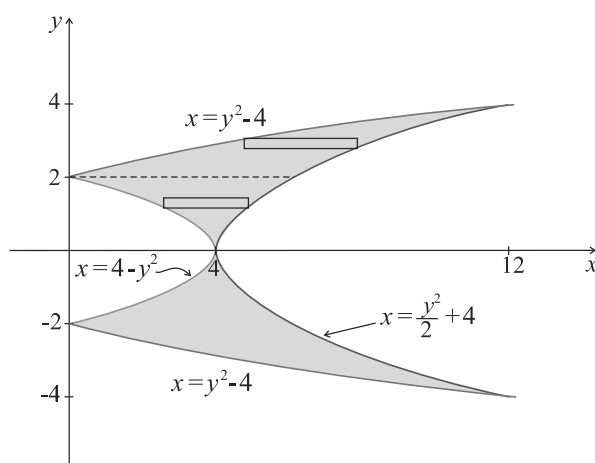


Figura 3.14

É claro que o ponto $(4,0)$ é um ponto de interseção das duas funções. Para encontrar os outros pontos de interseção, vamos resolver

o sistema
$$\begin{cases} x = y^2 - 4 \\ x = \frac{y^2}{2} + 4 \end{cases}$$

$$y^2 - 4 = \frac{y^2}{2} + 4 \Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = 8 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 \\ y = 4 \end{cases}$$

Logo, se $y = -4$, então $x = 12$ e temos o ponto de interseção $(-4, 12)$. Se $y = 4$, então $x = 12$ e temos o ponto de interseção $(4, 12)$.

Note-se que a região dada tem simetria em relação ao eixo x , assim podemos calcular só a região que está acima do eixo x . Note-se que integrar em relação à variável y dará menos trabalho que integrar em relação à variável x , pois as funções dadas são funções polinomiais de y . Observe que mesmo assim serão necessárias duas integrais porque a fronteira inferior mudará em $y = 2$ como mostra a **Figura 3.14**. Note-se também que é mostrado em cada sub-região um retângulo representativo horizontal.

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^2 \left[\left(\left(\frac{y^2}{2} \right) + 4 \right) - (4 - y^2) \right] dy + \int_2^4 \left[\left(\left(\frac{y^2}{2} \right) + 4 \right) - (y^2 - 4) \right] dy \\ &= \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} + 4 - 4 + y^2 \right] dy + \int_2^4 \left[\frac{y^2}{2} + 4 - y^2 + 4 \right] dy \\ &= \int_0^2 \left[\frac{3y^2}{2} \right] dy + \int_2^4 \left[-\frac{y^2}{2} + 8 \right] dy = \left[\frac{y^3}{2} \right]_0^2 - \left[\frac{y^3}{6} + 8y \right]_2^4 \\ &= \left(\frac{2^3}{2} + 0 \right) - \frac{4^3}{6} + 8(4) + \frac{2^3}{6} - 8(2) = 4 - \frac{32}{3} + 32 + \frac{4}{3} - 16 \\ &= 20 - \frac{28}{3} = \frac{32}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

$$\text{Finalmente, } A(R) = 2A(R) = \frac{64}{3} \text{ unidades de área.}$$

Exercício 3.5.

Encontre o valor médio da função $y = 4 - x^2$, no intervalo $[-2, 2]$ e todos os valores de x no intervalo para os quais a função é igual ao seu valor médio.

Solução: Seja $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4 - x^2$. É claro que f é contínua pois é uma função polinomial, logo, é integrável no intervalo $[-2, 2]$ e satisfaz o teorema do valor médio para integrais. Portanto, existe $c \in [-2, 2]$ tal que

$$\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = f(c) \cdot (2 - (-2)) = 4(4 - c^2) \text{ para } c \in [-2, 2]. \quad (3.2)$$

O valor médio da função está dado por:

$$M(f) = f(c) = \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx. \quad (3.3)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (4 - x^2) dx &= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(4(2) - \frac{2^3}{3} \right) - \left(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3} \right) \\ &= 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Substituindo este último valor na igualdade 3.3, obtemos o valor médio da função f , ou seja

$$M(f) = f(c) = \frac{1}{4} \left(\frac{32}{3} \right) = \frac{8}{3}.$$

Por outro lado, substituindo em 3.2 o valor obtido em 3.4:

$$\frac{32}{3} = 4(4 - c^2) \Leftrightarrow 8 = 3(4 - c^2) \Leftrightarrow 8 = 12 - 3c^2 \Leftrightarrow 3c^2 = 4 \Leftrightarrow c^2 = \frac{4}{3}.$$

Assim, $c = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \in [-2, 2]$ são os valores de x no intervalo $[-2, 2]$ para os quais a função é igual ao seu valor médio $M(f) = \frac{8}{3}$.

Exercício 3.6.

Considere a região limitada por $y = x^2$ e $y = 4$. Esta região é dividida em duas sub-regiões de áreas iguais pela reta $y = c$. Encontre c .

Solução: Note-se que $y = x^2$ é a parábola de vértice em $(0, 0)$ que abre para cima e $y = 4$ é uma reta paralela ao eixo x .

Fazendo a interseção das curvas temos: $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Assim, os pontos de interseção são $(2, 4)$ e $(-2, 4)$. Ver a **Figura 3.15**:

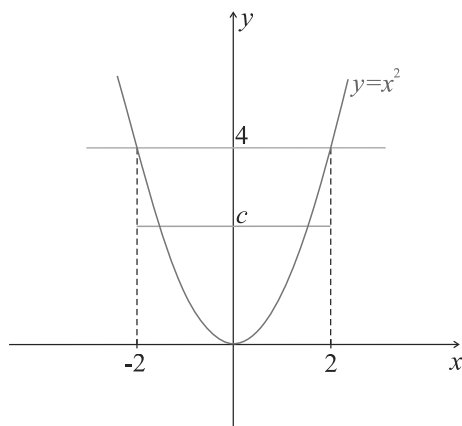


Figura 3.15

Considere a reta horizontal $y = c$, onde $0 < c < 4$.

Seja R_1 a região limitada inferiormente pela parábola $y = x^2$ e superiormente pela reta $y = c$. Por outro lado, seja R_2 a região limitada inferiormente pela reta $y = c$, superiormente pela reta $y = 4$ e lateralmente pela parábola $y = x^2$.

Queremos encontrar c tal que $A(R_1) = A(R_2)$.

Observe que podemos calcular as áreas de R_1 e de R_2 por integrais definidas em termos de x ou em termos de y .

Para exemplificar, vamos calcular a área de R_1 por integrais definidas em termos de x . A interseção de $y = c$ e $y = x^2$ é $x^2 = c$, logo $x = \pm\sqrt{c}$. É claro que, $c \geq x^2$ para $x \in [-\sqrt{c}, \sqrt{c}]$ e assim a área da região R_1 é dada por: $A(R_1) = \int_{-\sqrt{c}}^{\sqrt{c}} (c - x^2) dx$.

Observe que podemos ainda usar a simetria da região R_1 em torno do eixo y . Assim,

$$\begin{aligned} A(R_1) &= 2 \int_0^{\sqrt{c}} (c - x^2) dx = 2 \left(cx - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{c}} = 2 \left(c\sqrt{c} - \frac{c\sqrt{c}}{3} \right) \\ &= 2 \left(\frac{2c\sqrt{c}}{3} \right) = \frac{4c\sqrt{c}}{3}. \end{aligned}$$

Por outro lado, vamos calcular a área de R_2 por integrais definidas em termos de y (Note-se que podemos também calcular a área de R_2 usando integrais definidas em termos de x , nesse caso será necessário subdividir a região R_2).

Como $y = x^2$ implica que $x \pm \sqrt{y}$, é claro que, para $y \geq 0$, temos que $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$, em particular vale também para $c \leq y \leq 4$. Portanto, a área $A(R_2)$ da região R_2 é

$$\begin{aligned} A(R_2) &= \int_c^4 [\sqrt{y} + \sqrt{y}] dy = 2 \int_c^4 \sqrt{y} dy = 2 \left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_c^4 \\ &= \frac{4}{3} (4)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3} (c)^{\frac{3}{2}} = \frac{4^2}{3} \sqrt{4} - \frac{4}{3} c\sqrt{c} = \frac{32}{3} - \frac{4}{3} c\sqrt{c}. \end{aligned}$$

Igualando as áreas, obtemos

$$\frac{4}{3} c\sqrt{c} = \frac{32}{3} - \frac{4}{3} c\sqrt{c} \Leftrightarrow \frac{8}{3} c\sqrt{c} = \frac{32}{3} \Leftrightarrow c\sqrt{c} = 4.$$

Então $(c\sqrt{c})^2 = 4^2 \Rightarrow c^3 = 4^2$. Deste modo, obtemos $c = 4^{\frac{2}{3}}$.

Exercício 3.7.

- Seja R a região no primeiro quadrante compreendida entre os gráficos de $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{16}{x^2}$, $h(x) = x^2$ e $l(x) = \frac{x^2}{16}$. Esboce R .
- Represente a área da região R , por uma ou mais integrais definidas em termos de x .
- Represente a área da região R , por uma ou mais integrais definidas em termos de y .
- Encontre a área da região R usando a representação mais conveniente.

Solução:

- O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ foi visto no Exemplo 5.4, da Aula 5 de Cálculo I, analogamente obtém-se o gráfico de $g(x) = \frac{16}{x^2}$.

Por outro lado, as funções $h(x) = x^2$ e $l(x) = \frac{x^2}{16}$ são parábolas de vértices na origem, que abrem para cima. Note-se que foi pedido que a região R esteja contida no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$.

Fazendo a interseção das funções para encontrar os pontos de interseção, temos:

$$\begin{cases} f(x) = y = \frac{1}{x^2} \\ h(x) = y = x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} = x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Logo, $y = 1$ e obtemos o ponto de interseção $(1, 1)$. Do mesmo modo:

$$\begin{cases} f(x) = y = \frac{1}{x^2} \\ l(x) = y = \frac{x^2}{16} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{16} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 16 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Logo, $y = \frac{1}{4}$ e obtemos o ponto de interseção $\left(2, \frac{1}{4}\right)$. Analogamente,

$$\begin{cases} g(x) = y = \frac{16}{x^2} \\ h(x) = y = x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{x^2} = x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 16 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Logo, $y = 4$ e obtemos o ponto de interseção $(2, 4)$. De forma similar:

$$\begin{cases} g(x) = y = \frac{16}{x^2} \\ l(x) = y = \frac{x^2}{16} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16}{x^2} = \frac{x^2}{16} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 4^4 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Logo, $y = 1$ e, finalmente, obtemos o ponto de interseção $(4, 1)$. Note-se que $h(x) \geq f(x)$, $\forall x \in [1, 2]$. Com efeito,

$$h(x) - f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^4 - 1}{x^2} = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x^2}.$$

Observe que estamos considerando $x > 0$, é claro que, x^2 e $(x^2 + 1)$ são valores maiores que zero e que $(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$ é positivo para $x \in [1, +\infty)$. Assim, $h(x) - f(x) \geq 0$ para $x \in [1, +\infty)$, em particular, $h(x) - f(x) \geq 0$ para $x \in [1, 2]$.

Analogamente, podemos afirmar que $g(x) \geq l(x) \geq 0$, $\forall x \in [2, 4]$. Com efeito,

$$g(x) - l(x) = \frac{16}{x^2} - \frac{x^2}{16} = \frac{4^4 - x^4}{16x^2} = \frac{(4^2 - x^2)(4^2 + x^2)}{16x^2}.$$

É claro que $(4^2 + x^2)$ e $16x^2$ são quantidades positivas. Note-se que $(4^2 - x^2) = (4 - x)(4 + x) \geq 0$ se $-4 \leq x \leq 4$, logo, $g(x) - l(x) \geq 0$ se $-4 \leq x \leq 4$, em particular $g(x) - l(x) \geq 0$ para $x \in [2, 4]$.

Dessa forma, a região R precisa ser dividida em duas regiões separadas: R_1 e R_2 , onde R_1 é a região limitada pelas curvas $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $h(x) = x^2$ no intervalo $[1, 2]$ e R_2 é a região limitada pelas curvas $l(x) = \frac{x^2}{16}$ e $g(x) = \frac{16}{x^2}$ no intervalo $[2, 4]$. $R = R_1 \cup R_2$, é como na **Figura 3.16**. Mostramos também um retângulo representativo vertical em cada região.

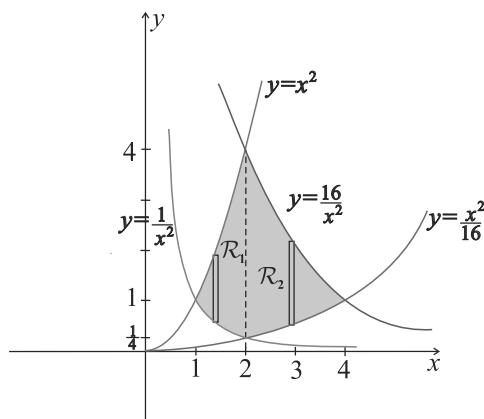


Figura 3.16

b. Assim, a área $A(R)$ da região R é

$$\begin{aligned} A(R) &= A(R_1) + A(R_2) = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx + \int_2^4 \left(\frac{16}{x^2} - \frac{x^2}{16} \right) dx \\ &= \int_1^2 (x^2 - x^{-2}) dx + \int_2^4 \left(16x^{-2} - \frac{x^2}{16} \right) dx. \end{aligned}$$

c. Observe que na região R , $x > 0$ e $y > 0$.

Se nas equações $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{16}$, $y = \frac{1}{x^2}$ e $y = \frac{16}{x^2}$, resolvermos em x , $x = \sqrt{y}$, $x = 4\sqrt{y}$, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ e $x = \frac{4}{\sqrt{y}}$.

Observe que essas funções são contínuas para todo $y > 0$.

Podemos também verificar facilmente que $4\sqrt{y} \geq \frac{1}{\sqrt{y}}$ para $y \in \left[\frac{1}{4}, 1 \right]$. Analogamente que, $\frac{4}{\sqrt{y}} \geq \sqrt{y}$ para $y \in [1, 4]$.

Dessa forma, a região R precisa ser dividida em duas regiões separadas: R_3 e R_4 , onde R_3 é a região limitada pelas curvas $x = \sqrt{y}$ e $x = \frac{4}{\sqrt{y}}$ no intervalo $[1, 4]$ e R_4 é a região limitada

pelas curvas $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ e $x = 4\sqrt{y}$ no intervalo $\left[\frac{1}{4}, 1 \right]$.

$R = R_4 \cup R_3$ é como na **Figura 3.17**. Mostramos também um retângulo representativo horizontal em cada região.

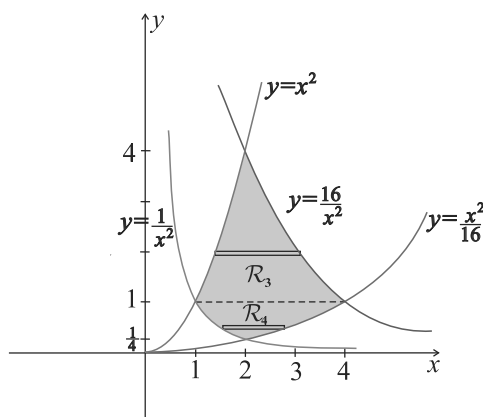


Figura 3.17

Assim, a área $A(R)$ da região R é,

$$A(R) = A(R_4) + A(R_3) = \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(4\sqrt{y} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right) dy + \int_1^4 \left(\frac{4}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} \right) dy,$$

isto é,

$$A(R) = \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(4y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}} \right) dy + \int_1^4 \left(4y^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}} \right) dy.$$

- d. Veja que, neste exercício, tanto a representação em x como a representação em y podem ser calculadas sem problemas e tem o mesmo grau de dificuldade.

- Se você escolheu a representação em x , então temos

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_1^2 (x^2 - x^{-2}) dx + \int_2^4 \left(16x^{-2} - \frac{x^2}{16} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 + 16 \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_2^4 - \frac{1}{16} \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} \right]_1^2 - 16 \left[\frac{1}{x} \right]_2^4 - \frac{1}{42} \left[\frac{x^3}{3} \right]_2^4 \\ &= \left(\frac{8}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 \right) + \left(-4 - \frac{4}{3} \right) - \left(-8 - \frac{1}{6} \right) \\ &= \frac{8}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - 1 - 4 - \frac{4}{3} + 8 + \frac{1}{6} = \frac{14}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

- Se você escolheu a representação em y , então temos

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(4y^{\frac{1}{2}} - y^{-\frac{1}{2}}\right) dy + \int_1^4 \left(4y^{-\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) dy \\
 &= 4 \left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \left(2y^{\frac{1}{2}}\right) \right]_{\frac{1}{4}}^1 + 4 \left[2y^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}\right) \right]_1^4 \\
 &= \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{8}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \left(8(4)^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right) - \left(8 - \frac{2}{3}\right) \\
 &= \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{8}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1\right) + \left(16 - \frac{2}{3}(2)^3\right) - \left(8 - \frac{2}{3}\right) \\
 &= \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 + 16 - \frac{16}{3} - 8 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \text{ unidades de área.}
 \end{aligned}$$

PASSO A PASSO DE ALGUNS EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CADERNO DIDÁTICO

Exercício 3.8.

Esboce a região e ache a área da região compreendida entre:

- os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{x^2}{2} + 2$;
- os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1 - x^2$;
- os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = 1 - x^2$ e a reta $y = 2$;
- os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^2 - 2x + 4$ e a reta $x = 0$.

(Aula 5 do caderno didático, exercício proposto nº 1: a-d)

Solução:

- Note-se que $y = x^2$ é o gráfico de uma parábola de vértice na origem que abre para cima. Notemos também que $f(x) = x^2$ é uma função par. Por outro lado, o gráfico de $y = \frac{x^2}{2} + 2$ é uma parábola de vértice em $(0, 2)$ que abre para cima e também é uma função par.

Para fazer um esboço mais exato da região, é necessário saber onde as curvas dadas se interceptam.

Fazendo a interseção das curvas, tem-se:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{x^2}{2} + 2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = \frac{x^2}{2} + 2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$\Rightarrow y = 4.$$

Portanto, os pontos de interseção são $(2, 4)$ e $(-2, 4)$.

A **Figura 3.18** a seguir representa o esboço do gráfico das funções f , g e da região pedida. Mostramos também um retângulo típico (ou representativo) vertical na região.

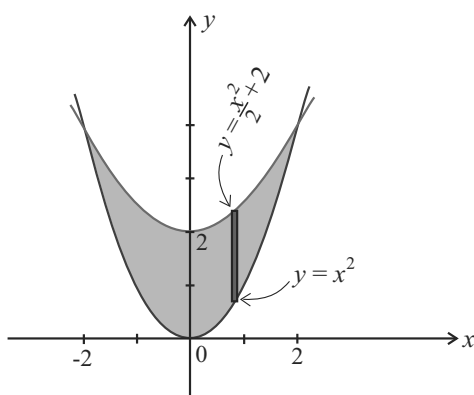


Figura 3.18

$$\text{Assim, } A(R) = \int_{-2}^2 \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2 \right) - x^2 \right] dx = \int_{-2}^2 \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) dx.$$

Podemos calcular essa integral, ou ainda pela simetria da região em torno do eixo y , podemos afirmar que

$$\begin{aligned} A(R) &= 2 \int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \left(2x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^2 = 2 \left(2(2) - \frac{2^3}{6} \right) \\ &= 2 \left(4 - \frac{4}{3} \right) = \frac{16}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

- b. Note-se que $y = x^2$ é o gráfico de uma parábola de vértice na origem que abre para cima. Notemos também que $f(x) = x^2$ é uma função par. Por outro lado, o gráfico de $g(x) = 1 - x^2$ é uma parábola de vértice em $(0, 1)$ que abre para baixo e também é uma função par.

Para fazer um esboço mais exato da região, é necessário saber onde as curvas dadas se interceptam.

Fazendo a interseção das curvas, tem-se:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 1 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Portanto, os pontos de interseção são $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

A **Figura 3.19** a seguir representa o esboço do gráfico das funções f e g e da região pedida. Mostramos também um retângulo típico (ou representativo) vertical na região.

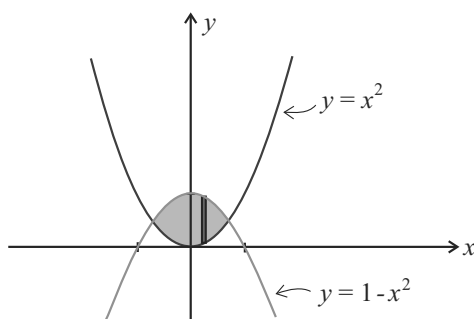


Figura 3.19

$$\text{Assim, } A(R) = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [(1 - x^2) - x^2] dx = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2) dx.$$

Podemos calcular essa integral, ou ainda pela simetria da região em torno do eixo y , podemos afirmar que

$$\begin{aligned} A(R) &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 - 2x^2) dx = 2 \left(x - 2\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right) \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} \left(\frac{2\sqrt{2}}{8} \right) \right) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

- c. Note-se que as funções f e g são as mesmas do exercício b. Assim, sabemos que os pontos de interseção de f e g são $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Por outro lado, a reta $y = 2$ é uma reta paralela ao eixo x e intercepta a parábola $y = x^2$.

Fazendo a interseção das curvas, temos $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, logo os pontos de interseção são $(\sqrt{2}, 2)$ e $(-\sqrt{2}, 2)$.

A **Figura 3.20** a seguir representa o esboço do gráfico das funções f , g e $y = 2$ e a região pedida.

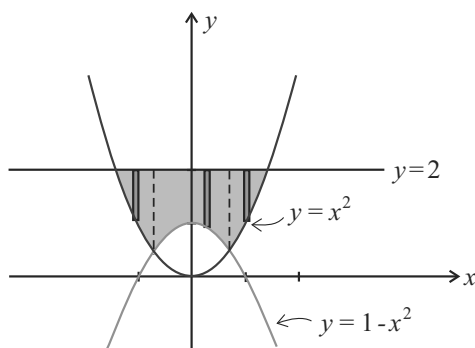


Figura 3.20

Para calcular a área da região R , é preciso dividir a região em 3 sub-regiões numeradas da esquerda para a direita, digamos R_1 , R_2 e R_3 . Note-se que $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Mostramos na figura também um retângulo típico ou representativo vertical em cada região.

Assim,

$$A(R) = \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} (2 - x^2) dx + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [2 - (1 - x^2)] dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx.$$

Ou seja,

$$A(R) = \int_{-\sqrt{2}}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} (2 - x^2) dx + \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 + x^2) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx.$$

Podemos calcular essas integrais, ou ainda pela simetria da região em torno do eixo y , podemos afirmar que

$$\begin{aligned} A(R) &= 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1 + x^2) dx + 2 \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx \\ &= 2 \left(x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2 \left(2x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right) + 2 \left(2\sqrt{2} - \frac{1}{3} (\sqrt{2})^3 \right) - 2 \left(2 \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right) \\ &= \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} + 4\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} \\ &= 3\sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

- d. Note-se que $y = x^2$ é o gráfico de uma parábola de vértice na origem que abre para cima. Notemos também que $f(x) = x^2$ é uma função par. Por outro lado, o gráfico de $y = x^2 - 2x + 4 = (x^2 - 2x + 1) + 3 = (x - 1)^2 + 3$ é uma parábola de vértice em $(1, 3)$ que abre para cima.

Para fazer um esboço mais exato da região, é necessário saber onde as curvas dadas se interceptam.

Fazendo a interseção das curvas, tem-se:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^2 - 2x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = x^2 - 2x + 4 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4.$$

Portanto, o ponto de interseção é $(2, 4)$. Por outro lado, é claro que a interseção de $\begin{cases} y = x^2 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$ é o ponto $(0, 0)$ e a interseção de $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 4$ é o ponto $(0, 4)$.

A **Figura 3.21** a seguir representa o esboço do gráfico das funções f , g , a reta $x = 0$ e a região pedida. Mostramos também um retângulo típico (ou representativo) vertical na região.

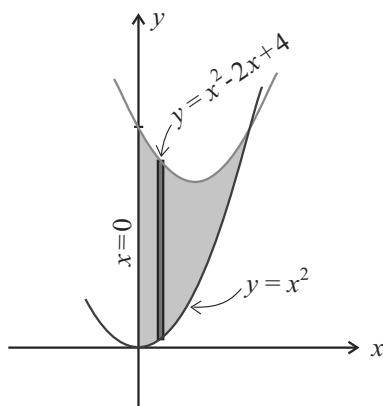


Figura 3.21

$$\begin{aligned} \text{Assim, } A(R) &= \int_0^2 [(x^2 - 2x + 4) - x^2] dx = \int_0^2 (4 - 2x) dx \\ &= \left(4x - 2\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 = (4(2) - 2^2) = 4 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Exercício 3.9.

Esboce e ache a área da região compreendida entre os gráficos de $y = 1 + \sin x$, $y = 1 + \cos x$ e $x \in [0, \pi]$.

(Aula 5 do caderno didático, exercício proposto nº 1: j)

Solução: Note-se que o gráfico de $y = 1 + \sin x$ pode ser obtido de uma translação de 1 unidade para cima do gráfico de $y = \sin x$. Analogamente, o gráfico de $y = 1 + \cos x$ pode ser obtido de uma translação de 1 unidade para cima do gráfico de $y = \cos x$, como podemos mostrar na **Figura 3.22**.

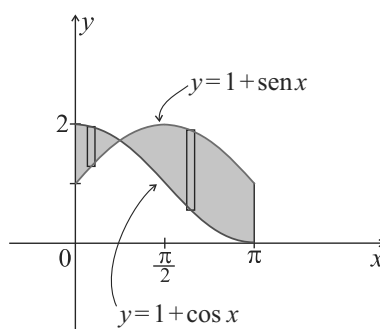


Figura 3.22

Para calcular a área da região R dada, é preciso dividir a região em 2 sub-regiões numeradas da direita para a esquerda. Digamos R_1 e R_2 .

Na região R_1 , observe no retângulo representativo vertical, que a fronteira superior é o gráfico de $f(x) = 1 + \cos x$ e a fronteira inferior é $g(x) = 1 + \sin x$. Resta fazer a interseção das curvas para encontrar o limite de integração superior, já que o inferior fica claro na figura que é $x = 0$.

Precisamos encontrar o ponto de interseção das duas curvas no intervalo $[0, \pi]$

$$\begin{cases} y = 1 + \sin x \\ y = 1 + \cos x \end{cases} \quad x \in [0, \pi]$$

$$1 + \sin x = 1 + \cos x \Leftrightarrow \sin x = \cos x, \quad x \in [0, \pi].$$

No intervalo $[0, \pi]$, a última igualdade é verdade se, e somente se, $x = \frac{\pi}{4}$, assim $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Logo, o ponto de interseção das duas curvas no intervalo $[0, \pi]$ é o ponto $\left(\frac{\pi}{4}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Então,

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [(1 + \cos x) - (1 + \sin x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos x - \sin x] dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) + \left(\cos \frac{\pi}{4} - \cos 0 \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1 \text{ unidades de área.}
 \end{aligned}$$

Na região R_2 , no retângulo representativo vertical, observe que a fronteira superior é o gráfico de $g(x) = 1 + \sin x$ e a fronteira inferior é $f(x) = 1 + \cos x$. O ponto de interseção já foi achado e podemos afirmar então que na região estudada $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi \right]$. Assim,

$$\begin{aligned}
 A(R_2) &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} [(1 + \sin x) - (1 + \cos x)] dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} [\sin x - \cos x] dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \cos x dx = \left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} - \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
 &= -\cos \pi + \cos \frac{\pi}{4} - \sin \pi + \sin \frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2} \text{ unidades de área.}
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \sqrt{2} - 1 + 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ unidades de área.}$$

Exercício 3.10.

Esboce o conjunto D e ache a área de D , nos seguintes casos:

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 1 \leq y \leq 0\};$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 9 - x^2\};$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 3\};$
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y \leq 1, -2y^4 \leq x \leq y^2\}.$

(Aula 5 do caderno didático, exercício proposto nº 2: a-c)

Solução:

- Notemos que $y = x^2 - 1$ é uma parábola de vértice no ponto $(0, -1)$ que abre para cima e $y = 0$ é o eixo x . A interseção das duas equações acontece claramente em $x = \pm 1$, logo os pontos de interseção são $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. A região D é mostrada na

Figura 3.23, assim como um retângulo típico (ou representativo) vertical na região.

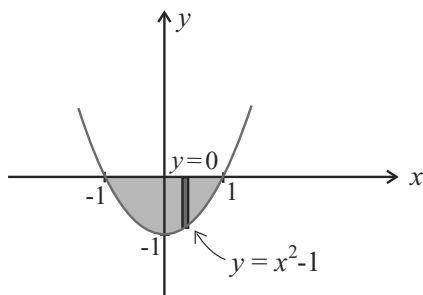


Figura 3.23

É claro, da figura, que

$$A(D) = - \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx.$$

Podemos calcular essa integral ou ainda pela simetria da região em torno do eixo y, podemos afirmar que $A(D) = 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx$

$$= 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \text{ unidades de área.}$$

- b. Notemos que $y = 9 - x^2$ é uma parábola de vértice no ponto $(0, 9)$ que abre para baixo e $y = 0$ é o eixo x. A interseção das duas equações acontece claramente em $x = \pm 3$, logo os pontos de interseção são $(3, 0)$ e $(-3, 0)$. A região D é mostrada na **Figura 3.24**, assim como um retângulo típico (ou representativo) vertical na região.

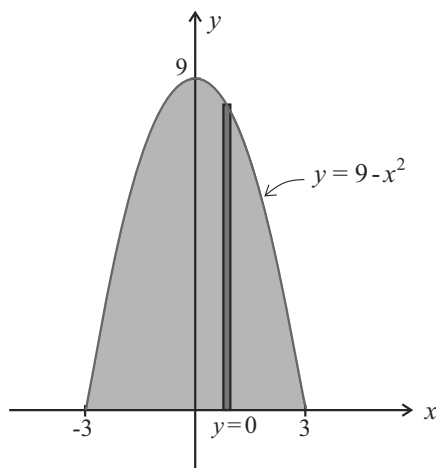


Figura 3.24

É claro, da figura, que

$$A(D) = \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx.$$

Podemos calcular essa integral, ou ainda pela simetria da região em torno do eixo y , podemos afirmar que

$$A(D) = 2 \int_0^3 (9 - x^2) dx = 2 \left(9x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 2 \left(9(3) - \frac{3^3}{3} \right)$$

$$= 2(27 - 9) = 36 \text{ unidades de área.}$$

- c. Notemos que $y = \sqrt{x}$ é a função raiz quadrada e $y = 3$ é uma reta paralela ao eixo x . Por outro lado, $x = 0$ é o eixo x e $x = 1$ é uma reta paralela ao eixo y . A região D é mostrada na **Figura 3.25**, assim como um retângulo típico (ou representativo) vertical na região.

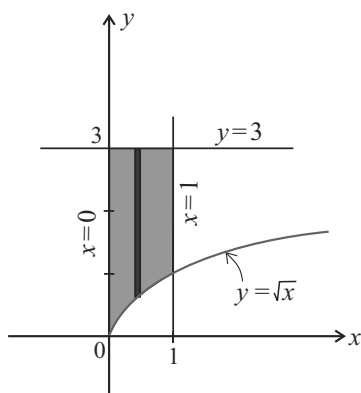


Figura 3.25

É claro, da figura, que

$$A(D) = \int_0^1 (3 - \sqrt{x}) dx = \int_0^1 \left(3 - x^{\frac{1}{2}} \right) dx = 3x - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1$$

$$= 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \text{ unidades de área.}$$

- d. Note-se que $x = y^2$ é a parábola de vértice na origem que abre para a parte positiva do eixo x e tem simetria com esse eixo; $x = -2y^4$ como função de y é uma função par, assim a curva tem simetria em relação ao eixo x , passa pela origem e para qualquer valor de y os valores de x são sempre negativos, finalmente, $y = -1$ e $y = 1$ são retas paralelas ao eixo x . A região D é

mostrada na **Figura 3.26**, assim como um retângulo típico (ou representativo) horizontal na região.

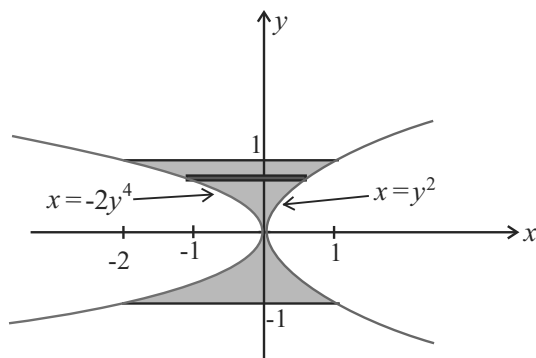


Figura 3.26

É claro, da figura, que

$$A(D) = \int_{-1}^1 (y^2 - (-2y^4)) dy = \int_{-1}^1 (y^2 + 2y^4) dy.$$

Podemos calcular essa integral, ou ainda da simetria da figura em relação ao eixo x , temos que

$$\begin{aligned} A(D) &= 2 \int_0^1 (y^2 + 2y^4) dy = 2 \left(\frac{y^3}{3} + 2\frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) \\ &= 2 \left(\frac{5+6}{15} \right) = \frac{22}{15} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Exercício 3.11.

Seja R a região compreendida entre os gráficos de $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{16}$ e $h(x) = x^2$, para $x > 0$.

- Esboce a região R .
- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x .
- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável y .
- Calcule a área da região R . (Use a representação mais conveniente)

(Aula 5 do caderno didático, exercício proposto nº 1: g)

Solução:

- a. O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ foi visto no Exemplo 5.4, da Aula 5 de Cálculo I. As funções $h(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{x^2}{16}$ são parábolas de vértices na origem, que abrem para cima e foi pedido que $x > 0$. Fazendo a interseção das funções, obtemos

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ y = x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} = x^2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Logo, $y = 1$ e obtemos o ponto de interseção $(1, 1)$. Do mesmo modo:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ y = \frac{x^2}{16} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x^2} = \frac{x^2}{16} \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 = 16 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$$

Logo, $y = \frac{1}{4}$ e obtemos o ponto de interseção $\left(2, \frac{1}{4}\right)$.

Por outro lado, é claro que a interseção de $h(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{x^2}{16}$ é o ponto $(0, 0)$.

O esboço da região R é mostrado na **Figura 3.27**.

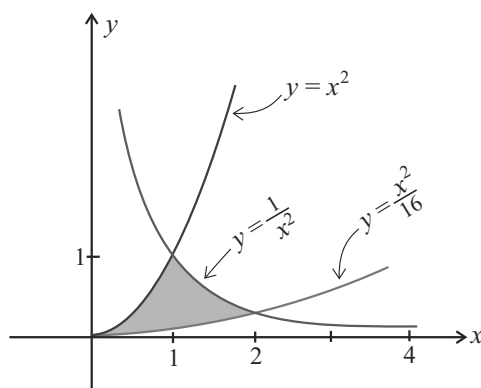


Figura 3.27

- b. Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x .

Notemos que, neste caso, a região R precisa ser dividida em duas regiões: R_1 e R_2 , onde R_1 é a região limitada pelas

curvas $h(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{x^2}{16}$ no intervalo $[0, 1]$ e R_2 é a região limitada pelas curvas $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = \frac{x^2}{16}$ no intervalo $[1, 2]$. $R = R_1 \cup R_2$. Na **Figura 3.28**, mostramos um retângulo representativo vertical em cada região.

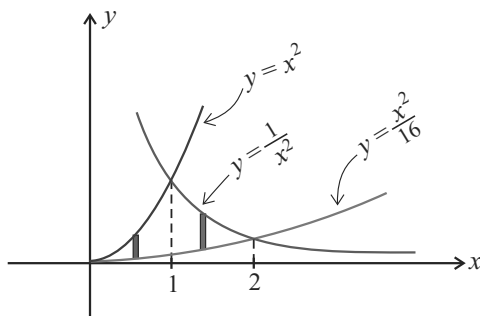


Figura 3.28

Assim, a representação pedida é

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{16} \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{16} \right) dx.$$

- c. Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável y .

Precisamos expressar as curvas que delimitam a região dada como funções de y . Assim, por exemplo, $y = x^2$ com $x > 0$ resulta agora $x = \sqrt{y}$; $y = \frac{1}{x^2}$ com $x > 0$ resulta agora $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$;

Finalmente, $y = \frac{x^2}{16}$ com $x > 0$ resulta agora $x = 4\sqrt{y}$.

Note-se que, neste caso, a região R precisa ser dividida em duas regiões: R_3 e R_4 , onde R_3 é a região limitada pelas curvas $x = \sqrt{y}$ e $x = 4\sqrt{y}$ no intervalo $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ e R_4 é a região limitada pelas curvas $x = \sqrt{y}$ e $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ no intervalo $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$. $R = R_3 \cup R_4$, na

Figura 3.29, mostramos um retângulo representativo horizontal em cada região.

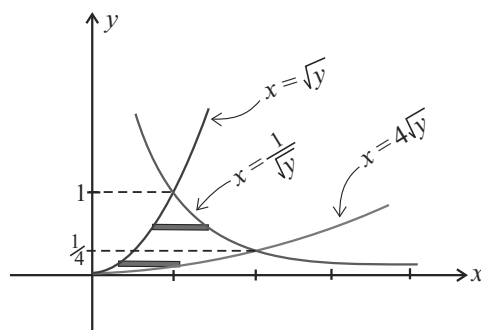


Figura 3.29

Assim, a representação pedida é

$$A(R) = A(R_3) + A(R_4) = \int_0^{\frac{1}{4}} (4\sqrt{y} - \sqrt{y}) dy + \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} \right) dy.$$

d. Se você escolheu a representação da letra b, o cálculo da área é:

$$A(R) = \int_0^1 \left(\frac{15}{16}x^2 \right) dx + \int_1^2 \left(x^{-2} - \frac{x^2}{16} \right) dx = \left[\frac{15}{16} \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \left[\frac{x^{-1}}{-1} - \frac{1}{16} \frac{x^3}{3} \right]_1^2$$

$$A(R) = \frac{5}{16} - \frac{1}{2} - \frac{8}{48} + 1 + \frac{1}{48} = \frac{5}{16} + \frac{1}{2} - \frac{7}{48} = \frac{15 + 24 - 7}{48}$$

$$= \frac{32}{48} = \frac{2}{3} \text{ unidades de área.}$$

Se você escolheu a outra representação, a resposta obtida será a mesma.

Exercício 3.12.

a. Use o teorema do valor médio para integrais para mostrar

$$\text{que } \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 3} dx \leq \frac{2}{3}.$$

b. Chegue à mesma conclusão usando o Exemplo 2.5 do caderno didático.

(Aula 5 do caderno didático, exercício proposto nº 3)

Solução:

- a. Lembremos que o Teorema do Valor Médio para Integrais diz o seguinte:

Se $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, existe $c \in [a, b]$, tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

Neste caso, é claro que $0 < 2$ e $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$ é contínua em $[0, 2]$. Logo, pelo teorema do valor médio para integrais, existe $u \in [0, 2]$, tal que

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 3} = \frac{2}{u^2 + 3}. \quad (3.5)$$

Por outro lado, $u^2 + 3 \geq 3, \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{u^2 + 3} \leq \frac{1}{3} \forall u \in \mathbb{R}$.

Assim, $\frac{2}{u^2 + 3} \leq \frac{2}{3}, \forall u \in \mathbb{R}$. Em particular, $\frac{2}{u^2 + 3} \leq \frac{2}{3}, \forall u \in [0, 2]$ e usando 3.5 resulta que $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 3} \leq \frac{2}{3}$.

- b. O Exemplo 2.5 do caderno didático diz o seguinte:

Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Observe que, $x^2 + 3 \geq 3, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$.

Em particular, $\frac{1}{x^2 + 3} \leq \frac{1}{3}, \forall x \in [0, 2]$. Observe que $f(x) = \frac{1}{3}$

e $g(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$ são integráveis em $[0, 2]$ e $\frac{1}{3} \geq \frac{1}{x^2 + 3},$

$\forall x \in [0, 2]$, então pela Proposição 2.5 podemos afirmar que

$$\int_0^2 \frac{1}{3} dx \geq \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 3} dx, \text{ como } \int_0^2 \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3}(2 - 0) = \frac{2}{3}.$$

Assim, resulta $\frac{2}{3} \geq \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 3} dx$, ou seja, $\int_0^2 \frac{1}{x^2 + 3} dx \leq \frac{2}{3}$.

Veja no Apêndice 4, no final deste caderno, o passo a passo de exercícios adicionais correspondentes a esta semana. Veja também o Apêndice 2 com o passo a passo de Simulados da AD1.

Semana 4

RESUMO: FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL, EXPONENCIAL E HIPERBÓLICA

A função logarítmica definida e denotada por \log na Aula 7 do caderno didático é também chamada de função logaritmo natural e denotada por \ln . Esta última notação é a que usaremos daqui para frente neste resumo e nas listas de exercícios.

A FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL

Definição 4.1.

Para cada $x > 0$, definamos:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

O número real $\ln x$ é dito logaritmo de x e a função $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é dita a *função logarítmica natural* ou *função logaritmo natural*, onde:

$$\text{Para } x = 1, \quad \ln 1 = 0$$

$$\text{Para } x > 1, \quad \ln x > 0$$

$$\text{Para } 0 < x < 1, \quad \ln x < 0$$

Observe na **Figura 4.1** que:

$$\text{Se } x > 1, \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt > 0$$

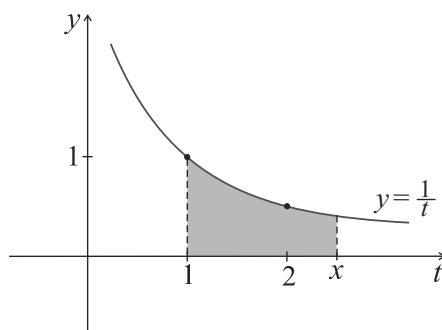


Figura 4.1

Observe na **Figura 4.2** que:

$$\text{Se } 0 < x < 1, \quad \ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt < 0$$

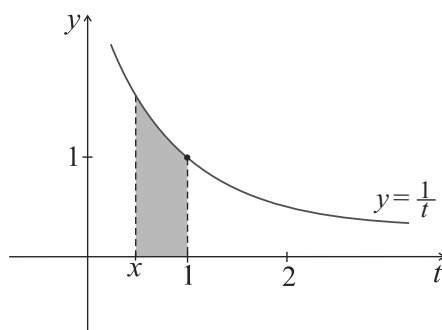


Figura 4.2

A DERIVADA DA FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL

A função $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ é derivável em $(0, +\infty)$ e $\frac{d}{dx} [\ln x] = \frac{1}{x}$, $\forall x \in (0, +\infty)$. Daqui resulta que $G(x) = \ln x$ é uma primitiva de $\frac{1}{x}$ para $x > 0$. Assim, para qualquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b$, tem-se $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_a^b = \ln b - \ln a$.

Se $u > 0$ é uma função derivável de x , pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}.$$

PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DOS LOGARITMOS NATURAIS

Para quaisquer $x, y \in (0, +\infty)$, tem-se:

1. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
2. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ e $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$
3. $\ln(x^n) = n \ln x$ para todo n inteiro $n \geq 1$
4. $\ln\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} \ln x$ para todo n inteiro $n \geq 1$.

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL

1. A função logaritmo natural é crescente.
2. O gráfico da função logaritmo natural tem concavidade para baixo.
3. A imagem da função logaritmo natural é \mathbb{R} .
4. A função logaritmo natural é bijetora.
5. $\ln x < x, \forall x \in (0, +\infty)$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA

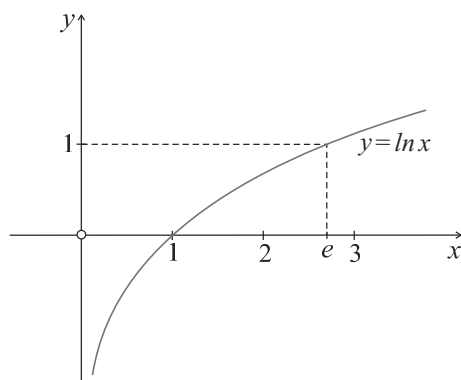


Figura 4.3

DEFINIÇÃO DO NÚMERO e

A letra e representa o número real positivo, tal que

$$\ln e = \int_1^e \frac{1}{t} dt = 1.$$

Pode ser mostrado que o número e é irracional e tem a seguinte aproximação decimal: $e \approx 2,71828182846$.



- i. Vimos que o logaritmo só é definido para $x > 0$, de maneira que só podemos escrever $\ln x$ nesta hipótese. No entanto, a função $\ln |x|$ está definida para todo $x \neq 0$.

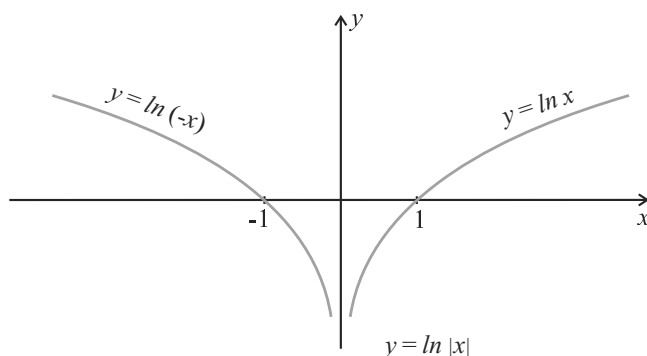


Figura 4.4

Usando a regra da cadeia, prova-se que $\frac{d}{dx} [\ln |x|] = \frac{1}{x}$, não importa se $x > 0$ ou $x < 0$.

- ii. Se f é derivável e $f(x) \neq 0$, usando a fórmula de derivação dada em (i) e a regra da cadeia, é fácil ver que
- $$\frac{d}{dx} [\ln |f(x)|] = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$
- iii. A função logaritmo natural é uma função bijetora de $(0, +\infty)$ em \mathbb{R} . Portanto, ela possui uma função inversa que tem por domínio \mathbb{R} e por imagem $(0, +\infty)$.

A FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

Definição 4.2.

A inversa da função logaritmo natural é dita *função exponencial natural*. A imagem de cada $x \in \mathbb{R}$ pela função exponencial será denotada por e^x .

Assim,

$$\ln(e^x) = x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \text{ para todo } x \in (0, +\infty)$$

Portanto,

$$e^0 = 1 \text{ pois } \ln 1 = 0$$

$$e^1 = e \text{ pois } \ln e = 1$$

A DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

A função exponencial natural é derivável e $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Daqui resulta que $G(x) = e^x$ é uma primitiva de e^x .

Assim, se $a < b$, $\int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a$.

Se u é uma função derivável de x , pela regra da cadeia, obtemos $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$.

OPERAÇÕES COM A FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

1. $e^{x+y} = e^x e^y$

2. $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ e $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$

3. $\forall x \in \mathbb{R}$ e todo inteiro $n \geq 0$ tem-se $e^{nx} = (e^x)^n = (e^n)^x$

4. Para quaisquer p e q , $q \neq 0$ tem-se $e^{\frac{p}{q}} = \left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p = (e^p)^{\frac{1}{q}}$

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NATURAL

1. A função exponencial é crescente.
2. O gráfico da função exponencial natural tem concavidade para cima.
3. $Im(e^x) = (0, +\infty)$
4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

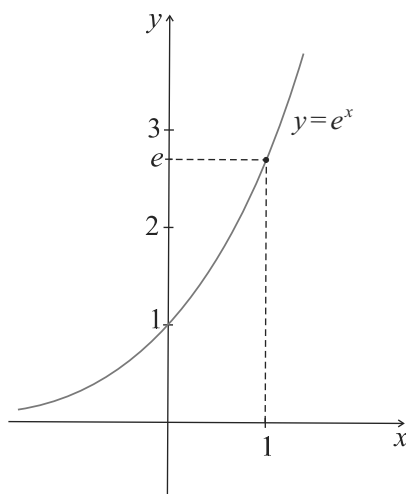


Figura 4.5

Observe na **Figura 4.6** que o gráfico de e^x é uma reflexão do gráfico de $\ln x$ em relação à reta $y = x$.

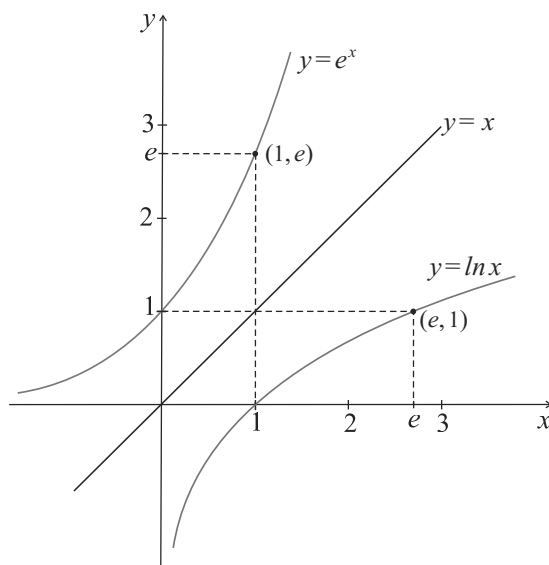


Figura 4.6

A FUNÇÃO LOGARÍTMICA NA BASE a , $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$

Definição 4.3.

Seja $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Para cada $x \in (0, +\infty)$, definimos $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. O número $\log_a x$ é dito *logaritmo de x na base a* .

$$\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\log_a x = 1 \Leftrightarrow x = a$$

A DERIVADA DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA NA BASE a

A função $\log_a x$ é derivável em $(0, +\infty)$ e $\frac{d}{dx} [\log_a x] = \frac{1}{x \ln a}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

Se $u > 0$ é uma função derivável de x , pela regra da cadeia temos que $\frac{d}{dx} (\log_a u) = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u \ln a}$.

Se u é uma função derivável de x , tal que $u \neq 0$, então pela regra da cadeia temos que $\frac{d}{dx} (\log_a |u|) = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u \ln a}$.

PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DOS LOGARITMOS NA BASE a

Para quaisquer $x, y \in (0, +\infty)$, tem-se:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(x^n) = n \log_a x$ para todo n inteiro $n \geq 1$
3. $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$
4. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA NA BASE a ONDE $0 < a < 1$

1. A função \log_a é decrescente.
2. A função \log_a tem concavidade para cima.
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$

Exemplo 4.1.

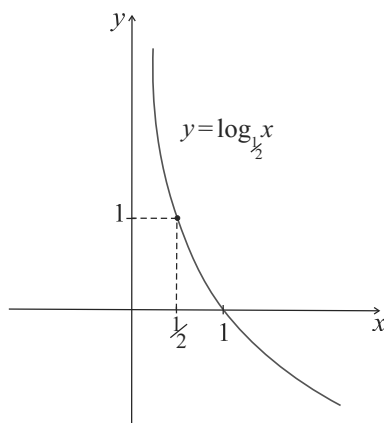


Figura 4.7

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO LOGARÍTMICA DE BASE a ONDE $a \in (1, +\infty)$

1. A função \log_a é crescente.
2. A função \log_a tem concavidade para baixo.
3. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$

Exemplo 4.2.

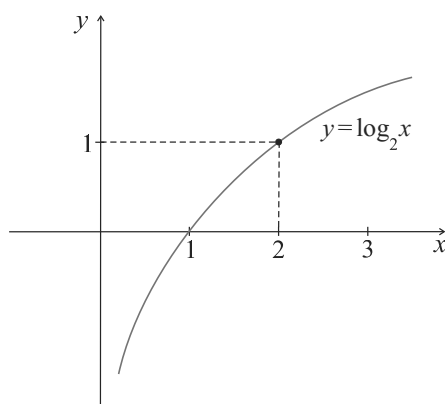


Figura 4.8

A função logarítmica na base $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$ é uma função bijetora de $(0, +\infty)$ em \mathbb{R} . Portanto, ela possui uma função inversa que tem por domínio \mathbb{R} e por imagem $(0, +\infty)$.

A FUNÇÃO EXPONENCIAL NA BASE a , $a \in (0, +\infty)$

Definição 4.4.

Seja $a \in (0, +\infty)$. Para cada $x \in \mathbb{R}$, definimos $a^x = e^{x \ln a}$.

Assim, se $a = 1$, $a^x = e^{x \ln 1} = e^0 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Se $a = e$, $a^x = e^{x \ln e} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, neste caso coincide com a função exponencial natural.

Suponha $a \in (0, +\infty)$, prova-se que

1. $\log_a(a^x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$
2. $a^{\log_a x} = x$ para todo $x \in (0, +\infty)$

Portanto, para cada $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$, a função $x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x \in (0, +\infty)$ é a função inversa da função \log_a .

A DERIVADA DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NA BASE $a \in (0, +\infty)$

A função exponencial com base $a \in (0, +\infty)$ é derivável e $\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x \forall x \in \mathbb{R}$. Daqui resulta que $G(x) = \frac{a^x}{\ln a}$ é uma primitiva de a^x . Assim, se $c < d$,

$$\int_c^d a^x dx = \left[\frac{a^x}{\ln a} \right]_c^d = \frac{a^d}{\ln a} - \frac{a^c}{\ln a}.$$

Se u é uma função derivável de x , pela regra da cadeia, obtemos $\frac{d}{dx}(a^u) = (\ln a)a^u \frac{du}{dx}$.

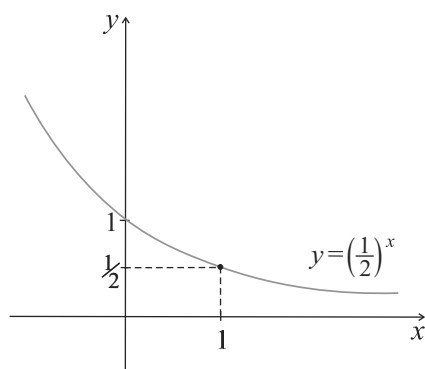
OPERAÇÕES COM A FUNÇÃO EXPONENCIAL NA BASE $a \in (0, +\infty)$ (LEI DOS EXPOENTES)

Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$
2. $(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ e $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
4. Se $a \neq 1$, $a^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NA BASE a ONDE $0 < a < 1$

1. A função $x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x \in (0, +\infty)$ é decrescente.
2. O gráfico da função $x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x \in (0, +\infty)$ tem concavidade para cima.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

Exemplo 4.3.**Figura 4.9****PROPRIEDADES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL NA BASE a ONDE $a \in (1, +\infty)$**

1. A função $x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x \in (0, +\infty)$ é crescente.
2. O gráfico da função $x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x \in (0, +\infty)$ tem concavidade para cima.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

Exemplo 4.4.

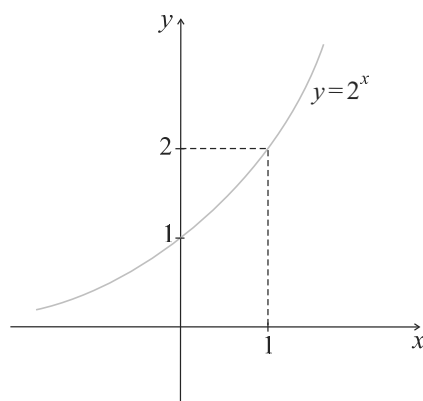


Figura 4.10

Observe, na **Figura 4.11**, que o gráfico de $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ é uma reflexão do gráfico de $\log_{\frac{1}{2}} x$ em relação à reta $y = x$.

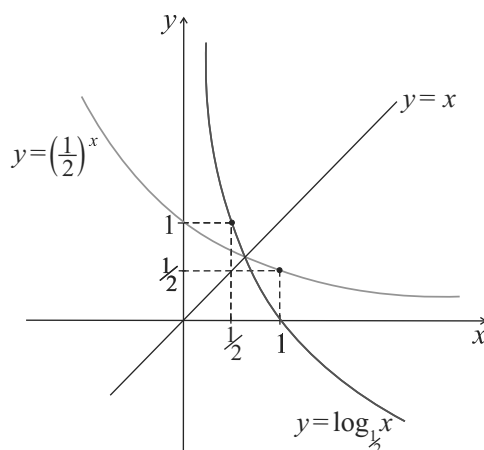


Figura 4.11

Observe, na **Figura 4.12**, que o gráfico de 2^x é uma reflexão do gráfico de $\log_2 x$ em relação à reta $y = x$.

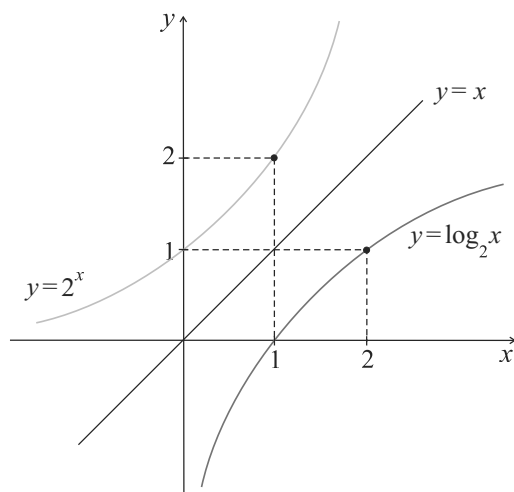


Figura 4.12



- i. Para a demonstração das propriedades anteriormente citadas, veja as Aulas 8, 9 e 10 do seu caderno didático.

- ii. Considere uma constante positiva a . Se $n \in \mathbb{N}$, sabemos do segundo grau que $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n\text{-vezes}}$ e

que $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n\text{-vezes}}}$, assim sabemos per-

feitamente o significado de a^p se $p \in \mathbb{Z}$. Também do segundo grau temos para $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q > 0$, então $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$. Mas, qual o significado de 2^π ou $3^{\sqrt{2}}$? Se observarmos a definição de função exponencial na base a positiva dada, temos agora que $a^x = e^{x \ln a}$, assim, $2^\pi = e^{\pi \ln 2}$, analogamente $3^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln 3}$.

- iii. Note que uma função exponencial como, por exemplo, $f(x) = 2^x$ ou $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, tem uma base constante e um expoente variável. Já as funções tais como $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ tem uma base variável e o expoente constante e são chamadas funções potências. Lembremos que já as estudamos anteriormente. Podemos agora trabalhar também com **funções potências generalizadas** como, por exemplo, $f(x) = x^\pi$ ou $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ quando $x > 0$. Neste caso, observe que para $x > 0$, $f(x) = x^\pi = e^{\pi \ln x}$ e $f(x) = x^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2} \ln x}$.

DERIVADA DE $f(x)^{g(x)}$

Sejam f e g duas funções deriváveis definidas num mesmo intervalo I não trivial, com $f(x) > 0$, $\forall x \in I$. Consideremos a função definida em I e dada por

$$y = f(x)^{g(x)}.$$

Aplicando \ln aos dois membros, obtemos $\ln y = \ln f(x)^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$. Isto é, $\ln y = g(x) \ln f(x)$. Aplicando a função inversa aos dois membros:


$$e^{\ln y} = e^{g(x) \ln f(x)}, \text{ ou seja, } y = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Isto é, $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$. Então, derivando ambos os membros, temos

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = e^{g(x) \ln f(x)} (g(x) \ln f(x))'.$$

Derivando o último fator, obtemos

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = e^{g(x) \ln f(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right].$$

-  iv. Como um caso particular de $f(x)^{g(x)}$, temos que se $r \in \mathbb{R}$ e $h(x) = x^r$, $x \in (0, +\infty)$. Então h é derivável em $(0, +\infty)$ e $h'(x) = rx^{r-1} \forall x \in (0, +\infty)$.

Assim, a derivada da função potência generalizada $f(x) = x^\pi$ quando $x > 0$ resulta $f'(x) = \pi x^{\pi-1}$. Analogamente, no caso de $f(x) = x^{\sqrt{2}}$ quando $x > 0$, a derivada é $f'(x) = \sqrt{2} x^{\sqrt{2}-1}$.

Por outro lado, note como é diferente se consideramos agora a função exponencial na base π , $g(x) = \pi^x$. Temos então que a derivada é $g'(x) = \pi^x \ln \pi$. Analogamente, $g(x) = (\sqrt{2})^x$ é uma função exponencial na base $\sqrt{2}$, assim, obtemos que

$$g'(x) = (\sqrt{2})^x \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} (\ln 2) (\sqrt{2})^x.$$

INFORMAÇÕES COMPLEMENTARES SOBRE AS FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

As funções hiperbólicas são uma classe especial de funções exponenciais que aparecem frequentemente na Matemática e suas aplicações. Elas são análogas de muitas formas às funções trigonométricas, e têm a mesma relação com a hipérbole que as funções trigonométricas têm com o círculo. Por essa razão são chamadas *funções hiperbólicas*.

Como já foi definida no seu caderno didático a função **seno hiperbólico** é definida por

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

É claro que o gráfico da função pode ser gerado com um recurso computacional, mas vale a pena observar que o gráfico desta função pode ser obtido esboçando-se separadamente os gráficos de $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$, somando-se as coordenadas y correspondentes. Vamos fazer isto por etapas:

Na **Figura 4.13**, mostramos a função $y = e^x$.

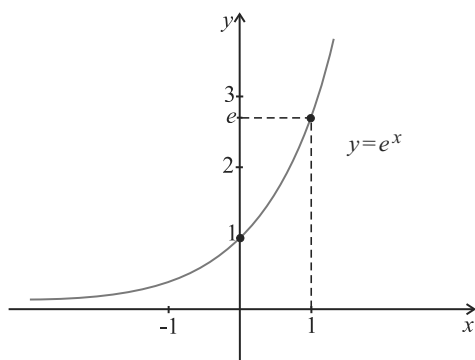


Figura 4.13

Do Apêndice 1 sabemos que fazendo uma compressão vertical por 2 na função anterior obtemos na **Figura 4.14** a função $y = \frac{1}{2}e^x$.

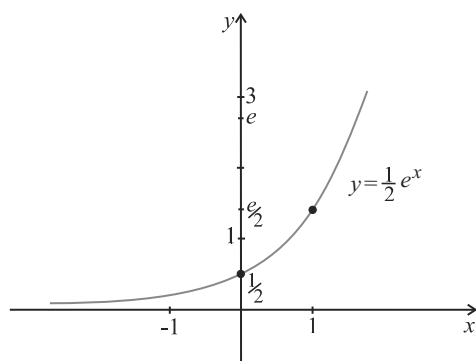


Figura 4.14

Fazendo na função anterior uma reflexão em torno do eixo y , obtemos na **Figura 4.15** a função $y = \frac{1}{2}e^{-x}$.

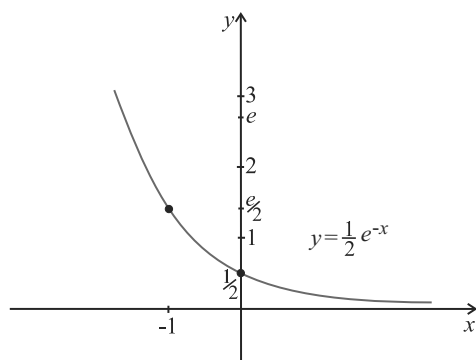


Figura 4.15

Fazendo na função anterior uma reflexão em torno do eixo x , obtemos na **Figura 4.16** a função $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$.

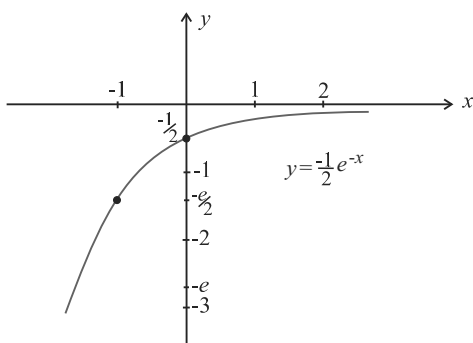


Figura 4.16

Somando-se as coordenadas y dos gráficos das funções $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = -\frac{1}{2}e^{-x}$ obtidas nas **Figuras 4.14 e 4.16** temos na **Figura 4.17** o gráfico da função $y = \sinh x$.

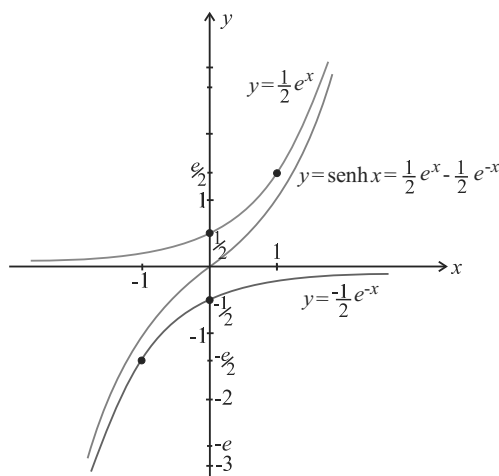


Figura 4.17

Analogamente, como já foi definida no seu caderno didático a função **cosseno hiperbólico** é definida por

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Somando-se as coordenadas y dos gráficos das funções $y = \frac{1}{2}e^x$ e $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ obtidas nas **Figuras 4.14 e 4.15** temos na **Figura 4.18** o gráfico da função $y = \cosh x$.

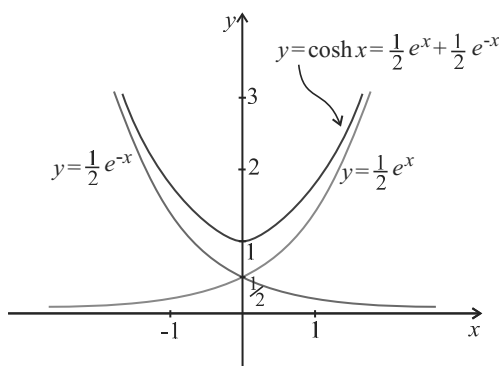


Figura 4.18

As funções hiperbólicas surgem em movimentos vibratórios, dentro de sólidos elásticos e em muitos problemas nos quais a energia mecânica é gradualmente absorvida pelo meio ambiente. A aplicação mais famosa é o uso do cosseno hiperbólico para descrever a forma de um fio dependurado.

Também foi definida no seu caderno didático a função **tan-gente hiperbólica** dada por

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

Na **Figura 4.19**, mostramos o gráfico da função $y = \operatorname{tgh} x$.

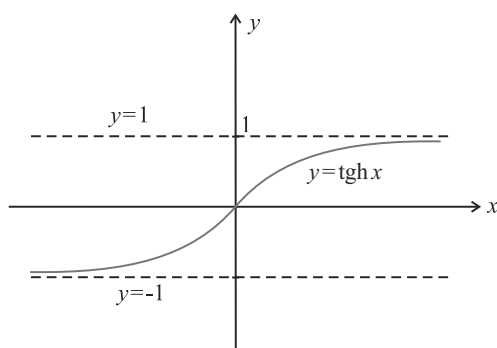


Figura 4.19

Podemos definir também as outras funções hiperbólicas tais como:

A função **cotangente hiperbólica** $y = \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$

A função **secante hiperbólica** $y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}.$

A função **cossecante hiperbólica** $y = \operatorname{cossech} x = \frac{1}{\sinh x}.$

Deixamos ao leitor a tarefa de procurar na bibliografia dada no guia da disciplina, os gráficos destas funções e suas derivadas assim como definir e fazer o esboço das Funções hiperbólicas inversas.

Desde que	Podemos concluir que
$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n, (n \neq -1)$	$\int_a^b x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _a^b, (n \neq -1)$
$(-\cos x)' = \sin x$	$\int_a^b \sin x dx = -\cos x \Big _a^b$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int_a^b \cos x dx = \sin x \Big _a^b$
$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x$	$\int_a^b \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x \Big _a^b$
$(-\operatorname{cotg} x)' = \operatorname{cosec}^2 x$	$\int_a^b \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{cotg} x \Big _a^b$
$(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$	$\int_a^b \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x \Big _a^b$
$(-\operatorname{cosec} x)' = \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$	$\int_a^b \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x dx = -\operatorname{cosec} x \Big _a^b$
$(\arcsen x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x \Big _a^b$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x \Big _a^b$
$(\operatorname{arcsec} x)' = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$\int_a^b \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcsec} x \Big _a^b$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln x \Big _a^b$
$\left(\frac{c^x}{\ln c}\right)' = c^x$	$\int_a^b c^x dx = \frac{c^x}{\ln c} \Big _a^b, c > 0, c \neq 1$
$(\cosh(x))' = \sinh(x)$	$\int_a^b \sinh(x) dx = \cosh(x) \Big _a^b$
$(\sinh(x))' = \cosh(x)$	$\int_a^b \cosh(x) dx = \sinh(x) \Big _a^b$
$(\operatorname{tgh}(x))' = \operatorname{sech}^2(x)$	$\int_a^b \operatorname{sech}^2(x) dx = \operatorname{tgh}(x) \Big _a^b$
$(-\operatorname{cotgh}(x))' = \operatorname{cosech}^2(x)$	$\int_a^b \operatorname{cosech}^2(x) dx = -\operatorname{cotgh}(x) \Big _a^b$
$(-\operatorname{sech}(x))' = \operatorname{sech}(x) \operatorname{tgh}(x)$	$\int_a^b \operatorname{sech}(x) \operatorname{tgh}(x) dx = -\operatorname{sech}(x) \Big _a^b$
$(-\operatorname{cosech}(x))' = \operatorname{cosech}(x) \operatorname{cotgh}(x)$	$\int_a^b \operatorname{cosech}(x) \operatorname{cotgh}(x) dx = -\operatorname{cosech}(x) \Big _a^b$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS DE INTEGRAIS DEFINIDAS QUE ENVOLVEM FUNÇÕES LOGARÍTMICAS, EXPONENCIAIS E HIPERBÓLICAS

Exercício 4.1.

Calcule as integrais definidas dadas:

a. $\int_1^2 x 3^{x^2} dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} \sin x dx$

Solução:

- a. Consideremos a função $G(x) = \frac{1}{2\ln 3} 3^{x^2}$. Pela regra da cadeia, G é derivável em \mathbb{R} e tem por derivada a função contínua $G'(x) = \frac{1}{2\ln 3} 3^{x^2} (2x) \ln 3 = x 3^{x^2}$. Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \int_1^2 x 3^{x^2} dx &= \int_1^2 G'(x) dx = G(2) - G(1) = \frac{1}{2\ln 3} 3^{2^2} - \frac{1}{2\ln 3} 3^{1^2} \\ &= \frac{1}{2\ln 3} 3^4 - \frac{1}{2\ln 3} 3^1 = \frac{1}{2\ln 3} (81 - 3) = \frac{1}{2\ln 3} (78) = \frac{39}{\ln 3}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_1^2 x 3^{x^2} dx = \frac{39}{\ln 3}.$$

- b. Consideremos a função $G(x) = \frac{1}{-\ln(\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x}$. Pela regra da cadeia, G é derivável em \mathbb{R} e tem por derivada a função contínua

$$G'(x) = \frac{1}{-\ln(\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} (-\sin x) \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} \sin x.$$

Portanto, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} \sin x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} G'(x) dx = G\left(\frac{\pi}{3}\right) - G(0) \\ &= \frac{1}{-\ln(\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos \frac{\pi}{3}} - \frac{1}{-\ln(\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos 0} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{(0-\ln 2)} \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right).$$

Portanto,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} \operatorname{sen} x dx = \frac{1}{2\ln 2} (\sqrt{2}-1).$$

Exercício 4.2.

Determine a área da região limitada pelos gráficos das funções $y = e^x$, $y = \frac{|x|}{e}$ e $x = \frac{e}{y}$ com $y > 0$. [Lembre-se de que e é o número real positivo tal que $\ln e = 1$].

Solução: Observe que $y = \frac{|x|}{e} = \begin{cases} \frac{x}{e} & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{x}{e} & \text{se } x < 0 \end{cases}$. Note-se que o gráfico desta função faz um bico no ponto $(0,0)$.

- Interceptando $y = e^x$ e a semi-reta $y = -\frac{x}{e}$, $x < 0$

$$\begin{cases} y = e^x \\ y = -\frac{x}{e}, \quad x < 0 \end{cases} \quad \left\{ e^x = -\frac{x}{e}, \quad x < 0 \Rightarrow x = -1, \right.$$

logo $y = \frac{1}{e}$, e temos o ponto $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$.

Note-se que $x = \frac{e}{y}$, $y > 0$ é equivalente a $y = \frac{e}{x}$, $x > 0$.

- Interceptando $y = \frac{e}{x}$, $x > 0$ e a semi-reta $y = \frac{x}{e}$, $x \geq 0$

$$\begin{cases} y = \frac{e}{x}, \quad x > 0 \\ y = \frac{x}{e}, \quad x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e}{x} = \frac{x}{e}, \quad x > 0 \Leftrightarrow x^2 = e^2, \quad x > 0 \Leftrightarrow x = e, \\ \end{cases}$$

logo, $y = 1$ e obtemos assim o ponto $(e, 1)$.

- Interceptando a função $y = \frac{e}{x}$, $x > 0$ e a função $y = e^x$

$$\begin{cases} y = \frac{e}{x}, & x > 0 \\ y = e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{e}{x} = e^x, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1,$$

logo, $y = e$ e obtemos assim o ponto $(1, e)$.

A região está esboçada na **Figura 4.20**.

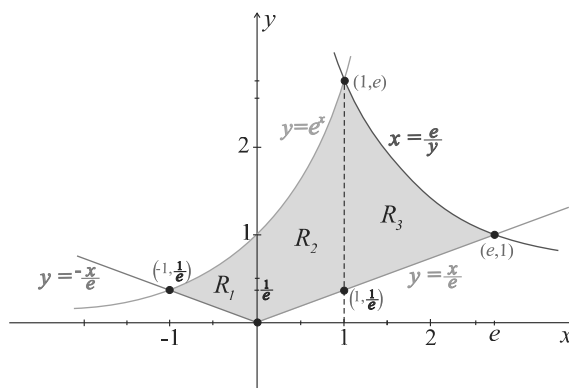


Figura 4.20

Do gráfico observamos que: $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Assim,

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3)$$

onde $A(R)$ representa a área da região R e $A(R_i)$ representa a área da região R_i , $i = 1, 2, 3$.

Portanto:

$$A(R) = \int_{-1}^0 \left[e^x + \frac{x}{e} \right] dx + \int_0^1 \left[e^x - \frac{x}{e} \right] dx + \int_1^e \left[\frac{e}{x} - \frac{x}{e} \right] dx.$$

Note-se que, para calcularmos a área de R_3 em termos de x , precisamos usar $y = \frac{e}{x}$, $x > 0$ ao invés de $x = \frac{e}{y}$, $y > 0$.

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, resulta que

$$A(R) = \left[e^x + \frac{x^2}{2e} \right]_{-1}^0 + \left[e^x - \frac{x^2}{2e} \right]_0^1 + \left[e \ln x - \frac{x^2}{2e} \right]_1^e$$

$$A(R) = e^0 - e^{-1} - \frac{1}{2e} + e^1 - \frac{1}{2e} - e^0 + e \ln e - \frac{e^2}{2e} - e \ln 1 + \frac{1}{2e}$$

$$\text{Assim, } A(R) = -\frac{3}{2e} + 2e - \frac{e^2}{2e} = \frac{-3 + 4e^2 - e^2}{2e} = \frac{3e^2 - 3}{2e} = \frac{3}{2e}(e^2 - 1) \text{ unidades de área.}$$

Observe que podemos também representar a área da região R , por três integrais definidas em termos de y , sendo que, neste caso, teremos que deixar indicadas algumas das integrais definidas, pois não temos ainda as ferramentas necessárias para calculá-las.

PASSO A PASSO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CADERNO DIDÁTICO REFERENTES ÀS INTEGRAIS DEFINIDAS QUE ENVOLVEM FUNÇÕES LOGARÍTMICAS, EXPONENCIAIS E HIPERBÓLICAS

Exercício 4.3.

Determine a área da região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$ e a reta $y = 2$, para $x > 0$.

(Aula 7 do caderno didático, exercício proposto nº8)

Solução: O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$ é o ramo da hipérbole equilátera que se encontra no primeiro quadrante, $g(x) = x^2$, $x > 0$ é a parte da parábola (de vértice na origem que abre para cima) que se encontra no primeiro quadrante. Logo, o gráfico da região pedida é mostrado na **Figura 4.21**.

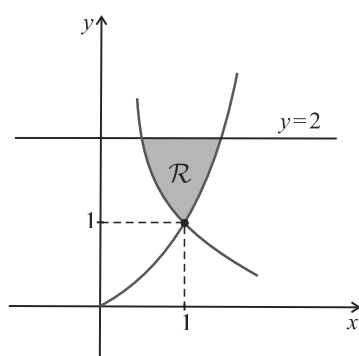


Figura 4.21

Fazendo a interseção das curvas, tem-se:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}, x > 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{x} \quad x > 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1.$$

Portanto, o ponto de interseção das duas curvas dadas neste caso é $(1, 1)$.

$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ y = 2 \end{cases}, x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \quad x > 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ é o ponto de interseção das duas curvas.

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 \end{cases}, x > 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \quad x > 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2}, 2)$ é o ponto de interseção das duas curvas.

Para calcular a área, observe que a melhor opção representa a área de R por uma integral em relação à variável y (veja a **Figura 4.22**); mostramos também um retângulo típico ou representativo horizontal na região.

Observe que podemos descrever a região como

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2, \frac{1}{y} \leq x \leq \sqrt{y} \right\}.$$

De fato, lembre-se de que $y = \frac{1}{x}, x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{y}, y > 0$, analogamente, $y = x^2, x > 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}, y > 0$.

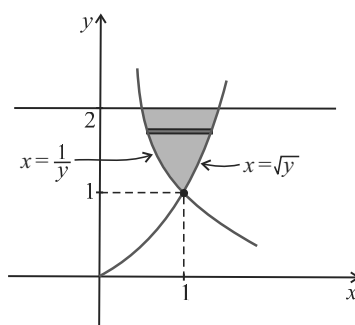


Figura 4.22

$$\text{Logo,} \quad A(R) = \int_1^2 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{y} \right) dy = \int_1^2 \left(y^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{y} \right) dy.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A(R) &= \left[\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \ln y \right]_1^2 = \left[\frac{2(2)^{\frac{3}{2}}}{3} - \ln 2 \right] - \left[\frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \ln 1 \right] \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{2} - \ln 2 - \frac{2}{3} + 0 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) - \ln 2 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Se quisermos calcular a área em relação à variável x , será necessário dividir a região em duas sub-regiões e representar a área de R por duas integrais em relação à variável x (veja a **Figura 4.23**); mostramos também um retângulo típico ou representativo vertical em cada região.

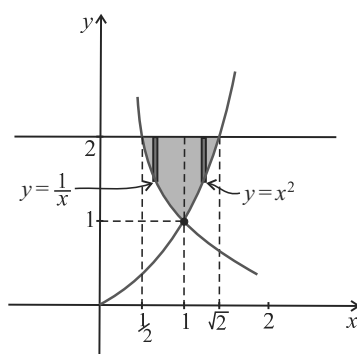


Figura 4.23

Assim, neste caso $A(R) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(2 - \frac{1}{x}\right) dx + \int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx$.

Deixamos ao leitor verificar que o resultado obtido neste caso é também $\frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) - \ln 2$ unidades de área.

Exercício 4.4.

Seja $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, definida para $x \in \mathbb{R}$.

- Encontre os números críticos de F , se houver, e determine os intervalos nos quais F é crescente e os intervalos nos quais F é decrescente.
- Determine a concavidade do gráfico de F e encontre os pontos de inflexão, se houver.
- Esboce o gráfico de F .

(Aula 9 do caderno didático, exercício proposto nº9)

Solução:

- Note que a função $f(t) = e^{-t^2} = \frac{1}{e^{t^2}}$ é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$, logo, estamos em condições de usar a 1ª forma do Teorema

Fundamental do Cálculo, assim F é derivável e $F'(x) = e^{-x^2}$. Observe que $F'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, portanto F é uma função crescente para todo $x \in \mathbb{R}$ e também podemos afirmar que f não possui pontos críticos.

- b. $F''(x) = e^{-x^2}(-2x)$. Logo, $F''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Note que se $x > 0$ então $F''(x) < 0$, portanto o gráfico de F é concavo para baixo. Analogamente, se $x < 0$ então $F''(x) > 0$, portanto o gráfico de F é côncavo para cima, assim existe uma mudança de concavidade em $x = 0$. Por outro lado, existe $F'(0)$ e $F'(0) = 1$, também da definição de F podemos ver $F(0) = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$. Assim, $(0,0)$ é ponto de inflexão e a reta tangente nesse ponto tem por equação $y = x$.
- c. Por outro lado, do fato que $\frac{1}{e^{t^2}} > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e a Proposição 2.1 a) do caderno didático podemos afirmar que: se $x > 0$ então $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt > 0$. Analogamente, podemos verificar que se $x < 0$ então, $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = -\int_x^0 e^{-t^2} dt < 0$.

Juntando toda a informação obtida anteriormente, mostramos na **Figura 4.24** um esboço do gráfico de F .

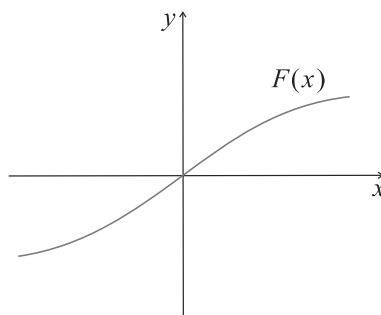


Figura 4.24

Exercício 4.5.

- a. Esboce a região compreendida entre o gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{|x|}$, o eixo das abscissas e as retas $x = -1$ e $x = 1$.
- b. Determine a área da região mencionada em (a).

(Aula 10 do caderno didático, exercício proposto nº3)

Solução:

$$a. f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{|x|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{7}\right)^x & \text{se } x \geq 0 \\ \left(\frac{1}{7}\right)^{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{1}{7}\right)^x & \text{se } x \geq 0 \\ 7^x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observe que a função dada é uma função par, assim, existe simetria do gráfico de f em relação ao eixo y . Note também que a base da função exponencial é $a = \frac{1}{7} < 1$, assim o gráfico de $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ para $x \geq 0$, segue a forma da **Figura 10.1.a** do caderno didático. Usando a simetria do gráfico, podemos então na **Figura 4.25** mostrar um esboço da região pedida.

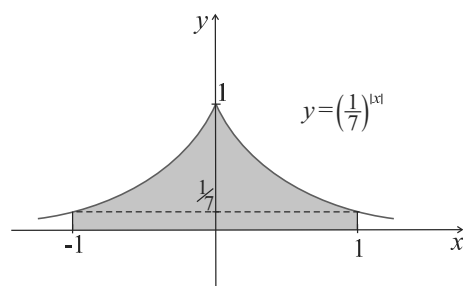


Figura 4.25

- b. Determine a área da região mencionada em a.

Note-se que a região dada tem simetria em relação ao eixo y , assim, para calcular a área da região dada, basta calcular a área da região situada no primeiro quadrante e multiplicar o valor por 2. Note-se que a forma mais simples de calcular a área é considerar o retângulo representativo na forma vertical. Veja a **Figura 4.26**.

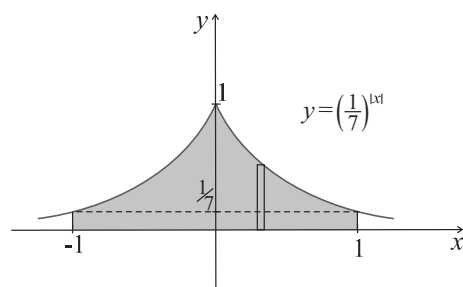


Figura 4.26

$$\text{Logo, } A(R) = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{7}\right)^{|x|} dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{7}\right)^x dx.$$

Na página 5 das notas de aula correspondentes ao EP04 temos que: se $c < d$, $\int_c^d a^x dx = \left[\frac{a^x}{\ln a} \right]_c^d = \frac{a^d}{\ln a} - \frac{a^c}{\ln a}$. Neste caso, podemos dizer que $G(x) = \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^x}{\ln \frac{1}{7}}$ é uma primitiva ou antiderivada de $\left(\frac{1}{7}\right)^x$.

Com efeito,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^x}{\ln \frac{1}{7}} \right) = \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^x}{\ln \frac{1}{7}} \ln \frac{1}{7} = \left(\frac{1}{7}\right)^x.$$

Portanto, pela 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que:

$$\begin{aligned} A(R) &= 2 \left[\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^x}{\ln \frac{1}{7}} \right]_0^1 = 2 \left(\frac{\left(\frac{1}{7}\right)^1}{\ln \frac{1}{7}} - \frac{\left(\frac{1}{7}\right)^0}{\ln \frac{1}{7}} \right) = \frac{2}{\ln \frac{1}{7}} \left(\frac{1}{7} - 1 \right) \\ &= \frac{2}{-\ln 7} \left(\frac{1}{7} - 1 \right) = \frac{2}{\ln 7} \left(\frac{6}{7} \right) = \frac{12}{7 \ln 7} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Exercício 4.6.

Calcule:

- $\int_1^2 \frac{e^x}{e^x + 5} dx$
(Aula 9 do caderno didático, exercício proposto nº10)
- $\int_a^b x 7^{x^2} dx$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$.
(Aula 10 do caderno didático, exercício proposto nº5)

Solução:

- Considere $g(x) = e^x + 5$, é claro que g é uma função derivável para todo $x \in \mathbb{R}$, e é claro também que $g(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, por outro lado \ln é derivável em $(0, +\infty)$.


Defina $G(x) = (\ln \circ g)(x) = \ln(e^x + 5)$, pela regra da cadeia, é claro que $G(x)$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$ e $G'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$. Isto é, $G'(x) = \frac{e^x}{e^x + 5} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ em particular $G'(x) = \frac{e^x}{e^x + 5}$ para

todo $x \in [1, 2]$. Assim, $G(x)$ é uma primitiva ou antiderivada da função $\frac{e^x}{e^x + 5}$. Finalmente, usando a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\int_1^2 \frac{e^x}{e^x + 5} dx = \ln(e^x + 5) \Big|_1^2 = \ln(e^2 + 5) - \ln(e + 5) = \ln\left(\frac{e^2 + 5}{e + 5}\right).$$

- b. Considere $G(x) = \frac{7^{x^2}}{2 \ln 7}$. É claro que 7^{x^2} é derivável, pois é a composição da função exponencial 7^x e a função polinomial $g(x) = x^2$, ambas deriváveis para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, pela regra da cadeia, G é derivável em todo \mathbb{R} e $G'(x) = 2x \frac{7^{x^2}}{2 \ln 7} \ln 7 = x 7^{x^2}$. Em particular, $G'(x) = x 7^{x^2}$ para todo $x \in [a, b]$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Portanto, $G(x) = \frac{7^{x^2}}{2 \ln 7}$ é uma primitiva ou antiderivada de $x 7^{x^2}$. Finalmente, usando a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\int_a^b x 7^{x^2} dx = \left[\frac{7^{x^2}}{2 \ln 7} \right]_a^b = \frac{7^{b^2}}{2 \ln 7} - \frac{7^{a^2}}{2 \ln 7} = \frac{1}{2 \ln 7} [7^{b^2} - 7^{a^2}].$$

 Observe que o exercício proposto nº5 a-c, da Aula 7 do caderno didático, encontra-se resolvido na Aula 11, Exercício 3 do próprio caderno didático (página 95).

Exercício 4.7.

Mostre que as funções $\sinh x$, $\cosh x$, $\tanh x$ são deriváveis em \mathbb{R} e, além disso, tem-se a. $\sinh'(x) = \cosh x$, b. $\cosh'(x) = \sinh x$ e c. $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(Aula 9 do caderno didático, exercício proposto nº 5)

Solução: Lembre que, pela definição, $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Como a função $y = e^x$ é derivável em \mathbb{R} , segue que as funções $y = \sinh(x)$ e $y = \cosh(x)$ também são deriváveis em \mathbb{R} por serem somas de funções deriváveis em \mathbb{R} .

Quanto à função $y = \tanh(x)$, basta lembrar que $e^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, o denominador da fração que define $\tanh(x) =$

$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ não se anula. Sendo quociente de funções deriváveis em \mathbb{R} , segue que a função $y = \operatorname{tgh}(x)$ é derivável em \mathbb{R} .

Cálculo das derivadas:

$$\text{a. } (\sinh(x))' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x;$$

$$\text{b. } (\cosh(x))' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x;$$

c. Pela regra de derivação do quociente, tem-se:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tgh}(x))' &= \frac{(e^x - e^{-x})' \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x}) \cdot (e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x}) \cdot (e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \operatorname{tgh}^2(x) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Pelo exercício 4.b da Aula 9 do caderno didático (você fez este exercício?), sabemos que $\operatorname{tgh}^2(x) + \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1$, ou seja,

$$1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \operatorname{sech}^2(x).$$

Portanto, segue de 4.1 que $(\operatorname{tgh}(x))' = \operatorname{sech}^2(x)$.

Veja no Apêndice 4, no final deste caderno, o passo a passo de exercícios adicionais correspondentes a esta semana.

Semana 5

INTEGRAL INDEFINIDA. TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO: MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO

RECORDAÇÃO SOBRE PRIMITIVAS OU ANTIDERIVADAS E A INTEGRAL INDEFINIDA

Definição 5.1.

Uma função F é uma *primitiva* ou *antiderivada* de f no intervalo I se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I .

Exemplo 5.1.

Suponha que lhe peçam para encontrar uma função F cuja derivada é $f(x) = 2x$. A partir do seu conhecimento de derivadas, você provavelmente dirá que $F(x) = x^2$ é uma resposta adequada pois $F'(x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$. Mas a função $H(x) = x^2 + 1$ também satisfaz $H'(x) = 2x$. Analogamente, $J(x) = x^2 - 1$ também satisfaz $J'(x) = 2x$. Consequentemente, F , H e J são primitivas ou antiderivadas de f . Na verdade, qualquer função da forma $G(x) = x^2 + C$ onde C é uma constante, é uma primitiva ou antiderivada de f . Atribuindo valores específicos para a constante C obtemos uma família de funções cujos gráficos são translações verticais da parábola $F(x) = x^2$. Veja na **Figura 5.1** vários membros da família de primitivas ou antiderivadas de $f(x) = 2x$.

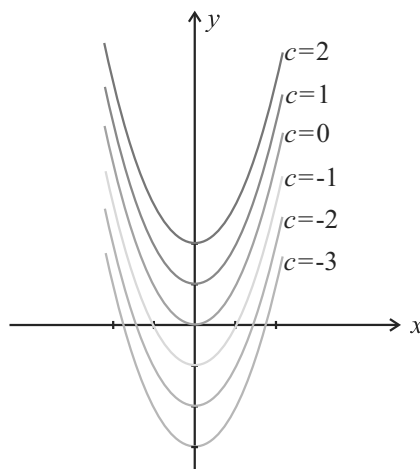


Figura 5.1

Falando de modo mais geral, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.1.

Se F é uma primitiva ou antiderivada de f em um intervalo I , então a **primitiva** ou **antiderivada** mais geral de f em I é $F(x) + C$, onde C é uma constante.

NOTAÇÃO PARA PRIMITIVAS OU ANTIDERIVADAS

O conjunto de todas as primitivas ou antiderivadas da função f é denominado **integral indefinida de f** em relação a x e simbolizado por $\int f(x)dx = F(x) + C$. A constante C é chamada a constante de integração; ela é uma constante arbitraria uma vez que a ela pode ser atribuído qualquer valor real.

No caso do Exemplo 5.1 podemos escrever então $\int 2x dx = x^2 + C$.

Note que a integral indefinida de uma função f é uma *família de funções*; um membro específico da família é determinado atribuindo um valor particular à constante de integração. Esta família tem a propriedade de que cada um de seus membros é

uma antiderivada de f e reciprocamente, toda primitiva ou antiderivada de f é um membro da família.

Exemplo 5.2.

Encontre G dado que $G'(x) = 2x$ e $G(1) = -1$.

Solução: Como G é uma primitiva de $f(x) = 2x$ temos que $G(x) = \int 2x dx = x^2 + C$ para algum valor da constante C . Para calcular C usamos o fato de que $G(1) = -1$. Como $G(x) = x^2 + C$ vemos que $G(1) = 1^2 + C = 1 + C = -1$, logo $C = -2$. Portanto, $G(x) = x^2 - 2$ é o membro da família procurado. Veja na **Figura 5.2** o membro da família que passa pelo ponto $(1, -1)$.

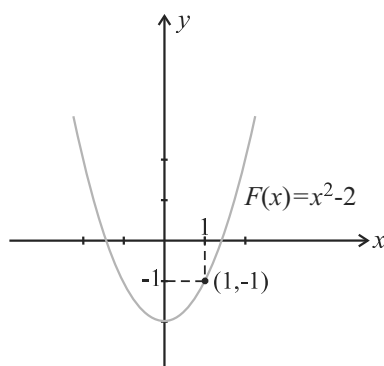



Figura 5.2

 Deve-se fazer uma distinção cuidadosa entre integral definida e indefinida. Uma integral definida $\int_a^b f(x) dx$ é um número, enquanto uma integral indefinida $\int f(x) dx$ é uma função (ou uma família de funções).

Vamos enunciar a tabela básica de fórmulas de primitivas dada na página 55 deste caderno, porém agora na notação de integrais indefinidas. Adicionaremos também algumas primitivas que foram obtidas posteriormente.

Tabela Básica de Integrais Indefinidas	
$\int k \, dx = kx + C,$	$\int x^n \, dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + C, \, (n \neq -1)$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C,$	$\int e^x \, dx = e^x + C,$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$	$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C,$
$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C,$	$\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C,$
$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C,$	$\int \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C,$
$\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C,$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + C,$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + C,$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arcsec} x + C,$
$\int \operatorname{senh} x \, dx = \cosh x + C,$	$\int \cosh x \, dx = \operatorname{senh} x + C,$
$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \operatorname{tgh} x + C,$	$\int \operatorname{cosech}^2 x \, dx = -\operatorname{cotgh} x + C,$
$\int \operatorname{sech} x \operatorname{tgh} x \, dx = -\operatorname{sech} x + C,$	$\int \operatorname{cosech} x \operatorname{cotgh} x \, dx = -\operatorname{cosech} x + C$

Adotamos a convenção de que quando uma fórmula para uma integral indefinida geral é dada, ela é válida somente em um intervalo. Por exemplo, escrevemos $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$, com o entendimento de que isso é válido no intervalo $(0, +\infty)$ ou no intervalo $(-\infty, 0)$.

PROPRIEDADES DA INTEGRAL INDEFINIDA

- 1. $\int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$
- 2. $\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx.$

MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO

A partir desta semana, você estudará várias técnicas de integração que vão aumentar muito o conjunto de integrais às quais as regras básicas de integração podem ser aplicadas. É importante sermos capazes de encontrar antiderivadas, mas nossa ta-

bela básica de integrais indefinidas dada na Semana 5, página 178 do caderno da coordenação não mostra, por exemplo, como calcular integrais do tipo:

$$\int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx \quad (5.1)$$

Para encontrar essa integral usaremos a estratégia de introduzir uma nova variável; mudamos de uma variável x para uma nova variável, digamos u . Suponha que façamos $u = x^3 + 1$. Sabemos do Cálculo I que a diferencial de u é $du = 3x^2 dx$. Note que se dx que está dentro da integral indefinida for interpretada como uma diferencial, então a diferencial $3x^2 dx$ ocorrerá em 5.1; portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int \sqrt{x^3 + 1} 3x^2 dx = \int \sqrt{u} du \\ &= \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Mas agora podemos verificar que temos a resposta correta usando a regra da cadeia para derivar a função final de 5.2. Com efeito:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{2(x^3 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \right] = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}} (3x^2) = 3x^2 \sqrt{x^3 + 1}.$$

A substituição feita na integral indefinida 5.1 é um caso particular da fórmula de substituição ou da fórmula da mudança de variáveis dada no Teorema 17.1 do caderno didático:

REGRAS DA SUBSTITUIÇÃO

Se $u = g(x)$ é uma função derivável, f é contínua e $\text{Im}(g) \subset \text{Dom}(f)$, então

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

onde F é uma primitiva de f .

SUBSTITUIÇÃO E AS INTEGRAIS DEFINIDAS

Seja g uma função de classe C^1 (i.e) g é derivável e g' é contínua) e f uma função contínua. Suponhamos que $[a, b] \subset \text{Dom}(g)$ e $g([a, b]) \subset \text{Dom}(f)$. Então, temos

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$



- i. A regra de substituição estabelece que: é permitido operar com e após os sinais de integração como se fossem diferenciais.
- ii. O sucesso do método de substituição depende de que seja encontrada uma substituição que transforme uma integral que não podemos calcular diretamente em outra que podemos.
- iii. Se a primeira substituição falhar, podemos tentar simplificar o integrando adiante com mais uma ou duas substituições. Outra possibilidade é começar de novo. Pode haver mais de um bom caminho para começar.

MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO. PROCEDIMENTOS ALGÉBRICOS

Frequentemente, precisamos reescrever uma integral para que esta se encaixe em uma fórmula-padrão.

Exercício 5.1.

Calcule cada integral:

a. $\int \frac{8}{x^2 + 16} dx$

c. $\int \frac{8x^2}{x^2 + 16} dx$

b. $\int \frac{8x}{x^2 + 16} dx$

d. $\int \frac{8x}{(x^2 + 16)^2} dx$

Solução: Observemos que todas as integrais dadas são parecidas, porém vamos ver que essas pequenas diferenças no integrando vão nos levar a técnicas de solução muito diferentes:

a. **Uso da regra do arco tangente**

Note-se que

$$\int \frac{8}{x^2 + 16} dx = 8 \int \frac{1}{16 \left(\frac{x^2}{16} + 1 \right)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{4} \right)^2 + 1} dx.$$

Para resolver a integral à direita, faça a substituição $u = \frac{x}{4} \Rightarrow du = \frac{dx}{4} \Rightarrow dx = 4du$ e use a integral do arco tangente. Assim,

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{4} \right)^2 + 1} dx = \frac{4}{2} \int \frac{1}{u^2 + 1} du = 2 \operatorname{arctg} u + C = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{4} \right) + C$$

$$\int \frac{8}{x^2 + 16} dx = 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C.$$



Em geral, se $a > 0$,

$$\begin{aligned} \text{i. } \int \frac{dx}{x^2 + a^2} &= \int \frac{dx}{a^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + 1 \right)} = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{\frac{x^2}{a^2} + 1} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a} \right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a du}{u^2 + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{u^2 + 1} \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C. \end{aligned}$$

Obtemos, assim, a nova fórmula:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C$$

ii. Raciocinando em forma análoga, podemos mostrar também que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{a} \right) + C, \quad |x| < a$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left| \frac{x}{a} \right| + C, \quad |x| > a$$

b. **Uso da regra do ln**

$$\int \frac{8x}{x^2 + 16} dx$$

Observe que, neste caso, a integral do arco tangente não se aplica, porque o numerador contém um fator de x . Faça a substituição $u = x^2 + 16 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}\int \frac{8x}{x^2+16} dx &= 4 \int \frac{2x}{x^2+16} dx = 4 \int \frac{du}{u} = 4 \ln u + C \\ &= 4 \ln(x^2+16) + C.\end{aligned}$$

c. **Reduzindo uma fração imprópria**

$$\int \frac{8x^2}{x^2+16} dx$$

(Neste exercício, note-se que o grau do numerador é igual ao grau do denominador)

Observa-se que o integrando neste caso é uma função racional, isto é, o quociente de polinômios e também é uma fração imprópria (isto é, o grau do numerador é maior ou igual ao grau do denominador). Neste caso, antes de fazer a integração, dividimos primeiro o numerador pelo denominador, obtendo o quociente, mais um resto que é uma fração própria (isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador):

$$\begin{array}{r|l} \frac{8x^2}{-8x^2-128} & \frac{x^2+16}{8} \quad \text{então} \quad \frac{8x^2}{x^2+16} = 8 - \frac{128}{x^2+16}. \\ \hline -128 & \end{array}$$

$$\int \frac{8x^2}{x^2+16} dx = \int \left(8 - \frac{128}{x^2+16} \right) dx = 8x - 128 \int \frac{dx}{x^2+4^2} \quad (5.3)$$

Utilizando a fórmula obtida na observação i, página anterior, tem-se que:

$$\int \frac{dx}{x^2+4^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C. \quad (5.4)$$

Finalmente, substituindo 5.4 em 5.3, obtemos

$$\int \frac{8x^2}{x^2+16} dx = 8x - \frac{128}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{4} \right) + C.$$

d. **Uso da regra geral da potência**

$$\int \frac{8x}{(x^2+16)^2} dx$$

Observe que, neste caso, a integral do arco tangente também não se aplica, porque o numerador contém um fator de x . Além disso, x^2+16 está elevado ao quadrado. Faça a substituição $u = x^2+16 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$.

$$\begin{aligned}\int \frac{8x}{(x^2+16)^2} dx &= 4 \int \frac{du}{u^2} = 4 \int u^{-2} du = 4 \frac{u^{-1}}{-1} + C \\ &= -\frac{4}{u} + C = -\frac{4}{x^2+16} + C.\end{aligned}$$

Exercício 5.2.

Separando uma fração

Calcule $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Solução: Para integrar $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx$, é conveniente separar o integrando da seguinte forma:

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (5.5)$$

Lembre-se de que conhecemos a substituição simples:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + C_1. \quad (5.6)$$

Resta integrar $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$; para isso, fazemos a substituição

$$\begin{cases} u = 1-x^2 \\ du = -2x dx \end{cases} \text{ logo,}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left(-\frac{1}{2}\right) (-2) \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{(-2)x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(-\frac{1}{2}\right) \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \int u^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \left(-\frac{2}{2}\right) u^{\frac{1}{2}} + C_2 = -\sqrt{1-x^2} + C_2.\end{aligned} \quad (5.7)$$

Substituindo 5.6 e 5.7 em 5.5, obtemos, finalmente,

$$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Observe que neste exercício a função integrando não é uma função racional, pois o numerador é um polinômio, porém o denominador não o é. Neste caso, o integrando é uma função algébrica.

Exercício 5.3.

Multiplicando por uma forma de 1

Verifique a fórmula

$$\int \operatorname{cosec} x dx = -\ln |\operatorname{cosec} x + \cotg x| + C. \quad (5.8)$$

Solução:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec} x dx &= \int (\operatorname{cosec} x)(1) dx = \int \operatorname{cosec} x \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{cosec} x + \cotg x}{\operatorname{cosec} x + \cotg x}}_1 dx \\ &= \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \cotg x}{\operatorname{cosec} x + \cotg x} dx. \end{aligned}$$

Faça a substituição $u = \operatorname{cosec} x + \cotg x \Rightarrow du = (-\operatorname{cosec} x \cotg x - \operatorname{cosec}^2 x) dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x + \operatorname{cosec} x \cotg x}{\operatorname{cosec} x + \cotg x} dx &= \int \frac{-du}{u} = -\ln |u| + C \\ &= -\ln |\operatorname{cosec} x + \cotg x| + C \end{aligned}$$

Analogamente, podemos verificar a fórmula:

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tg x| + C. \quad (5.9)$$

REALIZANDO UMA SUBSTITUIÇÃO PARA SIMPLIFICAR A INTEGRAÇÃO INDEFINIDA

Exercício 5.4.

Calcule:

- a. $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$
- b. $\int \frac{\cos 3x}{(2 + \operatorname{sen} 3x)^{\frac{1}{3}}} dx$
- c. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$

Solução:**a. Uma forma disfarçada da regra da potência combinada com raízes**

Para integrar $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$, fazemos a substituição:

$$\begin{cases} u = 1 + x^2 \Leftrightarrow x^2 = u - 1 \\ du = 2x dx \end{cases}.$$

Então, temos

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int x^2 \sqrt{1+x^2} x dx = \frac{1}{2} \int x^2 \sqrt{1+x^2} 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int (u-1) u^{\frac{1}{2}} du = \int \left(u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}} \right) du = \frac{2}{2} \cdot \frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2}{2} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + C \\ &= \frac{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \end{aligned}$$

b. Uma forma disfarçada da regra da potência combinada com funções trigonométricas

Para integrar $\int \frac{\cos 3x}{(2 + \sin 3x)^{\frac{1}{3}}} dx$ fazemos a substituição:

$$\begin{cases} u = 2 + \sin 3x \\ du = 3 \cos 3x dx \end{cases} \text{ logo,}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos 3x}{(2 + \sin 3x)^{\frac{1}{3}}} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{3 \cos 3x}{(2 + \sin 3x)^{\frac{1}{3}}} dx = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^{\frac{1}{3}}} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{3}} du = \frac{3}{3} \frac{u^{\frac{2}{3}}}{2} + C = \frac{1}{2} (2 + \sin 3x)^{\frac{2}{3}} + C \end{aligned}$$


c. Uma forma disfarçada da regra do arco seno

Note-se que $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{e^x dx}{e^x \sqrt{e^{2x}-1}}$, assim para calcular

a integral à direita, fazemos a substituição $\begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases}$

Logo,

$$\int \frac{e^x dx}{e^x \sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{du}{u \sqrt{u^2-1}} = \operatorname{arcsec} u + C = \operatorname{arcsec}(e^x) + C.$$

 Em geral, existe mais de um modo de resolver um problema de integração. Observe que a resposta muitas vezes aparece em uma forma diferente. Vejamos o seguinte exercício:

Exercício 5.5.

Calcule $\int \frac{dx}{1+e^x}$

Solução: Observa-se que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx \\ &= \int dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = x - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx\end{aligned}\quad (5.10)$$

Faça a substituição $u = 1 + e^x \Rightarrow du = e^x dx$ na última integral à direita,

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C_1 = \ln|1+e^x| + C \quad (5.11)$$

Substituindo 5.11 em 5.10:

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = x - \ln|1+e^x| + C = x - \ln(1+e^x) + C.$$

Também podemos resolver o exercício da seguinte forma:

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}(1+e^x)} dx = \int \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)} dx$$

Faça a substituição $u = e^{-x} + 1 \Rightarrow du = -e^{-x} dx$

$$\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|e^{-x}+1| + C = -\ln(e^{-x}+1) + C.$$

Observe que esta última expressão é equivalente à resposta anterior.

Exercício 5.6.

Usando identidades trigonométricas

Calcule $\int \operatorname{tg}^2 3x dx$

Solução: Faça $u = 3x \Rightarrow du = 3 dx$. Assim,

$$\int \operatorname{tg}^2 3x dx = \frac{1}{3} \int \operatorname{tg}^2 u du$$

Note-se que $\operatorname{tg}^2 u$ não está na tabela básica das integrais. Porém $\sec^2 u$ está na tabela. Isso sugere o uso da identidade trigonométrica $\operatorname{tg}^2 u = (\sec^2 u) - 1$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 3x dx &= \frac{1}{3} \int \operatorname{tg}^2 u du = \frac{1}{3} \int (\sec^2 u - 1) du = \frac{1}{3} \operatorname{tg} u - \frac{1}{3} u + C \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x) - \frac{1}{3}(3x) + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}(3x) - x + C\end{aligned}$$

USANDO O MÉTODO DE SUBSTITUIÇÃO PARA CALCULAR INTEGRAIS DEFINIDAS

Exercício 5.7.

Usando a técnica de substituição, calcule as seguintes integrais definidas:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx$

(Aula 18 do caderno didático, exercício proposto nº 4 e)

b. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

Solução:

- a. Para calcular a integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx$, vamos fazer a substituição $\begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{cases}$. Precisamos também mudar os limites de integração. Se $u = \sin x$, enquanto x varia de 0 até $\frac{\pi}{2}$, u varia de $u = \sin 0 = 0$ até $u = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx &= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}} \stackrel{(*)}{=} \left[\arcsen \frac{u}{2} \right]_0^1 \\ &= \arcsen \frac{1}{2} - \arcsen 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

(*) Fórmula usada $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen \left(\frac{u}{a} \right) + C, \quad |u| < a.$



Se você se esquece de mudar os limites de integração e substitui os valores de $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$ em $\arcsen \frac{u}{2}$, o exercício daria um resultado errado.

Note-se que é possível também resolver o exercício calculando primeiro a integral indefinida $\int \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx$. Faça a substituição:

$$\begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{cases} \text{ logo,}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}} \stackrel{(*)}{=} \arcsen \frac{u}{2} + C = \arcsen \left(\frac{\sin x}{2} \right) + C.$$

Como agora conhecemos uma família de primitivas, podemos usar a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo para calcular a integral definida, logo

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{4 - \sin^2 x}} dx &= \arcsen \left(\frac{\sin x}{2} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \arcsen \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2} \right) - \arcsen \left(\frac{\sin 0}{2} \right) = \arcsen \left(\frac{1}{2} \right) - \arcsen(0) \\ &= \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

b. Para calcular a integral definida $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx$, vamos fazer a

substituição $\begin{cases} u = e^x + 1 \\ du = e^x dx \end{cases}$. Precisamos mudar os limites de integração. Se $u = e^x + 1$, enquanto x varia de 0 até 1, u varia de $u = e^{(0)} + 1 = 1 + 1 = 2$ até $u = e^{(1)} + 1 = e + 1$ e, assim, obtemos

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int_2^{e+1} \frac{du}{u} = \ln |u| \Big|_2^{e+1} = \ln(e+1) - \ln(2) = \ln \left(\frac{e+1}{2} \right).$$

PASSO A PASSO DE OUTROS EXERCÍCIOS E DE ALGUNS EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CADERNO DIDÁTICO

Exercício 5.8.

Usando a técnica de substituição simples, calcule a seguinte integral:

$$\int (\cotg x) [\ln(\sin x)] dx.$$

Solução: $\int (\cotg x) [\ln(\sen x)] dx$

A integral dada parece não se adaptar à tabela básica das integrais dadas. Porém, considerando

$$u = \ln(\sen x) \Rightarrow du = \frac{\cos x}{\sen x} dx = \cotg x dx.$$

Assim,

$$\int (\cotg x) [\ln(\sen x)] dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} [\ln(\sen x)]^2 + C.$$

Exercício 5.9.

Usando a técnica de substituição simples, calcule as seguintes integrais definidas:

a. $\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{4 + 9x^2}$

b. $\int_1^e \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) dx$

Solução:

a. $\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{4 + 9x^2}$

$$\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{4 + 9x^2} = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{9x^2 + 4} = \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{9 \left(x^2 + \frac{4}{9} \right)} = \frac{1}{9} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2}.$$

Utilizando agora a observação dada na página 206 deste caderno e considerando $a = \frac{2}{3}$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2} &= \frac{1}{9} \left[\frac{1}{\left(\frac{2}{3} \right)} \operatorname{arctg} \frac{x}{\left(\frac{2}{3} \right)} \right]_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{3x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \right] - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{4 + 9x^2} = \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{18}.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int_1^e \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) dx &= \int_1^e \left(\frac{1}{x} \right) dx - \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} \right) dx = \\ &= \ln |x| \Big|_1^e - \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} \right) dx = 1 - \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} \right) dx \quad (5.12) \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$, na última integral à direita, precisamos considerar os limites de integração: se $u = \ln x$ enquanto x varia desde $x = 1$ até $x = e$, u varia desde $u = \ln 1 = 0$ até $u = \ln e = 1$, assim

$$\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x} \right) dx = \int_0^1 u du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \quad (5.13)$$

Finalmente, substituindo 5.13 em 5.12, obtemos

$$\int_1^e \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Exercício 5.10.

Calcule cada integral:

$$\text{a. } \int \frac{8}{\sqrt{16 - x^2}} dx$$

$$\text{b. } \int \frac{8x}{\sqrt{16 - x^2}} dx$$

$$\text{c. } \int \frac{8x^3}{16 - x^2} dx$$

$$\text{d. } \int \frac{8x}{(16 - x^2)^2} dx$$

Solução:

a. Uso da regra do arco seno

Note-se que

$$\int \frac{8}{\sqrt{16 - x^2}} dx = 8 \int \frac{1}{\sqrt{16 \left(1 - \frac{x^2}{16} \right)}} dx = 8 \int \frac{1}{4 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4} \right)^2}} dx$$

Para resolver a integral à direita, faça a substituição $u = \frac{x}{4} \Rightarrow du = \frac{dx}{4}$ e use a integral do arco seno assim:

$$= 8 \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = 8 \arcsen u + C = 8 \arcsen \left(\frac{x}{4} \right) + C.$$

b. Uso da regra geral da potência

$$\int \frac{8x}{\sqrt{16-x^2}} dx$$

Observe que neste caso a integral do arco seno não se aplica, porque o numerador contém um fator de x . Faça a substituição $u = 16 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow 2x dx = -du$.

$$\begin{aligned} \int \frac{8x}{\sqrt{16-x^2}} dx &= 4 \int \frac{2x}{\sqrt{16-x^2}} dx = -4 \int \frac{du}{\sqrt{u}} = -4 \int u^{-\frac{1}{2}} du = \\ &= -4 \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -8 \sqrt{16-x^2} + C. \end{aligned}$$

c. Reduzindo uma fração imprópria

$$\int \frac{8x^3}{16-x^2} dx$$

(Neste exercício, note-se que o grau do numerador é maior que o grau do denominador)

Observa-se que o integrando neste caso é o quociente de polinômios e é uma fração imprópria (isto é, o grau do numerador é maior ou igual ao grau do denominador). Antes de fazer a integração, dividimos primeiro o numerador pelo denominador, obtendo o quociente, mais um resto que é uma fração própria (isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador).

$$\frac{8x^3}{-8x^3+128x} \left| \begin{array}{l} -x^2+16 \\ -8x \end{array} \right. \text{ então } \frac{8x^3}{16-x^2} = -8x + \frac{128x}{16-x^2}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{8x^3}{16-x^2} dx &= \int \left(-8x + \frac{128x}{16-x^2} \right) dx = \\ &= -8 \frac{x^2}{2} + 128 \int \frac{x dx}{16-x^2} = -4x^2 + 128 \int \frac{x dx}{16-x^2} \quad (5.14) \end{aligned}$$

Faça a substituição $u = 16 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow x dx = \frac{-du}{2}$.

$$\begin{aligned} -4x^2 + 128 \int \frac{x dx}{16-x^2} &= -4x^2 - \frac{128}{2} \int \frac{du}{u} = \\ &= -4x^2 - 64 \ln u + C = -4x^2 - 64 \ln(16-x^2) + C \quad (5.15) \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo 5.15 em 5.14, obtemos

$$\int \frac{8x^3}{16-x^2} dx = -4x^2 - 64 \ln(16-x^2) + C.$$

d. Uso da regra geral da potência

$$\int \frac{8x}{(16-x^2)^2} dx$$

Faça a substituição $u = 16 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow x dx = -\frac{du}{2}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{8x}{(16-x^2)^2} dx &= -4 \int \frac{du}{u^2} = -4 \int u^{-2} du = -4 \frac{u^{-1}}{-1} + C = \\ &= \frac{4}{u} + C = \frac{4}{16-x^2} + C. \end{aligned}$$

Exercício 5.11.

Usando a técnica de substituição simples, calcule as seguintes integrais:

- a. $\int \frac{x^2}{1+x^6} dx$
- b. $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx$
- c. $\int \frac{1}{e^x \sqrt{1-e^{-2x}}} dx$

(Aula 18 do caderno didático, exercício proposto nº 4: c, g e f, respectivamente)

Solução:

$$\text{a. Note-se que } \int \frac{x^2}{1+x^6} dx = \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2} dx.$$

$$\text{Faça a substituição } u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3}.$$

$$\begin{aligned}\text{Logo, } \int \frac{x^2}{1+(x^3)^2} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{du}{1+u^2} = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x^3) + C.\end{aligned}$$

b. Observe que $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = \int \frac{e^x}{e^x \sqrt{(e^x)^2-1}} dx.$

Faça a substituição $u = e^x \Rightarrow du = e^x dx.$

$$\begin{aligned}\text{Portanto, } \int \frac{e^x}{e^x \sqrt{(e^x)^2-1}} dx &= \int \frac{du}{u \sqrt{u^2-1}} = \\ &= \operatorname{arcsec} |u| + C = \operatorname{arcsec}(e^x) + C, \text{ já que } e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

c. Pode-se escrever $\int \frac{1}{e^x \sqrt{1-e^{-2x}}} dx = \int \frac{1}{e^x \sqrt{1-(e^{-x})^2}} dx$

$$\begin{aligned}\text{Faça a substituição } u = e^{-x} \Rightarrow du &= -e^{-x} dx = -\frac{1}{e^x} dx \Rightarrow \\ \frac{1}{e^x} dx &= -du.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Assim, } \int \frac{1}{e^x \sqrt{1-(e^{-x})^2}} dx &= - \int \frac{1}{\sqrt{1-(u)^2}} du = \\ &= -\arcsen u + C = -\arcsen(e^{-x}) + C.\end{aligned}$$


Exercício 5.12.

Usando a técnica de substituição simples, calcule as seguintes integrais definidas:

a. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cotg \theta d\theta$

b. $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx$

(Aula 18 do caderno didático, exercício proposto nº 3: c e e, respectivamente)

 No Exercício 3.e do caderno didático, os limites de integração vão de 1 até 3. Porém se $x = 1$ o integrando não está definido nesse ponto, estaremos, portanto, na presença de uma integral imprópria que é um assunto que será estudado depois. Por causa disso, estamos trocando o limite inferior de integração.

Solução:

a. Pela definição de co-tangente, sabemos que

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cotg \theta d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta.$$

Faça a substituição $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$. Precisamos também considerar os limites de integração. Se $u = \sin x$, enquanto x varia de $\frac{\pi}{6}$ até $\frac{\pi}{3}$, u varia de $u = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ até $u = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, obtemos } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u} = \ln u \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \\ &= \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{1}{2} = \ln \sqrt{3} - \ln 2 - \ln 1 + \ln 2 = \ln \sqrt{3} = \frac{1}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

b. $\int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx$

Faça a substituição $u = x^3 - 1 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3}$. Precisamos também considerar os limites de integração. Se $u = x^3 - 1$, enquanto x varia de 2 até 3, u varia de $u = 2^3 - 1 = 7$ até $u = 3^3 - 1 = 26$.

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}} dx &= \frac{1}{3} \int_7^{26} \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{3} \int_7^{26} u^{-\frac{1}{2}} du = \\ &= \frac{2}{3} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big|_7^{26} = \frac{2}{3} \sqrt{26} - \frac{2}{3} \sqrt{7} = \frac{2}{3} (\sqrt{26} - \sqrt{7}). \end{aligned}$$

Semana 6

INTEGRAL INDEFINIDA. TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO: INTEGRAÇÃO POR PARTES

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Se u e v são funções contínuas de x e têm derivadas contínuas (isto é, u e v são de classe C^1), então

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Esta fórmula expressa a integral original em termos de outra integral. Devemos fazer as escolhas de u e dv , de forma que seja mais fácil calcular a segunda integral do que a integral original.

Como as escolhas de u e dv são fundamentais no processo de integração por partes, é aconselhável fazer o seguinte:

1. Tente fazer dv a parte mais complicada do integrando que se adapta a uma das regras básicas de integração. Então, u será o fator restante do integrando.
2. Outra opção: tente fazer u a porção do integrando cuja derivada é uma função mais simples do que u . Então, dv será o fator restante do integrando.

Exercício 6.1.

Verificando integração por partes

Quais são as opções para u e dv quando aplicamos a integração por partes a $\int \frac{2x}{e^x} dx = \int u dv$?

Quais opções nos levam a uma resolução correta da integral original?

Solução: Existem quatro opções possíveis:

$$1. \ u = 1 \text{ e } dv = \frac{2x}{e^x} dx$$

$$2. \ u = \frac{1}{e^x} \text{ e } dv = 2x dx$$

$$3. \ u = \frac{2x}{e^x} \text{ e } dv = dx$$

$$4. \ u = 2x \text{ e } dv = \frac{dx}{e^x}$$

A opção 1 não serve, porque ainda não sabemos como integrar $dv = \frac{2x}{e^x} dx$ para obter v .

$$\text{A opção 2 leva a } u = \frac{1}{e^x} \Rightarrow du = -e^{-x} dx \text{ e } dv = 2x dx \Rightarrow v = x^2$$

$$\int \frac{2x}{e^x} dx = \int \underbrace{\frac{1}{e^x}}_u \underbrace{2x dx}_{dv} = \frac{1}{e^x} x^2 - \int x^2 (-e^{-x}) dx.$$

Observe que a nova integral é menos apropriada do que a inicial.

$$\text{A opção 3 leva a } u = \frac{2x}{e^x} = 2xe^{-x} \Rightarrow du = (2e^{-x} - 2xe^{-x}) dx \\ \text{e } dv = dx \Rightarrow v = x.$$

$$\int \frac{2x}{e^x} dx = \int \underbrace{\frac{2x}{e^x}}_u \underbrace{dx}_{dv} = \frac{2x}{e^x} x - \int x(2e^{-x} - 2xe^{-x}) dx$$

Observe que a nova integral também é menos apropriada do que a inicial.

$$\text{A opção 4 leva a } u = 2x \Rightarrow du = 2 dx \text{ e } dv = \frac{dx}{e^x} = e^{-x} dx \Rightarrow \\ v = -e^{-x}$$

$$\int \frac{2x}{e^x} dx = \int \underbrace{2x}_u \underbrace{\frac{1}{e^x} dx}_{dv} = \underbrace{2x}_u \underbrace{(-e^{-x})}_v - \int \underbrace{(-e^{-x})}_v \underbrace{2 dx}_{du} = -\frac{2x}{e^x} - 2e^{-x} + C.$$

A opção 4 funciona bem como acabamos de ver.



Um erro frequente dos alunos é “inventar” outras formas de expressar o produto $u dv$, que, na verdade, estão erradas. Por exemplo: se você está pensando em chamar $u = e^x$ e $dv = 2x dx$, saiba que esta escolha está errada, pois, neste caso, teremos $\int \frac{2x}{e^x} dx = \int \frac{dv}{u}$, que é diferente do que pretendemos, que é $\int u dv$.

Exercício 6.2.

Integral do logaritmo natural

Calcule $\int \ln x dx$

Solução: Note-se que $\int \ln x dx = \int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv}$, onde integrar dv é

facílimo e integrar $\int v du$ também é mais simples que a integral inicial como veremos linhas abaixo, então usamos a fórmula de integração

por partes com $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int \frac{x}{x} dx = x \end{cases}$. Observe que, neste

caso, só temos essa escolha. Então:

$$\int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_v \underbrace{\ln x}_u - \int \underbrace{x}_v \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{du} dx = x \ln x - x + C.$$

Exercício 6.3.

Integral da função arco seno

Ache $\int \arcsen x dx$

Solução: Neste caso, também só temos uma escolha: $\int \underbrace{\arcsen x}_u \underbrace{dx}_{dv}$.

Usando a fórmula de integração por partes com $\begin{cases} u = \arcsen x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = \int dx = x \end{cases}, \text{ tem-se, então,}$$

$$\int \underbrace{\arcsen x}_u \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{(\arcsen x)}_u \underbrace{x}_v - \int \underbrace{x}_v \underbrace{\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)}_{du}$$

$$= x \arcsen x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsen x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (-2x) dx$$

$$= x \arcsen x + \frac{1}{2} \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = x \arcsen x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Exercício 6.4.

Usando a técnica de integração por partes, calcule as seguintes integrais:

a. $\int (x+1) \sen x dx$

(Aula 19 do caderno didático, exercício proposto nº 3-a)

b. $\int x(\ln x)^2 dx$

c. $\int e^{3x} \cos 4x dx$

d. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

e. $\int x \arctg x dx$

f. $\int \sen \sqrt{x} dx$

Solução: Usando integração por partes

a. Observe que $\int (x+1) \sen x dx = \int \underbrace{(x+1)}_u \underbrace{\sen x dx}_{dv}$, onde integrar dv é fácil e calcular $\int v du$ também é mais simples que a

integral inicial como veremos linhas abaixo, então usaremos a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = (x+1) \\ dv = \operatorname{sen} x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(x+1)}_u \underbrace{\operatorname{sen} x dx}_{dv} &= \underbrace{(x+1)}_u \underbrace{(-\cos x)}_v - \int \underbrace{(-\cos x)}_v \underbrace{dx}_{du} \\ &= -(x+1)\cos x + \operatorname{sen} x + C. \end{aligned}$$

Ou seja, $\int (x+1) \operatorname{sen} x dx = \operatorname{sen} x - (x+1)\cos x + C$.

Uso repetido da integração por partes

- b. Note-se que no integrando temos um produto, a ordem dos fatores como sabemos não altera o produto. Assim, $\int x(\ln x)^2 dx = \int (\ln x)^2 x dx$, logo podemos ver que $\int (\ln x)^2 x dx = \int \underbrace{(\ln x)^2}_u \underbrace{x dx}_{dv}$,

onde integrar dv é fácil e calcular $\int v du$ também é mais simples que a integral inicial como veremos a seguir, assim usaremos a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(\ln x) \frac{1}{x} dx \\ v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \underbrace{(\ln x)^2}_u \underbrace{x dx}_{dv} &= \underbrace{(\ln x)^2}_u \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v \underbrace{2(\ln x) \frac{1}{x} dx}_{du} \\ &= \frac{x^2}{2} (\ln x)^2 - \int x (\ln x) dx \end{aligned} \quad (6.1)$$

Calculando a integral à direita novamente por partes, observamos que $\int x (\ln x) dx = \int (\ln x) x dx = \int \underbrace{(\ln x)}_u \underbrace{x dx}_{dv}$, onde inte-

grar dv é fácil e calcular $\int v du$ também é mais simples que a integral inicial como veremos a seguir, assim usaremos a fórmula

de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

Logo,

$$\int \underbrace{\ln x}_u \underbrace{x dx}_{dv} = \underbrace{(\ln x)}_u \underbrace{\left(\frac{x^2}{2}\right)}_v - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v \underbrace{\frac{1}{x} dx}_{du} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx$$

Assim,

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} \right) + C = \frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) + C \quad (6.2)$$

Substituindo 6.2 em 6.1, resulta

$$\int x (\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2} \left[(\ln x)^2 - (\ln x) + \frac{1}{2} \right] + C$$

Fazendo reaparecer a integral desconhecida

- c. Para calcular $I = \int e^{3x} \cos 4x dx = \int \underbrace{e^{3x}}_u \underbrace{\cos 4x dx}_{dv}$, onde integrar dv é fácil e calcular $\int v du$ também é equivalente em dificuldade à integral inicial como veremos nas linhas a seguir, usaremos a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = e^{3x} \\ dv = \cos 4x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3e^{3x} dx \\ v = \frac{1}{4} \int 4 \cos 4x dx = \frac{1}{4} \sin 4x \end{cases}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I &= \int \underbrace{e^{3x}}_u \underbrace{\cos 4x dx}_{dv} = \underbrace{e^{3x}}_u \underbrace{\left(\frac{\sin 4x}{4}\right)}_v - \int \underbrace{\left(\frac{\sin 4x}{4}\right)}_v \underbrace{(3e^{3x} dx)}_{du} \\ &= \frac{e^{3x}}{4} \sin 4x - \frac{3}{4} \int e^{3x} \sin 4x dx \end{aligned} \quad (6.3)$$

Calcularemos a integral à direita novamente por partes observando que $\int e^{3x} \sin 4x dx = \int \underbrace{e^{3x}}_u \underbrace{\sin 4x dx}_{dv}$,

é fácil e calcular $\int v du$ também é equivalente em dificuldade à integral inicial como veremos nas linhas a seguir. Usaremos,

então, a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = e^{3x} \\ dv = \sin 4x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 3e^{3x} dx \\ v = \int \sin 4x dx = \frac{1}{4}(-\cos 4x) \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \underbrace{e^{3x}}_u \underbrace{\sin 4x dx}_{dv} &= \underbrace{e^{3x}}_u \underbrace{\left(\frac{-\cos 4x}{4}\right)}_v - \int \underbrace{\left(\frac{-\cos 4x}{4}\right)}_v \underbrace{3e^{3x} dx}_{du} \\ &= -\frac{e^{3x}}{4} \cos 4x + \frac{3}{4} \underbrace{\int e^{3x} \cos 4x dx}_I = -\frac{e^{3x}}{4} \cos 4x + \frac{3}{4} I \quad (6.4) \end{aligned}$$

Observe que a integral desconhecida I reapareceu.

Substituindo 6.4 em 6.3, obtemos

$$I = \frac{e^{3x}}{4} \sin 4x - \frac{3}{4} \left[-\frac{e^{3x}}{4} \cos 4x + \frac{3}{4} I \right]$$

$$I = \frac{e^{3x}}{4} \sin 4x - \frac{3}{16} e^{3x} \cos 4x - \frac{9}{16} I$$

Assim,

$$\frac{9}{16} I + I = \frac{e^{3x}}{4} \left[\sin 4x + \frac{3}{4} \cos 4x \right] + C_1$$

$$\frac{25}{16} I = \frac{e^{3x}}{4} \left[\sin 4x + \frac{3}{4} \cos 4x \right] + C_1.$$

Portanto, $I = \frac{4e^{3x}}{25} \left[\sin 4x + \frac{3}{4} \cos 4x \right] + C.$ Isto é,

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{4e^{3x}}{25} \left[\sin 4x + \frac{3}{4} \cos 4x \right] + C.$$

Combinando os métodos de substituição e integração por partes

d. Note-se que

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \underbrace{x^2}_u \cdot \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}_{dv} dx,$$

onde integrar dv é fácil. (Você pode estar se perguntando: Por

que não fizemos a escolha mais óbvia $\begin{cases} u = x^3 \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$? Se essa fosse a nossa escolha, integrar dv também seria fácil, porém teríamos depois que integrar $\int v du = \int (\arcsen x) 3x^2 dx = \int 3x^2 \arcsen x dx$, esta última integral é mais difícil do que a integral inicial, portanto não é uma boa escolha).

Usaremos, então, a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{cases} \quad (6.5)$$

Para calcular v , fazemos a substituição $\begin{cases} z = 1 - x^2 \\ dz = -2x dx \end{cases}$. Logo,

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} \\ &= -\frac{1}{2} \int z^{-\frac{1}{2}} dz = -\frac{2}{2} z^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Assim, substituindo 6.6 em 6.4, temos $\begin{cases} du = 2x dx \\ v = -\sqrt{1-x^2} \end{cases}$.

Continuando a integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x^2}_u \underbrace{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}_{dv} dx &= \underbrace{x^2}_u \underbrace{\left(-\sqrt{1-x^2}\right)}_v - \int \underbrace{\left(-\sqrt{1-x^2}\right)}_v \underbrace{2x dx}_{du} \\ &= -x^2 \sqrt{1-x^2} + \int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} 2x dx \end{aligned} \quad (6.7)$$

Para calcular a última integral à direita, usamos novamente o método de substituição. Seja $\begin{cases} z = 1 - x^2 \\ dz = -2x dx \end{cases}$. Assim,

$$\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} 2x dx = - \int z^{\frac{1}{2}} dz = -2 \left(\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + C = -\frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \quad (6.8)$$

Substituindo 6.8 em 6.7, resulta que

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3} \left(\sqrt{1-x^2} \right)^3 + C.$$

- e. Para calcular $\int x \operatorname{arctg} x dx = \int (\operatorname{arctg} x) x dx = \int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_u \underbrace{x dx}_{dv}$ usamos a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \int \underbrace{\operatorname{arctg} x}_u \underbrace{x dx}_{dv} &= \underbrace{(\operatorname{arctg} x)}_u \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v - \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v \underbrace{\frac{dx}{1+x^2}}_{du} \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Para calcular esta última integral note que o grau do polinômio do numerador é do mesmo grau que o polinômio do denominador; temos, então, que dividir primeiro o numerador pelo denominador:

$$\frac{x^2}{-x^2-1} \bigg| \frac{x^2+1}{1} \quad \text{então} \quad \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \int \frac{x^2}{x^2+1} dx &= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \\ &= x - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C_1 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Substituindo 6.10 em 6.9 dá

$$\begin{aligned} \int x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) + C = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C. \end{aligned}$$

- f. Para calcular $\int \operatorname{sen} \sqrt{x} dx$, fazemos a substituição:

$$z = \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x = z^2 \\ dx = 2z dz \end{cases}.$$

Assim,

$$\int \operatorname{sen} \sqrt{x} dx = \int (\operatorname{sen} z) 2z dz = 2 \int z \operatorname{sen} z dz. \quad (6.11)$$

Para calcular a integral à direita, usamos a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = z \\ dv = \operatorname{sen} z dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \int \operatorname{sen} z dz = -\cos z \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int \underbrace{z}_u \underbrace{\operatorname{sen} z dz}_{dv} &= \underbrace{z}_u \underbrace{(-\cos z)}_v - \int \underbrace{(-\cos z)}_v \underbrace{dz}_{du} \\ &= -z \cos z + \operatorname{sen} z + C_1 = -\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \operatorname{sen} \sqrt{x} + C_1 \end{aligned}$$

Logo,

$$\int z \operatorname{sen} z dz = -\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + \operatorname{sen} \sqrt{x} + C_1 \quad (6.12)$$

Substituindo 6.12 em 6.11, temos, finalmente,

$$\int \operatorname{sen} \sqrt{x} dx = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} + C.$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES DE INTEGRAIS DEFINIDAS

Se u e v são funções contínuas de x e tem derivadas contínuas (isto é, u e v são de classe C^1), então

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx.$$

Exercício 6.5.

Usando a técnica de integração por partes, calcule as seguintes integrais definidas:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen} x dx$

b. $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$

Solução:

- a. Para calcular $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$, usamos a fórmula de integração por partes para integrais definidas $\left(\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \right)$, com:
- $$\begin{cases} u = x \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = -\cos x \end{cases}. \text{ Então,}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_u \underbrace{\sin x dx}_{dv} &= \underbrace{x}_u \underbrace{(-\cos x)}_v \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(-\cos x)}_v \underbrace{dx}_{du} \\ &= x(-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-\cos \frac{\pi}{2} \right) - 0(-\cos 0) + \sin \frac{\pi}{2} - \sin(0) = \sin \frac{\pi}{2} = 1. \end{aligned}$$

- b. Para calcular $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$, fazemos a substituição $z = \sqrt{x} \Rightarrow x = z^2 \Rightarrow dx = 2z dz$. Precisamos considerar os limites de integração, se $z = \sqrt{x}$ enquanto x varia desde $x = 1$ até $x = 4$, z varia desde $z = \sqrt{1} = 1$ até $z = \sqrt{4} = 2$ e temos

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 e^z 2z dz = 2 \int_1^2 z e^z dz. \quad (6.13)$$

Para resolver esta última integral definida, usaremos a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = z \\ dv = e^z dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = e^z \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \underbrace{z}_u \underbrace{e^z dz}_{dv} &= \underbrace{z}_u \underbrace{e^z}_v \Big|_1^2 - \int_1^2 \underbrace{e^z}_v \underbrace{dz}_{du} \\ &= 2e^2 - 1e^1 - \left(e^z \Big|_1^2 \right) = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Portanto, substituindo 6.14 em 6.13, temos

$$\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx = 2e^2.$$

ENCONTRANDO A ÁREA**Exercício 6.6.**

Encontre a área da região limitada pelo gráfico da função $y = xe^{-\frac{x}{2}}$ (**Figura 13.1**, Módulo I), pelo eixo x e pela reta $x = 4$.

Solução: A região em questão é como a indicada na seguinte figura:

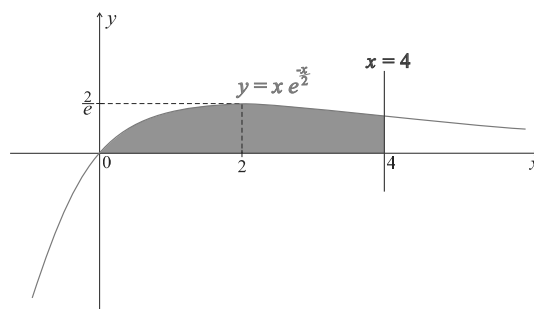


Figura 6.1

Do gráfico da região, temos que $A(R) = \int_0^4 x e^{-\frac{x}{2}} dx$, onde $A(R)$ é a área da região indicada na figura anterior.

Assim, para resolver esta última integral, precisamos usar a fórmula de integração por partes para integrais definidas com:

$$\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-\frac{x}{2}} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int e^{-\frac{x}{2}} dx = -2 \int -\left(\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} dx = -2e^{-\frac{x}{2}} \end{cases} .$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } A(R) &= \int_0^4 \underbrace{x}_u \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{dv} dx = \underbrace{x}_u \underbrace{(-2e^{-\frac{x}{2}})}_v \Big|_0^4 - \int_0^4 \underbrace{(-2e^{-\frac{x}{2}})}_v \underbrace{dx}_{du} = \\ &= \underbrace{x}_u \underbrace{(-2e^{-\frac{x}{2}})}_v \Big|_0^4 - 4 \int_0^4 \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} dx. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } A(R) = 4(-2e^{-2}) - 0 - \left(4e^{-\frac{x}{2}}\right)_0^4 = -\frac{8}{e^2} - \frac{4}{e^2} + 4 =$$

$$= 4 - \frac{12}{e^2} = 4 \left(\frac{e^2 - 3}{e^2} \right) \text{ unidades de área.}$$

PASSO A PASSO DE OUTROS EXERCÍCIOS E DE ALGUNS EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CADERNO DIDÁTICO

Exercício 6.7.

Usando a técnica de integração por partes, calcule as seguintes integrais:

a. $\int x^2 \sin x dx$

b. $\int e^{-y} \cos y dy$

Solução:

a. $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$

Usando a fórmula de integração por partes:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = \operatorname{sen} x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \text{Tem-se, então, } \int \underbrace{x^2}_u \underbrace{\operatorname{sen} x dx}_{dv} &= \underbrace{x^2}_u \underbrace{(-\cos x)}_v - \int \underbrace{(-\cos x)}_v \underbrace{2x dx}_{du} = \\ &= -x^2 \cos x + \int 2x \cos x dx. \end{aligned} \quad (6.15)$$


Para calcular a última integral do lado direito, vamos usar a integração por partes novamente.

$$\text{Faça } \begin{cases} u = 2x \\ dv = \cos x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{então, } \int \underbrace{2x}_u \underbrace{\cos x dx}_{dv} &= \underbrace{2x}_u \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_v - \int \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_v \underbrace{2 dx}_{du} = \\ &= 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C \end{aligned} \quad (6.16)$$

Substituindo 6.16 em 6.15, obtemos

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C.$$

 Quando aplicar a integração por partes várias vezes, é preciso ser cuidadoso para não trocar as substituições nas aplicações sucessivas. Por exemplo, no Exercício 6.16.a, a primeira substituição foi $u = x^2$ e $dv = \operatorname{sen} x dx$. Se na segunda aplicação,

you tivesse trocado a substituição para $\begin{cases} u = \cos x \\ dv = 2x dx \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} du = -\operatorname{sen} x dx \\ v = \int 2x dx = x^2 \end{cases}, \quad \text{teria obtido}$$

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\cos x}_u \underbrace{2x dx}_{dv} &= \underbrace{\cos x}_u \underbrace{(x^2)}_v + \int \underbrace{(x^2)}_v \underbrace{\operatorname{sen} x dx}_{du} = \\ &= x^2 \cos x + \int x^2 \operatorname{sen} x + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_u \underbrace{\text{sen } x dx}_{dv} &= \underbrace{-x^2}_u \underbrace{(\cos x)}_v + \int \underbrace{(\cos x)}_v \underbrace{2x dx}_{du} = \\ &= -x^2 \cos x + x^2 \cos x + \int x^2 \text{sen } x dx = \int x^2 \text{sen } x dx\end{aligned}$$

Desfazendo assim a integração anterior e retornando à integral original.

b. $\int e^{-y} \cos y dy$

Usando a fórmula de integração por partes:

$$\begin{cases} u = e^{-y} \\ dv = \cos y dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -e^{-y} dy \\ v = \int \cos y dy = \text{sen } y \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}\int e^{-y} \cos y dy &= \int \underbrace{e^{-y}}_u \underbrace{\cos y dy}_{dv} = \underbrace{e^{-y}}_u \underbrace{\text{sen } y}_v - \int \underbrace{\text{sen } y}_v \underbrace{(-e^{-y} dy)}_{du} = \\ &= e^{-y} \text{sen } y + \int e^{-y} \text{sen } y dy.\end{aligned}\quad (6.17)$$

Calculamos a última integral à direita novamente por partes,

$$\begin{cases} u = e^{-y} \\ dv = \text{sen } y dy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -e^{-y} dy \\ v = \int \text{sen } y dy = (-\cos y) \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^{-y}}_u \underbrace{\text{sen } y dy}_{dv} &= \underbrace{e^{-y}}_u \underbrace{(-\cos y)}_v - \int \underbrace{(-\cos y)}_v \underbrace{(-e^{-y} dy)}_{du} = \\ &= -e^{-y} \cos y - \int e^{-y} \cos y dy.\end{aligned}\quad (6.18)$$

Observe que a integral desconhecida $\int e^{-y} \cos y dy$ reapareceu.

Substituindo 6.18 em 6.17, obtemos

$$\begin{aligned}\int e^{-y} \cos y dy &= e^{-y} \text{sen } y - e^{-y} \cos y - \int e^{-y} \cos y dy \\ 2 \int e^{-y} \cos y dy &= e^{-y} \text{sen } y - e^{-y} \cos y + C_1 \\ \int e^{-y} \cos y dy &= \frac{1}{2} e^{-y} (\text{sen } y - \cos y) + C.\end{aligned}$$

Exercício 6.8.

Usando a técnica de integração por partes, calcule a seguinte integral definida:

$$\int_2^4 x \operatorname{arcsec} x dx.$$

Solução: Usando a fórmula de integração por partes:

$$\begin{cases} u = \operatorname{arcsec} x \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx \\ v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \int_2^4 x \operatorname{arcsec} x dx &= \int_2^4 \underbrace{(\operatorname{arcsec} x)}_u \underbrace{x dx}_{dv} = \\ &= \underbrace{\left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arcsec} x \right]}_v \bigg|_2^4 - \int_2^4 \underbrace{\left[\frac{x^2}{2} \left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \right) \right]}_{du} dx \end{aligned}$$

$$\int_2^4 x \operatorname{arcsec} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{arcsec} x \right]_2^4 - \frac{1}{2} \int_2^4 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$\int_2^4 x \operatorname{arcsec} x dx = 8 \operatorname{arcsec} 4 - 2 \operatorname{arcsec} 2 - \frac{1}{2} \int_2^4 x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} dx \quad (6.19)$$

Fazendo a substituição $w = x^2 - 1 \Rightarrow dw = 2x dx$ na última integral à direita, precisamos considerar os limites de integração: se $w = x^2 - 1$ enquanto x varia desde $x = 2$ até $x = 4$, w varia desde $w = 2^2 - 1 = 3$ até $w = 4^2 - 1 = 15$ e temos

$$\frac{1}{2} \int_2^4 \frac{2}{2} x(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4} \int_3^{15} u^{-\frac{1}{2}} du = \left[\frac{1}{4} \frac{u^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})} \right]_3^{15} = \frac{1}{2} (\sqrt{15} - \sqrt{3}). \quad (6.20)$$

Substituindo 6.20 em 6.19, resulta

$$\begin{aligned} \int_2^4 x \operatorname{arcsec} x dx &= 8 \operatorname{arcsec} 4 - 2 \operatorname{arcsec} 2 - \frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= 8 \operatorname{arcsec} 4 - 2 \left(\frac{\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{15}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Exercício 6.9.

Usando a técnica de integração por partes, calcule as seguintes integrais:

a. $\int x^4 \ln x dx$

b. $\int (\ln x)^2 dx$

c. $\int x^2 e^{-x} dx$

(Aula 19 do caderno didático, exercício proposto nº 3 b)

Solução:

- a. Para calcular $\int x^4 \ln x dx = \int (\ln x) x^4 dx$, vamos usar a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^4 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} \end{cases}$$

Assim,

$$\int x^4 \ln x dx = \int \underbrace{(\ln x)}_u \underbrace{x^4}_{dv} dx = \underbrace{(\ln x)}_u \underbrace{\frac{x^5}{5}}_v - \int \underbrace{\frac{1}{5}x^5}_v \underbrace{\frac{1}{x}}_{du} dx =$$

$$= (\ln x) \frac{x^5}{5} - \frac{1}{5} \frac{x^5}{5} + C = \frac{x^5}{5} \left(\ln x - \frac{1}{5} \right) + C.$$

- b. Para calcular $\int (\ln x)^2 dx$, vamos usar a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = (\ln x)^2 \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 \ln x \frac{dx}{x} \\ v = \int dx = x \end{cases}$$

Logo,

$$\int \underbrace{(\ln x)^2}_u \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{(\ln x)^2}_u \underbrace{x}_v - 2 \int x (\ln x) \frac{dx}{x} = x (\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx.$$

Para calcular a última integral à direita, usaremos novamente a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int dx = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \int (\ln x)^2 dx &= x(\ln x)^2 - 2 \int \underbrace{(\ln x)}_u \underbrace{dx}_{dv} = \\ &= x(\ln x)^2 - 2 \underbrace{(\ln x)}_u \underbrace{x}_v + 2 \int \underbrace{x}_v \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} = \\ &= x(\ln x)^2 - 2x(\ln x) + 2 \int dx = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x) + 2x + C. \end{aligned}$$

- c. Para calcular $\int x^2 e^{-x} dx$, vamos usar a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \int e^{-x} dx = - \int -e^{-x} dx = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \int \underbrace{x^2}_u \underbrace{e^{-x} dx}_{dv} &= \underbrace{x^2}_u \underbrace{(-e^{-x})}_v - \int \underbrace{(-e^{-x})}_v \underbrace{2x dx}_{du} = \\ &= x^2(-e^{-x}) + 2 \int x e^{-x} dx. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Para calcular a última integral à direita, usaremos novamente a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int e^{-x} dx = - \int -e^{-x} dx = -e^{-x} \end{cases} \\ \int x e^{-x} dx &= \underbrace{x}_u \underbrace{(-e^{-x})}_v - \int \underbrace{(-e^{-x})}_v \underbrace{dx}_{du} = x(-e^{-x}) - e^{-x} + C. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Substituindo 6.22 em 6.21, temos

$$\int x^2 e^{-x} dx = x^2(-e^{-x}) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C.$$

Exercício 6.10.

Usando a técnica de integração por partes, calcule as seguintes integrais definidas:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \operatorname{sen} 3x dx$

b. $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx$ (Aula 19, exercício proposto nº 4)

Solução:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \operatorname{sen} 3x dx$

Vamos resolver esta integral definida procurando primeiro a integral indefinida correspondente e depois usaremos a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo para achar o valor da integral definida.

Para calcular $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \operatorname{sen} 3x dx$, vamos usar a fórmula de integração por partes com:

$$\begin{cases} u = e^{-2x} \\ dv = \operatorname{sen} 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2e^{-2x} dx \\ v = \frac{1}{3} \int 3 \operatorname{sen} 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{cases}$$

Logo, usando a fórmula de integração por partes de integrais

definidas, obtemos
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{-2x}}_u \underbrace{\operatorname{sen} 3x dx}_{dv} =$$

$$= \underbrace{e^{-2x}}_u \underbrace{\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)}_v \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)}_v \underbrace{(-2e^{-2x} dx)}_{du}$$

$$I = e^{-2\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{\cos 3\frac{\pi}{2}}{3}\right) - e^{-2(0)} \left(-\frac{\cos 3(0)}{3}\right) - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x) e^{-2x} dx.$$

Lembre-se de que $\cos 3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $\cos(0) = 1$, assim obtemos

$$I = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x) e^{-2x} dx. \quad (6.23)$$

Calcularemos a integral à direita novamente por partes com:

$$\begin{cases} u = e^{-2x} \\ dv = \cos 3x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2e^{-2x} dx \\ v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}(\sin 3x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3x) e^{-2x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{-2x}}_u \underbrace{(\cos 3x) dx}_{dv} = \\ &= \underbrace{e^{-2x}}_u \underbrace{\left(\frac{\sin 3x}{3}\right)}_v \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\left(\frac{\sin 3x}{3}\right)}_v \underbrace{(-2e^{-2x} dx)}_{du} \\ &= e^{-2\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{3}\right) - e^{-2(0)} \left(\frac{\sin 3(0)}{3}\right) + \frac{2}{3} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x} \sin 3x dx}_I = \\ &= -\frac{e^{-x}}{3} + \frac{2}{3} I \end{aligned} \quad (6.24)$$

Observe que a integral desconhecida I reapareceu.

Substituindo 6.24 em 6.23, obtemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \left(-\frac{e^{-\pi}}{3} + \frac{2}{3} I\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} e^{-\pi} - \frac{4}{9} I \quad \text{ou} \\ I + \frac{4}{9} I &= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} e^{-\pi}, \quad \text{de onde, } I = \frac{9}{13} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} e^{-\pi}\right). \end{aligned}$$

b. $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx$

Para calcular $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx$, vamos usar em primeiro lugar o método de substituição de integrais definidas. Faça a substituição $z = \sqrt{x} \Rightarrow dz = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \stackrel{\sqrt{x}=z}{\Rightarrow} 2z dz = dx$.

Consideremos a mudança dos limites de integração: se $z = \sqrt{x}$, enquanto x varia de 0 até π^2 , z varia de $z = \sqrt{0} = 0$ até $z = \sqrt{\pi^2} = \pi$. Logo,

$$\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx = \int_0^{\pi} (\cos z) 2z dz = 2 \int_0^{\pi} z \cos z dz \quad (6.25)$$

Para calcular $\int_0^{\pi} z \cos z dz$, usaremos a fórmula de integração por partes para integrais definidas:

$$\begin{cases} u = z \\ dv = \cos z dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dz \\ v = \int \cos z dz = \sin z \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\pi z \cos z \, dz &= \int_0^\pi \underbrace{z}_u \underbrace{\cos z \, dz}_{dv} = z(\sin z) \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin z \, dz \\ &= 0 + \cos z \Big|_0^\pi = \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2\end{aligned}\quad (6.26)$$

Substituindo 6.26 em 6.25, resulta que

$$\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} \, dx = 2(-2) = -4.$$


Veja, no Apêndice 4, no final deste caderno, o passo a passo de exercícios adicionais correspondentes a esta semana.

Semana 7


INTEGRAÇÃO DE POTÊNCIAS E PRODUTOS DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Como resultado dos exercícios resolvidos no caderno didático e nas notas de aula da Semana 6 sobre Integral Indefinida e Técnicas de Integração, podemos adicionar as seguintes fórmulas na tabela básica de integrais indefinidas:

Continuação da Tabela Básica de Integrais Indefinidas	
$\int \operatorname{tg} x dx = \ln \sec x + C = -\ln \cos x + C$	
$\int \operatorname{cotg} x dx = \ln \operatorname{sen} x + C = -\ln \operatorname{cosec} x + C$	
$\int \sec x dx = \ln \sec x + \operatorname{tg} x + C$	
$\int \operatorname{cosec} x dx = -\ln \operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x + C = \ln \operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x + C$	

 A função trigonométrica cossecante denotada por \csc na Aula 21, Módulo 2, é denotada na maioria dos livros de cálculo por cosec ou também cossec . Esta última notação é a que usaremos daqui para frente nas notas de aula e listas de exercícios.

Os resumos de fórmulas e procedimentos para calcular integrais que envolvem potências e produtos de funções trigonométricas se encontram no Caderno Didático: Aula 20 (página 50) e Aula 21 (página 60). Apenas faremos uma mudança nos procedimentos para calcular integrais que envolvem seno e cosseno no caso em que **m e n são pares**. Se ambas as potências de seno e cosseno são pares e não negativas, use repetidamente as identidades $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ e $\operatorname{cos}^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ para transformar o integrando em potências ímpares de cosseno. Faça, então, como no procedimento quando a potência do cosseno é ímpar e positiva. Lembre-se também, caso seja necessário, de que $2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$.

 Quando trabalhamos com **integrais definidas de funções simétricas**, é bom lembrar-se da seguinte propriedade que usa a regra da substituição para integrais definidas, para simplificar o cálculo de integrais de funções que possuam a propriedade de simetria:



Suponha que f é contínua em $[-a, a]$.

i. Se f **for par** [isto é, $f(-x) = f(x)$], então

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

ii. Se f **for ímpar** [isto é, $f(-x) = -f(x)$], então

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Nestas notas nos limitaremos a resolver exemplos de cada caso apresentado nas Aulas 20 e 21 do Caderno Didático.

INTEGRAIS QUE ENVOLVEM POTÊNCIAS DE SENO E COSSENO

Exercício 7.1.

A potência de seno é ímpar e positiva

Calcule:

a. $\int \sin x \sqrt[3]{\cos x} dx$

b. $\int \sin^3 x \cos^{\frac{5}{2}} x dx$

Solução:

a. $\int \sin x \sqrt[3]{\cos x} dx$

Como o expoente de $\sin x$ é 1, que é um número ímpar, utilizaremos esse termo para compor o $du = -\sin x dx$ e fazer a

substituição $u = \cos x$. Lembre-se de que esta técnica funciona mesmo quando o expoente de $\cos x$ não é um número inteiro, como neste caso. Assim,

$$\begin{aligned}\int \sin x \cos^{\frac{1}{3}} x dx &= - \int \cos^{\frac{1}{3}} x (-\sin x) dx = \\ &= - \int u^{\frac{1}{3}} du = -\frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} + C = -\frac{3}{4} \cos^{\frac{4}{3}} x + C.\end{aligned}$$

b. $\int \sin^3 x \cos^{\frac{5}{2}} x dx$

Como o expoente de $\sin x$ é 3, que é um número ímpar, vamos reescrever $\sin^3 x$ como $(\sin^2 x)(\sin x)$, usar um dos fatores para compor o $du = -\sin x dx$ e fazer a substituição $u = \cos x$. Lembre-se de que esta técnica funciona mesmo quando o expoente de $\cos x$ não é um número inteiro, como neste caso. Usaremos também a identidade trigonométrica fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ para escrever $\sin^2 x$ em termos de $\cos x$. Assim,

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos^{\frac{5}{2}} x dx &= \int \sin^2 x \cos^{\frac{5}{2}} x \sin x dx = \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^{\frac{5}{2}} x \sin x dx = - \int (\cos^{\frac{5}{2}} x - \cos^{\frac{9}{2}} x) (-\sin x) dx = \\ &= - \int (u^{\frac{5}{2}} - u^{\frac{9}{2}}) du = -\frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11} u^{\frac{11}{2}} + C = \\ &= -\frac{2}{7} \cos^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11} \cos^{\frac{11}{2}} x + C.\end{aligned}$$

Exercício 7.2.

A potência de cosseno é ímpar e positiva

Calcule

a. $\int \cos^3 x (1 + \sqrt{\sin x}) dx$ b. $\int \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^5 x dx$

Solução:

a. $\int \cos^3 x (1 + \sqrt{\sin x}) dx$

Como o expoente de $\cos x$ é 3 que é um número ímpar, vamos reescrever $\cos^3 x$ como $(\cos^2 x)(\cos x)$, usar um dos fatores para compor o $du = \cos x dx$ e fazer a substituição $u = \sin x$.

Lembre-se de que esta técnica funciona mesmo quando o expoente de $\sin x$ não é um número inteiro, como neste caso. Usaremos também a identidade trigonométrica fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ para escrever $\cos^2 x$ em termos de $\sin x$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x (1 + \sqrt{\sin x}) dx &= \int (1 + \sin^{\frac{1}{2}} x) \cos^2 x \cos x dx = \\ &= \int (1 + \sin^{\frac{1}{2}} x) (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \int (1 + u^{\frac{1}{2}}) (1 - u^2) du = \\ &= \int (1 - u^2 + u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}}) du = u - \frac{u^3}{3} + \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} + C = \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x - \frac{2}{7} \sin^{\frac{7}{2}} x + C. \end{aligned}$$

b. $\int \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^5 x dx$

Como o expoente de $\cos x$ é 5, que é um número ímpar, vamos reescrever $\cos^5 x$ como $(\cos^4 x)(\cos x)$, usar um dos fatores para compor o $du = \cos x dx$ e fazer a substituição $u = \sin x$. Lembre-se de que esta técnica funciona mesmo quando o expoente de $\sin x$ não é um número inteiro, como neste caso. Usaremos também a identidade trigonométrica fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ para escrever $\cos^2 x$ em termos de $\sin x$. Assim,

$$\begin{aligned} \int \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^5 x dx &= \int \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^4 x \cos x dx = \\ &= \int \sin^{\frac{5}{2}} x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx = \int u^{\frac{5}{2}} (1 - u^2)^2 du = \\ &= \int u^{\frac{5}{2}} (1 - 2u^2 + u^4) du = \int (u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{9}{2}} + u^{\frac{13}{2}}) du = \\ &= \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{11} u^{\frac{11}{2}} + \frac{2}{15} u^{\frac{15}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{7} \sin^{\frac{7}{2}} x - \frac{4}{11} \sin^{\frac{11}{2}} x + \frac{2}{15} \sin^{\frac{15}{2}} x + C. \end{aligned}$$

Ambas as potências de seno e cosseno são pares e não negativas

Exercício 7.3.

a. **A potência do cosseno é par e não negativa**

Calcule $\int \cos^4 x dx$.

b. **A potência do seno é par e não negativa**

Calcule $\int_0^{2\pi} \sin^2 ax dx$, $a \neq 0$.

Solução:

- a. *Primeiro método.* Usando a identidade: $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ temos

$$\begin{aligned}\int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\&= \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \int 2\cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx = \\&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \\&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} \int \frac{4}{4} \cos 4x dx = \\&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.\end{aligned}$$

Segundo método. Vamos usar a fórmula de redução dada na Equação 9 da Aula 20, Módulo 2:

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$$

Então, para $n = 4$, temos

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} \int \cos^2 x dx \quad (7.1)$$

Para $n = 2$, temos também

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} x + C \quad (7.2)$$

Assim substituindo 7.2 em 7.1, obtemos

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x + C.$$

- b. $\int_0^{2\pi} \sin^2 ax dx, \quad a \neq 0$

Podemos calcular a integral definida de duas maneiras:

Primeira maneira: Resolvendo a integral indefinida $\int \sin^2 ax dx$, $a \neq 0$ e depois calculando a integral definida.

Lembremos a identidade: $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, assim temos

$$\begin{aligned}\int \sin^2 ax \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2ax}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{2a}{2a} \cos 2ax \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \int 2a \cos 2ax \, dx\end{aligned}\quad (7.3)$$

Fazendo a substituição $u = 2ax \Rightarrow du = 2a \, dx$ na última integral, obtemos

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \int 2a \cos 2ax \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + C \quad (7.4)$$

Substituindo 7.4 em 7.3, resulta

$$\int \sin^2 ax \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax + C.$$

Calculando a integral definida usando a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2 ax \, dx &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax \right]_0^{2\pi} = \left(\frac{1}{2}2\pi - \frac{1}{4a} \sin 4a\pi \right) = \\ &= \pi - \frac{1}{4a} \sin 4a\pi.\end{aligned}$$

Segunda maneira: Faça a substituição $u = ax \Rightarrow du = a \, dx$. Mudando os limites de integração, temos que se $x = 0 \Rightarrow u = 0$ e se $x = 2\pi \Rightarrow u = 2\pi a$, logo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^2 ax \, dx &= \frac{1}{a} \int_0^{2a\pi} \sin^2 u \, du = \frac{1}{a} \int_0^{2a\pi} \frac{1 - \cos 2u}{2} du = \\ &= \left[\frac{1}{2a}u - \frac{1}{4a} \sin 2u \right]_0^{2a\pi} = \frac{1}{2a}2a\pi - \frac{1}{4a} \sin 4a\pi = \pi - \frac{1}{4a} \sin 4a\pi.\end{aligned}$$

Observe que, se você utiliza esta segunda forma, faz a substituição e esquece-se de mudar os limites de integração, a resposta obtida não será a correta!

A potência do seno e do cosseno é par e não negativa

Exercício 7.4.

Calcule:

$$\text{a. } \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx \qquad \text{b. } \int \sin^4 x \cos^4 x \, dx$$

Solução:

a. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

Basta usar as identidades: $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$,
 $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ e $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$,
 como segue

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int (\sin^2 x \cos^2 x) \cos^2 x dx = \\&= \int \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int (\sin^2 2x) \cos^2 x dx = \\&= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \\&= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \\&= \frac{1}{8} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) dx - \frac{1}{16} \int (\sin^2 2x \cos 2x) 2dx\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \sin 2x \Rightarrow du = (\cos 2x) 2dx$ na última integral à direita, obtemos

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

b. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$

Primeiro método. (Este método é o que nós recomendamos).

Basta usar as identidades $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$,
 $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ e $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$,
 como segue

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \int (\sin x \cos x)^4 dx = \int \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^4 dx = \\&= \frac{1}{2^4} \int (\sin^2 2x)^2 dx = \frac{1}{2^4} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 dx = \\&= \frac{1}{2^6} \int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x) dx = \\&= \frac{1}{2^6}x - \frac{1}{2^6} \int \frac{2}{2} \cos 4x dx + \frac{1}{2^6} \int \cos^2 4x dx = \\&= \frac{1}{2^6}x - \frac{1}{2^7} \int 4\cos 4x dx + \frac{1}{2^6} \int \left(\frac{1 + \cos 8x}{2} \right) dx =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^6}x - \frac{1}{2^7}\sin 4x + \frac{1}{2^7}x + \frac{1}{2^7} \int \frac{8}{8} \cos 8x dx = \\
 &= \frac{1}{2^6}x - \frac{1}{2^7}\sin 4x + \frac{1}{2^7}x + \frac{1}{2^{10}}\sin 8x + C = \\
 &= \frac{3}{2^7}x - \frac{1}{2^7}\sin 4x + \frac{1}{2^{10}}\sin 8x + C = \\
 &= \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{512}\sin 8x + C =
 \end{aligned}$$

Segundo método. (Muito trabalhoso, não aconselhamos aos alunos trabalhar desta forma, só damos o método como informação)

Basta usar a identidade trigonométrica fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ para obter

$$\begin{aligned}
 \int \sin^4 x \cos^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^4 x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x dx \\
 &= \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cos^4 x dx \\
 &= \int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x) dx \quad (7.5)
 \end{aligned}$$

Vamos usar a fórmula de redução dada na Equação 9 da Aula 20, Módulo 2:

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$$

Lembre-se de que no Exercício 2.c (segundo método) usando a fórmula de redução, encontramos que

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x + C. \quad (7.6)$$

Usando a fórmula de redução para $n = 6$, temos

$$\int \cos^6 x dx = \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{6} \int \cos^4 x dx.$$

Assim, usando 7.6 na última integral da direita, obtemos

$$\int \cos^6 x dx = \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{6} \left(\frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x \right) + C.$$

Isto é:

$$\int \cos^6 x dx = \frac{1}{6} \cos^5 x \sin x + \frac{5}{24} \cos^3 x \sin x + \frac{15}{48} \cos x \sin x + \frac{15}{48} x + C. \quad (7.7)$$

Usando a fórmula de redução para $n = 8$, temos

$$\int \cos^8 x dx = \frac{1}{8} \cos^7 x \operatorname{sen} x + \frac{7}{8} \int \cos^6 x dx.$$

Assim, usando 7.7 na última integral da direita, obtemos

$$\begin{aligned} \int \cos^8 x dx &= \frac{1}{8} \cos^7 x \operatorname{sen} x + \frac{7}{8} \left\{ \frac{1}{6} \cos^5 x \operatorname{sen} x + \frac{5}{24} \cos^3 x \operatorname{sen} x \right. \\ &+ \left. \frac{15}{48} \cos x \operatorname{sen} x + \frac{15}{48} x \right\} + C = \frac{1}{8} \cos^7 x \operatorname{sen} x + \frac{7}{48} \cos^5 x \operatorname{sen} x \\ &+ \frac{35}{192} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{105}{384} \cos x \operatorname{sen} x + \frac{105}{384} x + C \quad (7.8) \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo 7.6, 7.7 e 7.8 em 7.5 resulta:

$$\begin{aligned} \int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x) dx &= \\ &= \frac{1}{4} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8} \cos x \operatorname{sen} x + \frac{3}{8} x - 2 \left(\frac{1}{6} \cos^5 x \operatorname{sen} x \right. \\ &+ \left. \frac{5}{24} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{15}{48} \cos x \operatorname{sen} x + \frac{15}{48} x \right) + \frac{1}{8} \cos^7 x \operatorname{sen} x \\ &+ \frac{7}{48} \cos^5 x \operatorname{sen} x + \frac{35}{192} \cos^3 x \operatorname{sen} x + \frac{105}{384} \cos x \operatorname{sen} x + \frac{105}{384} x + C \\ \int (\cos^4 x - 2\cos^6 x + \cos^8 x) dx &= \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{10}{24} + \frac{35}{192} \right) \cos^3 x \operatorname{sen} x + \left(\frac{3}{8} - \frac{30}{48} + \frac{105}{384} \right) \cos x \operatorname{sen} x \\ &+ \left(\frac{3}{8} - \frac{30}{48} + \frac{105}{384} \right) x + \left(-\frac{2}{6} + \frac{7}{48} \right) \cos^5 x \operatorname{sen} x + \frac{1}{8} \cos^7 x \operatorname{sen} x + C. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x dx &= \frac{3}{192} \cos^3 x \operatorname{sen} x - \frac{9}{384} \cos x \operatorname{sen} x + \frac{9}{384} x \\ &- \frac{9}{48} \cos^5 x \operatorname{sen} x + \frac{1}{8} \cos^7 x \operatorname{sen} x + C. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{64} \cos^3 x \operatorname{sen} x - \frac{3}{128} \cos x \operatorname{sen} x + \frac{3}{128} x \\ &- \frac{3}{16} \cos^5 x \operatorname{sen} x + \frac{1}{8} \cos^7 x \operatorname{sen} x + C. \end{aligned}$$

Observe que, neste caso, a resposta aparece numa forma diferente, mas as duas respostas são corretas.

Integrais que Envolvem Produtos de Seno e Cosseno com Ângulos Diferentes

Exercício 7.5.

Calcule $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, onde $\alpha \neq \beta$.

Solução: Lembre-se de que

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x).$$

Assim, como $\alpha \neq \beta$

$$\begin{aligned} \int \sin \alpha x \cos \beta x dx &= \int \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta)x + \sin(\alpha + \beta)x) dx \\ &= \frac{1}{2(\alpha - \beta)} \int (\alpha - \beta) \sin(\alpha - \beta)x dx + \frac{1}{2(\alpha + \beta)} \int (\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta)x dx \\ &= -\frac{\cos(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} - \frac{\cos(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} + C. \end{aligned}$$

Logo, obtemos a fórmula:

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x dx = -\frac{\cos(\alpha - \beta)x}{2(\alpha - \beta)} - \frac{\cos(\alpha + \beta)x}{2(\alpha + \beta)} + C, \text{ onde } \alpha \neq \beta.$$

Exercício 7.6.

Sendo m e n naturais não nulos, calcule as seguintes integrais definidas:

- $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$
- $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$

Solução:

$$\text{a. } \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

Lembre-se de que

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x).$$

$$\begin{aligned} \text{Neste caso, } \cos \pi x \cos \frac{\pi}{2}x &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right)x + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)x \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \quad (7.9) \end{aligned}$$

$$\text{Para resolver } \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) dx$$

Faça $u = \frac{3\pi}{2}x \Rightarrow du = \frac{3\pi}{2}dx \Rightarrow dx = \frac{2}{3\pi}du$. Mudando os limites de integração, se $x = 0 \Rightarrow u = 0$, analogamente se $x = \frac{1}{2} \Rightarrow u = \frac{3\pi}{4}$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) dx &= \frac{1}{3\pi} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \cos u du = \frac{1}{3\pi} \left[\sin u \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} = \\ &= \frac{1}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{3\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6\pi}. \quad (7.10) \end{aligned}$$

$$\text{Para resolver } \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

Faça $z = \frac{\pi}{2}x \Rightarrow dz = \frac{\pi}{2}dx \Rightarrow dx = \frac{2}{\pi}dz$. Mudando os limites de integração, se $x = 0 \Rightarrow z = 0$, analogamente se $x = \frac{1}{2} \Rightarrow z = \frac{\pi}{4}$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos z dz = \frac{1}{\pi} \left[\sin z \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}. \quad (7.11) \end{aligned}$$

Substituindo 7.10 e 7.11 em 7.9, obtemos

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}.$$

Outra forma de resolver as integrais dadas em 7.9 é a seguinte:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos(\pi x) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &= \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \cdot \left(\frac{3\pi}{2}\right) du + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right) dx \right] \\ &= \frac{1}{3\pi} \left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{6\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}. \end{aligned}$$

b. Usando a identidade

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

temos:

Primeiro caso: $m = n$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(0x) - \cos(2mx)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - \cos(2mx)] dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin(2mx)}{2m} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[\pi - \frac{\sin(2m\pi)}{2m} \right] - \frac{1}{2} \left[-\pi - \frac{\sin(-2m\pi)}{2m} \right]. \end{aligned}$$

Como a função \sin é ímpar, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx =$

$$\frac{1}{2} \left[\pi - \frac{\sin(2m\pi)}{2m} \right] - \frac{1}{2} \left[-\pi + \frac{\sin(2m\pi)}{2m} \right] = \left[\pi - \frac{\sin(2m\pi)}{2m} \right]$$

e lembrando que $\sin(k\pi) = 0$ para todo k inteiro, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi.$$

Segundo caso: $m \neq n$, m e n números naturais.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \, dx \\&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin[(m-n)\pi]}{m-n} - \frac{\sin[(m+n)\pi]}{m+n} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin[(m-n)(-\pi)]}{m-n} \right. \\&\quad \left. - \frac{\sin[(m+n)(-\pi)]}{m+n} \right]\end{aligned}$$

Como a função \sin é ímpar,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \left[\frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} \right] - \left[\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} \right].$$

Note-se que $m+n$ é um número natural e $m-n$, no pior dos casos, é um número inteiro. Assim, lembrando que $\sin(k\pi) = 0$ para todo k inteiro, obtemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \left[\frac{0}{m-n} \right] - \left[\frac{0}{m+n} \right] = 0.$$

Logo, temos a fórmula:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}.$$

c. Usando a identidade

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

temos:

Primeiro caso: $m = n$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(2mx) + \cos(0x)] \, dx \\&= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(2mx) + 1] \, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2mx)}{2m} + x \right]_{-\pi}^{\pi} \\&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2m\pi)}{2m} + \pi \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(-2m\pi)}{2m} - \pi \right].\end{aligned}$$

Como a função \sin é ímpar e lembrando que $\sin(k\pi) = 0$ para todo k inteiro, obtemos

$$= \left[\frac{\sin(2m\pi)}{2m} + \pi \right] = \left[\frac{0}{m} + \pi \right] = \pi.$$

Segundo caso: $m \neq n$, m e n números naturais.

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)(-\pi)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)(-\pi)}{m-n} \right]\end{aligned}$$

Como a função \sin é ímpar,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \left[\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} \right].$$

Note-se que $m+n$ é um número natural e $m-n$, no pior dos casos, é um número inteiro. Assim, lembrando que $\sin(k\pi) = 0$ para todo k inteiro, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx &= \left[\frac{\sin(m+n)\pi}{m+n} + \frac{\sin(m-n)\pi}{m-n} \right] = \\ &= \left[\frac{0}{m+n} + \frac{0}{m-n} \right] = 0.\end{aligned}$$

Logo, concluímos a fórmula:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}.$$

Integrais que envolvem Potências de Secante e Tangente (Respectivamente Cossecante e Cotangente)

Exercício 7.7.

A potência da secante (resp. cossecante) é par e positiva

Calcule:

a. $\int \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x \sec^4 x dx$

b. $\int \cotg^2 x \operatorname{cossec}^2 x dx$

Solução:

a. $\int \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x \sec^4 x dx$

Como o expoente de $\sec x$ é 4 que é um número par, vamos reescrever $\sec^4 x$ como $(\sec^2 x)(\sec^2 x)$, usar um dos fatores para compor $du = \sec^2 x dx$ e fazer a substituição $u = \operatorname{tg} x$. Além disso, usaremos a identidade trigonométrica $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, para escrever $\sec^2 x$ em termos de $\operatorname{tg} x$. Lembre-se de que esta técnica funciona mesmo quando o expoente de $\operatorname{tg} x$ não é um número inteiro, como neste caso.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x \sec^4 x dx &= \int \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x \sec^2 x \sec^2 x dx \\ &= \int \operatorname{tg}^{\frac{1}{2}} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x dx = \int u^{\frac{1}{2}} (1 + u^2) du \\ &= \int \left(u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{5}{2}} \right) du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7} u^{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{3} \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x + \frac{2}{7} \operatorname{tg}^{\frac{7}{2}} x + C. \end{aligned}$$

b. $\int \cotg^2 x \operatorname{cosec}^2 x dx$

Como o expoente de $\operatorname{cosec} x$ é 2 que é um número par, vamos separar $\operatorname{cosec}^2 x$ para compor $du = -\operatorname{cosec}^2 x dx$ e fazer a substituição $u = \cotg x$

$$\begin{aligned} \int \cotg^2 x \operatorname{cosec}^2 x dx &= - \int \cotg^2 x (-\operatorname{cosec}^2 x) dx \\ &= - \int u^2 du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cotg^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

Exercício 7.8.

A potência da tangente (resp. cotangente) é ímpar e positiva

Calcule:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \sec^{\frac{3}{2}} x dx$

b. $\int \frac{\cotg^3 x}{\sqrt[3]{\operatorname{cosec} x}} dx$

Solução:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \sec^{\frac{3}{2}} x dx$

Como o expoente de $\operatorname{tg} x$ é 1 que é um número ímpar, e levando em conta que $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \sec x$, vamos separar no integrando $\operatorname{tg} x \sec x$, para compor $du = \operatorname{tg} x \sec x dx$ e fazer a substituição $u = \sec x$. Lembre-se de que esta técnica funciona mesmo quando o expoente de $\sec x$ não é um número inteiro, como neste caso. Assim,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \sec^{\frac{3}{2}} x dx = \int \sec^{\frac{1}{2}} x \operatorname{tg} x \sec x dx.$$

Fazendo a substituição $u = \sec x$, $du = \sec x \operatorname{tg} x dx$.

$$= \int u^{\frac{1}{2}} du = 2 \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sec^{\frac{3}{2}} x + C.$$

b. $\int \frac{\cotg^3 x}{\sqrt[3]{\operatorname{cosec} x}} dx$

Como o expoente de $\cotg x$ é 3 que é um número ímpar, e levando em conta que $(\operatorname{cosec} x)' = -\cotg x \operatorname{cosec} x$, vamos multiplicar no integrando o numerador e o denominador por $\operatorname{cosec} x$, e vamos reescrever $\cotg^3 x$ como $(\cotg^2 x)(\cotg x)$. Usaremos um dos fatores para compor $du = -\cotg x \operatorname{cosec} x dx$ e fazer a substituição $u = \operatorname{cosec} x$. Além disso, usaremos a identidade trigonométrica $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cotg^2 x$, para escrever $\operatorname{cosec}^2 x$ em termos de $\cotg x$. Lembre-se de que esta técnica funciona mesmo quando o expoente de $\operatorname{cosec} x$ não é um número inteiro, como neste caso. Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{\cotg^3 x}{\sqrt[3]{\operatorname{cosec} x}} dx &= \int \cotg^3 x \operatorname{cosec}^{-\frac{1}{3}} x dx \\ &= \int \frac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{cosec} x} \cotg^3 x \operatorname{cosec}^{-\frac{1}{3}} x dx \\ &= \int \cotg^2 x \left(\frac{\operatorname{cosec}^{-\frac{1}{3}} x}{\operatorname{cosec} x} \right) \cotg x \operatorname{cosec} x dx \\ &= \int \cotg^2 x \operatorname{cosec}^{-\frac{4}{3}} x \cotg x \operatorname{cosec} x dx \\ &= \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \operatorname{cosec}^{-\frac{4}{3}} x \cotg x \operatorname{cosec} x dx \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \operatorname{cosec} x$, $du = -\operatorname{cosec} x \cotg x dx$.

$$\begin{aligned} &= \int (u^2 - 1)u^{-\frac{4}{3}}(-du) = \int \left(-u^{\frac{2}{3}} + u^{-\frac{4}{3}}\right) du \\ &= \frac{-3}{5}u^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{-1}u^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{3}{5}\operatorname{cosec}^{\frac{5}{3}}x - \frac{3}{1}\operatorname{cosec}^{-\frac{1}{3}}x + C \\ &= -\frac{3}{5}\operatorname{cosec}^{\frac{5}{3}}x - \frac{3}{\sqrt[3]{\operatorname{cosec} x}} + C \end{aligned}$$

A Potência da Tangente (resp. Cotangente) é Par Positiva e a Secante (resp. Cossecante) não é Par Positiva

Exercício 7.9.

Calcule:

- $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sec^5 x} dx$
- $\int \cotg^2 x \operatorname{cosec} x dx$

Solução:

$$\text{a. } \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sec^5 x} dx$$

Note-se que, neste caso, o expoente da $\operatorname{tg} x$ é 2, que é um número par e o expoente da $\sec x$ não é um número inteiro, assim não é nenhum dos casos anteriores (isto é: Exercícios 7.7 e 7.8). Neste caso, o integrando pode ser reescrito em termos apenas de secantes, usando a fórmula $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \sec^{-5} x dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^{-5} x dx = \int (\sec^{-3} x - \sec^{-5} x) dx \\ &= \int \sec^{-3} x dx - \int \sec^{-5} x dx \end{aligned} \quad (7.12)$$

Note-se que as fórmulas de redução não valem para expoentes negativos. Porém podemos lembrar que

$$\begin{aligned} \int \sec^{-3} x dx - \int \sec^{-5} x dx &= \int \frac{1}{\sec^3 x} dx - \int \frac{1}{\sec^5 x} dx \\ &= \int \cos^3 x dx - \int \cos^5 x dx \end{aligned} \quad (7.13)$$

Observe que
$$\int \cos^3 x dx - \int \cos^5 x dx =$$
$$= \int \cos^2 x \cos x dx - \int \cos^4 x \cos x dx \quad (7.14)$$

Usaremos também a identidade trigonométrica fundamental $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ para escrever $\cos^2 x$ em termos de $\sin x$. Assim,

$$\int \cos^2 x \cos x dx - \int \cos^4 x \cos x dx =$$
$$= \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx - \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx$$

Fazendo a substituição $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ nas integrais à direita, obtemos

$$\int \cos^2 x \cos x dx - \int \cos^4 x \cos x dx =$$
$$= \int (1 - u^2) du - \int (1 - u^2)^2 du = u - \frac{u^3}{3} - \int (1 - 2u^2 + u^4) du$$
$$= u - \frac{u^3}{3} - u + 2\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = -\frac{\sin^3 x}{3} + 2\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$
$$= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C \quad (7.15)$$

Substituindo 7.15 em 7.14, 7.14 em 7.13 e 7.13 em 7.12, resulta

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sec^5 x} dx = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

b. $\int \cotg^2 x \operatorname{cosec} x dx$

Note-se que, neste caso, o expoente da $\cotg x$ é 2 que é um número par e o expoente da $\operatorname{cosec} x$ é 1, um número ímpar, assim não é nenhum dos casos anteriores (isto é: Exercícios 7.7 e 7.8). Neste caso, o integrando pode ser reescrito em termos apenas de cossecantes, usando a fórmula $\cotg^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$.

$$\int \cotg^2 x \operatorname{cosec} x dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \operatorname{cosec} x dx$$
$$= \int \operatorname{cosec}^3 x - \operatorname{cosec} x dx \quad (7.16)$$

Da fórmula 4, da Aula 21, Módulo 2, temos que

$$\int \operatorname{cosec} x dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \cotg x| + C \quad (7.17)$$

Por outro lado, a fórmula de redução 5, da Aula 21, Módulo 2, que é obtida por integração por partes, diz que: $\int \operatorname{cosec}^n x dx =$

$$= -\frac{1}{n-1} \operatorname{cosec}^{n-2} x \cotg x + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} x dx, \quad n > 1 \quad (7.18)$$

Usando dita fórmula para $n = 3$, temos

$$\int \operatorname{cosec}^3 x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cotg x + \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} x dx.$$

Substituindo a última integral da direita pelo seu valor dado em 7.18, temos

$$\int \operatorname{cosec}^3 x dx = -\frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cotg x + \frac{1}{2} \ln |\operatorname{cosec} x - \cotg x| + C. \quad (7.19)$$

Substituindo 7.19 e 7.18 em 7.17, obtemos

$$\begin{aligned} \int \cotg^2 x \operatorname{cosec} x dx &= -\frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cotg x + \frac{1}{2} (\ln |\operatorname{cosec} x - \cotg x|) \\ &\quad - \ln |\operatorname{cosec} x - \cotg x| + C \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{cosec} x \cotg x - \frac{1}{2} (\ln |\operatorname{cosec} x - \cotg x|) + C. \end{aligned}$$

Exercício 7.10.

A potência da secante (resp. cosecante) é ímpar e positiva

Calcule a integral definida $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx$.

Solução: Neste caso, só podemos usar a integração por partes. No Exemplo 21.4, Aula 21, Módulo 2, usando integração por partes foi mostrado que:

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tg x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tg x| + C.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3 x dx &= \left[\frac{1}{2} \sec x \tg x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tg x| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \sec \left(\frac{\pi}{4} \right) \tg \left(\frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \sec \left(\frac{\pi}{4} \right) + \tg \left(\frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{2} (0) - \frac{1}{2} \ln(1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} |\sqrt{2} + 1|. \end{aligned}$$

Exercício 7.11.

Calcule a integral definida $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^3 x \cotg x dx$.

Solução: Neste caso, o expoente da $\cotg x$ é 1 que é um número ímpar e positivo, e o expoente da $\operatorname{cosec} x$ é 3 um número ímpar, podemos trabalhar aqui como o fizemos no Exercício 7.8. Portanto,

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^3 x \cotg x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^2 x (\operatorname{cosec} x \cotg x) dx$$

Fazendo a substituição $u = \operatorname{cosec} x$, $du = -\operatorname{cosec} x \cotg x dx$ e mudando os limites de integração, quando $x = \frac{\pi}{4}$, $u = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ e $x = \frac{\pi}{2}$, $u = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cosec}^2 x \operatorname{cosec} x \cotg x dx &= - \int_{\sqrt{2}}^1 u^2 du = - \left[\frac{u^3}{3} \right]_{\sqrt{2}}^1 = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}. \end{aligned}$$

PASSO A PASSO DE ALGUNS EXERCÍCIOS PROPOSTOS NO CADERNO DIDÁTICO

Exercício 7.12.

Calcule as seguintes integrais:

- $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx$
- $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x dx$
- $\int (\cos t - \cos 2t)^2 dt$
- $\int \sin^{-3} x \cos^3 x dx$
- $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \cos^2(x) dx$

(Aula 20 do caderno didático, exercício proposto nº 4: b, e, h, j e nº 5: c, respectivamente)

Solução:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx$

Lembrando a identidade $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(1 + \frac{2}{2} \cos 2x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x \, 2dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 x dx &= \frac{1}{2} x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2x) 2dx = \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \sin 2 \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \sin 0 = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x dx$

Como o expoente de $\cos x$ é 3 que é um número ímpar, vamos reescrever $\cos^3 x$ como $(\cos^2 x)(\cos x)$, usar um dos fatores para compor o $du = \cos x dx$ e fazer a substituição $u = \sin x$. Mudando os limites de integração, se $x = 0 \Rightarrow u = \sin 0 = 0$, analogamente, se $x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow u = \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 - \sin^2 x) \cos x dx \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (1 - u^2) dx = u - \frac{u^3}{3} \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{\sqrt{3}}{8} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}. \end{aligned}$$

c. $\int (\cos t - \cos 2t)^2 dt = \int (\cos^2 t - 2 \cos t \cos 2t + \cos^2 2t) dt$

$$= \int \cos^2 t dt - \int 2 \cos t \cos 2t dt + \int \cos^2 2t dt \quad (7.20)$$

Vamos estudar cada uma das integrais da direita de 7.20:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 t \, dt &= \int \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{2}{2} \cos 2t \right) dt \\ &= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \int \cos 2t \, 2dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + C_1\end{aligned}\quad (7.21)$$

$$\begin{aligned}\text{Analogamente,} \quad \int \cos^2 2t \, dt &= \int \left(\frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{4}{4} \cos 4t \right) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} \sin 4t + C_2\end{aligned}\quad (7.22)$$

Para calcular $\int 2 \cos t \cos 2t \, dt$, lembre-se de que

$$\cos at \cos bt = \frac{1}{2} [\cos(a-b)t + \cos(a+b)t]$$

$$\begin{aligned}\text{Logo, } \int 2 \cos t \cos 2t \, dt &= \int 2 \frac{1}{2} [\cos(1-2)t + \cos(1+2)t] \, dt = \\ &= \int [\cos(-t) + \cos(3t)] \, dt = \int \left[\cos(t) + \frac{3}{3} \cos(3t) \right] \, dt = \\ &= \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + C_3\end{aligned}\quad (7.23)$$

Substituindo 7.21, 7.23 e 7.22 em 7.20, obtemos

$$\begin{aligned}\int (\cos t - \cos 2t)^2 \, dt &= \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) - \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t \right) \\ &+ \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{8} \sin 4t \right) + C\end{aligned}$$

Isto é:

$$\int (\cos t - \cos 2t)^2 \, dt = t + \frac{1}{4} \sin 2t - \sin t - \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{8} \sin 4t + C.$$

d. $\int \sin^{-3} x \cos^3 x \, dx$

Como o expoente de $\cos x$ é 3, que é um número ímpar, vamos reescrever $\cos^3 x$ como $(\cos^2 x)(\cos x)$, usar um dos fatores para compor o $du = \cos x \, dx$ e fazer a substituição $u = \sin x$.

$$\begin{aligned}\int \sin^{-3} x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^{-3} x \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^{-3} x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \int u^{-3} (1 - u^2) \, du = \int (u^{-3} - u^{-1}) \, du \\ &= -\frac{u^{-2}}{2} - \ln |u| + C = \frac{\sin^{-2} x}{2} - \ln |\sin x| + C.\end{aligned}$$

e. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \cos^2(x) dx$

Usando a fórmula: $\cos 2x = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \cos^2 x dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\cos^2 x - \sin^2 x] \cos^2 x dx = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x] dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x dx \end{aligned} \quad (7.24)$$

Lembre-se de que a função $f(x) = \cos^4 x$ é uma função par, pois $f(-x) = \cos^4(-x) = \cos^4 x = f(x)$. Logo, pela propriedade de simetria que diz: “Suponha que f é contínua em $[-a, a]$. Se f **for par** [isto é $f(-x) = f(x)$], então $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.” resulta que:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx$$

Analogamente, a função $g(x) = \sin^2 x \cos^2 x$ é par, pois $g(-x) = \sin^2(-x) \cos^2(-x) = (-\sin x)^2 (\cos x)^2 = \sin^2 x \cos^2 x = g(x)$. Logo, pela propriedade de simetria:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Assim,} \quad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx - \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x dx &= \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \cos^2 x dx \end{aligned} \quad (7.25)$$

Por outro lado, lembre-se de que, usando a identidade $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{8} \int \cos 4x dx \end{aligned}$$

Logo,

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \quad (7.26)$$

Por outro lado, usando as identidades: $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$,
 $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ e $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$.

Segue que

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) \cos^2(x) dx &= \int (\sin x \cos x)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{\sin 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{2^2} \int (\sin^2 2x) dx \\ &= \frac{1}{2^2} \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} \int \frac{4}{4} \cos 4x dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \quad (7.27)$$

Usando 7.26, 7.27 e a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos que

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4(x) dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x) \cos^2(x) dx &= \\ &= 2 \left(\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \left(\frac{1}{8}x - \frac{1}{32} \sin 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \underbrace{\sin \left(\frac{2\pi}{4} \right)}_1 + \frac{1}{16} \underbrace{\sin \left(\frac{4\pi}{4} \right)}_0 - \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{16} \underbrace{\sin \left(\frac{4\pi}{4} \right)}_0 \\ &= \frac{3\pi}{16} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right) \quad (7.28) \end{aligned}$$

Portanto, substituindo 7.28 em 7.25 e 7.25 em 7.24, resulta:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2x) \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + 1 \right).$$

Exercício 7.13.

Calcule as seguintes integrais:

a. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^5 x \, dx$

b. $\int \frac{\sec^4 x}{\operatorname{tg}^3 x} \, dx$

c. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^5 x} \, dx$

d. $\int \frac{1}{\sin^4 2\theta} \, d\theta$

e. $\int \frac{\cotg^3 x}{\sin^2 x} \, dx$

(Aula 21 do caderno didático, exercício proposto nº 4: e, h, o, p e q, respectivamente)

Solução:

a. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^5 x \, dx$

Vamos calcular em primeiro lugar a integral indefinida $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$.

Como o expoente de $\operatorname{tg} x$ é 5, que é um número ímpar, e levando em conta que $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$, vamos multiplicar no integrando o numerador e o denominador por $\sec x$, e vamos reescrever $\operatorname{tg}^5 x$ como $(\operatorname{tg}^4 x)(\operatorname{tg} x)$. Usaremos um dos fatores para compor $du = \sec x \operatorname{tg} x \, dx$ e fazer a substituição $u = \sec x$. Além disso, usaremos a identidade trigonométrica $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, para escrever $\sec^2 x$ em termos de $\operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^5 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^5 x \frac{\sec x}{\sec x} \, dx = \int \frac{\operatorname{tg}^4 x}{\sec x} \sec x \operatorname{tg} x \, dx \\ &= \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x)^2}{\sec x} \sec x \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{(\sec^2 x - 1)}{\sec x} \sec x \operatorname{tg} x \, dx. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \sec x$, $du = \sec x \operatorname{tg} x \, dx$, obtemos

$$\begin{aligned} &= \int \frac{(u^2 - 1)^2}{u} \, du = \int \frac{(u^4 - 2u^2 + 1)}{u} \, du = \int \left(u^3 - 2u + \frac{1}{u} \right) \, du \\ &= \frac{u^4}{4} - 2 \frac{u^2}{2} + \ln |u| + C = \frac{1}{4} \sec^4 x - \sec^2 x + \ln |\sec x| + C. \end{aligned}$$

Logo, pela segunda forma do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^5 x dx &= \left[\frac{1}{4} \sec^4 x - \sec^2 x + \ln |\sec x| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \sec^4 \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &- \sec^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) + \ln \left| \sec \left(\frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{4} \sec^4 \left(\frac{\pi}{6} \right) + \sec^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) - \ln \left| \sec \left(\frac{\pi}{6} \right) \right| \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{2})^4 - (\sqrt{2})^2 + \ln |\sqrt{2}| - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^4 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 - \ln \left| \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right) \right| \\ &= 1 - 2 + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} \left(\frac{16}{9} \right) + \left(\frac{4}{3} \right) - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 \\ &= -1 - \left(\frac{4}{9} \right) + \left(\frac{4}{3} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} = -\frac{1}{9} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Outra forma de resolver o exercício é usando fórmulas de redução:

Da fórmula 3 dada na Aula 21 do caderno didático, temos a fórmula de redução para $n > 1$:

$$\int \operatorname{tg}^n x dx = \frac{\operatorname{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{tg}^{n-2} x dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x dx &= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg}^3 x dx \\ \int \operatorname{tg}^3 x dx &= \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int \operatorname{tg}^5 x dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^5 x dx &= \left[\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \ln |\cos x| \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 \left(\frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &- \ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 \left(\frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{6} \right) - \ln \left| \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \right| \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^4 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \ln \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \ln \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \right| - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{9} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right) + \ln \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \ln \sqrt{2} + \ln 2 - \frac{1}{36} + \frac{1}{6} + \ln \sqrt{3} - \ln 2 \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{36} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{-9-1+6}{36} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{9} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{3}{2} \right).\end{aligned}$$

b. $\int \frac{\sec^4 x}{\operatorname{tg}^3 x} dx$

$$\int \frac{\sec^4 x}{\operatorname{tg}^3 x} dx = \int \operatorname{tg}^{-3} x \sec^4 x dx$$

Como o expoente de $\sec x$ é 4, que é um número par, vamos reescrever $\sec^4 x$ como $(\sec^2 x)(\sec^2 x)$, usar um dos fatores para compor $du = \sec^2 x dx$ e fazer a substituição $u = \operatorname{tg} x$. Além disso, usaremos a identidade trigonométrica $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, para escrever $\sec^2 x$ em termos de $\operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^{-3} x \sec^4 x dx &= \int \operatorname{tg}^{-3} x \sec^2 x \sec^2 x dx \\ &= \int \operatorname{tg}^{-3} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x dx = \int u^{-3} (1 + u^2) du \\ &= \int \left(u^{-3} + \frac{1}{u} \right) du = \frac{u^{-2}}{-2} + \ln |u| + C \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{\sec^4 x}{\operatorname{tg}^3 x} dx = -\frac{\operatorname{tg}^{-2} x}{2} + \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

c. $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^5 x} dx$

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^5 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x \sec^5 x dx$$

Observe que, neste caso, o expoente da $\operatorname{tg} x$ é 2 que é um número par e o expoente da $\sec x$ é 5 um número ímpar, assim não é nenhum dos casos anteriores. Neste caso, o integrando pode ser reescrito em termos apenas de secantes, usando a fórmula $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \sec^5 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^5 x dx = \int (\sec^7 x - \sec^5 x) dx \\ &= \int \sec^7 x dx - \int \sec^5 x dx \end{aligned} \quad (7.29)$$

Da fórmula 2 dada na Aula 21 do caderno didático, temos a fórmula de redução para $n > 1$:

$$\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \operatorname{tg} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x dx,$$

Usando a fórmula para $n = 7, 5$ e 3 respectivamente, temos:

$$\int \sec^7 x dx = \frac{1}{6} \sec^5 x \operatorname{tg} x + \frac{5}{6} \int \sec^5 x dx, \quad (7.30)$$

$$\int \sec^5 x dx = \frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{3}{4} \int \sec^3 x dx, \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x dx &= \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \int \sec x dx = \\ &= \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C\end{aligned}\quad (7.32)$$

Substituindo 7.30 em 7.29, obtemos

$$\begin{aligned}\int \sec^7 x dx - \int \sec^5 x dx &= \frac{1}{6} \sec^5 x \operatorname{tg} x + \frac{5}{6} \int \sec^5 x dx - \int \sec^5 x dx = \\ &= \frac{1}{6} \sec^5 x \operatorname{tg} x - \frac{1}{6} \int \sec^5 x dx\end{aligned}\quad (7.33)$$

Substituindo 7.32 em 7.31:

$$\int \sec^5 x dx = \frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C\quad (7.34)$$

Substituindo 7.34 em 7.33, tem-se

$$\begin{aligned}\int \sec^7 x dx - \int \sec^5 x dx &= \\ &= \frac{1}{6} \sec^5 x \operatorname{tg} x - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8} \sec x \operatorname{tg} x + \frac{3}{8} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| \right) + C\end{aligned}\quad (7.35)$$

Assim, resulta que $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^5 x} dx =$

$$= \frac{1}{6} \sec^5 x \operatorname{tg} x - \frac{1}{24} \sec^3 x \operatorname{tg} x - \frac{1}{16} \sec x \operatorname{tg} x - \frac{1}{16} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C$$

d. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 2\theta} d\theta$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 2\theta} d\theta = \int \operatorname{cosec}^4 2\theta d\theta$$

Como o expoente de $\operatorname{cosec} 2\theta$ é 4, que é um número par, vamos reescrever $\operatorname{cosec}^4 2\theta$ como $(\operatorname{cosec}^2 2\theta)(\operatorname{cosec}^2 2\theta)$, usar um dos fatores para compor $du = -2\operatorname{cosec}^2 2\theta d\theta$ e fazer a substituição $u = \cotg 2\theta$. Além disso, usaremos a identidade trigonométrica $\operatorname{cosec}^2 2\theta = 1 + \cotg^2 2\theta$, para escrever $\operatorname{cosec}^2 2\theta$ em termos de $\cotg x$.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cosec}^4 2\theta d\theta &= \int \operatorname{cosec}^2 2\theta \operatorname{cosec}^2 2\theta d\theta \\ &= \int \frac{(-2)}{(-2)} (1 + \cotg^2 2\theta) \operatorname{cosec}^2 2\theta d\theta = \int (1 + u^2) \left(-\frac{1}{2} \right) du \\ &= -\frac{1}{2} \left(u + \frac{u^3}{3} \right) + C = -\frac{1}{2} \cotg 2\theta - \frac{1}{6} \cotg^3 2\theta + C.\end{aligned}$$

Finalmente, resulta:

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^4 2\theta} d\theta = -\frac{1}{2} \cotg 2\theta - \frac{1}{6} \cotg^3 2\theta + C.$$

e. $\int \frac{\cotg^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$

$$\int \frac{\cotg^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = \int \cotg^3 x \operatorname{cosec}^2 x dx$$

Como o expoente de $\operatorname{cosec} x$ é 2 que é um número par, vamos fazer a substituição $u = \cotg x$. Assim, $du = -\operatorname{cosec}^2 x dx$

$$\int \cotg^3 x \operatorname{cosec}^2 x dx = \int -u^3 du = -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{1}{4} \cotg^4 x + C.$$

Assim,

$$\int \frac{\cotg^3 x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\frac{1}{4} \cotg^4 x + C.$$

Veja, no Apêndice 4, no final deste caderno, o passo a passo de exercícios adicionais correspondentes a esta semana.

Semana 8

SIMULADOS DA AP1

✍ Em virtude da reforma curricular, estamos colocando nesta semana versões modificadas de provas aplicadas em semestres passados. Os Gabaritos das mesmas encontram-se no Apêndice 3 no final do caderno. Lembre-se de que o aluno não tem que achar, ou ainda exigir, que as provas sejam do mesmo jeito todos os semestres. Assim, estas provas só servem para você treinar e verificar se está pronto ou não para fazer a AP1 .



Todas as respostas devem estar acompanhadas das justificativas, mesmo que não exista o que está sendo pedido.

SIMULADO 1

1ª Questão - Usando integral definida, determine o valor da área da região sombreada na **Figura 8.1**.

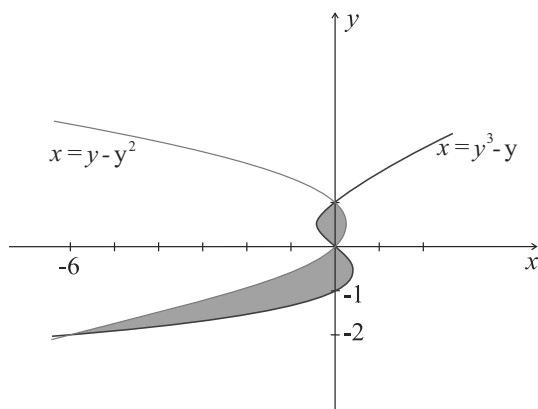


Figura 8.1

2ª Questão - Derive a seguinte função: $F(x) = \int_{3x}^{x^2} \left(\frac{t-1}{t^2+1} \right) dt$

3ª Questão - Calcule:

a. $\int x^3 e^{x^2} dx$

b. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$

c. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cotg^3(x) \operatorname{cosec}^2 x dx$

4ª Questão - Seja R a região limitada pelas curvas dadas

$$y = \sqrt{x}, \quad y = e^x, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

- Esboce a região R .
- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x .
- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável y .
- Calcule a área da região R (Use a representação mais conveniente).

SIMULADO 2

1ª Questão - Seja R a região no primeiro quadrante limitada pelas curvas dadas $y = \frac{2}{x}$, $y = x^2$, e $y = 1$.

- Esboce a região R .
- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x .
- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável y .
- Calcule a área da região R . Use a representação mais conveniente para você.

2ª Questão - Calcule a derivada da seguinte função:

$$F(x) = \int_{x^2}^{(\ln x)^2} \cos(t^2) dt.$$

3ª Questão - Calcule:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1 + \operatorname{tg} 2x)^3 \sec^2 2x dx$

b. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$

c. $\int 2^x e^x dx$

4ª Questão - Considere a função $f(x) = 4 - x^2$, $x \in [0, 3]$.

a. Faça o esboço do gráfico da função f no intervalo dado.

b. Calcule $\int_0^3 f(x) dx$ e interprete o resultado em termos de áreas.

c. Encontre a área da região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos x para $x \in [0, 3]$.

d. Calcule $\int_0^3 |f(x)| dx$.

SIMULADO 3

1ª Questão - Calcule

a. $F'(1)$ sendo que $F(x) = x^3 \left(\int_1^x \operatorname{arctg}(t^2) dt \right)$.

b. $\int_{-1}^2 |x^2 - 1| dx$.

2ª Questão

- Usando a técnica de substituição, calcule: $\int t^3(1-t^4)^7 dt$
- Calcule a integral definida $\int_1^e \frac{1-\ln x}{x} dx$.

3ª Questão

- Usando a técnica de integração por partes, calcule: $\int x \sec^2 x dx$.
- Calcule $\int (\sec t)^{\frac{1}{2}} \cos^3 t dt$.

4ª Questão - Seja R a região sombreada no primeiro quadrante, mostrada na **Figura 8.2**, limitada pelas curvas $y = 1 + \sqrt{x}$, $y = (x-1)^2$ e $x+y=3$.

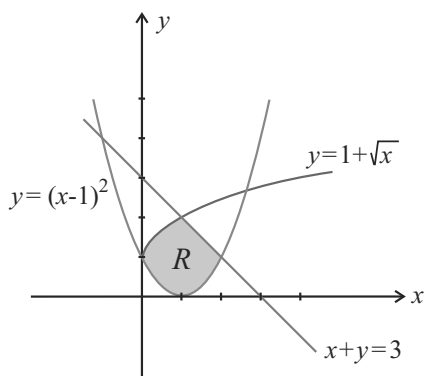


Figura 8.2

- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x .
- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável y .
- Calcule a área da região R . Use a representação mais conveniente para você.

Apêndice 1

RECORDAÇÃO DE PRÉ-CÁLCULO. TRANSFORMAÇÕES DE FUNÇÕES

• Alongamentos ou Esticamentos e Compressões

1. Dado $A > 0$, então o gráfico de $y = A f(x)$ pode ser obtido a partir do gráfico de $y = f(x)$ comprimindo-o verticalmente por um fator de $\frac{1}{A}$, se $0 < A < 1$, ou alongando-o verticalmente por um fator de A , caso $A > 1$.
2. Dado $B > 0$, então o gráfico de $y = f(Bx)$ pode ser obtido a partir do gráfico de $y = f(x)$ alongando-o horizontalmente por um fator de $\frac{1}{B}$, se $0 < B < 1$, ou comprimindo-o horizontalmente por um fator de B , caso $B > 1$.

• Reflexões

1. Se $y = -f(x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo x .
2. Se $y = f(-x)$, reflita o gráfico de $y = f(x)$ em torno do eixo y .
3. Se $y = |f(x)|$, reflita os pontos do gráfico de $y = f(x)$ com ordenada negativa em torno do eixo x .

• Translações ou Deslocamentos Verticais e Horizontais

Suponha $C > 0$ e $D > 0$. Para obter o gráfico de:

1. $y = f(x) + D$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em D unidades para cima.

- 2. $y = f(x) - D$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em D unidades para baixo.
- 3. $y = f(x - C)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em C unidades para a direita.
- 4. $y = f(x + C)$, desloque o gráfico de $y = f(x)$ em C unidades para a esquerda.

O diagrama a seguir irá lembrá-lo os assuntos estudados:

Reflexão em torno do eixo x

$y = (-)^A f((-)^B(x + C)) + D$

Reflexão em torno do eixo y

Em relação ao gráfico de $y = f(x)$:

A: Alongamento vertical se $A > 1$ Compressão vertical se $0 < A < 1$
B: Alongamento horizontal se $0 < B < 1$ Compressão horizontal se $B > 1$
C: Deslocamento horizontal à direita se $C < 0$ à esquerda se $C > 0$
D: Deslocamento vertical para cima se $D > 0$ para baixo se $D < 0$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Exemplo 1.1.

A **Figura 1.1** seguinte mostra o gráfico de uma função $y = f(x)$ com domínio $[-4, 4]$ e imagem $[0, 4]$:

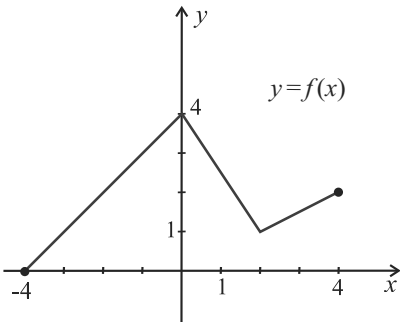


Figura 1.1

Encontre o domínio e a imagem das funções abaixo e esboce os gráficos correspondentes:

a. $y = 2f(x)$

h. $y = f(x) - 2$

b. $y = \frac{1}{2}f(x)$

i. $y = |f(x) - 2|$

c. $y = f(2x)$

j. $y = f(x + 2)$

d. $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

k. $y = f(x - 2)$

e. $y = -f(x)$

l. $y = -\frac{1}{2}f(x - 2) + 3$

f. $y = f(-x)$

m. $y = \left| -\frac{1}{2}f(-2x) + 1 \right|$

g. $y = f(x) + 2$

Solução:

- a. $y = 2f(x)$ pode ser obtido do gráfico de f por um alongamento vertical, já que $A = 2 > 1$. Assim:

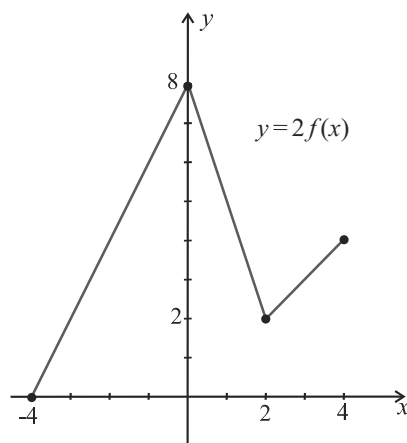


Figura 1.2

Observe que o domínio da nova função continua sendo o mesmo que o da função f , isto é, o intervalo $[-4, 4]$. Já a imagem da nova função é o intervalo $[0, 8]$ que tem o dobro do comprimento da imagem de f .

- b. $y = \frac{1}{2}f(x)$ pode ser obtido do gráfico de f por uma compressão vertical, já que $A = \frac{1}{2} < 1$. Assim:

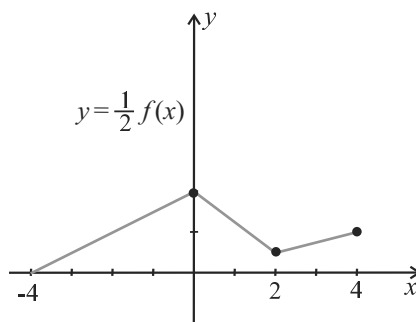


Figura 1.3

Observe que o domínio da nova função continua sendo o mesmo que o da função f , isto é, o intervalo $[-4, 4]$. Já a imagem da nova função é o intervalo $[0, 2]$ que tem a metade do comprimento da imagem de f .

- c. $y = f(2x)$ pode ser obtido do gráfico de f por uma compressão horizontal por um fator de 2, já que $B = 2 > 1$. Assim:

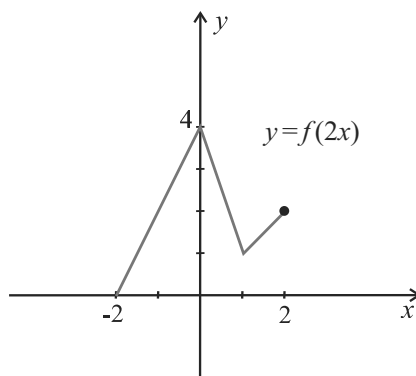


Figura 1.4

Observe que a imagem da nova função continua sendo a mesma que a imagem da função f , isto é, o intervalo $[0, 4]$. Já o domínio da nova função é o intervalo $[-2, 2]$ que tem a metade do comprimento do domínio de f . (De fato, note-se que $-4 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$).

- d. $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$ pode ser obtido do gráfico de f por um alongamento horizontal por um fator de 2, já que $B = \frac{1}{2} < 1$. Assim:

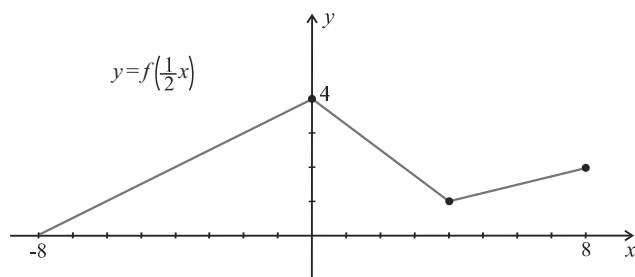


Figura 1.5

Observe que a imagem da nova função continua sendo a mesma imagem que a da função f , isto é, o intervalo $[0, 4]$. Já o domínio da nova função é o intervalo $[-8, 8]$ que tem o dobro do comprimento do domínio de f . (De fato, note-se que $-4 \leq \frac{1}{2}x \leq 4 \Leftrightarrow -8 \leq x \leq 8$).

- e. $y = -f(x)$ pode ser obtido do gráfico de f por uma reflexão em torno do eixo x . Assim:

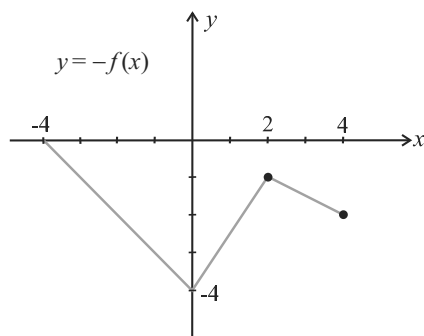


Figura 1.6

Observe que o domínio da nova função continua sendo o mesmo que o da função f , isto é, o intervalo $[-4, 4]$. Já a imagem da nova função é o intervalo $[-4, 0]$ que é a reflexão da imagem de f em torno do eixo x .

- f. $y = f(-x)$ pode ser obtido do gráfico de f por uma reflexão em torno do eixo y . Assim:

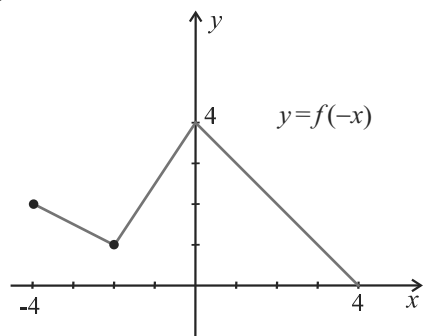


Figura 1.7

Observe que a imagem da nova função continua sendo a mesma que a da função f , isto é, o intervalo $[0, 4]$. Já o domínio da nova função, neste caso em particular, coincide com o intervalo $[-4, 4]$, porém, em geral é a reflexão da imagem de f em torno do eixo y .

- g. $y = f(x) + 2$ pode ser obtido por um deslocamento ou translação vertical do gráfico de $y = f(x)$ em $D = 2$ unidades para cima:

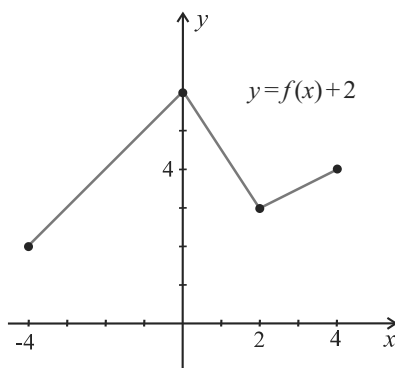


Figura 1.8

Observe que o domínio da nova função continua sendo o mesmo que o da função f , isto é, o intervalo $[-4, 4]$. Já a imagem da nova função é o intervalo $[2, 6]$ que é obtido deslocando a imagem de f 2 unidades para cima.

- h. $y = f(x) - 2$ pode ser obtido por um deslocamento ou translação vertical do gráfico de $y = f(x)$ em $D = 2$ unidades para baixo:

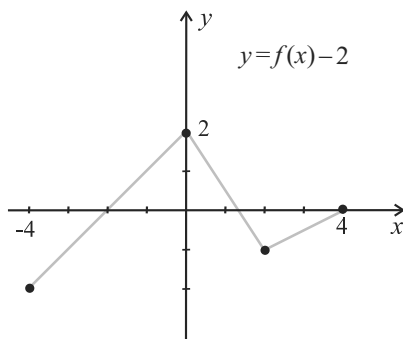


Figura 1.9

Observe que o domínio da nova função continua sendo o mesmo que o da função f , isto é, o intervalo $[-4, 4]$. Já a imagem da nova função é o intervalo $[-2, 2]$ que é obtido deslocando a imagem de f 2 unidades para baixo.

- i. $y = |f(x) - 2|$ pode ser obtido refletindo os pontos do gráfico de $y = f(x) - 2$ com ordenada negativa em torno de eixo x :

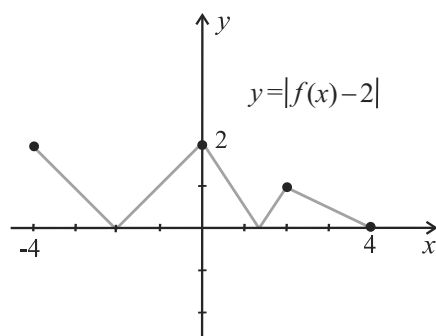


Figura 1.10

Observe que o domínio da nova função continua sendo o mesmo que o da função f , isto é, o intervalo $[-4, 4]$. Já a imagem da nova função é o intervalo $[0, 2]$.

- j. $y = f(x + 2)$ pode ser obtido por um deslocamento ou translação horizontal do gráfico de $y = f(x)$ em $C = 2$ unidades para a esquerda. Assim:

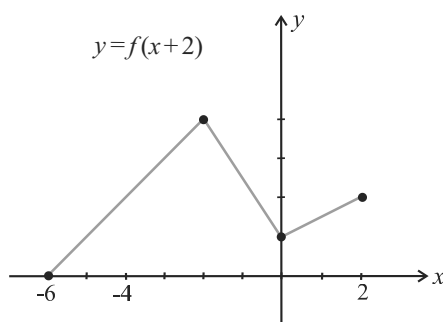


Figura 1.11

Observe que a imagem da nova função continua sendo a mesma que a da função f , isto é, o intervalo $[0, 4]$. Já o domínio da nova função é o intervalo $[-6, 2]$ que é obtido deslocando o domínio de f 2 unidades para a esquerda.

- k. $y = f(x - 2)$ pode ser obtido por um deslocamento ou translação horizontal do gráfico de $y = f(x)$ em $C = 2$ unidades para a direita. Assim:

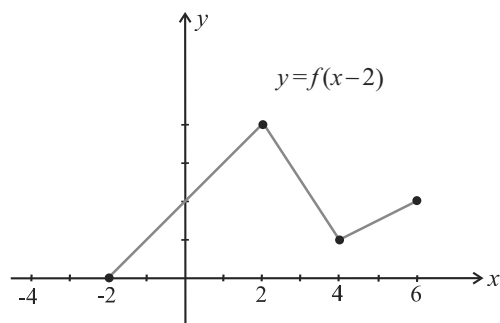


Figura 1.12

Observe que a imagem da nova função continua sendo a mesma que a da função f , isto é, o intervalo $[0, 4]$. Já o domínio da nova função é o intervalo $[-2, 6]$ que é obtido deslocando o domínio de f 2 unidades para a direita.

1. $y = -\frac{1}{2}f(x-2) + 3$

Observe que existem diversas maneiras de resolver este exercício, uma delas é a seguinte:

- $y = \frac{1}{2}f(x)$ é obtido do gráfico de f por uma compressão vertical já que $A = \frac{1}{2} < 1$. Assim:

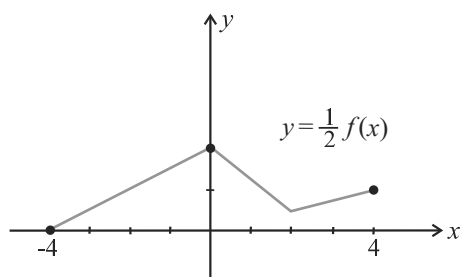


Figura 1.13

- $y = -\frac{1}{2}f(x)$ é obtido do gráfico de $y = \frac{1}{2}f(x)$ por reflexão em torno do eixo x :

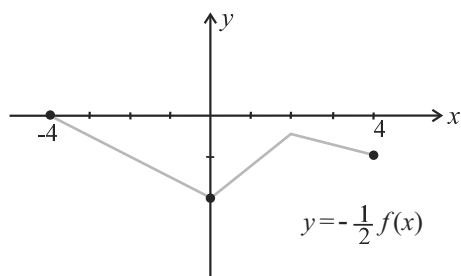


Figura 1.14

- $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$ é obtido do gráfico de $y = -\frac{1}{2}f(x)$ por uma translação vertical de 3 unidades para cima:

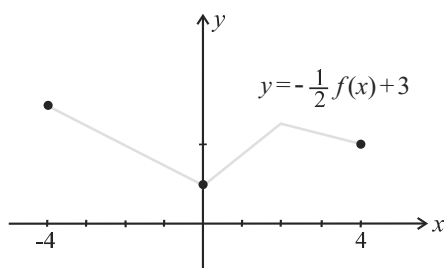


Figura 1.15

- Finalmente, $y = -\frac{1}{2}f(x-2) + 3$ é obtido do gráfico de $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$ por uma translação horizontal de 2 unidades para a direita:

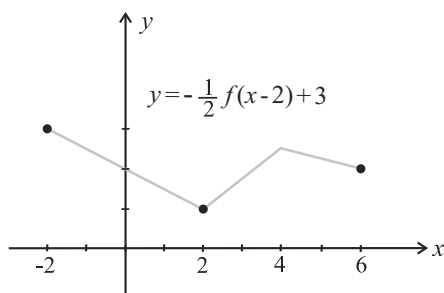


Figura 1.16

Assim, o domínio da função $y = -\frac{1}{2}f(x-2) + 3$ é o intervalo $[-2, 6]$ e a imagem é o intervalo $[0, 3]$.

m. $y = \left| -\frac{1}{2}f(-2x) + 1 \right|$

Novamente observe que existem diversas maneiras de resolver este exercício, uma delas é a seguinte:

- $y = f(-x)$ é obtido do gráfico de $y = f(x)$ por uma reflexão em torno do eixo y :

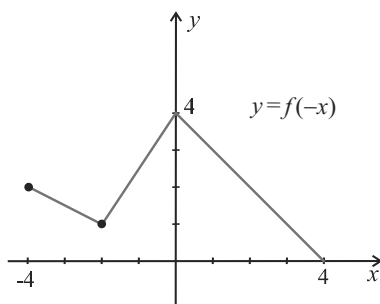


Figura 1.17

- $y = f(-2x)$ é obtido do gráfico de $y = f(-x)$ por uma compressão horizontal por um fator de 2, já que $B = 2 > 1$. Assim:

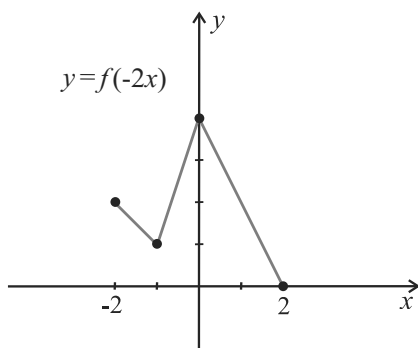


Figura 1.18

- $y = \frac{1}{2}f(-2x)$ é obtido do gráfico de $y = f(-2x)$ por uma compressão vertical por um fator de 2, já que $A = \frac{1}{2} < 1$. Assim:

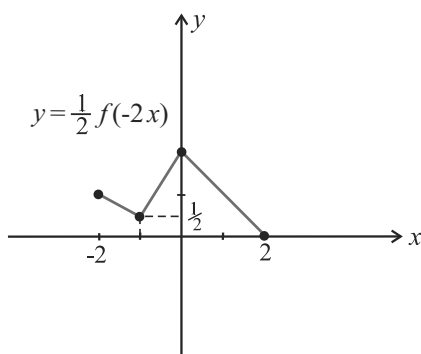


Figura 1.19

- $y = -\frac{1}{2}f(-2x)$ é obtido do gráfico de $y = \frac{1}{2}f(-2x)$ por uma reflexão em torno do eixo x :

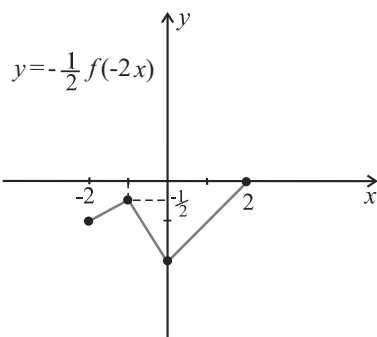


Figura 1.20

- $y = -\frac{1}{2}f(-2x) + 1$ é obtido do gráfico de $y = -\frac{1}{2}f(-2x)$ por uma translação vertical de 1 unidade para cima:

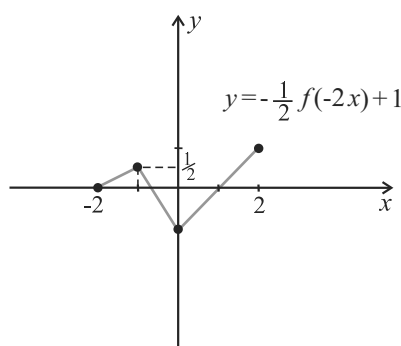


Figura 1.21

- Finalmente, $y = \left| -\frac{1}{2}f(-2x) + 1 \right|$ é obtido por reflexão dos pontos do gráfico de $y = -\frac{1}{2}f(-2x) + 1$ com ordenada negativa em torno do eixo x :

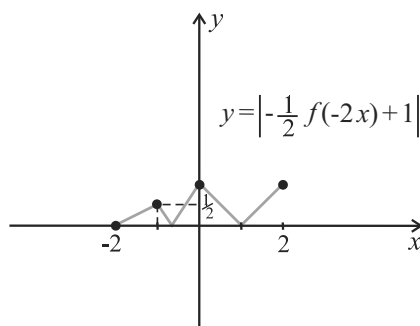


Figura 1.22

Assim, o domínio da função $y = \left| -\frac{1}{2}f(-2x) + 1 \right|$ é o intervalo $[-2, 2]$ e a imagem é o intervalo $[0, 1]$.

Lembre-se de que pela disciplina de Pré-Cálculo sabemos também que na função senoide,

$$f(x) = A \operatorname{sen} \left[\frac{2\pi}{B}(x - C) \right] + D$$

$|A|$ é a amplitude, $|B|$ é o período, C é o deslocamento horizontal e D é o deslocamento vertical.

Na **Figura 1.23**, mostramos a função senoide geral para o caso de A , B , C e D positivos.

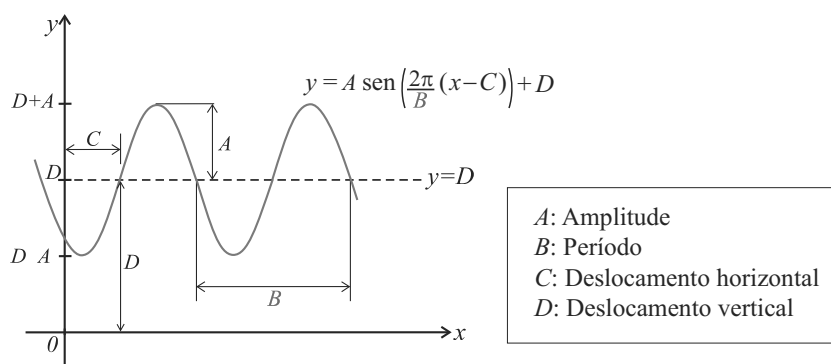


Figura 1.23

Exemplo 1.2.

Faça um esboço do gráfico de $y = g(x) = 3 \operatorname{sen} \left[2x + \frac{\pi}{2} \right] - 1$ a partir do gráfico da função $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ usando alongamentos, compressões, translações e reflexões. Em cada etapa, especifique qual transformação empregou e faça um esboço do gráfico da função intermediária correspondente, indicando no gráfico (pelo menos num período) as interseções com os eixos coordenados, caso existam.

Solução: Observe que:

$$y = g(x) = 3 \operatorname{sen} \left[2x + \frac{\pi}{2} \right] - 1 = 3 \operatorname{sen} \left[2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right] - 1$$

- Consideremos o gráfico da função $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ mostrado na **Figura 1.24**.

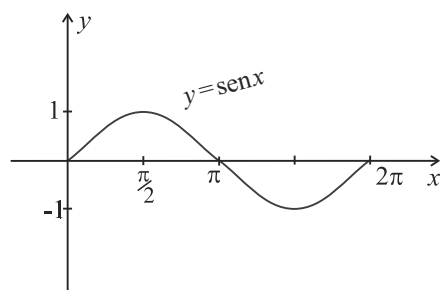


Figura 1.24

- $y = 3 \operatorname{sen} x$ é obtido do gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ por um alongamento vertical por um fator de 3. Assim:

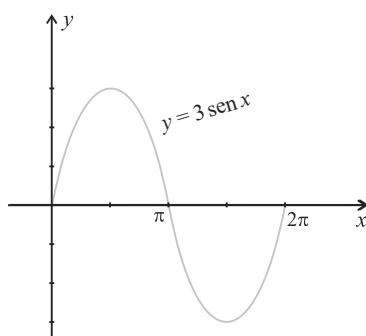


Figura 1.25

- $y = 3 \operatorname{sen}(2x)$ é obtido do gráfico da função $y = 3 \operatorname{sen} x$ por uma compressão horizontal por um fator de 2. Assim:

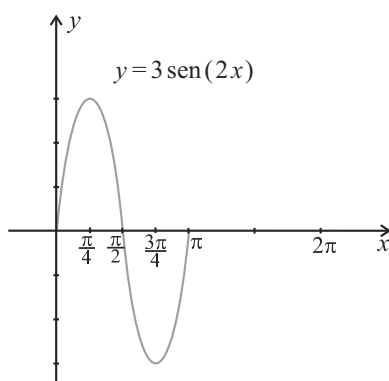


Figura 1.26

- $y = 3 \operatorname{sen}(2x) - 1$ é obtido do gráfico da função $y = 3 \operatorname{sen}(2x)$ por uma translação vertical de uma unidade para baixo. Assim:

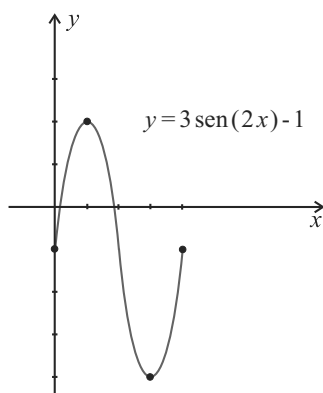


Figura 1.27

- $y = 3 \operatorname{sen} \left[2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right] - 1$ é obtido do gráfico da função $y = 3 \operatorname{sen}(2x) - 1$ por uma translação horizontal para a esquerda de $\frac{\pi}{4}$. Assim:

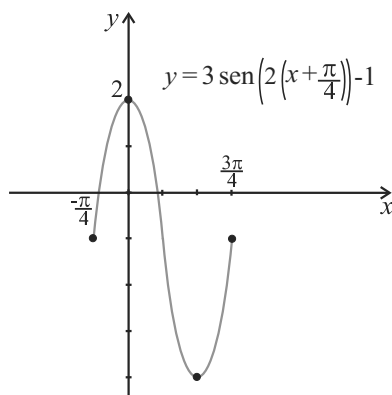


Figura 1.28

- Finalmente, $y = \left| 3 \operatorname{sen} \left[2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right] - 1 \right|$ é obtido por reflexão dos pontos do gráfico de $y = 3 \operatorname{sen} \left[2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right] - 1$ com ordenada negativa em torno de eixo x :

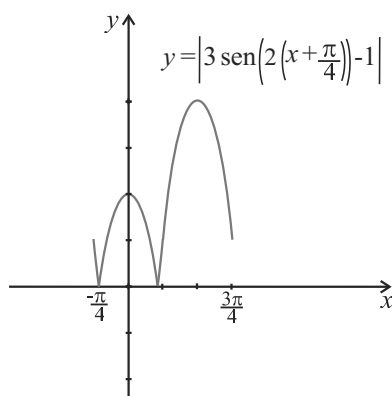


Figura 1.29

Apêndice 2

AD1 (SIMULADOS E PASSO A PASSO)

Caro aluno, lembre-se de que os simulados sejam de AD's ou AP's são somente algumas alternativas de perguntas. O professor da disciplina tem inúmeras formas de elaborar perguntas equivalentes ou perguntas totalmente diferentes. O que pretendemos com este trabalho é estimular o raciocínio do aluno e não é nosso objetivo criar fórmulas ou macetes de provas onde o aluno sem sequer ler a questão ou raciocinar vai e aplica uma fórmula porque essa fórmula foi cobrada em provas passadas e não porque ela seja necessária nesse momento.

SIMULADO 1

1ª Questão - Calcule:
$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{(x - \pi)^3}{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{x}{2}} \cos(\pi \operatorname{sen}(t)) dt} \right).$$

2ª Questão - Seja R a região compreendida entre os gráficos de $y = 2|x - 2| - 1$, $y = x^2$ com $x > 0$ e a reta $y = 27 - 6x$.

- a. Esboce a região R . b. Ache a área da região R .

3ª Questão - Considere a função $F(x) = \int_0^{G(x)} e^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$,

onde $G(x) = \int_{\log_5 x}^{\left(\frac{x}{5}\right)^2} \left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right) dt$ para todo $x \in (0, +\infty)$.

- a. Mostre que F é derivável em $(0, +\infty)$.
b. Calcule $F'(5)$.

4ª Questão - Dada a função $F(x) = \int_0^{-x} \frac{t^2 - 2t}{t^2 + 4} dt$, mostre que F é derivável em \mathbb{R} e determine:

- $F'(x)$
- os números críticos de F
- os intervalos em que F é crescente e os intervalos em que F é decrescente
- se F tem um máximo local ou um mínimo local ou nenhum dos dois
- os intervalos em que o gráfico de F é côncavo para baixo e os intervalos em que o gráfico de F é côncavo para cima.

SIMULADO 2

1ª Questão

- Faça um esboço da região R limitada pelas curvas
 $x = e^y$ se $y \leq 0$; $x = e^{-y}$ se $y \geq 0$;
 $x = y^2 - 1$ se $y \leq 0$; $x = (e^{-1} + 1)y - 1$ se $y \geq 0$;
 $y = -1$.
- Calcule a área da região R .

2ª Questão - Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até a 2ª ordem. Suponha $g'(x)$ sempre positiva ou sempre negativa em \mathbb{R} e seja h a função inversa de g . Considere $F(x) = \int_a^{h(x)} g(t) dt$ onde a é constante.

- Mostre que F e F' são funções deriváveis.
- Verifique que $F''(x) = \frac{[g'(h(x))^2 - xg''(h(x))]}{[g'(h(x))]^3}$.

3ª Questão - Calcule:

- $\int_{-3}^1 |x^3 - x| dx$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{\sin t}{t} dt}{x - \frac{\pi}{4}}$

4ª Questão - Seja \mathbb{R} a região compreendida entre os gráficos de $y = x^3$ e $x = y^2$ sobre o intervalo $-1 \leq y \leq 1$.

- Esboce a região R .
- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x .
- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável y .
- Calcule a área da região R (Use a representação mais conveniente).

5ª Questão - Considere a função

$$H(x) = x^2 \int_{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)}^{\left(\int_1^2 \sqrt[3]{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} ds\right)} \sin(t^3) dt.$$

Mostre que H é derivável em \mathbb{R} e encontre $H'(x)$.

PASSO A PASSO DO SIMULADO 1

Solução da 1ª Questão

Observe que se tentamos calcular diretamente o limite, é claro que o numerador tende para zero. Analogamente, calculando o limite do denominador quando $x \rightarrow \pi$ obtemos $\int_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cos(\pi \sin(t)) dt = 0$. Usando a regra de L'Hôpital, a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e a regra da cadeia, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{(x - \pi)^3}{\int_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cos(\pi \sin(t)) dt} \right) &\stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{3(x - \pi)^2}{\frac{d}{dx} \int_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}^{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \cos(\pi \sin(t)) dt} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{3(x - \pi)^2}{\cos\left(\pi \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{0}{\frac{1}{2} \cos(\pi)} = 0. \end{aligned}$$

Solução da 2ª Questão

a. Observe-se que

$$y = 2|x - 2| - 1 = \begin{cases} 2(x - 2) - 1 & \text{se } x - 2 \geq 0 \\ 2(2 - x) - 1 & \text{se } x - 2 < 0 \end{cases},$$

isto é,

$$y = \begin{cases} 2x - 5 & \text{se } x \geq 2 \\ 3 - 2x & \text{se } x < 2 \end{cases}.$$

Observe que o gráfico desta função faz um bico no ponto $(2, -1)$.

Interceptando a função $y = x^2$ com $x > 0$ e a semi-reta $y = 3 - 2x$, $x < 2$, obtemos

$$\begin{cases} y = x^2, & x > 0 \\ y = 3 - 2x, & x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 - 2x \\ x > 0, & x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 = 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 3)(x - 1) = 0 \\ 0 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1,$$

logo, $y = 1$. Portanto, temos o ponto $(1, 1)$.

Analogamente, interceptando a função $y = x^2$ com $x > 0$ e a reta $y = 27 - 6x$, obtemos

$$\begin{cases} y = x^2, & x > 0 \\ y = 27 - 6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 27 - 6x \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x - 27 = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + 9)(x - 3) = 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3,$$

logo, $y = 9$. Portanto, temos o ponto $(3, 9)$.

Similarmente, interceptando a reta $y = 27 - 6x$ e a semi-reta $y = 2x - 5$, $x > 2$, obtemos

$$\begin{cases} y = 27 - 6x \\ y = 2x - 5 & \text{se } x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 27 - 6x = 2x - 5 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 32 = 8x \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4,$$

logo, $y = 3$. Assim, obtemos o ponto $(4, 3)$.

A **Figura 2.1** a seguir representa a região R

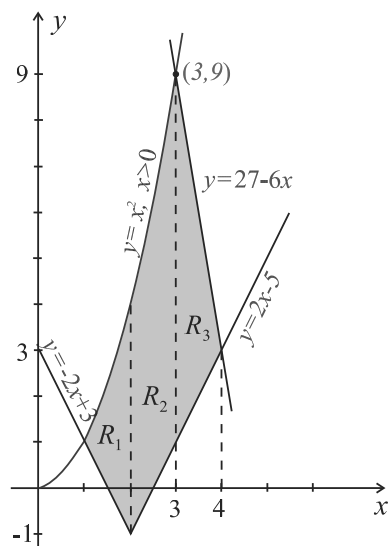


Figura 2.1

b. Do gráfico observamos que: $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Assim,

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3)$$

onde $A(R)$ representa a área da região R .

Portanto:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_1^2 [x^2 - 3 + 2x]dx + \int_2^3 [x^2 - 2x + 5]dx + \int_3^4 [32 - 8x]dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 3x + \frac{2x^2}{2} \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x \right]_2^3 + \left[32x - \frac{8x^2}{2} \right]_3^4 \\ &= \left[\left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - 3 + 1 \right) \right] + \left[(3^2 - 3^2 + 15) - \left(\frac{8}{3} - 4 + 10 \right) \right] \\ &\quad + [(128 - 64) - (96 - 36)] \\ &= \left(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 2 \right) + \left(15 - \frac{8}{3} - 6 \right) + (64 - 60) \\ &= \frac{7}{3} + 9 - \frac{8}{3} + 4 = 13 - \frac{1}{3} = \frac{39 - 1}{3} = \frac{38}{3}. \end{aligned}$$

Logo, $A(R) = \frac{38}{3}$ unidades de área.

Observe-se que também é possível considerar o problema na forma seguinte e encontrar a área de R como soma das áreas das novas regiões R_1 , R_2 e R_3 .

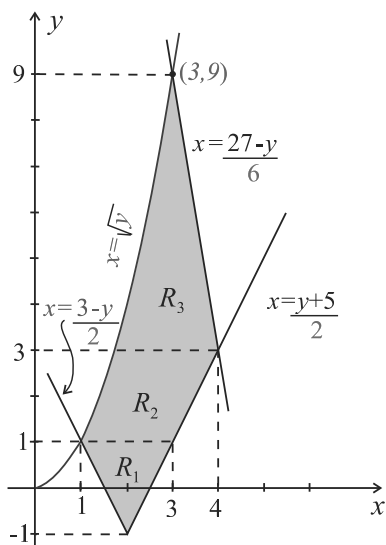


Figura 2.2

Solução da 3ª Questão

- a. Como $G(x) = \int_{\log_5 x}^{\left(\frac{x}{5}\right)^2} \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right) dt$ para todo $x \in (0, +\infty)$.
Afirmamos que G é derivável em $(0, +\infty)$. Com efeito, note que

$$G(x) = \int_{\log_5 x}^0 \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right) dt + \int_0^{\left(\frac{x}{5}\right)^2} \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right) dt,$$

isto é,

$$G(x) = - \int_0^{\log_5 x} \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right) dt + \int_0^{\left(\frac{x}{5}\right)^2} \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right) dt,$$

para todo $x \in (0, +\infty)$.

Por outro lado, desde que a função $p(x) = \log_5 x$ é derivável para todo $x \in (0, +\infty)$, a função $q(x) = \left(\frac{x}{5}\right)^2$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$, e a função $\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right)\right)$ é contínua em \mathbb{R} , segue da 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e da regra da cadeia, que G é derivável em $(0, +\infty)$ e

$$G'(x) = - \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} (\log_5 x)^2\right)\right) \frac{1}{x \ln 5} + \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{5}\right)^4\right)\right) \frac{2x}{5^2} \quad (2.1)$$

Por outro lado, na integral definida $\int_0^{G(x)} e^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$ a variável de integração é t . Assim como, e^{x^3} não depende de t , segue que

$$F(x) = \int_0^{G(x)} e^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt = e^{x^3} \int_0^{G(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt \quad (2.2)$$

Defina $F_1(x) = \int_0^{G(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$, onde

$$G(x) = \int_{\log_5 x}^{\left(\frac{x}{5}\right)^2} \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\right) dt \text{ para todo } x \in (0, +\infty).$$

Mostraremos que $F_1(x)$ é derivável em $(0, +\infty)$. Com efeito, como a função G é derivável em $(0, +\infty)$ e como $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ é contínua em $(-1, +\infty)$ segue da 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e da Regra da Cadeia que F_1 é derivável em $(0, +\infty)$ e

$$F_1'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+[G(x)]^3}} G'(x) \quad (2.3)$$

Assim, podemos afirmar de (2.2) e (2.3) que F é derivável em $(0, +\infty)$, pois, é um produto de funções deriváveis em $(0, +\infty)$, a saber: $u(x) = e^{x^3}$ e $F_1(x) = \int_0^{G(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$.

Logo, $F'(x) = e^{x^3} F_1'(x) + F_1(x) e^{x^3} (3x^2)$.

b. Da última fórmula obtida em a) temos, em particular, que

$$F'(5) = e^{5^3} F_1'(5) + F(5) e^{5^3} (3(5)^2).$$

Por outro lado, de (2.3), temos que $F_1'(5) = \frac{1}{\sqrt{1+[G(5)]^3}} G'(5)$,

e da definição de $G(x)$ temos que $G(5) = \int_{\log_5 5}^{\left(\frac{5}{5}\right)^2} \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\right) dt$
 $= \int_1^1 \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)\right) dt = 0$.

Assim, $F(5) = \int_0^{G(5)} e^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt = \int_0^0 e^{x^3} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt = 0$.

Por outro lado, de (2.1) temos que

$$G'(5) = -\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}(\log_5 5)^2\right)\right) \frac{1}{5 \ln 5} + \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{5}{5}\right)^4\right)\right) \frac{2(5)}{5^2},$$

ou seja,

$$G'(5) = -\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{1}{5 \ln 5} + \left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \frac{2}{5} = -\frac{2}{5 \ln 5} + \frac{4}{5}.$$

Logo,

$$F_1'(5) = \frac{1}{\sqrt{1+[G(5)]^3}} G'(5) = \frac{1}{\sqrt{1+[0]^3}} \left(-\frac{2}{5 \ln 5} + \frac{4}{5}\right) = \left(-\frac{2}{5 \ln 5} + \frac{4}{5}\right).$$

$$\text{Portanto, } F'(5) = e^{5^3} \left(-\frac{2}{5 \ln 5} + \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5} e^{5^3} \left(\frac{2 \ln 5 - 1}{\ln 5}\right).$$

Solução da 4ª Questão

Verifica-se que $F(x) = (G \circ h)(x)$ onde $G(x) = \int_0^x \frac{t^2 - 2t}{t^2 + 4} dt$ pelo Teorema Fundamental do Cálculo é derivável em \mathbb{R} (Veja que o integrando é uma função contínua) e $G'(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 4}$. Por outro lado, $h(x) = -x$ também é derivável em \mathbb{R} e $h'(x) = -1$. Assim, pela regra da cadeia, tem-se que $F(x) = (G \circ h)(x)$ é derivável em \mathbb{R} e

$$\begin{aligned} \text{a. } F'(x) &= (G \circ h)'(x) = G'(h(x))h'(x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x)}{(-x)^2 + 4}(-1) \\ &= -\left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4}\right). \end{aligned}$$

- b. Para achar os números críticos de F procuramos os pontos onde $F'(x) = 0$ ou não existe F' . Como, neste caso, F' sempre existe, os únicos números críticos são os números tais que $x^2 + 2x = x(x + 2) = 0$, isto é, $x = 0$ e $x = -2$.
- c. Os intervalos em que F é crescente e os intervalos em que F é decrescente,

Intervalos	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < +\infty$
Sinal de x	—	—	+
Sinal de $x + 2$	—	+	+
Sinal de $x^2 + 4$	+	+	+
Sinal de $F'(x)$	—	+	—
Comportamento de F	\searrow	\nearrow	\searrow

Podemos afirmar então que F é crescente em $(-2, 0)$ e F é decrescente em $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

- d. Note que como F é derivável em \mathbb{R} podemos concluir que F é contínua em \mathbb{R} , por outro lado de (c) e o teste da derivada primeira podemos concluir que F tem um mínimo local em $x = -2$ e que F tem um máximo local em $x = 0$.

$$\text{e. } F''(x) = - \left(\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4} \right)' = - \left(\frac{(x^2 + 4)(2x + 2) - (x^2 + 2x)(2x)}{(x^2 + 4)^2} \right)$$

$$F''(x) = - \left(\frac{2x^3 + 8x + 2x^2 + 8 - 2x^3 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} \right) = \frac{2}{(x^2 + 4)^2} (x^2 - 4x - 4)$$

Observe que $F''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{2}$.

Intervalos	$-\infty < x < 2 - 2\sqrt{2}$	$2 - 2\sqrt{2} < x < 2 + 2\sqrt{2}$	$2 + 2\sqrt{2} < x < +\infty$
Sinal de $x^2 - 4x - 4$	+	-	+
Sinal de $x^2 + 4$	+	+	+
Sinal de $F''(x)$	+	-	+
Concavidade do gráfico de F	\cup	\cap	\cup

Podemos afirmar então que o gráfico de F é côncavo para baixo em $(2 - 2\sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$ e o gráfico de F é côncavo para cima em $(-\infty, 2 - 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

PASSO A PASSO DA SIMULADO 2

Solução da 1ª Questão

- a. A figura a seguir representa a região $R = R_1 \cup R_2$.

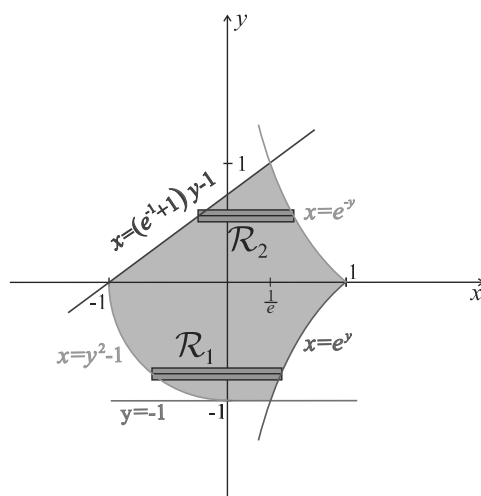


Figura 2.3

Precisamos da interseção da reta $x = (e^{-1} + 1)y - 1$ com a curva $x = e^{-y}$, $y \geq 0$.

Igualando as equações temos

$$x = \left(\frac{1}{e} + 1\right)y - 1 = e^{-y} \Rightarrow \left(\frac{1}{e} + 1\right)y = \frac{1}{e} + 1.$$

Observe que uma solução óbvia da equação anterior é $y = 1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

As outras interseções são imediatas como pode ser visto na **Figura 2.3**.

$$\begin{aligned} \text{b. } A(R) &= A(R_1) + A(R_2) \\ &= \int_{-1}^0 (e^y - (y^2 - 1))dy + \int_0^1 (e^{-y} - [(e^{-1} + 1)y - 1])dy \\ &= \int_{-1}^0 (e^y - y^2 + 1)dy + \int_0^1 (e^{-y} - [(e^{-1} + 1)y - 1])dy \\ &= \left[e^y - \frac{y^3}{3} + y \right]_{-1}^0 + \left[-e^{-y} - (e^{-1} + 1)\frac{y^2}{2} + y \right]_0^1 \\ &= e^0 - \left(e^{-1} - \frac{(-1)^3}{3} + (-1) \right) + \left(-e^{-1} - (e^{-1} + 1)\frac{1}{2} + 1 + e^0 \right) \\ &= 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{e} - \left(\frac{1}{e} + 1 \right) \frac{1}{2} + 1 + 1 = 4 - \frac{1}{3} - \frac{2}{e} - \frac{1}{2e} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{24 - 2 - 3}{6} - \frac{4}{2e} - \frac{1}{2e} = \frac{19}{6} - \frac{5}{2e} = \frac{19e - 15}{6e} \text{ unidades de} \\ &\text{área.} \end{aligned}$$

Solução da 2ª Questão

- a. Observe que as hipóteses dadas no exercício nos permitem utilizar o Teorema da Função Inversa, assim podemos afirmar que a função inversa h é uma função derivável em \mathbb{R} e que $h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}$. Note que, pelas hipóteses dadas, $g'(h(x)) \neq 0$ em \mathbb{R} .

Seja $G(x) = \int_a^x g(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$. É claro que, por hipótese, g é derivável em \mathbb{R} logo g é contínua em \mathbb{R} . Então, pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo e o

Exemplo 3.2 do livro texto, resulta que $G(x) = \int_a^x g(t) dt$
 $\forall x \in \mathbb{R}$ é derivável em \mathbb{R} e $G'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, é claro que

$$(G \circ h)(x) = G(h(x)) = \int_a^{h(x)} g(t) dt = F(x).$$

Como G e h são deriváveis em \mathbb{R} , a regra da cadeia nos garante que F é uma função derivável em \mathbb{R} e

$$F'(x) = (G \circ h)'(x) = G'(h(x))h'(x) = g(h(x))h'(x).$$

Como g e h são funções inversas então $(g \circ h)(x) = x$, então

$$F'(x) = xh'(x) = x \cdot \frac{1}{g'(h(x))} = \frac{x}{g'(h(x))}.$$

Note que F' é o quociente da função identidade $I(x) = x$ e da função $g'(h(x)) = (g' \circ h)(x) \neq 0$.

É claro que $I(x) = x$ é uma função derivável sobre \mathbb{R} . Resta provar que $(g' \circ h)(x)$ é também derivável. Com efeito, sabemos que g' é derivável em \mathbb{R} pois, por hipótese, g tem derivada até a segunda ordem e h é derivável como visto anteriormente. Assim, como a composição de duas funções deriváveis é derivável então $(g' \circ h)(x)$ é derivável, logo, pela regra da cadeia, temos $(g' \circ h)'(x) = g''(h(x))h'(x)$. Portanto, F' resulta derivável.

b. Usando a regra do quociente, temos que

$$F'(x) = \left(\frac{x}{g'(h(x))} \right)' = \frac{[g'(h(x))]1 - xg''(h(x))h'(x)}{[g'(h(x))]^2}.$$

Substituindo o valor de $h'(x)$ obtido em (a), na expressão da direita, obtemos

$$F''(x) = \frac{g'(h(x)) - xg'(h(x)) \cdot \frac{1}{g'(h(x))}}{[g'(h(x))]^2} = \frac{g'(h(x)) - xg'(h(x))}{[g'(h(x))]^3}.$$

Solução da 3ª Questão

$$\text{a. } |x^3 - x| = \begin{cases} x^3 - x & \text{se } x^3 - x \geq 0 \\ -x^3 + x & \text{se } x^3 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^3 - x & \text{se } (x^2 - 1)x \geq 0 \\ -x^3 + x & \text{se } (x^2 - 1)x < 0 \end{cases}$$

Observe que $(x^2 - 1)x = (x - 1)(x + 1)x$.

Intervalos	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
Sinal de $x + 1$	—	+	+	+
Sinal de x	—	—	+	+
Sinal de $x - 1$	—	—	—	+
Sinal de $(x^2 - 1)x$	—	+	—	+
$ x^3 - x $	$-x^3 + x$	$x^3 - x$	$-x^3 + x$	$x^3 - x$

Resumindo, temos que

$$|x^3 - x| = \begin{cases} x^3 - x & \text{se } x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty) \\ -x^3 + x & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 |x^3 - x| dx &= \int_{-3}^{-1} |x^3 - x| dx + \int_{-1}^0 |x^3 - x| dx + \int_0^1 |x^3 - x| dx \\ &= \int_{-3}^{-1} -x^3 + x dx + \int_{-1}^0 x^3 - x dx + \int_0^1 -x^3 + x dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} - \left(-\frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^2}{2} \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2} \right) \\ &\quad + \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2} \right) \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3^4}{4} - \frac{3^2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{2}. \end{aligned}$$

b. Note que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{\sin t}{t} dt}{x - \frac{\pi}{4}} \rightarrow \frac{0}{0}$, portanto podemos aplicar a regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{\sin t}{t} dt}{x - \frac{\pi}{4}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{d}{dx} \left(x \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{\sin t}{t} dt \right)}{\frac{d}{dx} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{x \frac{d}{dx} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{\sin t}{t} dt \right) + \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{\sin t}{t} dt}{1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(x \frac{\sin x}{x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{\sin t}{t} dt \right) = \sin \frac{\pi}{4} + 0 = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
 \end{aligned}$$

Solução da 4ª Questão

- a. O esboço da região R é apresentado na **Figura 2.4**.

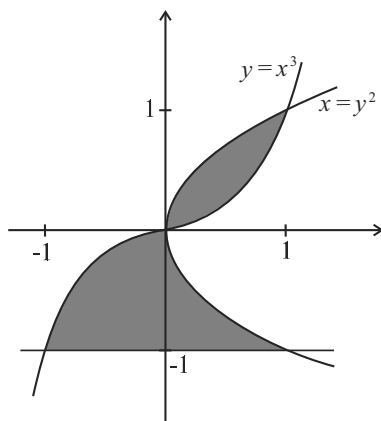


Figura 2.4

- b. Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x .

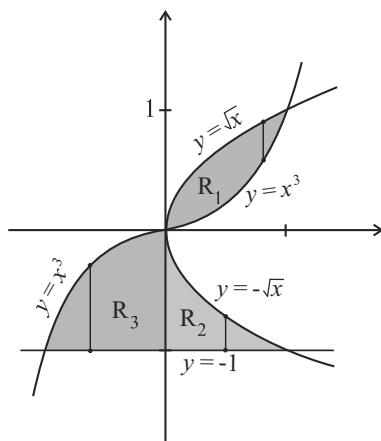


Figura 2.5

Observe que, neste caso, devemos dividir a região em 3 sub-regiões R_1 , R_2 e R_3 . Assim,

$$\begin{aligned} A(R) &= A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx + \int_0^1 (-\sqrt{x} - (-1)) dx + \int_{-1}^0 (x^3 - (-1)) dx \\ &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3) dx + \int_0^1 (-\sqrt{x} + 1) dx + \int_{-1}^0 (x^3 + 1) dx \end{aligned}$$

- c. Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável y .

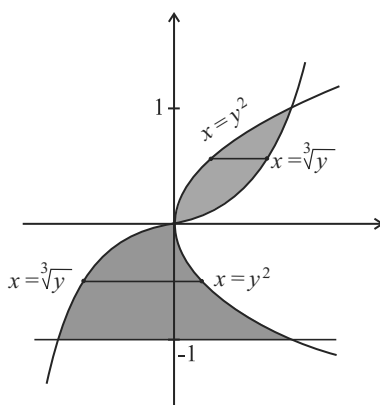


Figura 2.6

Neste caso, só precisamos dividir a região em 2 sub-regiões, logo

$$A(R) = \int_{-1}^0 (y^2 - \sqrt[3]{y}) dy + \int_0^1 (\sqrt[3]{y} - y^2) dy.$$

- d. Para calcular a área usaremos a representação em relação à variável y .

$$\begin{aligned} A(R) &= \left[\frac{y^3}{3} - \frac{3y^{\frac{4}{3}}}{4} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{y^3}{3} \right]_0^1 \\ &= -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{3(1)^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{(1)^3}{3} \\ &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Solução da 5ª Questão

$$\text{Seja } H(x) = x^2 \left[\int_{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)}^{\left(\int_1^2 \sqrt[3]{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} ds\right)} \text{sen}(t^3) dt \right] = x^2 F(x),$$

$$\text{onde } F(x) = \int_{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)}^{\left(\int_1^2 \sqrt[3]{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} ds\right)} \text{sen}(t^3) dt.$$

Pelas propriedades da integral definida obtemos que

$$F(x) = \left[\int_{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)}^0 \text{sen}(t^3) dt + \int_0^{\left(\int_1^2 \sqrt[3]{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} ds\right)} \text{sen}(t^3) dt \right]$$

Ou seja,

$$F(x) = \left[- \int_0^{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)} \text{sen}(t^3) dt + \int_0^{\left(\int_1^2 \sqrt[3]{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} ds\right)} \text{sen}(t^3) dt \right]$$

$$\text{Defina } F_1(x) = - \int_0^{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)} \text{sen}(t^3) dt \quad \text{e}$$

$$F_2(x) = \int_0^{\left(\int_1^2 \sqrt[3]{x^2+1} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} ds\right)} \text{sen}(t^3) dt \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Note que $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ é definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Para mostrar que F é derivável em \mathbb{R} basta provar que $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são deriváveis em \mathbb{R} .

Verifica-se que $F_1(x) = (G_1 \circ h_1)(x)$ onde $G_1(x) = - \int_0^x \text{sen}(t^3) dt$ pelo Teorema Fundamental do Cálculo é derivável em \mathbb{R} e $h_1(x) = \frac{5x}{x^2+7}$ também é derivável em \mathbb{R} sendo

$$G_1'(x) = -\text{sen}(x^3) \text{ e } h_1'(x) = \frac{(x^2+7)5 - 5x(2x)}{(x^2+7)^2} = \frac{5(7-x^2)}{(x^2+7)^2}.$$

Assim, pela Regra da Cadeia, tem-se que $F_1(x) = (G_1 \circ h_1)(x)$ é derivável em \mathbb{R} e

$$F_1'(x) = (G_1 \circ h_1)'(x) = G_1'(h_1(x))h_1'(x) = -\text{sen} \left(\left(\frac{5x}{x^2+7} \right)^3 \right) \cdot \frac{5(7-x^2)}{(x^2+7)^2}$$

Analogamente, verifica-se que $F_2(x) = (G_2 \circ h_2)(x)$, onde $G_2(x) = \int_0^x \text{sen}(t^3) dt$ pelo Teorema Fundamental do Cálculo é derivável em \mathbb{R} e $G_2'(x) = \text{sen}(x^3)$.

Por outro lado, $h_2(x) = \int_1^{2\sqrt[3]{x^2+1}} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} ds = (F_3 \circ h_3)(x)$ onde $F_3(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} ds$ pelo Teorema Fundamental do Cálculo é derivável em \mathbb{R} e $h_3(x) = 2\sqrt[3]{x^2+1}$ é também derivável em \mathbb{R} , sendo $F_3'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ e $h_3'(x) = \frac{2}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}(2x) = \frac{4x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$.

Assim, pela Regra da Cadeia, tem-se que $h_2(x) = (F_3 \circ h_3)(x)$ é derivável em \mathbb{R} e

$$\begin{aligned} h_2'(x) &= (F_3 \circ h_3)'(x) = F_3'(h_3(x))h_3'(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\sqrt[3]{x^2+1})^2+1}} \cdot \frac{4x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4x}{3(\sqrt[3]{x^2+1})^2 \sqrt{4\sqrt[3]{x^2+1}^2+1}} \end{aligned}$$

Logo, pela Regra da Cadeia novamente, tem-se que $F_2(x) = (G_2 \circ h_2)(x)$ é derivável em \mathbb{R} e

$$\begin{aligned} F_2'(x) &= (G_2 \circ h_2)'(x) = G_2'(h_2(x))h_2'(x) \\ &= \sin \left(\left(\int_1^{2\sqrt[3]{x^2+1}} \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} ds \right)^3 \right) \cdot \frac{4x}{(3\sqrt[3]{x^2+1})^2 \sqrt{4\sqrt[3]{x^2+1}^2+1}} \end{aligned}$$

Note que $H(x) = x^2 \cdot F(x)$. É claro que x^2 é derivável em \mathbb{R} e acabamos de mostrar que F é derivável em \mathbb{R} . Como o produto de funções deriváveis é derivável, finalmente, podemos afirmar que $H(x) = x^2 F(x) = x^2(F_1(x) + F_2(x))$ é derivável em \mathbb{R} e usando a regra do produto temos que

$$\begin{aligned} H'(x) &= x^2(F_1(x) + F_2(x))' + 2x(F_1(x) + F_2(x)) \\ &= x^2(F_1'(x) + F_2'(x)) + 2x(F(x)) \end{aligned}$$

Substituindo os valores de $F(x)$, $F_1'(x)$ e $F_2'(x)$ achados anteriormente obtemos a resposta.

Apêndice 3

GABARITOS DOS SIMULADOS DA AP1

GABARITO DO SIMULADO 1

Solução da 1ª Questão

Seja $R = R_1 \cup R_2$ a região pedida, onde R_1 é a região situada abaixo do eixo x e R_2 é a região situada acima do eixo x .

Então, a área da região é $A(R) = A(R_1) + A(R_2)$.

Cálculo de $A(R_1)$:

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_{-2}^0 [(y^3 - y) - (y - y^2)] dy = \int_{-2}^0 (y^3 + y^2 - 2y) dy \\ &= \left[\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} - 2\frac{y^2}{2} \right]_{-2}^0 = - \left[\frac{(-2)^4}{4} + \frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 \right] \\ &= - \left[4 - \frac{8}{3} - 4 \right] = \frac{8}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Cálculo de $A(R_2)$:

$$\begin{aligned} A(R_2) &= \int_0^1 [(y - y^2) - (y^3 - y)] dy = \int_0^1 (2y - y^2 - y^3) dy \\ &= \left[2\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \left[1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] = \left[\frac{12 - 4 - 3}{12} \right] \\ &= \frac{5}{12} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Assim,

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = \frac{32 + 5}{12} = \frac{37}{12} \text{ unidades de área.}$$

Solução da 2ª Questão

Notemos inicialmente que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{3x}^{x^2} \left(\frac{t-1}{t^2+1} \right) dt = \int_{3x}^0 \left(\frac{t-1}{t^2+1} \right) dt + \int_0^{x^2} \left(\frac{t-1}{t^2+1} \right) dt \\ &= - \int_0^{3x} \left(\frac{t-1}{t^2+1} \right) dt + \int_0^{x^2} \left(\frac{t-1}{t^2+1} \right) dt. \end{aligned}$$

Derivando, temos

$$F'(x) = -\frac{d}{dx} \left(\int_0^{3x} \left(\frac{t-1}{t^2+1} \right) dt \right) + \frac{d}{dx} \left(\int_0^{x^2} \left(\frac{t-1}{t^2+1} \right) dt \right).$$

E usando a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia, temos

$$F'(x) = -3 \left(\frac{3x-1}{9x^2+1} \right) + 2x \left(\frac{x^2-1}{x^4+1} \right).$$

Solução da 3ª Questão

a. $\int x^3 e^{x^2} dx$

Considere $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$
 $dv = x e^{x^2} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{x^2}$

Integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx \\ \int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C = \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + C. \end{aligned}$$

b. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$

Considere $u = 1 + 2x \Rightarrow du = 2 dx$ e $x = \frac{1}{2}(u - 1)$

Se $x = 0$, então $u = 1$.

Se $x = 4$, então $u = 9$.

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx &= \int_1^9 \frac{\frac{1}{2}(u-1)}{\sqrt{u}} \frac{du}{2} = \frac{1}{4} \int_1^9 \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}\right) du \\&= \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}} \right]_1^9 = \frac{1}{4} \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} - 3u^{\frac{1}{2}} \right]_1^9 \\&= \frac{1}{6} [(27-9) - (1-3)] = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}\end{aligned}$$

c. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cotg^3(x) \operatorname{cosec}^2 x dx$

Fazendo a substituição $u = \cotg(t) \Rightarrow du = -\operatorname{cosec}^2(t) dt$

Fazendo a mudança dos limites de integração

$$\text{se } t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1 \quad \text{se } t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cotg^3(x) \operatorname{cosec}^2 x dx &= -\int_1^0 u^3 du = \int_0^1 u^3 du \\&= \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Solução da 4ª Questão

a. A região R é mostrada na **Figura 3.1**:

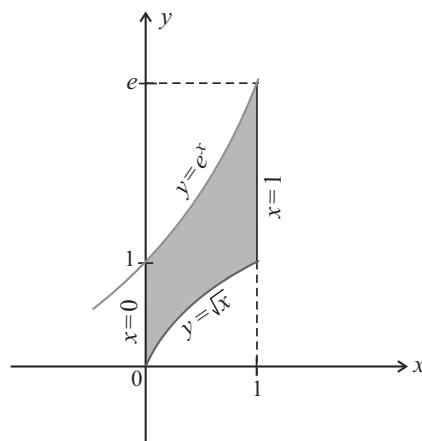


Figura 3.1

- b. Na **Figura 3.2**, mostramos também um retângulo típico (ou representativo) vertical na região:

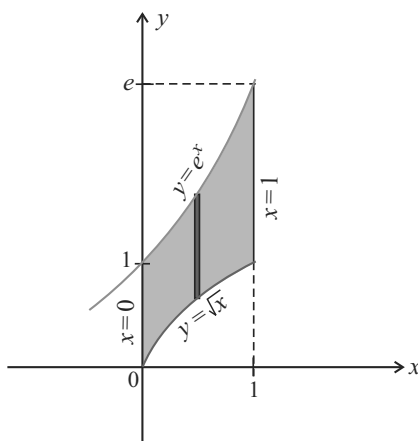


Figura 3.2

Neste caso, a representação da área é feita por uma integral em relação à variável x :

$$A(R) = \int_0^1 (e^x - \sqrt{x}) dx.$$

- c. Dessa forma, a região R precisa ser dividida em duas regiões. Na **Figura 3.3**, mostramos um retângulo representativo horizontal em cada região:

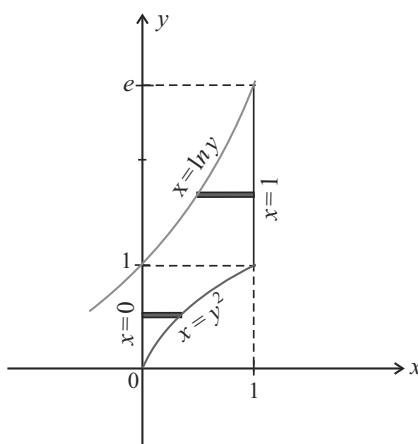


Figura 3.3

Neste caso, a representação da área é feita por duas integrais em relação à variável y :

$$A(R) = \int_0^1 (y^2 - 0) dy + \int_1^e (1 - \ln y) dy.$$

- d. Observe-se que a representação mais conveniente é, neste caso, a representação em relação à variável x :

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^1 (e^x - \sqrt{x}) dx = \int_0^1 \left(e^x - x^{\frac{1}{2}} \right) dx = e^x - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 \\ &= e^1 - \frac{2}{3} - e^0 = e - \frac{2}{3} - 1 = e - \frac{5}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

GABARITO DO SIMULADO 2

Solução da 1ª Questão

- a. A região R é mostrada na **Figura 3.4**:

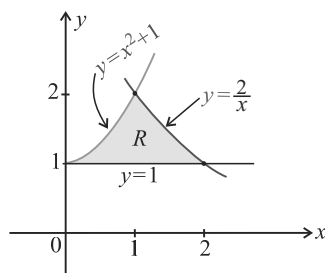


Figura 3.4

- b. Nesta forma, a região R precisa ser dividida em duas regiões, na **Figura 3.5** mostramos um retângulo representativo vertical em cada região.

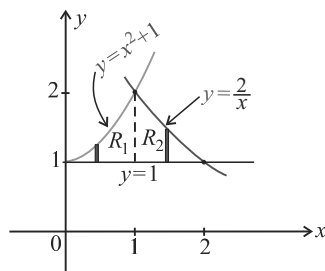


Figura 3.5

Neste caso, a representação da área é feita por uma integral em relação à variável x :

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^1 ((x^2 + 1) - 1) dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) dx. \end{aligned}$$

- c. Na **Figura 3.6** mostramos também um retângulo típico (ou representativo) horizontal na região.

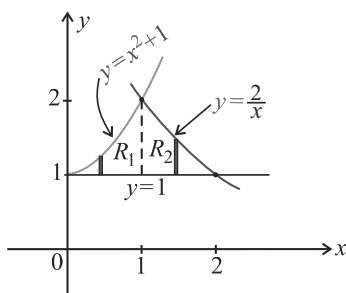


Figura 3.6

Neste caso, a representação da área é feita por uma integral em relação à variável y :

$$A(R) = \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - \sqrt{y-1} \right) dy.$$

- d. Observe-se que a representação mais conveniente é, neste caso, a representação em relação à variável y :

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - \sqrt{y-1} \right) dy = 2 \ln |y| - 2 \frac{(y-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^2 \\ &= 2 \ln 2 - \frac{2}{3} = \frac{6 \ln 2 - 2}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Se a representação mais conveniente para você é a representação em relação à variável x . Então

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) dx = \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^1 + (2 \ln |x| - x) \Bigg|_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + 2 \ln 2 - 2 - 2 \underbrace{\ln 1}_0 + 1 \\ A(R) &= \frac{6 \ln 2 - 2}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Solução da 2ª Questão

Observe que o integrando $f(t) = \cos t^2$ é uma função contínua para todo t número real.

$$F(x) = \int_{x^2}^{(\ln x)^2} \cos(t^2) dt = \int_{x^2}^1 \cos(t^2) dt + \int_1^{(\ln x)^2} \cos(t^2) dt$$

$$F(x) = - \int_1^{x^2} \cos(t^2) dt + \int_1^{(\ln x)^2} \cos(t^2) dt.$$

Logo, utilizando a 1ª forma do TFC e a regra da cadeia em cada, somando, obtemos

$$F'(x) = -\cos(x^2)^2 [x^2]' + \cos((\ln x)^2)^2 [(\ln x)^2]'$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} F'(x) &= -(\cos(x^4)) 2x + (\cos(\ln x)^4) \left(\frac{2}{x} \ln x\right) \\ &= \left(\frac{2}{x} \ln x\right) \cos(\ln x)^4 - 2x \cos(x^4). \end{aligned}$$

Solução da 3ª Questão

- a. Para resolver a integral definida, usaremos o método de substituição:

Faça a substituição $u = \operatorname{tg} 2x \Rightarrow du = (\sec^2 2x) 2 dx \Rightarrow \frac{du}{2} = \sec^2 2x dx$. Precisamos também fazer a mudança dos limites de integração. Enquanto x varia de 0 até $\frac{\pi}{8}$, u varia de $u = 0$ até $u = 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{8}} (1 + \operatorname{tg} 2x)^3 \sec^2 2x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 + u)^3 du \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(1+u)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{8} [(2)^4 - 1] = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

- b. Neste caso, para calcular $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$, usaremos a fórmula de integração por partes para integrais definidas. Faça $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$, $dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$.

Assim,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx &= (\ln x) \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} dx \\ &= -\frac{\ln 2}{2} + \int_1^2 x^{-2} dx = -\frac{\ln 2}{2} + \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{x} \Big|_1^2 \\ &= -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = \left(\frac{1 - \ln 2}{2} \right).\end{aligned}$$

Do Cálculo I, sabemos que

$$2^x = e^{\ln 2^x} = e^{x \ln 2} \Rightarrow 2^x e^x = e^{x \ln 2} e^x = e^{x(1 + \ln 2)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int 2^x e^x dx &= \int e^{x(1 + \ln 2)} dx = \frac{1}{(1 + \ln 2)} \int (1 + \ln 2) e^{x(1 + \ln 2)} dx \\ &= \frac{e^{x(1 + \ln 2)}}{(1 + \ln 2)} + C = \frac{2^x e^x}{(1 + \ln 2)} + C.\end{aligned}$$

Solução da 4ª Questão

- a. Lembre que o gráfico de $y = 4 - x^2$ é uma parábola de vértice em $(0, 4)$ que abre para baixo. O esboço do gráfico da função f no intervalo dado é mostrado na **Figura 3.7**.

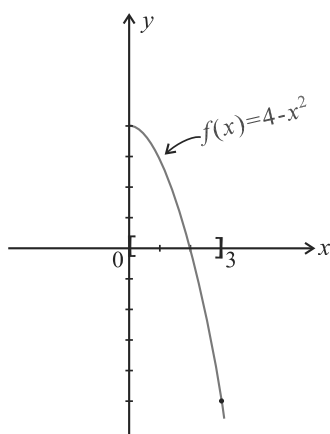


Figura 3.7

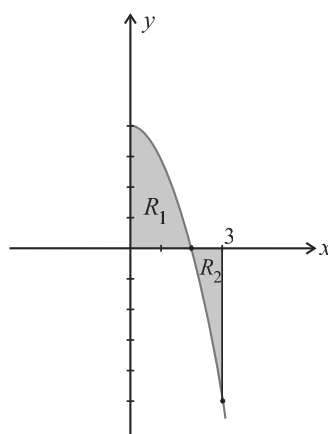


Figura 3.8

$$\begin{aligned} \text{b. } \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^3 (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = \left(4(3) - \frac{3^3}{3} \right) \\ &= 12 - 9 = 3. \end{aligned}$$

Para interpretar o resultado em termos de áreas, observe na **Figura 3.7** que a função $f(x) = 4 - x^2$ é maior ou igual a zero no intervalo $[0, 2]$ e a função f é menor ou igual que zero no intervalo $[2, 3]$. Logo, a integral definida dada pode ser interpretada como a diferença de áreas:

$$\begin{aligned} \int_0^3 (4 - x^2) dx &= \int_0^2 (4 - x^2) dx + \int_2^3 (4 - x^2) dx \\ &= A(R_1) + -A(R_2) = A(R_1) - A(R_2) \end{aligned}$$

onde as regiões R_1 e R_2 são mostradas na **Figura 3.8**. A diferença, neste caso, é o número positivo 3 e indica que a diferença dada é positiva, isto é, $A(R_1) > A(R_2)$ o que pode ser visto também na **Figura 3.8**.

- c. Observe que, neste caso, a região R pedida é a união das regiões R_1 e R_2 mostradas na **Figura 3.8**, logo $A(R) = A(R_1) + A(R_2)$.

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (4 - x^2) dx = 4x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 \\ &= \left(4(2) - \frac{2^3}{3} \right) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(R_2) &= - \int_2^3 f(x) dx = - \int_2^3 (4 - x^2) dx = -4x + \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 \\ &= \left(-4(3) + \frac{3^3}{3} \right) - \left(-4(2) + \frac{2^3}{3} \right) = -12 + 9 + 8 - \frac{8}{3} \\ &= 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3} \text{ unidades de área.}$$

d. Note que $\int_0^3 |f(x)| dx = \int_0^2 |f(x)| dx + \int_2^3 |f(x)| dx$

Observe na **Figura 3.8** que a função $f(x) = 4 - x^2$ é maior ou igual a zero no intervalo $[0, 2]$ e a função f é menor ou igual a zero no intervalo $[2, 3]$.

Assim,

$$\int_0^3 |f(x)| dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 (-f(x)) dx.$$

Calculando diretamente as integrais definidas ou utilizando os resultados do exercício 4 (c) temos que

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{16}{3} \quad \text{e} \quad \int_2^3 -f(x) dx = \frac{7}{3}.$$

Logo,
$$\int_0^3 |f(x)| dx = \frac{16}{3} + \frac{7}{3} = \frac{23}{3}.$$

GABARITO DO SIMULADO 3

Solução da 1ª Questão

a.
$$F'(x) = x^3 \cdot \frac{d}{dx} \left[\int_1^x \operatorname{arctg}(t^2) dt \right] + 3x^2 \cdot \int_1^x \operatorname{arctg}(t^2) dt.$$

Seja $G(x) = \int_1^x \operatorname{arctg}(t^2) dt$. Observe que o integrando $f(t) = \operatorname{arctg} t^2$ é uma função contínua para todo t número real. Assim, pela 1ª forma do TFC temos que $\frac{d}{dx} G(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$F'(x) = x^3 \cdot \operatorname{arctg}(x^2) + 3x^2 \cdot \int_1^x \operatorname{arctg}(t^2) dt$$

Portanto,

$$F'(1) = \operatorname{arctg}(1) + 3 \cdot \underbrace{\int_1^1 \operatorname{arctg}(t^2) dt}_0 = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}.$$

- b. Dos seus conhecimentos de segundo grau você sabe que $y = x^2 - 1$ é a equação de uma parábola de vértice em $(0, -1)$ e raízes em $x = -1$ e $x = 1$. Por outro lado, dos seus conhecimentos de Pré Cálculo ou do Apêndice 1 do Caderno da Coordenação, sabemos que o gráfico de $y = |x^2 - 1|$ é obtido refletindo os pontos do gráfico de $y = x^2 - 1$ que tem ordenada negativa em torno do eixo x , como mostra a **Figura 3.9** no intervalo $[-1, 2]$.

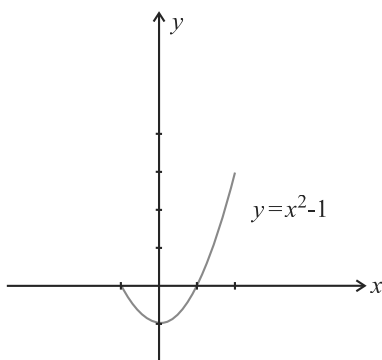


Figura 3.9

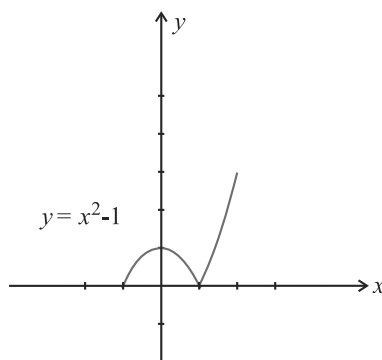


Figura 3.10

Logo, utilizando as propriedades da integral definida podemos dizer que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 |x^2 - 1| dx &= \int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^2 |x^2 - 1| dx \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx \\ &= x - \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 + \frac{x^3}{3} - x \Big|_1^2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Solução da 2ª Questão

- a. Faça a substituição $u = (1 - t^4) \Rightarrow du = -4t^3 dt \Rightarrow t^3 dt = -\frac{du}{4}$. Logo,

$$\begin{aligned}\int t^3 (1 - t^4)^7 dt &= -\frac{1}{4} \int u^7 du \\ &= -\frac{1}{4} \left[\frac{u^8}{8} \right] + C = -\frac{1}{32} (1 - t^4)^8 + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b. } \int_1^e \frac{1 - \ln x}{x} dx &= \int_1^e \frac{1}{x} dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \\ &= \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 1 - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx\end{aligned}\quad (3.1)$$

Faça $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$. Mudando os limites de integração, temos que: se $x = 1 \Rightarrow u = \ln 1 = 0$ e se $x = e \Rightarrow u = \ln e = 1$.

Logo,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 u du = \frac{u^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) em (3.1), resulta

$$\int_1^e \frac{1 - \ln x}{x} dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Solução da 3ª Questão

- a. Faça $u = x \Rightarrow du = dx$, $dv = \sec^2 x dx \Rightarrow v = \operatorname{tg} x$.

Assim,

$$\int x \sec^2 x dx = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx \quad (3.3)$$

Por outro lado,

$$\int \operatorname{tg} x dx = - \int \overbrace{\frac{-\operatorname{sen} x dx}{\operatorname{cos} x}}^{\frac{du}{u}} = -\ln |\operatorname{cos} x| + C \quad (3.4)$$

Substituindo (3.4) em (3.3), resulta

$$\int x \sec^2 x dx = x \operatorname{tg} x + \ln |\operatorname{cos} x| + C.$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int (\operatorname{sen} t)^{\frac{1}{2}} \cos^3 t dt &= \int (\operatorname{sen} t)^{\frac{1}{2}} \cos^2 t \cdot \cos t dt \\ &= \int (\operatorname{sen} t)^{\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{sen}^2 t) \cdot \cos t dt. \end{aligned}$$

Faça a substituição $u = \operatorname{sen} t \Rightarrow du = \cos t dt$, logo

$$\begin{aligned} \int (\operatorname{sen} t)^{\frac{1}{2}} (1 - \operatorname{sen}^2 t) \cdot \cos t dt &= \int u^{\frac{1}{2}} (1 - u^2) du \\ &= \int \left(u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}} \right) du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} + C \\ &= \frac{2\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}} t}{3} - \frac{2\operatorname{sen}^{\frac{7}{2}} t}{7} + C. \end{aligned}$$

Solução da 4ª Questão

- a. Nesta forma, a região R precisa ser dividida em duas sub-regiões como mostra a **Figura 3.11**. Mostramos também nela um retângulo representativo vertical em cada sub-região.

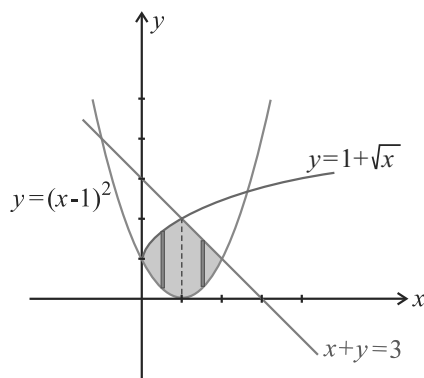


Figura 3.11

Neste caso, a representação da área é feita por duas integrais em relação à variável x :

$$A(R) = \int_0^1 ((1 + \sqrt{x}) - (x - 1)^2) dx + \int_1^2 ((3 - x) - (x - 1)^2) dx.$$

Ou, em forma equivalente,

$$A(R) = \int_0^1 (1 + \sqrt{x}) dx + \int_1^2 (3 - x) dx - \int_0^2 (x - 1)^2 dx.$$

- b. Nesta forma a região R também precisa ser dividida em duas sub-regiões como é visto na **Figura 3.12**. Nela mostramos também um retângulo representativo horizontal em cada sub-região.

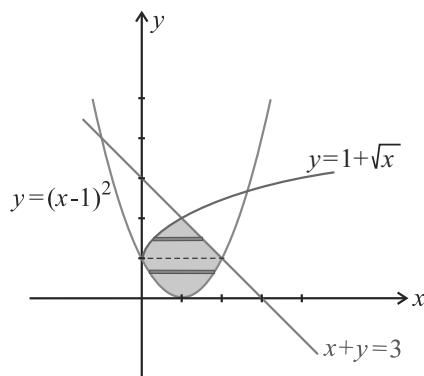


Figura 3.12

Neste caso, a representação da área é feita também por duas integrais em relação à variável y :

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^1 ((1 + \sqrt{y}) - (1 - \sqrt{y})) dy + \int_1^2 ((3 - y) - (y - 1)^2) dy \\ &= \int_0^2 2\sqrt{y} dy + \int_1^2 (2 + y - y^2) dy \end{aligned}$$

- c. Se a representação mais conveniente para você é a representação em relação à variável x , então

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^1 (1 + \sqrt{x}) dx + \int_1^2 (3 - x) dx - \int_0^2 (x - 1)^2 dx \\ &= x + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 + 3x - \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 - \frac{(x - 1)^3}{3} \Big|_0^2 \\ &= 1 + \frac{2}{3} + 4 - 3 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{2} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Se a representação mais conveniente para você é a representação em relação à variável y , então

$$\begin{aligned} A(R) &= 4 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^1 + \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right] \Big|_1^2 \\ &= \frac{4}{3} + \left(4 + 2 - \frac{8}{3} \right) - \left(2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Apêndice 4

PASSO A PASSO DOS EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES E OUTROS PROPOSTOS NO CADERNO DIDÁTICO

SEMANA 1

NOTAÇÃO SIGMA

Exercício 4.1.

Escreva as somas dos exercícios a-c sem a notação sigma. Depois calcule-as.

$$\text{a. } \sum_{k=1}^2 \frac{6k}{k+1} \quad \text{b. } \sum_{k=1}^4 \cos(k\pi) \quad \text{c. } \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{4}\right)$$

Solução:

$$\text{a. } \sum_{k=1}^2 \frac{6k}{k+1} = \frac{6(1)}{1+1} + \frac{6(2)}{2+1} = \frac{6}{2} + \frac{12}{3} = 3 + 4 = 7$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \sum_{k=1}^4 \cos(k\pi) &= \underbrace{\cos(1\pi)}_{-1} + \underbrace{\cos(2\pi)}_1 + \underbrace{\cos(3\pi)}_{-1} + \underbrace{\cos(4\pi)}_1 \\ &= -1 + 1 - 1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \sum_{k=1}^3 (-1)^{k+1} \operatorname{sen}\left(k\frac{\pi}{4}\right) &= (-1)^{1+1} \operatorname{sen}\left(1\frac{\pi}{4}\right) + (-1)^{2+1} \operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{4}\right) \\ &\quad + (-1)^{3+1} \operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{4}\right) \\ &= (-1)^2 \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} + (-1)^3 \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_1 + (-1)^4 \underbrace{\operatorname{sen}\left(3\frac{\pi}{4}\right)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

Exercício 4.2.

Use a notação sigma para escrever a soma:

- a. $\left[5\left(\frac{1}{8}\right) + 3\right] + \left[5\left(\frac{2}{8}\right) + 3\right] + \dots + \left[5\left(\frac{8}{8}\right) + 3\right]$
- b. $\left[1 - \left(\frac{2}{n} - 1\right)^2\right] \left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \left[1 - \left(\frac{2n}{n} - 1\right)^2\right] \left(\frac{2}{n}\right)$

Solução:

- a. $\left[5\left(\frac{1}{8}\right) + 3\right] + \left[5\left(\frac{2}{8}\right) + 3\right] + \dots + \left[5\left(\frac{8}{8}\right) + 3\right]$
 $= \sum_{k=1}^8 \left[5\left(\frac{k}{8}\right) + 3\right]$
- b. $\left[1 - \left(\frac{2}{n} - 1\right)^2\right] \left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \left[1 - \left(\frac{2n}{n} - 1\right)^2\right] \left(\frac{2}{n}\right)$
 $= \sum_{k=1}^n \left[1 - \left(\frac{2k}{n} - 1\right)^2\right] \left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right) \sum_{k=1}^n \left[1 - \left(\frac{2k}{n} - 1\right)^2\right]$

Exercício 4.3.

- a. Encontre a fórmula para a soma de n termos:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3} (k-1)^2.$$

- b. Use a fórmula achada em (a) para calcular:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3} (k-1)^2.$$

Solução:

$$\begin{aligned} \text{a. } \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3} (k-1)^2 &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1) \\ &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{2}{n^3} \sum_{k=1}^n k + \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n^3} n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2n^2 + n + 2n + 1)}{6n^2} - \frac{n}{n^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{(2n^2 + 3n + 1)}{6n^2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{n}
 \end{aligned}$$

b. Lembre-se de que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$.

$$\text{Assim, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3} (k-1)^2 \stackrel{a}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3}.$$

RETÂNGULOS PARA SOMAS DE RIEMANN

Exercício 4.4.

Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ no intervalo $[0, 2]$. Divida o intervalo $[0, 2]$ em quatro subintervalos de comprimentos iguais. Depois acrescente ao seu esboço os retângulos associados com

a soma de Riemann $\sum_{k=1}^4 f(x_k) \Delta x_k$, tomando x_k como a:

- Extremidade esquerda dos subintervalos.
- Extremidade direita dos subintervalos.
- Ponto médio do k -ésimo subintervalo.

(Faça um esboço para cada conjunto de retângulos).

Solução: Na **Figura 4.1**, mostramos o esboço do gráfico de $f(x) = x^2 - 1$ no intervalo $[0, 2]$.

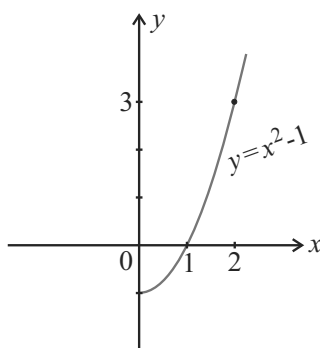


Figura 4.1

Na **Figura 4.2**, mostramos o intervalo $[0, 2]$ dividido em quatro subintervalos de comprimentos iguais.

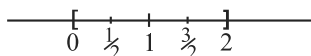


Figura 4.2

- a. Na **Figura 4.3**, mostramos o esboço dos retângulos associados com a soma de Riemann $\sum_{k=1}^4 f(x_k) \Delta x_k$, tomando x_k como a extremidade esquerda dos subintervalos. Observe que f , na extremidade esquerda dos intervalos, tem os seguintes valores: $f(0) = 0^2 - 1 = -1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$; $f(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$.

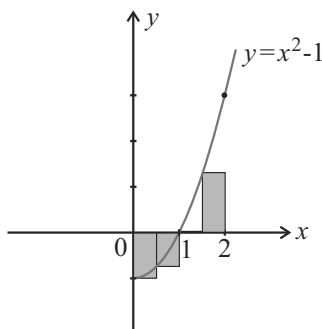


Figura 4.3

- b. Na **Figura 4.4**, mostramos o esboço dos retângulos associados com a soma de Riemann $\sum_{k=1}^4 f(x_k) \Delta x_k$, tomando x_k como a extremidade direita dos subintervalos. Observe que f , na extremidade direita dos intervalos, tem os seguintes valores: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$; $f(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$; $f(2) = 2^2 - 1 = 3$.

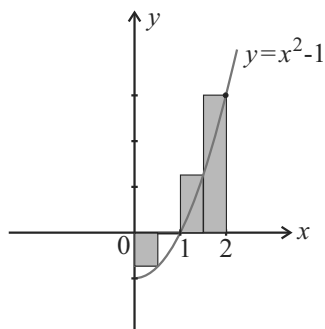


Figura 4.4

- c. Na **Figura 4.5**, mostramos o esboço dos retângulos associados com a soma de Riemann $\sum_{k=1}^4 f(x_k) \Delta x_k$, tomando x_k como o ponto médio do k -ésimo subintervalo. Observe que, neste caso, os pontos médios dos intervalos dados são $x_k = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$. Note-se que f no ponto médio dos intervalos tem os seguintes valores: $f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{1}{16} - 1 = -\frac{15}{16}$, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9}{16} - 1 = -\frac{7}{16}$, $f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 1 = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$, $f\left(\frac{7}{4}\right) = \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 1 = \frac{49}{16} - 1 = \frac{33}{16}$.

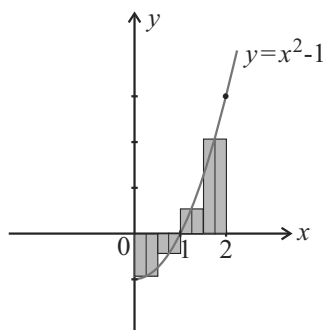


Figura 4.5

EXPRESSANDO LIMITES COMO INTEGRAIS

Exercício 4.5.

Suponha que os limites dados são limites de somas de Riemann S_n e que existem para qualquer sequência (S_n) de somas de Riemann de f no intervalo dado. Expresse os limites propostos nos exercícios a-c como integrais definidas.

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 3x_k) \Delta x_k$ no intervalo $[-7, 5]$.

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - x_k^2} \Delta x_k$ no intervalo $[0, 1]$.

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sec(x_k) \Delta x_k$ no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

Solução: Considerando as hipóteses dadas e a definição da integral definida nos intervalos dados, podemos então afirmar que:

a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 3x_k) \Delta x_k = \int_{-7}^5 (x^2 - 3x) dx.$

b. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{4 - x_k^2} \Delta x_k = \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx.$

c. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sec(x_k) \Delta x_k = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sec x dx.$

CALCULANDO UMA INTEGRAL DEFINIDA COMO LIMITE

Exercício 4.6.

Calcule a integral definida $\int_0^2 (x^2 - 1) dx$ usando a definição por limite de somas de Riemann. Interprete o resultado geometricamente.

Solução: Observe que a função $f(x) = x^2 - 1$ é contínua em $[0, 2]$ e portanto integrável em $[0, 2]$.

Portanto, $\int_0^2 (x^2 - 1) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ para qualquer sequência (S_n) de somas de Riemann de f em $[0, 2]$.

Assim, em particular, podemos considerar $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = \frac{2-(0)}{n} = \frac{2}{n}$, para $b = 2$, $a = 0$ e $k = 1, \dots, n$.

Para cada inteiro $n \geq 1$ consideremos os pontos: $a = 0 = x_0$, $x_1 = 0 + \frac{2}{n} = \frac{2}{n}$, $x_2 = 0 + 2\left(\frac{2}{n}\right) = 2\left(\frac{2}{n}\right)$, ..., $x_k = 0 + k\left(\frac{2}{n}\right) = k\left(\frac{2}{n}\right)$, ..., $x_n = 0 + n\left(\frac{2}{n}\right) = 2 = b$.

Como $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$; podemos escolher por exemplo a extremidade direita dos subintervalos $t_k = x_k = k\left(\frac{2}{n}\right)$. Logo,

$$f(t_k) = f\left(k\left(\frac{2}{n}\right)\right) = \left(k\left(\frac{2}{n}\right)\right)^2 - 1 = \frac{4k^2}{n^2} - 1.$$

Assim, a Soma de Riemann de $f(x) = x^2 - 1$ sobre $[0, 2]$ será:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{4k^2}{n^2} - 1\right) \left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4k^2}{n^2} - 1\right) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{4k^2}{n^2} - \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{8}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 - \frac{2}{n} n = \frac{8}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} - 2 \\ &= \frac{4(2n^2 + n + 2n + 1)}{3n^2} - 2. \end{aligned}$$

$$\text{Isto é, } S_n = \frac{4(2n^2 + 3n + 1)}{3n^2} - 2 = \frac{4}{3} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - 2.$$

Assim, lembrando que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$, resulta:

$$\int_0^2 (x^2 - 1) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{3} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - 2 \right] = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}.$$

Observe que como neste caso f assume valores positivos e negativos, então a soma de Riemann é a soma das áreas dos retângulos que estão acima do eixo x e o negativo das áreas dos retângulos que estão abaixo do eixo x (veja as **Figuras 4.3, 4.4 e 4.5** do Exercício 4.4 deste Apêndice, como casos particulares destas somas). Quando tomamos o limite de tais somas de Riemann, obtemos a situação ilustrada na **Figura 4.6**. A integral definida, neste caso, pode ser interpretada como *área líquida*, isto é, a diferença das áreas da região acima do eixo x e abaixo do gráfico de f , e a área da região abaixo do eixo x e acima do gráfico de f .

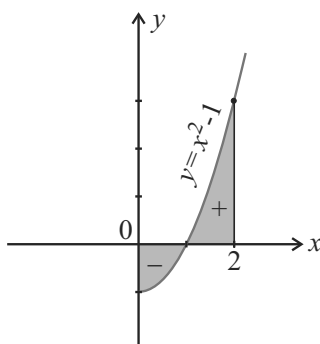


Figura 4.6

USO DA ÁREA PARA CALCULAR INTEGRAIS

Exercício 4.7.

Nos exercícios seguintes, esboce o gráfico dos integrandos e use as áreas para calcular as integrais.

- a. $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3 \right) dx$
- b. $\int_{-2}^1 |x| dx$
- c. $\int_a^b 2s ds, 0 < a < b$

Solução:

a.

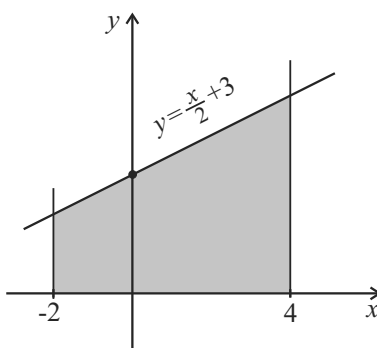


Figura 4.7

Considere $y = f(x) = \frac{x}{2} + 3$. Observe que $f(-2) = \frac{-2}{2} + 3 = 2$
e que $f(4) = \frac{4}{2} + 3 = 5$.

Neste caso, podemos ver facilmente na **Figura 4.7** que $\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx = \text{Área do trapézio de base menor de comprimento } f(-2) = 2, \text{ base maior de comprimento } f(4) = 5 \text{ e altura } b - a = 4 - (-2) = 6.$

Assim,
$$\int_{-2}^4 \left(\frac{x}{2} + 3\right) dx = \frac{(5+2)6}{2} = 21.$$

b.

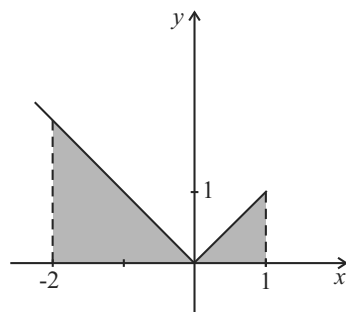


Figura 4.8

Observe que $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$

Neste caso, podemos ver facilmente na **Figura 4.8** que $\int_{-2}^1 |x| dx = \int_{-2}^0 -x dx + \int_0^1 x dx = [\text{Área do triângulo retângulo de base 2 e altura } f(-2) = 2] + [\text{Área do triângulo retângulo de base 1 e altura } f(1) = 1].$

Assim,
$$\int_{-2}^1 |x| dx = \frac{2 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{5}{2}.$$

c. $0 < a < b$

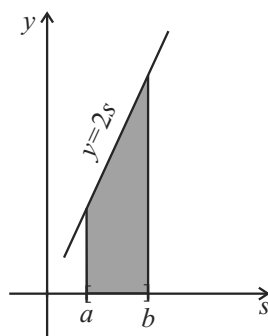


Figura 4.9

Considere $y = f(s) = 2s$. Observe que $f(a) = 2a > 0$ e que $f(b) = 2b > 0$.

Neste caso, podemos ver facilmente na **Figura 4.9** que $\int_a^b 2s ds = \text{Área do trapézio de base menor de comprimento } f(a) = 2a > 0, \text{ base maior de comprimento } f(b) = 2b > 0 \text{ e altura } b - a.$

$$\text{Assim, } \int_a^b 2s ds = \frac{(2a + 2b)(b - a)}{2} = (b^2 - a^2).$$

USANDO PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA E VALORES CONHECIDOS PARA ENCONTRAR OUTRAS INTEGRAIS

Exercício 4.8.

Suponha que f e g sejam contínuas e que

$$\int_1^2 f(x) dx = -4, \quad \int_1^5 f(x) dx = 6, \quad \int_1^5 g(x) dx = 8.$$

Use as propriedades da integral definida para calcular as seguintes integrais:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \int_2^2 g(x) dx & \text{b. } \int_5^1 g(x) dx & \text{c. } \int_1^2 3f(x) dx \\ \text{d. } \int_2^5 f(x) dx & \text{e. } \int_1^5 [f(x) - g(x)] dx & \text{f. } \int_1^5 [4f(x) - g(x)] dx \end{array}$$

Solução:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \int_2^2 g(x) dx \underbrace{=}_{\text{def. 1.1 (1) Semana 1}} 0. & \\ \text{b. } \int_5^1 g(x) dx \underbrace{=}_{\text{def. 1.1 (2) Semana 1}} - \int_1^5 g(x) dx \underbrace{=}_{\text{dado}} -8. & \\ \text{c. } \int_1^2 3f(x) dx \underbrace{=}_{\text{prop.}} 3 \int_1^2 f(x) dx \underbrace{=}_{\text{dado}} 3(-4) = -12. & \end{array}$$

d. Observe que, pela propriedade aditiva da integral definida, temos que

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx.$$

Assim,

$$\int_2^5 f(x) dx = \int_1^5 f(x) dx - \int_1^2 f(x) dx \underbrace{=}_{\text{dados}} 6 - (-4) = 10.$$

$$\begin{aligned} \text{e. } \int_1^5 [f(x) - g(x)] dx &= \int_1^5 f(x) dx - \int_1^5 g(x) dx \underbrace{=}_{\text{dados}} 6 - 8 = -2. \\ \text{f. } \int_1^5 [4f(x) - g(x)] dx &= \int_1^5 4f(x) dx - \int_1^5 g(x) dx \\ &= 4 \int_1^5 f(x) dx - \int_1^5 g(x) dx \underbrace{=}_{\text{dados}} 4(6) - (8) = 24 - 8 = 16. \end{aligned}$$

SEMANA 2

Exercício 4.9.

Nos exercícios a-b, mostre onde as funções são deriváveis e determine $\frac{dy}{dx}$.

$$\text{a. } y = \int_2^{7x^2} \sqrt{2 + \cos^2 t} dt \qquad \text{b. } y = \int_{\sec(x^2)}^2 \frac{1}{t^4 + 1} dt$$

Solução:

$$\text{a. Observe que podemos escrever } y = \int_2^{7x^2} \sqrt{2 + \cos^2 t} dt = (H \circ g)(x), \text{ onde } H(x) = \int_2^x \sqrt{2 + \cos^2 t} dt \text{ e } g(x) = 7x^2.$$

É claro que $f(t) = \sqrt{2 + \cos^2 t}$ é uma função contínua $\forall t \in \mathbb{R}$. Assim, pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo podemos afirmar que H é derivável em \mathbb{R} e $H'(x) = \sqrt{2 + \cos^2 x}$. Por outro lado, a função $g(x) = 7x^2$ é derivável em \mathbb{R} e $g'(x) = 14x$, logo, pela regra da cadeia $H \circ g$ é derivável em \mathbb{R} e

$$\begin{aligned} (H \circ g)'(x) &= H'(g(x))g'(x) = \left(\sqrt{2 + \cos^2(7x^2)} \right) 14x \\ &= 14x \sqrt{2 + \cos^2(7x^2)}, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. Observe que podemos escrever } y &= \int_{\sec(x^2)}^2 \frac{1}{t^4 + 1} dt = \\ &= - \int_2^{\sec(x^2)} \frac{1}{t^4 + 1} dt = -(H \circ g)(x), \text{ onde } H(x) = \int_2^x \frac{1}{t^4 + 1} dt \text{ e } \\ &g(x) = \sec(x^2). \end{aligned}$$

É claro que $f(t) = \frac{1}{t^4 + 1}$ é uma função contínua $\forall t \in \mathbb{R}$. Assim, pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo

podemos afirmar que H é derivável em \mathbb{R} e $H'(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$. Por outro lado, a função $g(x) = \sec(x^2) = \frac{1}{\cos(x^2)}$ é derivável em $\mathbb{R} - \left\{ \pm \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$ (Justifique!) e $g'(x) = \sec(x^2) \operatorname{tg}(x^2) 2x$, logo, pela regra da cadeia $H \circ g$ é derivável em $\mathbb{R} - \left\{ \pm \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$ e $(H \circ g)'(x) = H'(g(x))g'(x) = \left(\frac{2x \sec(x^2) \operatorname{tg}(x^2)}{\sec^4(x^2) + 1} \right)$ para todo $x \in \mathbb{R} - \left\{ \pm \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$

Assim, $y = \int_{\sec(x^2)}^2 \frac{1}{t^4 + 1} dt = -(H \circ g)(x)$ é derivável em $\mathbb{R} - \left\{ \pm \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$ e $\frac{dy}{dx} = - \left(\frac{2x \sec(x^2) \operatorname{tg}(x^2)}{\sec^4(x^2) + 1} \right)$ para todo $x \in \mathbb{R} - \left\{ \pm \sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \right\}, n = 0, 1, 2, \dots$

Exercício 4.10.

Usando a **1ª forma** do Teorema Fundamental do Cálculo, determine a reta tangente ao gráfico de $f(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t-1) dt$ em $x = -1$.

Solução: Lembremos do Cálculo I que a reta tangente à função $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad (4.1)$$

Neste caso $x_0 = -1$, logo a equação da reta tangente é

$$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1), \quad (4.2)$$

onde falta encontrar $f(-1)$ e $f'(-1)$. Note-se que $f(-1) = 3 + \int_1^{(-1)^2} \sec(t-1) dt = 3 + 0 = 3$ e usando a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e a regra da cadeia resulta que $f'(x) = 0 + \sec(x^2 - 1) 2x = 2x \sec(x^2 - 1) \Rightarrow f'(-1) = 2(-1) \sec((-1)^2 - 1) = 2(-1) \underbrace{\sec(0)}_1 = -2$.

Substituindo em 4.2 os valores achados, resulta $y - 3 = -2(x + 1)$.

Exercício 4.11.

Use a **1ª forma** do Teorema Fundamental do Cálculo para determinar o valor de x que maximiza o valor da integral $y = \int_x^{x+3} t(5-t)dt$. Problemas como esse surgem na teoria matemática das eleições políticas.

Solução: Observe que $f(t) = t(5-t)$ é uma função contínua $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = F(x) &= \int_x^{x+3} t(5-t)dt = \int_x^0 t(5-t)dt + \int_0^{x+3} t(5-t)dt \\ &= -\int_0^x t(5-t)dt + \int_0^{x+3} t(5-t)dt. \end{aligned}$$

Assim, usando a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e a regra da cadeia podemos afirmar que

$$F'(x) = -x(5-x) + (x+3)(5-(x+3)) = -x(5-x) + (x+3)(2-x)$$

$$F'(x) = -(5x-x^2) + 2x-x^2+6-3x = -5x+x^2-x^2-x+6 = 6-6x$$

$$F'(x) = 6(1-x).$$

Assim, o único número crítico de F é $x = 1$.

Intervalos	$-\infty < x < 1$	$1 < x < +\infty$
$1-x$	+	-
F'	+	-
F	\nearrow	\searrow

Portanto, F é crescente em $(-\infty, 1)$ e F é decrescente em $(1, +\infty)$.

Logo, pelo teste da derivada primeira, resulta que existe um máximo relativo em $x = 1$. Como $x = 1$ é o único número crítico de F em $(-\infty, \infty)$ podemos afirmar que em $x = 1$ existe um máximo absoluto. Portanto, o valor de $x = 1$ maximiza o valor da integral.

Exercício 4.12.

Suponha que g seja a função derivável apresentada no gráfico dado na **Figura 4.10** e que a posição no instante t (segundos) de uma partícula deslocando-se ao longo do eixo das coordenadas seja $s(t) = \int_0^t g(x) dx$ metros. Use o gráfico dado na **Figura 4.10** para responder às perguntas a seguir. Justifique suas respostas.

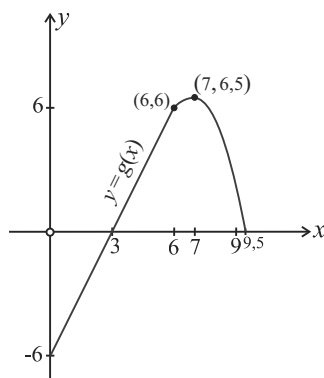


Figura 4.10

- Qual é a velocidade da partícula em $t = 3$?
- A aceleração no instante $t = 3$ é positiva ou negativa?
- Qual é a posição da partícula no instante $t = 3$?
- Quando a partícula passa pela origem?
- Quando a aceleração é zero?
- Quando a partícula move-se no sentido positivo, isto é, para frente? E quando a partícula move-se no sentido negativo, isto é, para trás?
- De que lado da origem a partícula se situa em $t = 9$?

Caro aluno, lembre-se de que a velocidade e aceleração de uma partícula que está se movendo em uma reta foram estudados na Aula 14, Módulo I, da disciplina Cálculo I.

Solução:

- Da disciplina Cálculo I sabemos que a velocidade de uma partícula deslocando-se ao longo do eixo das coordenadas no instante t_0 é dada por $v(t_0) = s'(t_0)$.

Por outro lado, como g é derivável então g é contínua. Logo, usando a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que $s(t) = \int_0^t g(x) dx$ é derivável e $v(t) = s'(t) = g(t)$. Portanto, $s'(3) = g(3) \underbrace{\hspace{1cm}}_{=0} = 0$ m/s.

Fig. 4.10

- b. Da disciplina Cálculo I sabemos que $a(t) = s''(t)$, do item a sabemos que $s'(t) = g(t)$, então $a(t) = s''(t) = g'(t)$, em particular,

$$a(3) = s''(3) = g'(3). \quad (4.3)$$

Por outro lado, observando o gráfico de g , podemos notar que $y = g(x)$ no intervalo $(0, 6)$ é uma reta. Neste caso, da disciplina de Cálculo I, podemos afirmar que a derivada $g'(x)$ nesse intervalo coincide com a inclinação da reta, que pelo gráfico podemos observar é positiva. Assim, a aceleração no instante $t = 3$ é positiva.

(Observe que, neste caso, podemos até calcular o valor exato da inclinação da reta, pois $m = \frac{6-0}{3-0} = 2 > 0$. Podemos concluir então que, em particular, $g'(3) = 2$. Portanto, de 4.3 segue que a aceleração é exatamente $a(3) = s''(3) = g'(3) = 2 \text{ m/s}^2$).

- c. Quando $t = 3$, a posição da partícula está dada por $s(3) = \int_0^3 g(x) dx$ Fig. 4.10 — [Área do triângulo retângulo formado por

$y = g(x)$, pelo eixo x e por $x = 0$] = — Área do triângulo retângulo de base 3 e altura 6 = $-\frac{3 \times 6}{2} = -9$.

- d. Observe, na **Figura 4.11**, que $g(0) = -6$ está bem definido.

Então, quando $t = 0s$, podemos afirmar que $s(0) = \int_0^0 g(x) dx =$

0. Por outro lado, quando $t = 6s$ resulta $s(6) = \int_0^6 g(x) dx = 0$, pois a diferença “líquida” de áreas é zero (isto é, a diferença de áreas da região acima do eixo x , limitada pelo gráfico da função $y = g(x)$, o eixo x e a reta $x = 6$; e a região abaixo do eixo x limitada pelo gráfico da função $y = g(x)$, o eixo x e a reta $x = 0$ é zero). Portanto, quando $t = 0s$ e $t = 6s$ a partícula passa pela origem.

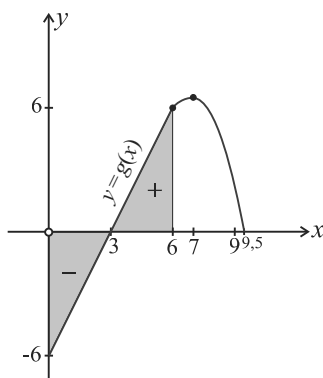


Figura 4.11

- e. De b sabemos que $a(t) = g'(t)$, então $a(t) = 0$ quando $0 = g'(t)$ e isto acontece quando a reta tangente ao gráfico de g é horizontal, isto é, paralela ao eixo x . Olhando a **Figura 4.12**, podemos concluir que isso acontece quando $t = 7$ s.

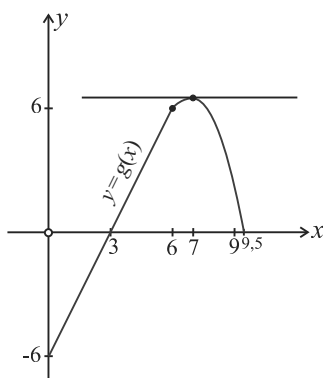


Figura 4.12

- f. Da disciplina Cálculo I sabemos que a partícula move-se no sentido positivo, isto é, para frente quando $v(t) > 0$ e a partícula move-se no sentido negativo, isto é, para trás quando $v(t) < 0$.

De a sabemos que $v(t) = s'(t) = g(t)$ e, observando a **Figura 4.10**, podemos afirmar $g(t) > 0$ para $3 < t < 9,5$ e $g(t) < 0$ para $0 < t < 3$. Portanto, podemos afirmar que para $3 < t < 9,5$ a partícula se move no sentido positivo, isto é, para frente, e para $0 < t < 3$ a partícula se move no sentido negativo, isto é, para trás.

- g. Para $t = 9$, a partícula se situa à direita ou do lado positivo, porque a integral de g de 0 a 9 é positiva, sendo maior a área acima do que abaixo do eixo x .

Exercício 4.13.

Calcule as seguintes integrais definidas:

a. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x) dx$

b. $\int_a^b \cos(\alpha x) dx, (\alpha \in \mathbb{R} - \{0\})$

(**Sugestão para b:** Se $G(x) = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)$, então $G'(x) = \cos(\alpha x)$)

c. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x) dx$

d. $\int_a^b \sin(\alpha x) dx, (\alpha \in \mathbb{R} - \{0\})$

$$\text{e. } \int_{-1}^0 \sqrt[3]{x} dx \qquad \text{f. } \int_{-1}^0 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}) dx$$

(Sugestão para e: Se $G(x) = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$, então $G'(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$)

(Aula 4 do caderno didático, exercício proposto nº1: g-m)

Solução:

$$\text{a. } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x) dx$$

Desde que $\left(\frac{1}{3} \sin(3x)\right)' = \frac{3}{3} \cos(3x) = \cos(3x)$, podemos concluir que $G(x) = \frac{1}{3} \sin 3x$ é uma primitiva de $f(x) = \cos 3x$.

Como o integrando é uma função contínua no intervalo dado, podemos aplicar a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(3x) dx &= \left[\frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} \sin 3 \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \underbrace{\sin 3(0)}_0 \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{6} (\sqrt{2}). \end{aligned}$$

$$\text{b. } \int_a^b \cos(\alpha x) dx, \quad (\alpha \in \mathbb{R} - \{0\})$$

Desde que $\left(\frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)\right)' = \frac{\alpha}{\alpha} \cos(\alpha x) = \cos(\alpha x)$, podemos concluir que $G(x) = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)$ é uma primitiva de $f(x) = \cos(\alpha x)$.

Como o integrando é uma função contínua no intervalo dado, podemos aplicar a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(\alpha x) dx &= \left[\frac{1}{\alpha} \sin \alpha x \right]_a^b = \frac{1}{\alpha} \sin \alpha b - \frac{1}{\alpha} \sin \alpha a \\ &= \frac{1}{\alpha} (\sin \alpha b - \sin \alpha a). \end{aligned}$$

$$\text{c. } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x) dx$$

Desde que $\left(-\frac{1}{4} \cos(4x)\right)' = -\frac{4}{4}(-\sin(4x)) = \sin(4x)$, podemos concluir que $G(x) = -\frac{1}{4} \cos(4x)$ é uma primitiva de $f(x) = \sin 4x$.

Como o integrando é uma função contínua no intervalo dado, podemos aplicar a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(4x) dx &= -\frac{1}{4} \cos 4x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{4} \cos 4 \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \underbrace{\cos 4(0)}_1 \\ &= -\frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

d. $\int_a^b \sin(\alpha x) dx, (\alpha \in \mathbb{R} - \{0\})$

Desde que $\left(-\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x)\right)' = -\frac{\alpha}{\alpha}(-\sin(\alpha x)) = \sin(\alpha x)$, podemos concluir que $G(x) = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x)$ é uma primitiva de $f(x) = \sin \alpha x$.

Como o integrando é uma função contínua no intervalo dado, podemos aplicar a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo e obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b \sin(\alpha x) dx &= -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x \Big|_a^b = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha b + \frac{1}{\alpha} \cos \alpha a \\ &= \frac{1}{\alpha} (\cos \alpha a - \cos \alpha b).\end{aligned}$$

e. $\int_{-1}^0 \sqrt[3]{x} dx = \int_{-1}^0 x^{\frac{1}{3}} dx$

O integrando é uma função contínua no intervalo dado, logo podemos usar a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo.

Usando a tabela de primitivas, podemos concluir que $\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} =$

$$\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \text{ é uma primitiva de } x^{\frac{1}{3}}.$$

Aplicando a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo:

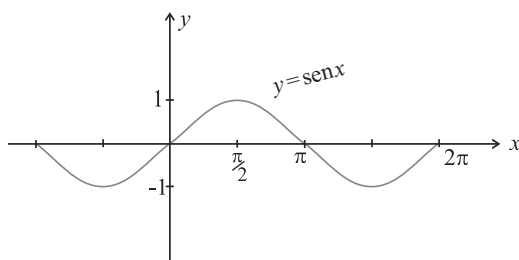
$$\int_{-1}^0 \sqrt[3]{x} dx = \int_{-1}^0 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_{-1}^0 = -\frac{3}{4} (-1)^{\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned}\text{f. } \int_{-1}^0 (\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}) dx &= \int_{-1}^0 \sqrt[3]{x} dx + \int_{-1}^0 \sqrt[5]{x} dx = -\frac{3}{4} + 5 \frac{x^{\frac{6}{5}}}{6} \Big|_{-1}^0 \\ &= -\frac{3}{4} - 5 \frac{(-1)^{\frac{6}{5}}}{6} = -\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{-18-20}{24} = -\frac{38}{24} = -\frac{19}{12}.\end{aligned}$$

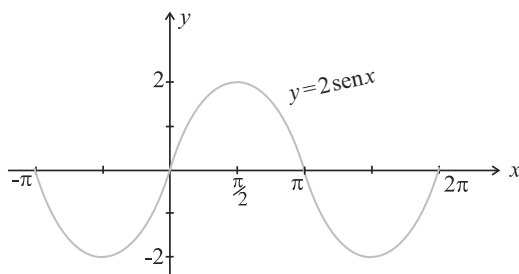
Exercício 4.14.

Sendo $f(x) = |2\sin(x)|$, calcule a área da região compreendida entre o gráfico de f , o eixo das abscissas e as retas $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$. Faça o esboço da região.

Solução: O gráfico da função $y = \sin x$ é mostrado na **Figura 4.13**.

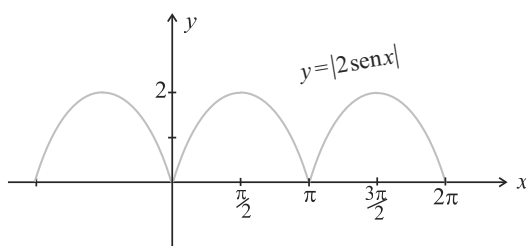
**Figura 4.13**

Assim, o gráfico de $y = 2\sin x$ mostrado na **Figura 4.14** pode ser obtido por um alongamento vertical por um fator de 2 unidades do gráfico de $y = \sin x$ (Ver Apêndice 1 para lembrar os detalhes).

**Figura 4.14**

Logo, o gráfico de $f(x) = |2\sin(x)|$ mostrado na **Figura 4.15** é obtido refletindo os pontos do gráfico $y = 2\sin x$ com ordenada negativa em torno do eixo x .

$$f(x) = |2\sin(x)| = \begin{cases} 2\sin(x) & \text{se } 2\sin(x) \geq 0 \\ -2\sin(x) & \text{se } 2\sin(x) < 0 \end{cases}$$

**Figura 4.15**

Finalmente, a região compreendida entre o gráfico de f , o eixo das abscissas e as retas $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ é mostrada na **Figura 4.16**.

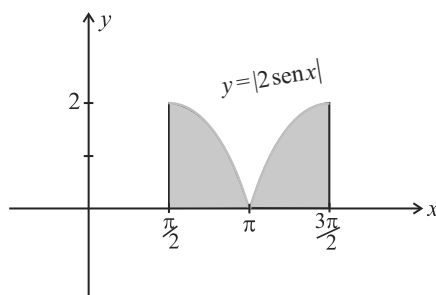


Figura 4.16

Portanto, a área da região é dada por

$$A(R) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \operatorname{sen}(x) dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} -2 \operatorname{sen}(x) dx.$$

Esta última integral pode ser calculada diretamente usando, para cada integral, a segunda forma do Teorema Fundamental do Cálculo, ou usando a simetria da figura, podemos calcular a área como

$$\begin{aligned} A(R) &= 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 \operatorname{sen}(x) dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{sen}(x) dx \underset{\substack{2^{\text{a}} \text{ forma TFC}}}{=} \left[-4 \cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= -4 \underbrace{\cos \pi}_{-1} + 4 \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 = 4 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Exercício 4.15.

Sendo $f(x) = |\operatorname{sen}(2x)|$, calcule a área da região compreendida entre o gráfico de f , o eixo das abscissas e as retas $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$. Faça o esboço da região.

Solução: O gráfico da função $y = \operatorname{sen} x$ é mostrado na **Figura 4.13** dada anteriormente.

Assim, o gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ mostrado na **Figura 4.17** pode ser obtido por uma compressão horizontal por um fator de 2 unidades do gráfico de $y = \operatorname{sen} x$. (Ver Apêndice 1 para lembrar os detalhes)

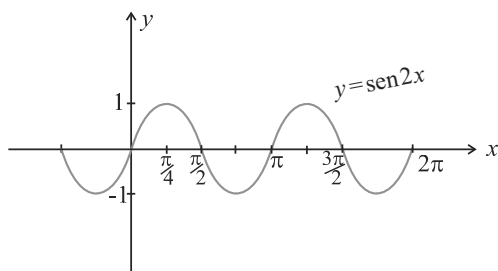


Figura 4.17

Logo, o gráfico de $f(x) = |\text{sen}(2x)|$ mostrado na **Figura 4.18** é obtido refletindo os pontos do gráfico $y = \text{sen}(2x)$ com ordenada negativa em torno do eixo x .

$$f(x) = |\text{sen}(2x)| = \begin{cases} \text{sen}(2x) & \text{se } \text{sen}(2x) \geq 0 \\ -\text{sen}(2x) & \text{se } \text{sen}(2x) < 0 \end{cases}$$

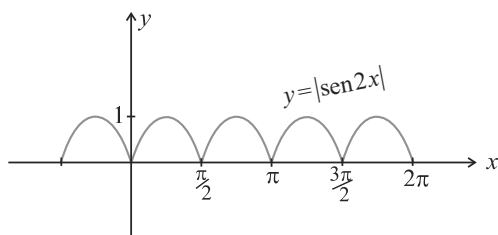


Figura 4.18

Finalmente, a região compreendida entre o gráfico de f , o eixo das abscissas e as retas $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$ é mostrada na **Figura 4.19**.

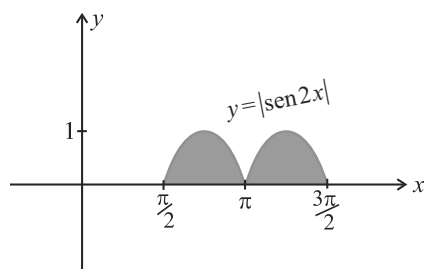


Figura 4.19

Portanto, a área da região é dada por

$$A(R) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\text{sen}(2x)dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \text{sen}(2x)dx.$$

Esta última integral pode ser calculada diretamente usando para cada integral a segunda forma do Teorema Fundamental do Cálculo, ou usando a simetria da figura, podemos calcular a área como

$$A(R) = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin(2x) dx \quad \underbrace{=}_{\substack{2^{\text{a}} \text{ forma TFC} \\ \text{e Exerc. 5-d}}} \left[\frac{2}{2} \cos(2x) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \underbrace{\cos 2\pi}_1 - \underbrace{\cos \pi}_{-1} = 2 \text{ uni-}$$

dades de área.

Exercício 4.16.

Calcule $\int_0^1 \left(\int_2^3 t^4 \sin x dt \right) dx$.

Solução: Na integral definida $\int_2^3 t^4 \sin x dt$, a variável de integração é t . Assim, como $\sin x$ não depende de t , segue que:

$$\int_2^3 t^4 \sin x dt = \sin x \int_2^3 t^4 dt.$$

Lembre que

$$\int_2^3 t^4 dt \quad \underbrace{=}_{2^{\text{a}} \text{ forma TFC}} \left[\frac{t^5}{5} \right]_2^3 = \frac{3^5}{5} - \frac{2^5}{5} = \frac{243 - 32}{5} = \frac{211}{5}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_2^3 t^4 \sin x dt \right) dx &= \int_0^1 \left(\int_2^3 t^4 dt \right) \sin x dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{211}{5} \right) \sin x dx \quad \underbrace{=}_{2^{\text{a}} \text{ forma TFC}} \left[\frac{211}{5} (-\cos x) \right]_0^1 = -\frac{211}{5} (\cos 1 - \underbrace{\cos 0}_1) \\ &= -\frac{211}{5} (\cos 1 - 1) = \frac{211}{5} (1 - \cos 1). \end{aligned}$$

Exercício 4.17.

Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $x^2 \leq f(x) \leq 2x^2 + 1$, para todo $x \in [0, 1]$. Mostre que $\frac{1}{3} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{5}{3}$.

Sugestão: Use o Exemplo 2.5 do caderno didático.

(Aula 4 do caderno didático, exercício proposto nº5)

Solução: Das hipóteses do exercício dado e utilizando o Exemplo 2.5 do caderno didático, podemos afirmar que

$$\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 (2x^2 + 1) dx. \quad (4.4)$$

Por outro lado, as funções $y = x^2$ e $y = 2x^2 + 1$ são funções contínuas e podemos aplicar a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo. Temos, então,

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \int_0^1 (2x^2 + 1) dx = \left[\frac{2x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}.$$

Substituindo estes últimos valores em 4.4 resulta que

$$\frac{1}{3} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{5}{3}.$$

SEMANA 3

Exercício 4.18.

Considere a função $f(x) = x^2 - x - 6$.

- Faça o esboço do gráfico da função f .
- Calcule $\int_{-3}^4 f(x) dx$ e interprete o resultado em termos de áreas.
- Encontre a área da região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos x para $x \in [-2, 3]$.
- Encontre a área da região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos x para $x \in [-3, 4]$.

Solução:

- Observe que $f(x) = x^2 - x - 6 = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$.

Lembremos que $y + \frac{25}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ representa uma parábola de vértice no ponto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ que abre para cima. Podemos

encontrar também a interseção da parábola com o eixo x igualando a zero a equação: $0 = x^2 - x - 6$ ou $0 = (x - 3)(x + 2)$, de onde vemos que $x = 3$ e $x = -2$ são as interseções da parábola com o eixo x . O gráfico de f é mostrado na **Figura 4.20**.

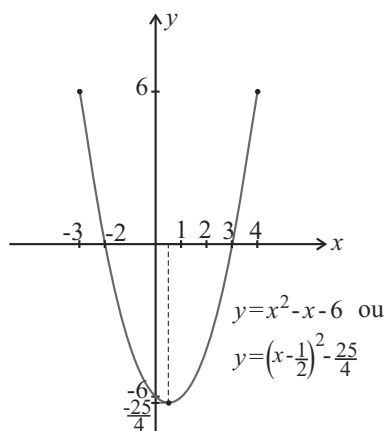


Figura 4.20

- b. Observe que a função f é contínua, logo f é integrável e podemos aplicar a 2ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^4 f(x) dx &= \int_{-3}^4 (x^2 - x - 6) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_{-3}^4 \\ &= \frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} - 6(4) - \left[\frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} - 6(-3) \right] \\ &= \frac{64}{3} - 8 - 24 - \left[-9 - \frac{9}{2} + 18 \right] = \frac{64}{3} - 32 + \frac{9}{2} - 9 \\ &= \frac{128 + 27}{6} - 41 = \frac{155 - 246}{6} = -\frac{91}{6}. \end{aligned}$$

Logo, a integral definida dada obteve como resultado o número negativo $-\frac{91}{6}$.

A integral definida $\int_{-3}^4 f(x) dx$, neste caso, pode ser interpretada como a diferença de duas áreas, isto é:

$$\int_{-3}^4 f(x) dx = A_1 - A_2,$$

onde A_1 é a área total das regiões acima do eixo x , ou seja, as regiões limitadas pelo gráfico de f e o eixo x para $x \in [-3, 2] \cup [3, 4]$. Na **Figura 4.21**, as regiões acima do eixo x estão representadas pelo sinal $+$.

A_2 é a área da região abaixo do eixo x , ou seja, a região limitada pelo gráfico de f e o eixo x para $x \in [-2, 3]$. Na **Figura 4.21**, a região abaixo do eixo x está representada pelo sinal $-$.

Na **Figura 4.21**, podemos ver também que $A_1 < A_2$, logo a diferença é um número negativo.

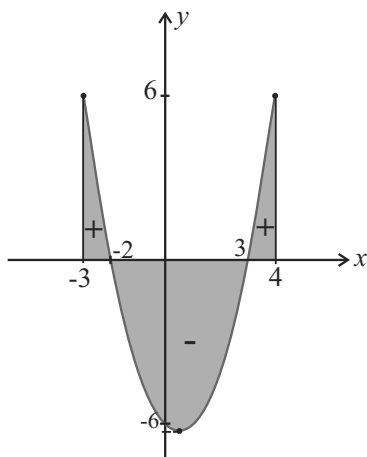


Figura 4.21

- c. Seja R a região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos x para $x \in [-2, 3]$. A região é mostrada na **Figura 4.22**.

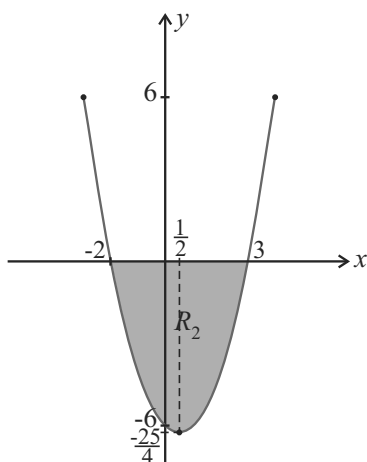


Figura 4.22

Como a região R_2 está abaixo do eixo x , tem-se pela Definição 2.2 do caderno didático, ou equivalentemente pela Definição 1.1(4) das notas de aula, que

$$A(R_2) = - \int_{-2}^3 (x^2 - x - 6) dx = - \left\{ \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right\}_{-2}^3$$

$$\begin{aligned}
 &= - \left\{ \frac{(3)^3}{3} - \frac{(3)^2}{2} - 6(3) - \left[\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 6(-2) \right] \right\} \\
 &= - \left\{ 9 - \frac{9}{2} - 18 - \left[\frac{-8}{3} - 2 + 12 \right] \right\} = - \left\{ -\frac{9}{2} + \frac{8}{3} - 19 \right\} \\
 &= \frac{9}{2} - \frac{8}{3} + 19 = \frac{27 - 16 + 114}{6} = \frac{125}{6} \text{ unidades de área.}
 \end{aligned}$$

- d. A área da região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos x para $x \in [-3, 4]$.

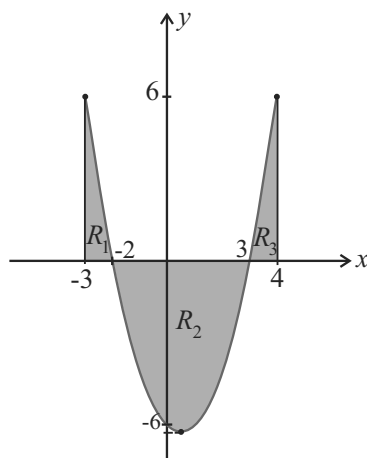


Figura 4.23

Na **Figura 4.23**, podemos observar que, neste caso, a região pedida é a união das regiões R_1 , R_2 e R_3 . Assim, $A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 A(R_1) &= \int_{-3}^{-2} (x^2 - x - 6) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_{-3}^{-2} \\
 &= \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 6(-2) - \left[\frac{(-3)^3}{3} - \frac{(-3)^2}{2} - 6(-3) \right] \\
 &= \frac{-8}{3} - 2 + 12 - \left[-9 - \frac{9}{2} + 18 \right] = -\frac{8}{3} + 10 + \frac{9}{2} - 9 \\
 &= \frac{-16 + 27}{6} + 1 = \frac{11 + 6}{6} = \frac{17}{6} \text{ unidades de área.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A(R_3) &= \int_3^4 (x^2 - x - 6) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x \right]_3^4 \\
 &= \frac{(4)^3}{3} - \frac{(4)^2}{2} - 6(4) - \left[\frac{(3)^3}{3} - \frac{(3)^2}{2} - 6(3) \right] \\
 &= \frac{64}{3} - 8 - 24 - \left[9 - \frac{9}{2} - 18 \right] = \frac{64}{3} - 32 + \frac{9}{2} + 9 \\
 &= \frac{128 + 27}{6} - 23 = \frac{155 - 138}{6} = \frac{17}{6} \text{ unidades de área.}
 \end{aligned}$$

Da parte c, sabemos que $A(R_2) = \frac{125}{6}$ unidades de área.

Logo, $A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) = \frac{17}{6} + \frac{125}{6} + \frac{17}{6} = \frac{159}{6} = \frac{53}{2}$ unidades de área.

Exercício 4.19.

Esboce e ache a área da região compreendida entre:

- Os gráficos de $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ e as retas $x = -1$ e $x = 1$.
- Os gráficos de $f(x) = \sqrt{x}$ e as retas $y = 0$ e $x = a$, onde $a \in (0, +\infty)$ é arbitrário.
- Os gráficos de $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = x + 6$.
- Os gráficos de $f(x) = 1 + \sin x$, $g(x) = 1 + \cos x$ e a reta $x = 0$ (no primeiro quadrante).

(Aula 5 do caderno didático, exercício proposto nº1: e, f, h, i)

Solução:

- O esboço da região é mostrado na **Figura 4.24**.

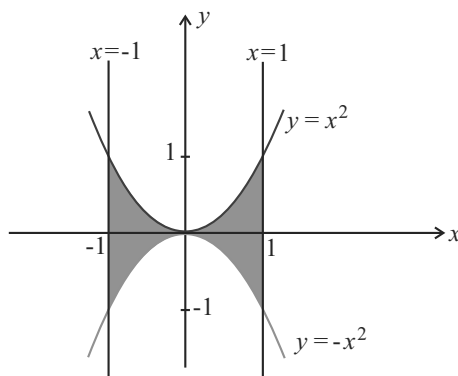


Figura 4.24

Observemos que a região dada é simétrica em relação ao eixo x e ao eixo y .

Podemos calcular a área como 2 vezes a região do lado direito do eixo y , como mostrado na **Figura 4.25**.

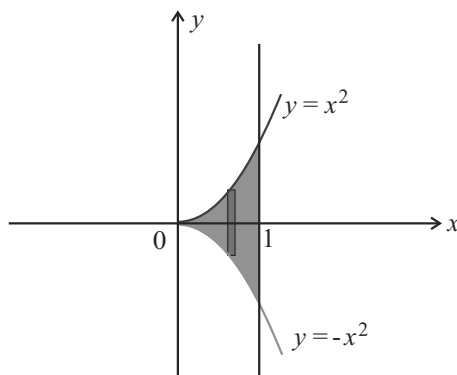


Figura 4.25

Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} A(R) &= 2 \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = 2 \int_0^1 (x^2 - (-x^2)) dx \\ &= 4 \int_0^1 x^2 dx = 4 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Ou podemos calcular a área como 4 vezes a área da região no primeiro quadrante limitada pelo eixo x , pela reta $x = 1$ e o gráfico de $f(x) = x^2$.

$$A(R) = 4 \int_0^1 f(x) dx = 4 \int_0^1 x^2 dx = 4 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \text{ unidades de área.}$$

b. O esboço da região é mostrado na **Figura 4.26**.

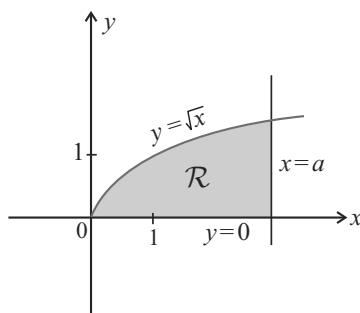


Figura 4.26

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^a f(x) dx = \int_0^a \sqrt{x} dx = 2 \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} a \sqrt{a} \text{ uni-} \\ &\text{dades de área.} \end{aligned}$$

c. Os gráficos de $f(x) = x^2 - x - 2$ e $g(x) = x + 6$.

Observe que $f(x) = x^2 - x - 2 = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4} - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$.

Lembremos que $y + \frac{9}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ representa uma parábola de vértice no ponto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ que abre para cima. Podemos encontrar também a interseção da parábola com a reta $y = x + 6$. Igualando as equações $y = x^2 - x - 2$ e $y = x + 6$, temos $x + 6 = x^2 - x - 2$ de onde $0 = x^2 - 2x - 8$ ou $0 = (x - 4)(x + 2)$ de onde vemos que $x = 4$ e $x = -2$ são as interseções da parábola com a reta dada. Lembre-se de que o gráfico de g é uma reta que passa pelos pontos $(-6, 0)$ e $(0, 6)$. A região é mostrada na **Figura 4.27**.

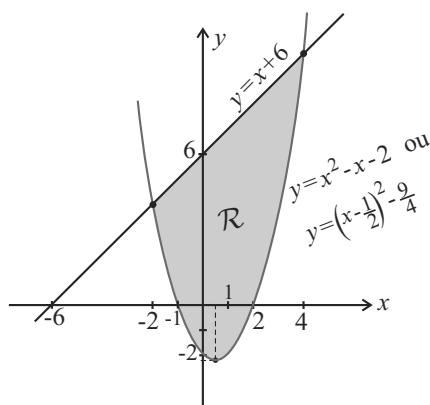


Figura 4.27

Na **Figura 4.28**, mostramos um retângulo representativo vertical na região.

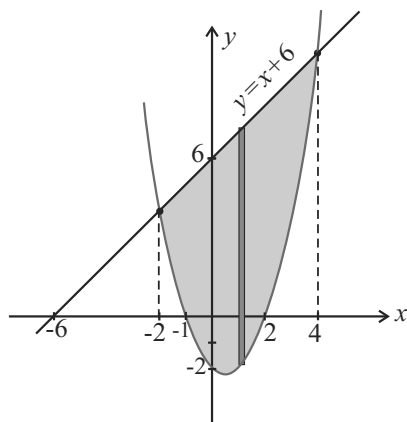


Figura 4.28

Logo, a área da região é:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_{-2}^4 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-2}^4 ((x+6) - (x^2 - x - 2)) dx \\ &= \int_{-2}^4 (2x - x^2 + 8) dx = 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 8x \Big|_{-2}^4 \\ &= 4^2 - \frac{4^3}{3} + 8(4) - \left[(-2)^2 - \frac{(-2)^3}{3} + 8(-2) \right] \\ &= 16 - \frac{64}{3} + 32 - 4 - \frac{8}{3} + 16 = 60 - \frac{72}{3} \\ &= 60 - 24 = 36 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

- d. O gráfico de $y = \sin x$ é dado na **Figura 4.29**.

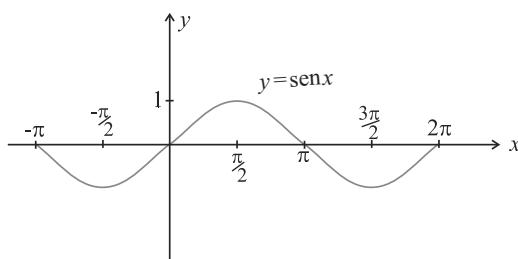


Figura 4.29

Assim, observando o Apêndice 1, temos que o gráfico de $y = 1 + \sin x$ é obtido da função $y = \sin x$ por um deslocamento vertical de uma unidade para cima como mostra a **Figura 4.30**.

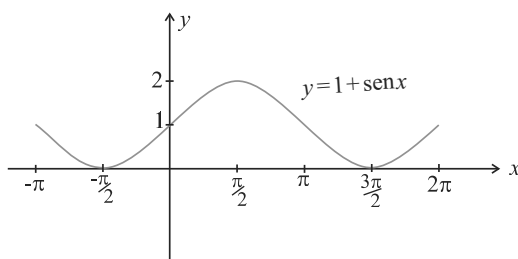


Figura 4.30

Analogamente, o gráfico de $y = \cos x$ é mostrado na **Figura 4.31**.

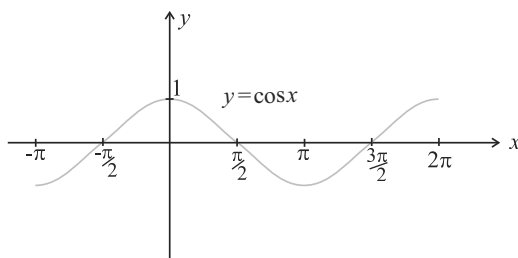


Figura 4.31

Do Apêndice 1, temos que o gráfico de $y = 1 + \cos x$ é obtido da função $y = \cos x$ por um deslocamento vertical de uma unidade para cima como mostra a **Figura 4.32**.

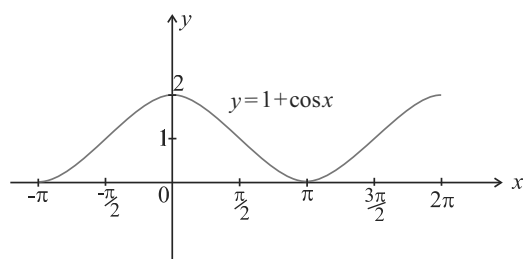


Figura 4.32

Assim, a interseção das curvas $f(x) = 1 + \sin x$ e $g(x) = 1 + \cos x$ e a reta $x = 0$ no primeiro quadrante, é dada na **Figura 4.33**.

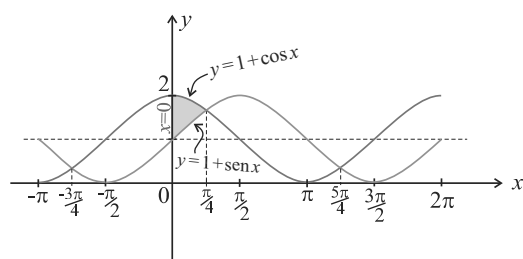


Figura 4.33

Observe que da interseção das curvas $y = 1 + \cos x$ e $y = 1 + \sin x$ obtemos $\cos x = \sin x$ e para $x \geq 0$ esta última igualdade é verdadeira para $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Assim, a primeira interseção das curvas quando $x \geq 0$ é $x = \frac{\pi}{4}$,

$$y = 1 + \cos \frac{\pi}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Na **Figura 4.34**, mostramos a região e um retângulo representativo vertical.

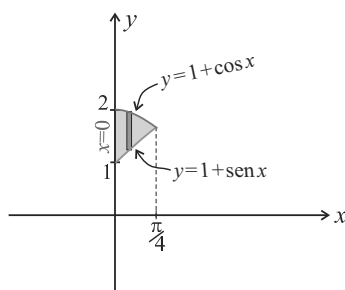


Figura 4.34

Então, a área da região é dada por

$$A(R) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [f(x) - g(x)] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} ((1 + \cos x) - (1 + \sin x)) dx$$

$$A(R) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$A(R) = \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - \cos 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$$

$$A(R) = \sqrt{2} - 1 \text{ unidades de área.}$$

Observe que teremos outro exercício se for pedido o seguinte:

Esboce e ache a área da região compreendida entre os gráficos de $f(x) = 1 + \sin x$, $g(x) = 1 + \cos x$ e a reta $x = 0$ (no segundo quadrante). A região, neste caso, é a mostrada na **Figura 4.35**. Deixamos ao leitor o cálculo da área neste caso.

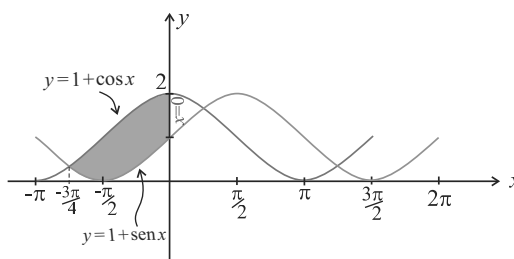


Figura 4.35

Exercício 4.20.

Esboce o conjunto D e ache a sua área nos seguintes casos:

a. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 1 \leq y \leq x + 1\};$

b. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\};$

(Aula 5 do caderno didático, exercício proposto nº2: d e e)

Solução:

a. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + 1 \leq y \leq x + 1\}$

Fazendo a interseção das funções $y = x^2 + 1$ e $y = x + 1$, obtemos os pontos $(0, 1)$ e $(1, 2)$. Lembre-se de que $y = x^2$ é uma parábola com vértice na origem que abre para cima e fazendo um deslocamento vertical de uma unidade para cima obtemos a parábola $y = x^2 + 1$. Assim, na **Figura 4.36**, mostramos a região D .

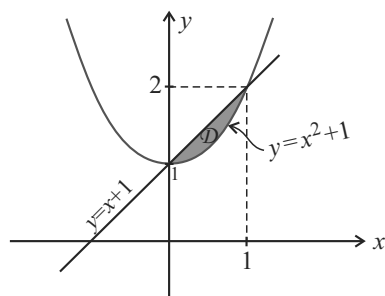


Figura 4.36

Na **Figura 4.37**, mostramos a região D e um retângulo representativo vertical.

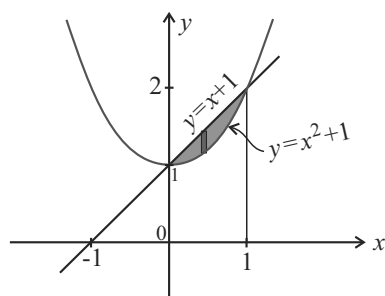


Figura 4.37

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = \int_0^1 ((x+1) - (x^2+1)) dx \\ &= \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

b. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 - 1 \leq y \leq x + 1\}$

Fazendo a interseção das funções $y = x^2 - 1$ e $y = x + 1$, obtemos os pontos $(-1, 0)$ e $(2, 3)$. Assim, na **Figura 4.38**, mostramos a região D .

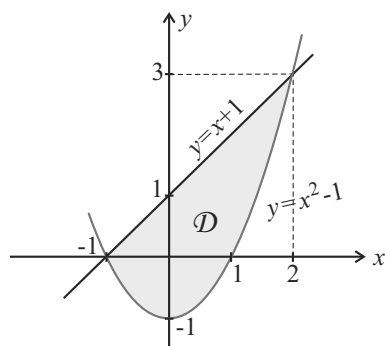


Figura 4.38

Na **Figura 4.39**, mostramos a região D e dois retângulos representativos verticais.

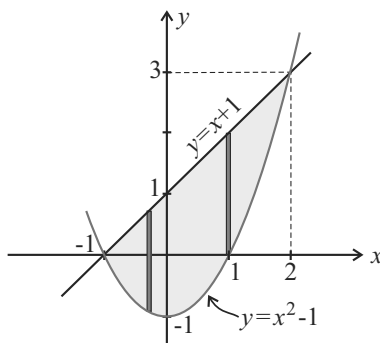


Figura 4.39

Então,

$$\begin{aligned}
 A(D) &= \int_{-1}^2 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-1}^2 ((x+1) - (x^2-1)) dx \\
 &= \int_{-1}^2 (x - x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^2 \\
 &= 2 - \frac{8}{3} + 4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 2(-1) \right) = 2 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 \\
 &= 8 - \frac{1}{2} - 3 = 5 - \frac{1}{2} - 3 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \text{ unidades de área.}
 \end{aligned}$$

Exercício 4.21.

Seja R a região compreendida entre os gráficos de $x = y^2$ e $x = 12 - 2y^2$.

- Esboce a região R .
- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x .
- Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável y .
- Calcule a área da região R . (Use a representação mais conveniente)

Solução:

- a. O gráfico de $x = y^2$ é uma parábola de vértice na origem que abre para a direita. Por outro lado, a equação $x = 12 - 2y^2$ pode ser expressa como $x - 12 = -2y^2$, o que mostra que é uma parábola de vértice em $(12, 0)$ e que abre para a esquerda.

Fazendo a interseção das funções, obtemos

$$\begin{cases} x = y^2 \\ x = 12 - 2y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = 12 - 2y^2 \Leftrightarrow 3y^2 = 12 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2.$$

Logo, $x = 4$ e obtemos os pontos de interseção $(4, 2)$ e $(4, -2)$.

O esboço da região R é mostrado na **Figura 4.40**.

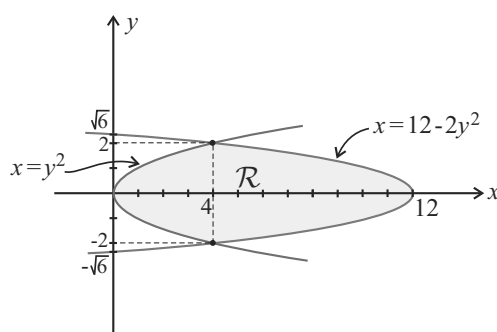


Figura 4.40

- b. Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x .

Precisamos expressar as curvas que delimitam a região dada como funções de x . Assim, $x = y^2$ proporciona às funções $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ e $x = 12 - 2y^2$ fornece as funções

$y = \sqrt{\frac{12-x}{2}}$ e $y = -\sqrt{\frac{12-x}{2}}$. Notemos que, neste caso, a região R precisa ser dividida em duas regiões: R_1 e R_2 , onde R_1 é a região limitada pelas funções $y = \sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ no intervalo $[0, 4]$ e R_2 é a região limitada pelas funções $y = \sqrt{\frac{12-x}{2}}$

e $y = -\sqrt{\frac{12-x}{2}}$ no intervalo $[4, 12]$. $R = R_1 \cup R_2$.

Na **Figura 4.41**, mostramos um retângulo representativo vertical em cada região.

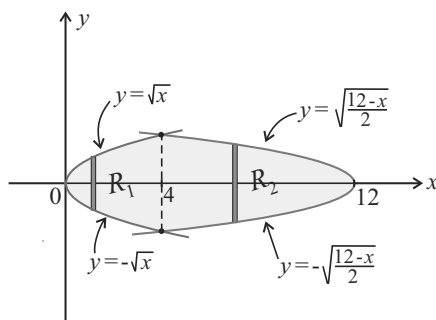


Figura 4.41

Assim, a representação pedida é: $A(R) = A(R_1) + A(R_2)$

$$= \int_0^4 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x})) dx + \int_4^{12} \left(\sqrt{\frac{12-x}{2}} - \left(-\sqrt{\frac{12-x}{2}} \right) \right) dx$$

$$= 2 \int_0^4 \sqrt{x} dx + 2 \int_4^{12} \sqrt{\frac{12-x}{2}} dx.$$

Observe que se usamos a simetria das regiões em relação ao eixo x também chegamos ao mesmo resultado multiplicando por 2 as áreas das regiões mostradas na **Figura 4.42**.

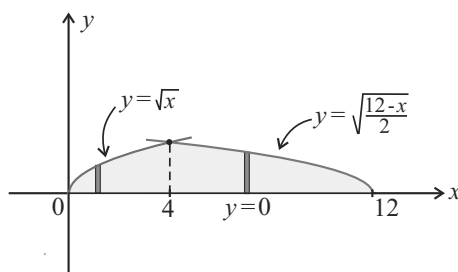


Figura 4.42

- c. Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável y .

Note-se que, neste caso, a região R não precisa ser dividida em regiões. Na **Figura 4.43**, mostramos dois retângulos representativos horizontal na região.

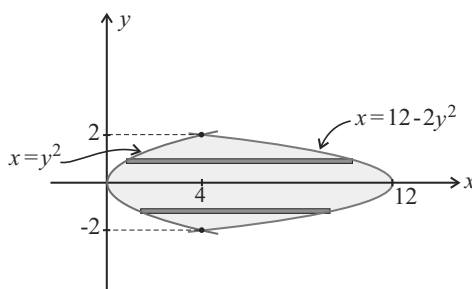


Figura 4.43

Assim, a representação pedida é:

$$A(R) = \int_{-2}^2 (12 - 2y^2 - y^2) dy = \int_{-2}^2 (12 - 3y^2) dy.$$

Observe que, pela simetria da região em torno do eixo x , podemos também calcular a área como 2 vezes a área da região mostrada na **Figura 4.44**.

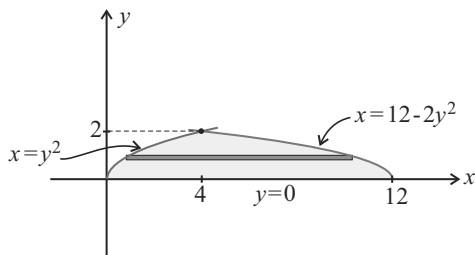


Figura 4.44

Então,

$$A(R) = 2 \int_0^1 (12 - 2y^2 - y^2) dy = 2 \int_0^2 (12 - 3y^2) dy.$$

- d. Pela lei do “menor esforço” vamos calcular a área usando a representação obtida em c, logo

$$\begin{aligned} A(R) &= 2 \int_0^2 (12 - 3y^2) dy = 2 \left(12y - \frac{3y^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= 2(12(2) - 8) = 32 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

Exercício 4.22.

- Use o Teorema do Valor Médio para Integrais para mostrar que $\int_0^\pi \sin(\sqrt{x}) dx \leq \pi$.
- Chegue à mesma conclusão usando o Exemplo 2.5 do caderno didático.

(Aula 5 do caderno didático, exercício proposto nº4)

Solução:

- Lembremos que o Teorema do Valor Médio para Integrais diz o seguinte:

Se $a < b$ e $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

Neste caso, é claro que $0 < \pi$ e $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ é contínua em $[0, \pi]$. Logo, pelo Teorema do Valor Médio para Integrais, existe $u \in [0, \pi]$ tal que

$$\int_0^\pi \sin(\sqrt{x}) dx = \sin(\sqrt{u}) (\pi - 0). \quad (4.5)$$

Por outro lado, $\sin(\sqrt{u}) \leq 1 \quad \forall u \geq 0 \Rightarrow \pi \sin(\sqrt{u}) \leq \pi \quad \forall u \geq 0$.

Em particular, $\pi \sin(\sqrt{u}) \leq \pi \quad \forall u \in [0, \pi]$ e usando 4.5 resulta que $\int_0^\pi \sin(\sqrt{x}) dx \leq \pi$.

b. O Exemplo 2.5 do caderno didático diz o seguinte:

Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Observe que $1 \geq \sin \sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$.

Em particular, $1 \geq \sin \sqrt{x} \quad \forall x \in [0, \pi]$. Observe que $f(x) = 1$ e $g(x) = \sin \sqrt{x}$ são funções contínuas para $\forall x \geq 0$, logo são integráveis $\forall x \geq 0$. Em particular, são integráveis no intervalo $[0, \pi]$, então pelo Exemplo 2.5 do caderno didático, podemos afirmar que $\int_0^\pi 1 dx \geq \int_0^\pi \sin \sqrt{x} dx$, como $\int_0^\pi 1 dx = x \Big|_0^\pi = (\pi - 0) = \pi$. Resulta que $\pi \geq \int_0^\pi \sin \sqrt{x} dx$, ou seja, $\int_0^\pi \sin(\sqrt{x}) dx \leq \pi$.

Exercício 4.23.

Determine o valor médio da função $f(x) = \sin x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ e encontre todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ para os quais a função assume este valor médio.

Solução: Seja $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sin x$. É claro que f é contínua, pois a função seno é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, em particular f é contínua no intervalo $[0, 2\pi]$, logo f satisfaz o Teorema do Valor Médio para integrais e existe $c \in [0, 2\pi]$ tal que

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = f(c) \cdot (2\pi - 0) = \underbrace{\sin(c)}_{f(c)} 2\pi. \quad (4.6)$$

Este número $f(c) = \sin c$ é chamado o valor médio (ou média) de f no intervalo $[0, 2\pi]$.

Por outro lado,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0. \quad (4.7)$$

Comparando 4.6 com 4.7 resulta: $0 = 2\pi(\operatorname{sen} c) \Rightarrow 0 = \operatorname{sen} c$. Logo, $c = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Como $c \in [0, 2\pi]$, temos somente que $c = 0$ ou $c = \pi$ ou $c = 2\pi$.

Logo, podemos afirmar que os valores $c = 0$ ou $c = \pi$ ou $c = 2\pi$ são todos os valores de x no intervalo $[0, 2\pi]$ para os quais a função f assume este valor médio.

SEMANA 4

Exercício 4.24.

Defina $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{cosh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ e

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, tem-se:

- $\operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$
- $\operatorname{tgh}^2 x + \frac{1}{\operatorname{cosh}^2 x} = 1$
- $\operatorname{senh}(x+y) = (\operatorname{senh} x)(\operatorname{cosh} y) + (\operatorname{cosh} x)(\operatorname{senh} y)$
- $\operatorname{cosh}(x+y) = (\operatorname{cosh} x)(\operatorname{cosh} y) + (\operatorname{senh} x)(\operatorname{senh} y)$

(Aula 9 do caderno didático, exercícios propostos nº4: a-d)

Solução:

$$\begin{aligned} \text{a. } \operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \right) - \left(\frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} \right) \\ &= \left(\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{4} \right) = \frac{4}{4} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \operatorname{tgh}^2 x + \frac{1}{\cosh^2 x} &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 + \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} \right) + \left(\frac{4}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} \right) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} = 1 \end{aligned}$$

c. Observe que

$$\sinh(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2}. \quad (4.8)$$

Por outro lado, $(\sinh x)(\cosh y) + (\cosh x)(\sinh y) =$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \frac{e^x e^y + e^x e^{-y} - e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y} + e^x e^y - e^x e^{-y} + e^{-x} e^y - e^{-x} e^{-y}}{4} \\ &= \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y} + e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{4} = \frac{e^x e^y - e^{-x} e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} \quad (4.9) \end{aligned}$$

De 4.8 e 4.9 podemos concluir que

$$\sinh(x+y) = (\sinh x)(\cosh y) + (\cosh x)(\sinh y).$$

d. Analogamente ao exercício c, temos

$$\cosh(x+y) = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2}. \quad (4.10)$$

Por outro lado, $(\cosh x)(\cosh y) + (\sinh x)(\sinh y) =$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \\ &= \frac{e^x e^y + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y} + e^x e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} \\ &= \frac{e^x e^y + e^{-x} e^{-y} + e^x e^y + e^{-x} e^{-y}}{4} = \frac{e^x e^y + e^{-x} e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} + e^{-(x+y)}}{2} \quad (4.11) \end{aligned}$$

De 4.10 e 4.11 podemos concluir que

$$\cosh(x+y) = (\cosh x)(\cosh y) + (\sinh x)(\sinh y).$$

Exercício 4.25.

Calcule as seguintes integrais indefinidas:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx & \text{b. } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx & \text{c. } \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx \\ \text{d. } \int \sin^5 x \cos x dx & \text{e. } \int \frac{1}{1 + 4x^2} dx & \end{array}$$

(Aula 18 do caderno didático, exercício proposto nº2: a, b, d, e e nº4: a, respectivamente)

Solução:

$$\text{a. } \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

Faça a substituição $u = 1 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$.

$$\text{Logo, } \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |1 + \sin x| + C.$$

$$\text{b. } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Faça a substituição $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2 du = \frac{1}{\sqrt{x}} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int e^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int e^u 2 du = 2 \int e^u du \\ &= 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C. \end{aligned}$$

$$\text{c. } \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

Faça a substituição $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$.

$$\begin{aligned} \text{Logo, } \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx &= \int (\ln x)^2 \frac{1}{x} dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C \\ &= \frac{(\ln x)^3}{3} + C. \end{aligned}$$

$$\text{d. } \int \sin^5 x \cos x dx$$

Faça a substituição $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$.

$$\text{Logo, } \int \sin^5 x \cos x dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

$$e. \int \frac{1}{1+4x^2} dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx$$

Faça a substituição $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+(2x)^2} dx &= \int \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \arctg u + C \\ &= \frac{1}{2} \arctg(2x) + C. \end{aligned}$$

Exercício 4.26.

Calcule as seguintes integrais definidas:

$$a. \int_0^6 x \sqrt{36-x^2} dx$$

$$b. \int_0^4 \frac{x}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$c. \int_{\frac{4\sqrt{3}}{3}}^4 \frac{1}{x \sqrt{x^2-4}} dx$$

(Aula 18 do caderno didático, exercício proposto nº3: b, d e nº4: h, respectivamente)

Solução:

$$a. \int_0^6 x \sqrt{36-x^2} dx$$

Faça a substituição $u = 36 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{-2}$.

Precisamos também considerar os limites de integração. Como $u = 36 - x^2$, enquanto x varia de 0 até 6, u varia de $u = 36 - 0^2 = 36$ até $u = 36 - 6^2 = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^6 x \sqrt{36-x^2} dx &= \int_{36}^0 \sqrt{u} \frac{du}{-2} = \frac{1}{2} \int_0^{36} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^{36} \\ &= \frac{36^{\frac{3}{2}}}{3} = 72. \end{aligned}$$

$$b. \int_0^4 \frac{x}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

Faça a substituição $u = 9 + x^2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$. Precisamos também considerar os limites de integração. Como

$u = 9 + x^2$, enquanto x varia de 0 até 4, u varia de $u = 9 + 0^2 = 9$ até $u = 9 + 4^2 = 25$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{x}{(9+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int_9^{25} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int_9^{25} u^{-\frac{3}{2}} du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})} \right]_9^{25} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{u}} \Big|_9^{25} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } \int_{\frac{4\sqrt{3}}{3}}^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} dx &= \int_{\frac{4\sqrt{3}}{3}}^4 \frac{1}{x\sqrt{4\left(\frac{x^2}{4}-1\right)}} dx = \int_{\frac{4\sqrt{3}}{3}}^4 \frac{1}{2x\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}} dx \end{aligned}$$

Faça a substituição $u = \frac{x}{2} \Rightarrow du = \frac{dx}{2}$. Precisamos também considerar os limites de integração. Como $u = \frac{x}{2}$, enquanto x varia de $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ até 4, u varia de $u = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ até $u = 2$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{4\sqrt{3}}{3}}^4 \frac{1}{2x\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}} dx &= \frac{1}{2} \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^2 \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du = \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} u \Big|_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} 2 - \frac{1}{2} \operatorname{arcsec} \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

SEMANA 6

Exercício 4.27.

Usando a técnica de integração por partes, calcule as seguintes integrais:

$$\text{a. } \int t e^{-t} dt \quad \text{b. } \int x \operatorname{sen} 3x dx \quad \text{c. } \int x^2 \cos 3x dx$$

Solução:

$$\begin{aligned} \text{a. Para calcular } \int t e^{-t} dt, \text{ usaremos a fórmula de integração por} \\ \text{partes com } \begin{cases} u = t \\ dv = e^{-t} dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \int e^{-t} dt = -e^{-t}. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int t e^{-t} dt &= \int \underbrace{(t)}_u \underbrace{e^{-t} dt}_{dv} = \underbrace{t}_u \underbrace{(-e^{-t})}_v - \int \underbrace{-e^{-t}}_v \underbrace{dt}_{du} \\ &= -te^{-t} - e^{-t} + C.\end{aligned}$$

b. Para calcular $\int x \operatorname{sen} 3x dx$, usaremos a fórmula de integração

$$\text{por partes com } \begin{cases} u = x \\ dv = \operatorname{sen} 3x dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int \operatorname{sen} 3x dx = -\frac{1}{3} \int -3 \operatorname{sen} 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} 3x dx &= \int \underbrace{(x)}_u \underbrace{\operatorname{sen} 3x dx}_{dv} = \underbrace{x}_u \underbrace{\left(-\frac{1}{3} \cos 3x\right)}_v - \int \underbrace{-\frac{1}{3} \cos 3x}_v \underbrace{dx}_{du} \\ &= \frac{1}{3} \left(-x \cos 3x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \right) + C.\end{aligned}$$

c. Para calcular $\int x^2 \cos 3x dx$, usaremos a fórmula de integração

$$\text{por partes com } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos 3x dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = 2x dx \\ v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int 3 \cos 3x dx = \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos 3x dx &= \int \underbrace{(x^2)}_u \underbrace{\cos 3x dx}_{dv} = \underbrace{x^2}_u \underbrace{\left(\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x\right)}_v - \int \underbrace{\frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x}_v \underbrace{2x dx}_{du} \\ &= \frac{1}{3} x^2 \operatorname{sen} 3x - \frac{2}{3} \underbrace{\int x \operatorname{sen} 3x dx}_*.\end{aligned}$$

Porém observe que a integral dada em (*) foi calculada no exercício anterior e sabemos que

$$\int x \operatorname{sen} 3x dx = \frac{1}{3} \left(-x \cos 3x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x \right) + C.$$

Substituindo este último valor em (*), temos

$$\int x^2 \cos 3x dx = \frac{1}{3} x^2 \operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \operatorname{sen} 3x + C_1.$$

Exercício 4.28.

Usando a técnica de integração por partes, calcule as seguintes integrais definidas:

a. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsen x dx$

(Aula 19 do caderno didático, exercício proposto nº3: d)

b. $\int_0^1 x 5^x dx$ c. $\int_1^4 \ln \sqrt{x} dx$ d. $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx$

Solução:

a. $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsen x dx$

Para calcular $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsen x dx$, usaremos a fórmula de integração

por partes para integrais definidas $\begin{cases} u = \arcsen x \\ dv = dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = \int dx = x. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsen x dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{\arcsen x}_u \underbrace{dx}_{dv} = (\arcsen x)x \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsen \frac{1}{2} \right) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{6} \right) - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\pi}{12} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para resolver a última integral da direita, usaremos o método de substituição:

Faça a substituição $u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{-2}$. Precisamos também considerar os limites de integração. Enquanto x varia de 0 até $\frac{1}{2}$, u varia de $u = 1$ até $u = \frac{3}{4}$. Logo,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \int_{\frac{3}{4}}^1 u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} 2\sqrt{u} \Big|_{\frac{3}{4}}^1 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (4.13)$$

Substituindo 4.13 em 4.12, resulta

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsen x dx = \frac{\pi}{12} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1.$$

b. $\int_0^1 x 5^x dx$

Para calcular $\int_0^1 x 5^x dx$, usaremos a fórmula de integração por

partes para integrais definidas $\begin{cases} u = x \\ dv = 5^x dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x 5^x dx &= x \frac{5^x}{\ln 5} \Big|_0^1 - \frac{1}{\ln 5} \int_0^1 5^x dx = \frac{5}{\ln 5} - \frac{1}{\ln 5} \frac{5^x}{\ln 5} \Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{\ln 5} - \frac{5}{(\ln 5)^2} + \frac{1}{(\ln 5)^2} = \frac{5}{\ln 5} - \frac{4}{(\ln 5)^2}. \end{aligned}$$

c. $\int_1^4 \ln \sqrt{x} dx = \int_1^4 \underbrace{\ln \sqrt{x}}_u \underbrace{dx}_{dv}$

Para calcular $\int_1^4 \ln \sqrt{x} dx$, usaremos a fórmula de integração por

partes para integrais definidas. Faça $\begin{cases} u = \ln \sqrt{x} \\ dv = dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2x} dx \\ v = \int dx = x \end{cases}$$

$$\int_1^4 \underbrace{\ln \sqrt{x}}_u \underbrace{dx}_{dv} = \underbrace{x}_{v} \underbrace{\ln \sqrt{x}}_u \Big|_1^4 - \int_1^4 \underbrace{x}_{v} \underbrace{\frac{1}{2x}}_{du} dx = 4 \ln \sqrt{4} - 1 \underbrace{\ln \sqrt{1}}_0 - \frac{1}{2} x \Big|_1^4$$

$$= 4 \ln 2 - \frac{1}{2} 4 + \frac{1}{2} = 4 \ln 2 - \frac{3}{2}$$

d. $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx$

Para calcular $\int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx$, usaremos a fórmula de integração

por partes para integrais definidas. Faça $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \sqrt{x} dx \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \end{cases} \\
 &\int_1^4 \sqrt{x} \ln x \, dx = \int_1^4 \underbrace{\ln x}_u \underbrace{\sqrt{x} dx}_{dv} = \underbrace{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}}_v \underbrace{\ln x}_u \Big|_1^4 - \int_1^4 \underbrace{\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}}_v \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du} \\
 &= \frac{2(4)^{\frac{3}{2}}}{3} \ln 4 - \frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3} \underbrace{\ln 1}_0 - \frac{2}{3} \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx \\
 &= \frac{16}{3} \ln 4 - \frac{2}{3} \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} \right) \Big|_1^4 = \frac{16}{3} \ln 4 - \frac{4}{9} (8 - 1) \\
 &= \frac{16}{3} \ln 4 - \frac{28}{9} = \frac{32}{3} \ln 2 - \frac{28}{9}.
 \end{aligned}$$

Exercício 4.29.

Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a. $\int \cos x \ln(\sin x) \, dx$

b. $\int e^{-\theta} \cos 2\theta \, d\theta$

Solução:

a. $\int \cos x \ln(\sin x) \, dx$

Observe que, neste exercício, podemos usar mais de um método.

1º Método

Para calcular $\int \cos x \ln(\sin x) \, dx$, usaremos a fórmula de integração por partes para integrais indefinidas. Faça $\begin{cases} u = \ln(\sin x) \\ dv = \cos x \, dx \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ v = \sin x \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int \cos x \ln(\sin x) \, dx &= (\sin x) \ln(\sin x) - \int \sin x \frac{\cos x}{\sin x} dx \\
 &= (\sin x) \ln(\sin x) - \int \cos x \, dx = (\sin x) \ln(\sin x) - \sin x + C.
 \end{aligned}$$

2º Método

Faça a substituição $z = \sin x \Rightarrow dz = \cos x dx$

$$\int (\cos x) [\ln(\sin x)] dx = \int \underbrace{\ln z}_u \underbrace{dz}_{dv}.$$

Usando a integração por partes, obtemos que $\begin{cases} u = \ln z \\ dv = dz \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{z} dz \\ v = z \end{cases}$$

$$\int \underbrace{\ln z}_u \underbrace{dz}_{dv} = z \ln z - z + C$$

$$\int \cos x \ln(\sin x) dx = (\sin x) \ln(\sin x) - \sin x + C.$$

b. $\int e^{-\theta} \cos 2\theta d\theta$

Usando a fórmula de integração por partes $\begin{cases} u = e^{-\theta} \\ dv = \cos 2\theta d\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = -e^{-\theta} d\theta \\ v = \frac{1}{2} \int 2 \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int e^{-\theta} \cos 2\theta d\theta &= \int \underbrace{e^{-\theta}}_u \underbrace{\cos 2\theta d\theta}_{dv} = \underbrace{e^{-\theta}}_u \underbrace{\frac{1}{2} \sin 2\theta}_v - \int \underbrace{\frac{1}{2} \sin 2\theta}_v \underbrace{(-e^{-\theta} d\theta)}_{du} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\theta} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \int e^{-\theta} \sin 2\theta d\theta. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Calculamos a última integral à direita novamente por partes:

$$\begin{cases} u = e^{-\theta} \\ dv = \sin 2\theta d\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -e^{-\theta} d\theta \\ v = \frac{1}{2} \int 2 \sin 2\theta d\theta = -\frac{1}{2} \cos 2\theta \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \underbrace{e^{-\theta}}_u \underbrace{\sin 2\theta d\theta}_{dv} &= \underbrace{e^{-\theta}}_u \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \cos 2\theta\right)}_v - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \cos 2\theta\right)}_v \underbrace{(-e^{-\theta} d\theta)}_{du} \\ &= -\frac{1}{2} e^{-\theta} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \int e^{-\theta} \cos 2\theta d\theta. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Observe que, no segundo membro de 4.15, reapareceu a integral desconhecida $\int e^{-\theta} \cos 2\theta d\theta$. Substituindo 4.15 em 4.14,

obtemos

$$\int e^{-\theta} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2}e^{-\theta} \sin 2\theta - \frac{1}{4}e^{-\theta} \cos 2\theta - \frac{1}{4} \int e^{-\theta} \cos 2\theta d\theta$$

$$\frac{5}{4} \int e^{-\theta} \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2}e^{-\theta} \sin 2\theta - \frac{1}{4}e^{-\theta} \cos 2\theta + C_1$$

$$\int e^{-\theta} \cos 2\theta d\theta = \frac{2}{5}e^{-\theta} \sin 2\theta - \frac{1}{5}e^{-\theta} \cos 2\theta + C.$$

SEMANA 7

Exercício 4.30.

Calcule as seguintes integrais:

a. $\int \cos^5 x \sin x dx$

b. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} dx$

d. $\int \sin^2 2\theta \cos 2\theta d\theta$

e. $\int \sin^2 x \cos 2x dx$

f. $\int \cos^6 2x dx$

g. $\int \sin \frac{x}{2} \sin x dx$

h. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos(3x) dx$

i. $\int \cos 7x \cos 3x dx$

(Aula 20 do caderno didático, exercício proposto nº4: a, c, i, d, g, f e nº5: a, b, d, respectivamente)

Solução:

a. $\int \cos^5 x \sin x \, dx$

Neste caso, as potências de seno e cosseno são números ímpares, porém, basta fazer a substituição $u = \cos x$. Logo, $du = -\sin x \, dx$, então $-du = \sin x \, dx$ e temos

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x \sin x \, dx &= - \int \underbrace{\cos^5 x}_{u^5} \underbrace{(-\sin x) \, dx}_{du} = - \int u^5 \, du \\ &= -\frac{u^6}{6} + C = -\frac{\cos^6 x}{6} + C. \end{aligned}$$

b. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$

Como o expoente de $\cos x$ é 3, que é um número ímpar, vamos reescrever $\cos^3 x$ como $(\cos^2 x)(\cos x)$, usar um dos fatores para compor o $du = \cos x \, dx$ e fazer a substituição $u = \sin x$.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x \, dx = \int u^2 (1 - u^2) \, du \\ &= \int (u^2 - u^4) \, du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} \, dx$

Lembrando a identidade: $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ temos

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \frac{x}{2} \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos x}{2} \right) \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \int \cos x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x + C \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{x}{2} \, dx &= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (1) = \frac{\pi - 2}{4}. \end{aligned}$$

d. $\int \sin^2 2\theta \cos 2\theta \, d\theta$

Observe que os ângulos são iguais. Neste caso, uma substituição resolve o problema. Faça $u = \sin \theta$, então $du = (\cos \theta) d\theta$ logo $\frac{1}{2} du = \cos 2\theta \, d\theta$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 2\theta \cos 2\theta \, d\theta &= \frac{1}{2} \int u^2 \, du = \frac{1}{2} \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6} u^3 + C \\ &= \frac{1}{6} \sin^3 2\theta + C. \end{aligned}$$

e. $\int \sin^2 x \cos 2x \, dx$

1ª forma

Lembrando as identidades:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \text{e} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

temos que

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos 2x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx - \frac{1}{2} \int \cos^2 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int \cos 2x \, 2dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int \cos 4x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} x - \frac{1}{16} \int \cos 4x \, 4dx \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} x - \frac{1}{16} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

2ª forma

Observe que, neste caso, os ângulos das funções trigonométricas são diferentes. Lembre-se de que, pelas fórmulas do ângulo duplo, sabemos que

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Vamos utilizar a última expressão; raciocínio análogo será feito se usamos as outras fórmulas equivalentes:

$$\int \sin^2 x \cos 2x \, dx = \int \sin^2 x (1 - 2\sin^2 x) \, dx = \int \sin^2 x \, dx - 2 \int \sin^4 x \, dx. \quad (4.16)$$

Neste caso, as potências de seno são pares e não negativas. Por

outro lado, lembre-se de que, usando a identidade: $\boxed{\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$,

temos

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \, dx = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{2}{2} \cos 2x \right) \, dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \int \cos 2x \, 2dx. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Fazendo a substituição $u = 2x \Rightarrow du = 2dx$ na última integral,

obtemos

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C_1 = \operatorname{sen} 2x + C_1 \quad (4.18)$$

Substituindo 4.18 em 4.17, resulta

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C_1. \quad (4.19)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right) \, dx \\ &= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} \int \frac{4}{4} \cos 4x \, dx \\ &= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C_2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Substituindo 4.19 e 4.20 em 4.16, obtemos

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x - 2 \left(\frac{3}{8}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x \right) + C \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x - \frac{6}{8}x + \frac{2}{4} \operatorname{sen} 2x - \frac{2}{32} \operatorname{sen} 4x + C \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 4x + C \\ &= -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 4x + C. \end{aligned} \quad (4.21)$$

f. $\int \cos^6 2x \, dx$

Lembrando a identidade: $\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}$, temos

$$\begin{aligned} \int \cos^6 2x \, dx &= \int (\cos^2 2x)^3 \, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right)^3 \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + 3 \cos^2 4x + 3 \cos 4x + \cos^3 4x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int dx + \frac{3}{8} \int \cos^2 4x \, dx + \frac{3}{8} \int \frac{4}{4} \cos 4x \, dx + \frac{1}{8} \int \cos^3 4x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8}x + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 8x}{2} dx + \frac{3}{32} \int 4 \cos 4x dx + \frac{1}{8} \int \cos^2 4x \cos 4x dx \\
&= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{16} \int \frac{8}{8} \cos 8x dx + \frac{3}{32} \sin 4x + \frac{1}{8} \int \frac{1}{4} (1 - \underbrace{\sin^2 4x}_{u^2}) \underbrace{4 \cos 4x dx}_{du}
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \sin 4x \Rightarrow du = 4 \cos 4x dx$ na última integral, temos

$$\begin{aligned}
\int \cos^6 2x dx &= \frac{1}{8}x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{128} \int 8(\cos 8x) dx + \frac{3}{32} \sin 4x + \frac{1}{8} \int \frac{1}{4} (1 - u^2) du \\
&= \frac{2}{16}x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{128} \sin 8x + \frac{3}{32} \sin 4x + \frac{1}{32}u - \frac{1}{32} \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{5}{16}x + \frac{3}{128} \sin 8x + \frac{3}{32} \sin 4x + \frac{1}{32} \sin 4x - \frac{1}{96} \sin^3 4x + C \\
&= \frac{5}{16}x + \frac{3}{128} \sin 8x + \frac{1}{8} \sin 4x - \frac{1}{96} \sin^3 4x + C.
\end{aligned}$$

g. $\int \sin \frac{x}{2} \sin x dx$

Sabemos que $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$.

$$\begin{aligned}
\text{Logo, } \sin \frac{x}{2} \sin x &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{x}{2} - x \right) - \cos \left(\frac{x}{2} + x \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\cos \left(-\frac{x}{2} \right)}_{f \text{ par}} - \cos \left(\frac{3x}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{x}{2} \right) - \cos \left(\frac{3x}{2} \right) \right].
\end{aligned}$$

(Lembre-se de que a função cosseno é uma função par, isto é, $\cos(-x) = \cos x$ para todo número real)

$$\begin{aligned}
\int \sin \frac{x}{2} \sin x dx &= \frac{1}{2} \int \left[\cos \left(\frac{x}{2} \right) - \cos \left(\frac{3x}{2} \right) \right] dx \\
&= \int \cos \left(\frac{x}{2} \right) \frac{1}{2} dx - \frac{1}{3} \int \cos \left(\frac{3x}{2} \right) \frac{3}{2} dx \\
&= \sin \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{1}{3} \sin \left(\frac{3x}{2} \right) + C. \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Outra forma de resolver o exercício é lembrar que $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, logo

$$\begin{aligned}
\int \sin \frac{x}{2} \sin x dx &= \int \sin \frac{x}{2} 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx = 2 \int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx \\
&= 2 \int \frac{2}{2} \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $u = \sin \frac{x}{2}$ temos que $du = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} dx$

$$= 4 \int u^2 du = 4 \frac{u^3}{3} + C = \frac{4}{3} \sin^3 \frac{x}{2} + C. \quad (4.23)$$

Você pode provar que a diferença entre ambas primitivas achadas em 4.22 e 4.23 é uma constante, portanto pertencem à mesma família.

h. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos(3x) dx$

Sabemos que $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$.

Assim, $\sin(2x) \cos(3x) = \frac{1}{2} [\sin(2x + 3x) + \sin(2x - 3x)]$

$$= \frac{1}{2} [\sin(5x) + \underbrace{\sin(-x)}_{f \text{ ímpar}}] = \frac{1}{2} [\sin(5x) - \sin(x)].$$

(Lembre-se de que a função seno é uma função ímpar, isto é, $\sin(-x) = -\sin(x)$ para todo número real)

Logo, a integral indefinida resulta

$$\begin{aligned} \int \sin(2x) \cos(3x) dx &= \frac{1}{2} \int [\sin(5x) - \sin(x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin(5x) dx - \frac{1}{2} \int \sin(x) dx \\ &= -\frac{1}{10} \cos(5x) + \frac{1}{2} \cos(x) + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \cos(3x) dx &= -\frac{1}{10} \cos(5x) + \frac{1}{2} \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{10} \underbrace{\cos\left(5 \frac{\pi}{2}\right)}_0 + \frac{1}{2} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_0 + \frac{1}{10} \underbrace{\cos(0)}_1 - \frac{1}{2} \underbrace{\cos(0)}_1 \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{2} = \frac{1-5}{10} = -\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

i. $\int \cos 7x \cos 3x dx$

Sabemos que $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$, logo

$$\begin{aligned} \cos 7x \cos 3x &= \frac{1}{2} [\cos(7x - 3x) + \cos(7x + 3x)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(4x) + \cos(10x)]. \end{aligned}$$

Assim, $\int \cos 7x \cos 3x dx = \frac{1}{2} \int \cos(4x) dx + \frac{1}{2} \int \cos(10x) dx$.

Ou seja,

$$\begin{aligned}\int \cos 7x \cos 3x \, dx &= \frac{1}{8} \int \cos(4x) 4 \, dx + \frac{1}{20} \int \cos(10x) 10 \, dx \\ &= \frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{20} \sin(10x) + C.\end{aligned}$$

Exercício 4.31.

Calcule as seguintes integrais:

a. $\int \operatorname{tg}^2 2x \sec^4 2x \, dx$

b. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^3 x \operatorname{tg} x \, dx$

c. $\int \operatorname{cotg}^3 x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$

d. $\int \operatorname{cosec}^4 x \, dx$

(Aula 21 do caderno didático, exercício proposto nº4: a, c, g e m, respectivamente)

Solução:

$$\begin{aligned}\text{a. } \int \operatorname{tg}^2 2x \sec^4 2x \, dx &= \int \operatorname{tg}^2 2x \sec^2 2x \sec^2 2x \, dx \\ &= \int \frac{2}{2} \operatorname{tg}^2 2x \sec^2 2x \sec^2 2x \, dx.\end{aligned}$$

Como o expoente de $\sec 2x$ é 4, que é um número par, reescrevemos $\sec^4 2x$ como $(\sec^2 2x)(\sec^2 2x)$. Vamos fazer a substituição $u = \operatorname{tg} 2x$, logo $du = (\sec^2 2x) 2dx$. Além disso, usaremos a identidade trigonométrica $\sec^2 2x = 1 + \operatorname{tg}^2 2x$, para escrever a outra $\sec^2 2x$ em termos de $\operatorname{tg} 2x$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^2 2x \sec^4 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int \operatorname{tg}^2 2x \sec^2 2x \sec^2 2x \, 2dx \\ &= \frac{1}{2} \int \underbrace{\operatorname{tg}^2 2x}_{u^2} (1 + \underbrace{\operatorname{tg}^2 2x}_{u^2}) \underbrace{\sec^2 2x \, 2dx}_{du} = \frac{1}{2} \int u^2 (1 + u^2) du \\ &= \frac{1}{2} \int (u^2 + u^4) du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right) + C.\end{aligned}$$

$$\text{Finalmente, } \int \operatorname{tg}^2 2x \sec^4 2x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{6} + \frac{\operatorname{tg}^5 2x}{10} + C.$$

b. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^3 x \operatorname{tg} x \, dx$

Vamos calcular em primeiro lugar a integral indefinida $\int \sec^3 x \operatorname{tg} x \, dx$.

Como o expoente de $\operatorname{tg} x$ é o número ímpar 1, e levando em conta que $(\sec x)' = \sec x \operatorname{tg} x$, vamos reescrever $\sec^3 x$ como $(\sec^2 x)(\sec x)$. Usaremos um dos fatores para compor $du = \sec x \operatorname{tg} x dx$ e faremos a substituição $u = \sec x$.

$$\begin{aligned}\text{Assim, } \int \sec^3 x \operatorname{tg} x dx &= \int \underbrace{\sec^2 x}_{u^2} \underbrace{\sec x \operatorname{tg} x dx}_{du} = \int u^2 du \\ &= \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sec^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$

Logo, pela segunda forma do Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^3 x \operatorname{tg} x dx &= \left. \frac{1}{3} \sec^3 x \right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} \sec^3 \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \sec^3 \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{3} (2)^3 - \frac{1}{3} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^3 = \frac{1}{3} \left(8 - \frac{8\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{8}{3} - \frac{8\sqrt{3}}{27}.\end{aligned}$$

c. $\int \cotg^3 x \operatorname{cosec}^2 x dx$

Neste caso, basta fazer a substituição $u = \cotg x$, logo $du = -\operatorname{cosec}^2 x dx$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int \cotg^3 x \operatorname{cosec}^2 x dx &= - \int \underbrace{\cotg^3 x}_{u^3} \underbrace{(-\operatorname{cosec}^2 x) dx}_{du} \\ &= - \int u^3 du = -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{\cotg^4 x}{4} + C.\end{aligned}$$

d. $\int \operatorname{cosec}^4 x dx$

Note-se que $\int \operatorname{cosec}^4 x dx = - \int (\operatorname{cosec}^2 x)(-\operatorname{cosec}^2 x) dx$

$$= - \int (1 + \underbrace{\cotg^2 x}_{u^2}) \underbrace{(-\operatorname{cosec}^2 x) dx}_{du}.$$

Observe que $u = \cotg x$, logo $du = -\operatorname{cosec}^2 x dx$. Além disso, estamos usando a identidade trigonométrica $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \cotg^2 x$, para escrever $\operatorname{cosec}^2 x$ em termos de $\cotg x$.

$$\begin{aligned}\text{Assim, } \int \operatorname{cosec}^4 x dx &= - \int (1 + u^2) du = -u - \frac{u^3}{3} + C \\ &= -\cotg x - \frac{\cotg^3 x}{3} + C.\end{aligned}$$